Library

Bound at
A.M.N.H.
1919

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

5.06 (45.1) T

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMO

1904-905

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1905

34-131784-June 26

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR Principi.

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 20 NOVEMBRE 1904.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

D'Ovidio (Enrico), Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, ecc., Uffiz. ✻, Comm. ⊞. — *Torino, Corso Oporto, 30.*
Eletto alla carica il 21 febbraio 1904 — 10 marzo 1904.

VICE-PRESIDENTE

Boselli (Paolo), Presidente della Giunta Direttiva del R. Museo Industriale Italiano, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Consigliere degli Ordini dei Ss. Maurizio e Lazzaro e della Corona d'Italia, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✻ e ⊞, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Via Plana, 11.*
Eletto alla carica il 21 febbraio 1904 — 10 marzo 1904.

Tesoriere

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Uff. ☒. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

Rieletto alla carica il 17 aprile 1904 — 12 maggio 1904.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ☒, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

Rieletto alla carica il 29 maggio 1904 — 16 giugno 1904.

Segretario

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, ☒. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica il 13 marzo 1904 — 7 aprile 1904.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), *predetto.*
29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*
29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✻, Comm. ☒. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*
5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Mosso (Angelo), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di Medicina di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, L. L. D. dell'Università di Worcester, Socio onorario della R. Accademia medica Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Membro onorario della Società imperiale dei medici di Vienna, della Società Reale delle Scienze mediche di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straordinario della R. Accademia di Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc. ✻, Comm. ☒. — *Torino, Via Madama Cristina, 34.*
11 Dicembre 1881 - 25 dicembre 1881. — Pensionato 17 agosto 1894.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ☒. — *Torino, Via Accademia Albertina, 21.*
15 Giugno 1884 - 6 luglio 1884. — Pensionato 5 settembre 1895.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*
10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro ono-

rario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio, Corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ☒. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*

10 Gennaio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, ☒. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), *predetto.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Comm. ☒. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b. Geschichte d. Medizin. und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, ecc., Uff. ☒, ✂. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, ☒, ✻. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale, ☒. — *Torino, Via Bidone, 36.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia della R. Università di Torino, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina e Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della Società Veneto-Trentina, ecc., ☒. — *Torino, Orto Botanico della R. Università.*
10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901.

Morera (Giacinto), Ingegnere, Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Meccanica razionale, ed incaricato di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Professore onorario della R. Università di Genova, ☒. — *Torino, Via della Rocca, 22.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Museo Industriale Italiano in Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accad. dei Lincei, Comm. ☒. — *Torino, Via Amedeo Avogadro, 9.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Corrispondente dell'Istituto di Francia, dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Associato dell'Accademia Reale delle Scienze del Belgio, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✻, Gr. Uffiz. ☒, ☒. — *Roma, Istituto chimico, Via Panisperna, 89 B.*
3 Luglio 1864 - 11 luglio 1864.

Schiaparelli (Giovanni), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di

Berlino, di Pietroburgo, di Stoccolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, delle Società filosofiche di Filadelfia e di Manchester, e di altre Società scientifiche nazionali e straniere, Gr. Cord. ⚭, Comm. ✻; ⚙. — *Milano, Via Fate Bene Fratelli, 7.*
16 Gennaio 1870 - 30 gennaio 1870.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Colonnello d'Artiglieria nella Riserva, Professore onorario della R. Università di Torino, Professore ordinario di Meccanica razionale ed Incaricato della Meccanica superiore nella R. Università di Napoli, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, e dell'Accademia Pontaniana, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Uff. ✻, Comm. ⚭.
11 Giugno 1876 - 11 luglio 1876. — Pensionato 3 giugno 1884.

Volterra (Vito), Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania e Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Professore di Fisica matematica e incaricato di Meccanica celeste nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, ⚭. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Professore di Astronomia nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✻, Gr. Uffiz. ⚭. — *Napoli, Regio Osservatorio di Capodimonte.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✻, ⚭.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente della R. Società delle Scienze di Gottinga, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro straniero della *London mathematical Society*, Dottore onorario dell'Università di Christiania, Uff. ❋, Cav. ⚙, ⚙.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna. Cav. ⚙, ⚙, Comm. ❋.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

ACCADEMICI STRANIERI

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Professore nell'Università di Glasgow. — 31 Dicembre 1882 - 1° febbraio 1883.

Koelliker (Alberto von), Professore nell'Università di Würzburg. — 11 Giugno 1893 - 25 giugno 1893.

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Berthelot (Marcellino), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto, Parigi. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Poincaré (Giulio Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Moissan (Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Noether (Massimiliano), Professore nell' Università di Erlangen. — 3 Dicembre 1893.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Cesàro (Ernesto), Professore nella R. Università di Napoli. — 17 Aprile 1898.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Mayer (Adolfo), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare.

Tacchini (Pietro), già Direttore dell'Osserv. del Collegio Romano (Modena). — 14 Dicembre 1884.

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di Dresda. — 3 Dicembre 1893.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Lorenzoni (Giuseppe), Professore nella R. Università di Padova. — 3 Febbraio 1895.

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Favero (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in Roma. — 10 Gennaio 1897.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in Charlottenburg. — 2 Gennaio 1881.

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di Cambridge. — 12 Gennaio 1896.

Boltzmann (Luigi), Professore nell'Università di Vienna. — 12 Gennaio 1896.

Mascart (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 10 Gennaio 1897.

Pacinotti (Antonio), Professore nella R. Università di Pisa. — 17 Aprile 1898.

Langley (Samuel Pierpont), Segretario della *Smithsonian Institution* di Washington. — 11 Febbraio 1900.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Professore di Chimica applicata nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Baeyer (Adolfo von), Professore nell'Università di Monaco (Baviera). — 25 Gennaio 1885.

Thomsen (Giuseppe), Professore nell'Università di Copenhagen. — 25 Gennaio 1885.

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.

Mendelejeff (Demetrio), Professore nell'Università di Pietroburgo. — 3 Dicembre 1893.

Hoff (Giacomo Enrico van't), Professore nell'Università di Berlino. — 27 Maggio 1894.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — 24 Gennaio 1897.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Piccini (Augusto), Professore nel R. Istituto di studi pratici e di perfezionamento in Firenze. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di Lipsia. — 16 Gennaio 1881.
Capellini (Giovanni), Professore nella R. Univ. di Bologna. — 12 Marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna.—8 Febbraio 1885.
Klein (Carlo), Professore nell'Università di Berlino. — 15 Marzo 1892.
Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica (Londra). — 3 Dicembre 1893.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco.—13 Febbraio 1898.
Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga.—28 Gennaio 1900.
Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore di Agricoltura in Milano. — 16 Gennaio 1881.
Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.
Hooker (Giuseppe **Dalton**), Direttore del Giardino Reale di Kew (Londra). — 8 Febbraio 1885.
Delpino (Federico), Professore nella R. Univ. di Napoli.— 22 Febbraio 1885.
Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.
Strasburger (Edoardo), Professore nell'Univ. di Bonn. — 3 Dicembre 1893.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — 13 Febbraio 1898.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — 13 Febbraio 1898.
Wiesner (Giulio), Professore nella I. R. Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — 14 Giugno 1903.
Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.
Fatio (Vittore), Dottore (Ginevra). — 25 Gennaio 1885.
Locard (Arnould), dell'Accademia delle Scienze di Lione. — 23 Giugno 1889.
Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.
Foster (Michele), Professore nell'Università di Cambridge.—1° Dicembre 1889.
Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Univ. di Berlino. — 1° Dicembre 1889.
Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.
Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.
Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School „ di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.
Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — 28 Gennaio 1900.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Archeologia nella R. Università di Torino, Professore di Storia dell'arte militare nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio corrispondente straniero onorario della Società Nazionale degli Antiquarii della Francia, Socio straniero della Società francese di archeologia, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Repubblica di S. Marino, ✻, ⊞. — *Torino, Via S. Quintino, 19.*

Rieletto alla carica il 20 marzo 1904 - 21 aprile 1904.

Segretario.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino; Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente della R. Deputazione veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia di Verona, dell'Ateneo veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✻, Comm. ⊞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

Rieletto alla carica il 21 febbraio 1904 - 10 marzo 1904.

ACCADEMICI RESIDENTI

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ⊞. — *Torino, Via Gioberti, 30.*

10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ❋ e ⊞, Cav. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di Torino, ❋, ⊞. — *Torino, Via Madama Cristina, 9.*

18 Maggio 1879 - 5 giugno 1879. — Pensionato 25 ottobre 1889.

Ferrero (Ermanno), *predetto.*

18 Maggio 1879 - 5 giugno 1879. — Pensionato 27 gennaio 1890.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uff. ❋, Comm. ⊞. — *Torino, Piazza Statuto, 15.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, ecc., Uffiz. ❋ e ⊞. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), *predetto.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), e del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Comm. ⊞. — *Torino, Via Sacchi, 4.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Brusa (Emilio), Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, Membro della Commissione per la Statistica giudiziaria e della Commissione per la riforma del Codice di procedura penale, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), ed effettivo dell'Istituto di Diritto internazionale, Socio onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e di altre, Comm. ⊞ e dell'Ordine di S. Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica Francese, Uff. ❋. — *Torino, Corso Vinzaglio, 22.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 18 aprile 1901.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Gr. Uff. ❋, Comm. ⊞. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Bibliotecario di S. M. il Re d'Italia, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Accademico corrispondente della Crusca, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Cord. ⊞, Gr. Uffiz. ❋ e Cav. e Cons. ⊞, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc. — *Torino, Via della Zecca, 7.*

4 Giugno 1857 - 12 giugno 1857.

Renier (Rodolfo), *predetto.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore nel Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ❋, ⊞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Chironi (Dott. Giampietro), Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Rettore della R. Università di Torino, Comm. ⊞. — *Torino, Via Bonafous, 7.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda e della Società Siciliana per la Storia patria. — *Torino, Via Arcivescovado, 9.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore della Storia del diritto italiano. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore emerito, Primo Presidente della Corte di Cassazione a riposo, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Consigliere dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro e della Corona d'Italia, Gran Croce ✠, e Gr. Croce ⚭, Cav. ⚘, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia. — *Firenze, Via Lamarmora, 12 bis.*
29 Giugno 1873 - 19 luglio 1873.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Presidente dell'Istituto Storico di Roma, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio Straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio Straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Univers. di Pisa, Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ⚭, Cav. ⚘, Cav. del Merito di Prussia, ecc.
16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Uff. ✠, Comm. ⚭, Cav. ⚘. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e di quella di Torino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions

et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ☉, Gr. Uff. ✻, Comm. ⚭. — *Milano, Via Conservatorio, 28.*
20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Ascoli (Graziadio), Senatore del Regno, Insignito della cittadinanza milanese, Socio nazionale della R. Accad. dei Lincei, della Società Reale di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro straniero dell'Istituto di Francia e della Società Reale di Scienze e Lettere in Gotemburgo, Accademico della Crusca, Membro d'onore dell'Accademia delle Scienze di Vienna, Membro corrispondente delle Accademie delle Scienze di Belgrado, Berlino, Budapest, Copenaga, Pietroburgo, della Società orientale americana, degli Atenei di Venezia e Brescia, dell'Accademia di Udine, dell'I. R. Società Agraria di Gorizia, Socio onorario delle Accademie delle Scienze d'Irlanda e di Rumania, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Minerva di Trieste, della Società asiatica italiana, della R. Accademia di Belle Arti e del Circolo Filologico di Milano, della Lega nazionale per l'unità di cultura tra i Rumeni e dell'Associazione Americana per le lingue moderne; Dottore in filosofia per diploma d'onore dell'Università di Wirzburgo, Professore emerito di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano; Cav. dell'Ord. Civile di Savoia, Gr. Cord. ⚭, Comm. della Legion d'Onore, ecc.
20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Gandino (Giovanni Battista), Dottore in lettere, Professore ordinario di letteratura latina nella R. Università di Bologna, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia della Crusca, Dottore aggregato della Facoltà di Filosofia e Lettere della R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Comm. ✻, ⚭.
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Nigra (Conte Costantino), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Socio della R. Accademia dei Lincei, Membro onorario del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze e Lettere, Socio della R. Accademia d'Irlanda, ed onorario dell'Imperiale Accademia di Scienze e Lettere di Vienna, Dottore delle Università di Edimburgo e di Cracovia, ecc., Membro del Tribunale arbitrale internazionale dell'Aja, Ambasciatore di S. M. il Re d' Italia a Vienna, C. O. S. SS. N., Gr. Cr. ✻, ⚭. — *Roma, Trinità dei Monti, 18.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia

dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc. Comm. ⊞, Comm. ✻. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia della Crusca, della R. Accademia di Padova, dell'Accademia R. Lucchese e della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, Uff. ✻, ⊞. — *Firenze, Via Cavour, 84.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino. — 3 Maggio 1891 - 26 maggio 1891.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Bonatelli (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — 15 Febbraio 1882.
Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze. — 15 Marzo 1896.
Cantoni (Carlo), Professore nella R. Università di Pavia. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno (Vicenza). — 5 Aprile 1881.
Rodriguez de Berlanga (Manuel) (Malaga). — 17 Giugno 1883.
Schupfer (Francesco), Professore nella R. Univ. di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893.
Bonfante (Pietro), Professore nella R. Università di Pavia.

Sezione di Scienze storiche.

Adriani (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria (Cherasco). — 15 Dicembre 1853.
Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Duchesne (Luigi), Dirett. della Scuola Francese in Roma. — 28 Aprile 1895.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Modena. — 15 Marzo 1896.
Gloria (Andrea), Professore nella R. Università di Padova.

Sezione di Archeologia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.
Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.
Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia (Parigi). — 16 Marzo 1890.

Nadaillac (Marchese I. F. Alberto de), Parigi. — 16 Marzo 1890.
Brizio (Eduardo), Professore nell'Università di Bologna. — 26 Febbraio 1893.
Barnabei (Felice), Direttore del Museo Nazionale Romano (Roma). — 28 Aprile 1895.
Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.

Sezione di Geografia ed Etnografia.

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di Roma. — 17 Giugno 1883.
Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.
Porena (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Sourindro Mohun Tagore (Calcutta). — 18 Gennaio 1880.
Kerbaker (Michele), Prof. nella R. Università di Napoli. — 17 Giugno 1883.
Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.
Oppert (Giulio), Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 3 Marzo 1889.
Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di Roma. — 3 Marzo 1889.
Amelineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.
Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di Bonn. — 28 Aprile 1895.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.
Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze.
D'Ovidio (Francesco), Professore nella R. Università di Napoli.
Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona.
Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pisa.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 22 Novembre 1903 al 20 Novembre 1904.

ELEZIONI

SOCI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico). Con deliberazione della Classe presa nell'adunanza del 29 novembre 1903, passa dalla categoria dei Socii nazionali non residenti in quella dei Socii nazionali residenti seguendo nella anzianità il Socio Michele Fileti.

Rossi (Francesco), Eletto delegato della Classe di scienze morali, storiche e filologiche presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia, nell'adunanza del 29 dicembre 1903.

D'Ovidio (Enrico), Eletto alla carica triennale di Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi Unite del 21 febbraio 1904 e approvata l'elezione con R. Decreto del 10 marzo 1904.

Boselli (Paolo), Eletto alla carica triennale di Vice-Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi Unite del 21 febbraio 1904, e approvata l'elezione con R. Decreto del 10 marzo 1904.

Renier (Rodolfo), Eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza della Classe stessa del 21 febbraio 1904 e approvata l'elezione con R. Decreto 10 marzo 1904.

Naccari (Andrea), Eletto delegato della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali presso il Consiglio di Amministrazione, nell'adunanza del 28 gennaio 1904.

Fileti (Michele), Id. Id.

Camerano (Lorenzo), Eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 13 marzo 1904 e approvata l'elezione con R. Decreto del 7 aprile 1904.

Ferrero (Ermanno), Eletto alla carica triennale di Direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 20 marzo 1904 e approvata l'elezione con R. Decreto 27 aprile 1904.

Carle (Giuseppe), Eletto delegato della Classe di scienze morali, storiche e filologiche presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia nell'adunanza del 20 marzo 1904.

Jadanza (Nicodemo), Eletto alla carica triennale di Tesoriere nell'adunanza plenaria del 17 aprile 1904 e approvata l' elezione con R. Decreto 12 maggio 1904.

D'Ovidio (Enrico), L'Accademia in adunanza plenaria del 17 aprile 1904, lo riconferma per un nuovo triennio a rappresentante l'Accademia nel Consiglio amministrativo del Consorzio Universitario.

Salvadori (Tommaso), Eletto alla carica triennale di Direttore della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 29 maggio 1904 e approvata l'elezione con R. Decreto 16 giugno 1904.

MORTI

11 Febbraio 1904.

Berruti (Giacinto), Socio residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

7 Marzo 1904.

Fouqué (Ferdinando Andrea), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

16 Marzo 1904.

Gemmellaro (Gaetano Giorgio), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Id. Id.).

1° Aprile 1904.

Böhtlingk (Otto von), Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

6 Maggio 1904.

Williamson (Alessandro Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

23 Luglio 1904.

Philippi (Rodolfo Armando), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

20 Agosto 1904.

Villari (Emilio), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale).

13 Novembre 1904.

Wallon (Enrico Alessandro), Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

21 Novembre 1904.

Palma di Cesnola (Conte Luigi), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia).

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1904.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio; quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen** University. Studies: No. 8, 9. The House of Gordon. Records of Elgin, 1903; 2 vol. 4°.
* **Acireale**. R. Accademia dei Zelanti.
A Giuseppe Sciuti nel suo 70° compleanno. 26 febbraio 1904; 8 pp. f°.
— Rendiconti e Memorie. Memorie della Classe di scienze, serie 3ª, vol. II, 1902-903; 8°.
* **Adelaide**. R. Society of South Australia. Transactions, vol. XXVII, p. II (1903); 8°.
* **Alger**. École de Lettres; Bulletin de correspondance africaine. T. XXVIII, Paris, 1904; 8°.
America. The Astronomical and Astrophysical Society of. Second (New York, 1900) Third (Washington, 1901) Fourth Meeting (Washington, 1902). 3 fasc. 8°.
* **Amsterdam**. Wiskundig Genootschap. Nieuw Archief voor Wiskunde; Tweede Reeks, Deel VI, Tweede Stuk, 1904; 8°. — Revue semestrielle de publications mathématiques. T. XI, 2me part. Octob. 1902-Avril 1903. — Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, IX Deel, 1r Stuk, 1903. — Nieuw Opgaven, Deel IX, No. 88-128; 8°.
* **Angers**. Société d'Études scientifiques; Bulletin. N. Sér. XXXII, an. 1902. 1903; 8°.
* **Austin**. Texas Academy of Sciences. Transactions, vol. V, 1903; 8°.
— University of Texas. Bulletin. Scientific Ser. No. 1, 2, 1902; 8°.
* **Baltimore**. Johns Hopkins Hospital. Bulletin, No. 153 (1903); 154-165 (1904); 4°. — Reports, vol. XI, Nos. 1-9 (1903); 8°.
** — Johns Hopkins University. American Chemical Journal, vol. 29, Nos. 3-6; 30, 31, Nos. 1-3, 1903-904; 8°. — American Journal of Math., vol. XXV, Nos. 2-5, 1903; 4°. — American Journal of Phil., vol. XXIV, Nos. 93-95, 1903; 8°. — Historical and Political Science, Ser. XXI, Nos. 1-12, 1903; 8°. — Circulars, vol. XXIII, No. 165; 8°.
— Peabody Institute. Thirty-seventh Annual Report. June 1, 1904. Baltimore; 8°.

* **Basel**. Naturforschenden Gesellschaft. Bd. XV, Heft 2, 1904; 8°.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. An. 1677, 1904; 8°. — Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. An. 1647-1648 (1903). 'S-Gravenhage Departement van Koloniën; 8°. — De Java-Oorlog van 1825-30 door P. J. F. Louv. Deel III (1904); 8°. — Notulen. Deel XL (1902), Afl. 2; XLI (1903), 2, 4; XLII (1904), 1-2; 8°. — Tijdschrift. Deel XLV (1902), Afl. 5; XLVI (1903), 1, 6; XLVII (1904), 1-5. — De Tjandi Mĕndoet voor de restauratie door B. Kersjes en C. Den Hamer. Batavia, 1903; 4°. — Verhandelingen. Deel LIII, LIV, 3ª Stuk; 1904. — Catalogus der munten en amuletten van China, Japan, Corea en Annam. Batavia, 1904: 8°.

— R. Magnetical and Meteorological Observatory. Observations, vol. XXV, 1902. 1904; 4°.

* — K. Magnetisch en Meteorologisch Observatorium. Regenwaarnemingen in Nederlandisch-Indië. Vier en Twintigsh Jaargang 1902. 1903; 8°.

* — K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Natuurkundig Tijdschrift. Deel LXIII. Amsterdam, 1904; 8°.

Bergamo. Istituzione Morelli. Statuto e Regolamento. 1902; 8°.

* **Bergen**. Bergens Museum. An account of the Crustacea of Norway... by G. O. Sars, Vol. V, Copepoda Harpacticoida. Part I, VI, 1904; 8°. — Bergens Museums Aarbog for 1903, 3; 1904, 1, 2. — Aarsberetning for 1903.

Berkeley. University of California. Geology, Bulletin of Department Geology, Vol. 3, Nos. 13-15, 1903-1904; 8°. — Pathology, Vol. I, No. 1, 1903; 8°. — Physiology, Vol. I, Nos. 3-10, 12, 1903-1904; 8°. — Zoology, Vol. I, Nos. 3-5, 1903-1904; 8°. — Lick Observatory, Bulletin, N. 41, 1903; 4°. — University Chronicle and Official record, Vol. IV, Nos. 2-3, 1903; 8°. — Issend Quarterly. N. S., Vol. V, N. 2, 1903; 8°. — College of Agriculture. Agricultural experiment Station, Bulletin, Nos. 149-154. Sacramento, 1903; 8°. — Report of Work of the Agricultural experiment Station. Sacramento, 1903; 8°. — Sharwood (W. J.). A Study of the Double Cyanides of Zink with Potassium and with Sodium. Dissertation. Eastone Pa., 1903; 8°.

* **Berlin**. K. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Abhandlungen, 1903; 4°, — Acta Borussica; Das Preussische Münzwesen im 18. Jahrhundert: Beschreibender Theil, zweites Heft. Die Münzen aus der Zeit Königs Friedrich des Grossen, 4°; Münzgeschichtlicher Teil, erster Bd., Die Münzwerwaltung der Könige Friedrich I. und Friedrich Wilhelm I. 1701-1740. Berlin, 1904; 8°. — Sitzungsberichte, N. XLI (22 Oct.)-LIII (17 Dicember 1903); I (7 Januar). XL (28 Juli), 1904; 8°.

** — K. Preussischen Geologischen Landesanstalt und Bergakademie. Abhandlungen, N. F. Heft 18 test. et Atl.; 38; 1903. — Potonié (H.), Abbildungen u. Beschreibungen fossiler Pflanzen-Reste palaeozoischen u. mesozoischen Formationen. Liefg. 1 (1903).

** **Berlin**. Historischen Gesellschaft. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft, XXV. Jahrg. 1902. 1904; 8°.

— Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Die Tätigkeit... im Jahre 1903; 8°.

Beyrouth (Syrie). Université St. Joseph. Revue Catholique bimensuelle (in lingua araba). N. 1-13, 16-22 (1904); 8°. — Prospectus et programme sommaires de la Faculté orientale. 1904; 8°.

* **Bordeaux**. Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux et des Universités du Midi. Bulletin hispanique, T. VI, 1-4, 1904. — Bulletin italien, T. IV, 1-4, 1904. — Revue des études anciennes, T. IV, 1-4, 1904.

* — Société des sciences physiques et naturelles. Mémoires, T. III. — Procés-verbaux des séances. An. 1902-1903. — Observations-pluviométriques et termométriques faites dans le département de la Géronde de Juin 1902 à Mai 1903. 1903; 8°.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Memoirs. Vol. III, N. 1 (1904); 4°. — Proceedings. Vol. XXXIX, N. 1-21 (1903-1904); 8°.

— American Philol. Association. Transactions and Proceedings, vol. XXXIV, 1903; 8°.

* **Boulder**. University of Colorado. Studies. Vol. II, N. 1, 2. 1904; 8°.

* **Brescia**. Ateneo: Commentari per l'anno 1903. 8°.

* **Brooklyn**, N. Y. Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Col Spring harbor Monographs. I, II (1903); 8°.

* **Bruxelles**. Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Annuaire. 1904; 8°. — Classe des sciences, Bulletin 1903, Nos. 6-12; 8°. — Classe des sciences, des lettres et des beaux-arts. Mémoires. T. IV, fasc. 6. — Mémoires Couronnés et autres Mémoires. Collect. in-8°; T. LXIII, fasc. 5-8 (1903); LXIV, LXV, 1, 2; LXVI. — Mémoires Couronnés et Mémoires des Savants étrangers. Vol. LXI (1902-1903); LXII, fasc. 3-7 (1903); 4°.

* — Société d'Archéologie. Annales, T. XVII (1903), livr. 3-4; XVIII (1904), livr. 1-2. — Annuaire, 1904, T. 15.

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXII fasc. 5°, 1903, XXIII (1904; 1-3; 8°.

* — Société Entomologique du Belgique. Annales, T. XLVII, 1903. — Mémoires, T. X, XI, 1903; 8°.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bulletin, 1903, T. XVII, fasc. 3-6; 8°.

* — Musée R. d'histoire naturelle du Belgique. Mémoires, T. I et II; 4°.

* **Bucuresci**. Ministerul Agriculturei, Industriei, Comerciului și Domeniilor. Analele Institutului Meteorologic al României. T. XVI, 1900; 4°. — Buletinul Lunar. Anul XII (1903); 4°.

* — Academiei Române. Analele, Memoriile Secțiunii scientifice, Ser. II, T. XXVI, 1903-904; Memoriile Secțiunii Istorice, Ser. II, T. XXVI. 1903-904; Partea administrativă și desbaterile, Ser. II, T. XXV, XXVI, 1902-1904; 4°. — Bibliografia Românéscă veche 1508-1830. T. I, 1508-1716, 1903; 4°. — Documente privitóre la Istoria Românilor. Vol. XII (1903); 4°. — Discursurĭ de recepțiune; Despre introducerea Limbii Românești in Biserica Românilor, de J. Bianu. Răspuns de D. A. Sturdza.

— Insectele in limba, credintele si obiceiurile Românilor. Studiu folkloristic de Sim. Fl. Marian. Bucureşti, 1903; 8°. — Legendele Maicii Domnului. Studiu folkloristic. Bucureşti, 1904; 8°.

* **Bucarest**. Société des Sciences. Bulletin, An. XII (1903), N. 5-6; XIII (1904), 1-4; 8°.

* **Budapest**. K. Ungarische geologischen Anstalt. Catalog der Bibliothek und Allgemeinen Kartensammlung, 4 Nachtrag. 1892-1896, 1897; 8°. — Jahresbericht 1901, 1903; 8°. — Földtanii Közlöny, XXXIII, 10-12 (1903); XXXIV, 1-10 (1904). — Erläuterungen zur agrogeologischen Specialkarte der Länder der Ungar. Krone. Sectionsblatt Zone 14/col. XIX, 15/XX, 16/XX 1 : 75.000, 1903-1904. — Littérature générale et paléontologique sur l'étage Pontique d'Hongrie par Gyula Halavàts. Budapest, 1904; 8°.

Buenos Aires. Ministerio de Agricultura. Clima de la República Argentina compilado de las observaciones effectuadas hasta el año 1900 por W. G. Davis. 1902; 4°.

— Dirección General de Estadística de la Provincia de Buenos Aires. Boletín Mensual. A. IV, N. 37-40 (1903); V, 42, 45-48 (1904); 4°.

* — Sociedad Científica Argentina. Anales, T. LVI, Entr. 4-6; LVII, 1-3, 5-7; LVIII, 1-3.

— Statistique municipale de la Ville de Buenos Ayres. Bulletin mensuel, XVII an. (1903), décembre; XVIII (1904), 1-8. — Annuaire statistique, XIIIe an. 1903, 1904; 8°.

* **Calcutta**. Asiatic Society of Bengal. Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works. N. S., N. 1049-1098 (1903-1904); 8°. — Catalogue of Printed Books and Manuscripts in Sanskrit, fasc. IV, 1904; 4°. — Journal: History-Antiquities ecc. Part I, Index 1899, 1901, 1902; 8°. — History-Literature ecc. Vol. LXXII, Part I, N. 2, 1903; LXXIII, 1, 3, 1904; 8°. — Natural history, Part II, N. 3, 4, Index 1903; 8°. — Natural history, vol. LXXIII, Part II, N. 1-2, 1904. — Anthropology and Cognate subjects, Part III, 2 (1903). Index 1902, vol. LXXIII, Part III, 1-2, 1904; 8°. — Proceedings, N. VI-XI, 1903; N. 1-V, 1904; 8°.

— Board of Scientific advice for India. Annual Report for the year 1902-1903; 1904; 4°.

* — Geological Survey of India. General Report ...for the year 1902-1903; 8°. — Index to volumes XXI-XXX of the Records, 1903; Records, vol. XXXI, (1904); 8°. — Memoirs, Vol. XXXIII, part 3; XXXIV, 3; XXXV, 2, 3; XXXVI, 1, 1902-1904; 8°. — Memoirs, Palaeontologica Indica, Ser. IX, Vol. III, p. 2^a, The Lamellibranchiata; No. 1, genus Trigonia, 1903; Ser. XV, Himalayan Fossils, Vol. I, p. 5; Vol. IV, 1903.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Proceedings, Vol. XII, part 5, 6, 1904; 8°. — Transactions, Vol. XIX, part 2^a, 3^a. — Ritratto del Socio G. G. Stokes in fototipia.

* **Cambridge** U. S. A. Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Annual Report of the Keeper... to the President and Fellows of Harvard College for 1902-1903; 1903-1904; 8°. — Bulletin, Vol. XXXIX, 9; XLI, 2;

XLIII, 1-3; XLIV (Geological Ser., Vol. VII), 1904; XLV, 1, 2; XLVI, 1, 2; XLVII (Geological Ser., Vol. VI, N. 5). — Memoirs, Vol. XXIX.

* **Cape Town.** South African Philosophical Society. Transactions, Vol. I-IV, V, part 1; VI-XII, XIII, 1; XIV, XV, 1, 2, 1879-1904; 8°.

* **Catania.** Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti. An. LXXX (1903), Ser. 4ª, Vol. XVI; 4°. — Bollettino delle sedute 1903, fasc. 79-82; 8°.

— Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, Vol. XXXII, disp. 12 (1903); 1-10; 1904.

* **Chambéry.** Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoie. Mémoires, 4ᵉ Sér., T. X, 1903; 8°. — Tableau de tous les membres de l'Académie et tables des noms et des matières contenues dans chacun des volumes des Mémoires et des Documents. 1903; 8°.

* — Société Savoisienne d'Histoire et d'Archéologie. T. XLII (1903); 8°.

* **Charleroi.** Société Paléontologique et Archéologique. Documents et Rapports. T. XXVI (1902-1903); 8°.

* **Cherbourg.** Société nationale des sciences naturelles et mathématiques T. XXXIII, fasc. 2ᵉ. 1903; 8°.

* **Chicago.** Field Columbian Museum. Publication, 73, 74, 76. Anthropological Series. Vol. II, N. 6, 1903; IV, 1904. — Geological Series. Vol. II, N. 1-4. 1903. — Zoological Series. Vol. III, N. 11-14 (1903).

— John Crerar Library. Ninth annual Report for the year 1903-1904; 8°.

* **Christiania.** Videnskabs-Selskabs. Forhandlinger Aar 1903, 1904; 8°. — Skrifter, 1903; Mathematisk-naturvidenskabelige Klasse, 1904; 8°.

* **Cincinnati** (Ohio). Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Bulletin, N. 6 (1903); 8°. — Mycological Notes, N. 10, 14 (1902-1903); 8°.

Colorado Springs, Colo. Colorado College Studie. Science Ser., Nos. 30-32, Vol. XI, 1904; 8°.

* **Copenhague.** Académie R. des sciences et des lettres de Danemark. Bulletin, 1903, N. 6; 1904, N. 1-5. Mémoires. Section des sciences, 6ᵉ Sér., T. XII, 4; 7ᵉ Sér., T. I, 1-3. Sect. des lettres, 6ᵉ Sér., T. VI, 2, 1904; 4°.

* **Cracovia.** Akademii Umiejętnos'ci, Bulletin international. Classe des sciences mathématiques et naturelles, 1903, N. 8-10; 1904, 1-7. — Classe de philologie. Classe d'histoire et de philosophie, 1903, 8-10; 1904, 1-7. — Catalogue of Polish-scientific-literature. T. III, Rok 1903, 2, 4. — Materyały i Prace Komisyi jezykowej, T. II, Zeszyt 1, 1903. — Stownik Gwar Polskich, T. III (L do O), 1903. — Rozprawy-Wydziat historyczno-filozoficzny, Ser. II, T. XIX, XXI, 1903. — Rozprawy-Wijdział filologiczny, Ser. II, T. XXIII, 1904.

* **Dorpat.** K. Universität. БІОГАФИЧЕСКІЙ СЛОВАРЬ ПРОФЕССОРОВЪ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ИМПЕРАТОРСКАГО ЮРЬЕСКАГО, БЫВШАГО, УНИВЕРСИТЕТА ЗА СТО ЛѢТЪ ЕГО СУШЕСТВОВАНІЯ (1802-1902), ТОМЪ I, II ЮРЬЕВЪ, 1902-1903; 8°. — ИМПЕРАТОРСКІЙ ЮРЬЕВСКІЙ, БЫВШІЙ ЛЕРПТСКІЙ, УНИВЕРСИТЕТЪ ЗА СТО ЛѢТЪ ЕГО СУШЕСТВОВАНІЯ (1802-1902), ТОМЪ I: ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ НЕРІОЛЫ (1802-1865), ЮРЬЕВЪ, 1902; 8°. — СТАТИСТИЧСКІЯ ТАБЛИЦЫ и личные списки по Императорскому Юрьевскому,

бывшему Церптскому, университету (1802-1901), Юрьевъ, 1902; 8°. — Acta et Commentationes 1902, T. 10; 8°.

* **Dublin**. R. Dublin Society. Economic Proceedings. 1903, Vol. I, Part 4. — Scientific Proceedings. 1903, Vol. X (N. S.), Part 1; 8°. — Scientific Transaction, 1903, Vol. VIII (Ser. II), N. 2-5; 4°.

* — R. Irish Academy. Proceedings. Vol. XXIV, Sect. A, Mathem., Astron., and Physical Science, Part 4, 5; Sect. B, Biological, Geolog., and Chemical Science, Part 4, 5; Sect. C, Archeol., Linguistic, and Literature, Part 4, 5; XXV, Part 1-4. — Transactions. Vol. XXXII, Sect. A, Part 7-10; B, 3-4; C, 3, 4. 1903-904; 4°.

* **Edinburgh**. R. Physical Society. Proceedings. Session 1902-904. 1904; 8°.

* — R. Scottish Society. Transactions. Vol. XVI, Part 1 (1903); 8°.

* **Erlangen**. Physikalisch-medicinischen Societät. Sitzungsberichte. 34 Heft, 1902. 1903; 8°.

* **Firenze**. R. Accademia della Crusca. Atti. Adunanza pubblica del dì 27 dicembre 1903. 1904; 8°. Vocabolario. Quinta impressione. Vol. IX, fasc. 3°. 1903; 4°.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. 4ª serie, vol. XXVI, disp. 4ª (1903); 5ª serie, vol. I, disp. 1-3. (1904). — Degli Studi e delle vicende della R. Accademia dei Georgofili dal 1854 al 1903. Firenze, 1904; 8°.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di filosofia e filologia: Luca Contile, uomo di lettere e di negozi del secolo XVI per Abd-El-Kader Salza. 1903; 4°. — Sezione di scienze fisiche e naturali: Osservazioni astronomiche fatte all'equatoriale di Arcetri nel 1903 da A. Abetti. 1904; 8°. — Sezione di medicina e chirurgia: Ricerche sul ricambio materiale nella tifoide dei dottori C. Baduel, G. Daddi, G. Marchetti. 1903; 4°.

— R. Istituto di scienze sociali " Cesare Alfieri „. Annuario 1903-1904; 8°.

* — R. Osservatorio meteorico del Museo. Pubblicazioni periodiche di meteorologia 1896-1902; 8°.

* **Frankfurt am Mein**. Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Abhandlungen. XXV Bd, Heft 4; XXVII, 2, 3; XXIX, 1. 4°. — Berichte. 1903, 1904; 8°.

* **Freiburg**. Naturforschenden Gesellschaft. Berichte. Bd. XIV. 1904; 8°.

* **Gap**. Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 3e Sér., 3e et 4e trimestre 1903; 1r-2e trimestre 1904; 8°.

Genève. Observatoire. Résumé météorologique de l'année 1902 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. — Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1902. Résumé. 1903; 8°.

* — Société de Physique et d'Histoire naturelle. Mémoires, Vol. 34, fasc. 4. 1904.

* **Genova**. Biblioteca della R. Università. Atti, Vol. 17; 8°.

* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. An. XXV, fasc. 6; XXVI (1904), 1-5, 1903-1904; 8°.

— R. Scuola navale superiore. Annuario, Anno scolastico 1903-904; 8°.

* **Göteborg**. K. Vetenskaps-och Vitterhets-Samhätles Handlingar. 4 följden. II, 5-6- 1903; 8°.
* **Göttingen**. K. Gesellschaft der Wissenschaften. Geschäftliche Mittheilungen 1903, Heft 1-3, 1904; 8°. — Mathematische-Physikalische Klasse. Abhandlungen, Bd. III, N. 1-5. — Nachrichten 1903, Heft 6, 1904, 1-5. — Philologisch-Historische Klasse. Abhandlungen N. F., V, 5; VII, 4, 5; VIII, 1-2. — Nachrichten 1903, Heft 6, 1904; 1-3.
* **Granville Ohio**. Scientific Laboratories of Denison University. Bulletin, Vol. XII, Art. V-VII (1902-1903); 8°.
* **Habana**. Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales. Anales, T. XLI, Junio à Septiembre, 1904-1905; 8°.
* **Halle**. K. Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Abhandlungen, 80, 81 Bd. 1903; 4°. — Leopoldina, XXXVII-XXXIX, 1901-1903; 4°.
* **Haarlem**. Musée Teyler. Archives. Sér. II, Vol. VIII, 4e et 5e partie (1903-1904). — Catalogue de la Bibliothèque par G. C. W. Bohnensieg, T. III, 1888-1903; 1904; 8°.
* — Société hollandaise des sciences. Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. IX, livr. 1-5 (1904).
* **Heidelberg**. Naturhistorisch-medizinischen Vereins. Verhandlungen, N. F., VII Bd., 3-5 Heft. 1904; 8°.
* **Helsingfors**, Institut Météorologique Central de la Société des sciences de Finlande. Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1897 et 1898. Vol. XVI, XVII. — État des glaces et des neiges pendant l'hiver 1892-1893. 1904; 4°.
* **Jena**. Medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. N. F., XXXI Bd., 3-4 Heft; XXXII, 1. 1904; 8°. — Denkschriften. IV, Bd. 4; VI, 2; IX; X, 2; XI, Fetschrift zum siebzigsten Geburtstage von E. Haeckel; XII Bd. u. Atl., 1904; 4°.
* **Kasan**. Société physico-mathématique. Bulletin, T. XII, 4; XIII, 1, 3. 1902-1903; 8°.
* **Kharkow**. Communications de la Société mathématique. 2e Sér., T. VIII, Nos. 1-3. 1904; 8°.
* **Kiel**. Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Wissenschaftliche Meersuntersuchungen. N. F., V Bd., Abth. Helgoland, Heft 2; VI, 1, 2. 1904; 4°. VII, VIII Bd., Abth. Kiel. 1903; 4°.

Knin. Starohrvatska prosvjeta Glasilo hrvatskog Starinarskog družtva. God. VIII, Sv. 1, 2. 1904; 8°.

* **Königsberg**. Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft. Schriften, 1903; 4°.

Kristiania. Norske Gradmaaling-Kommission. Resultater af Vandstands-Observationer paa den Norske Kyst. Heft VI. 1904; 4°.

Kyōto. Imperial University. Memoirs of the College of science and Engineering. Vol. I, N. 1. 1903; 8°.

* **Lawrence**, Kansas. University of Kansas. Science Bulletin, Vol. II, Nos. 1-9. 1903; 8°.

* **Leipzig**. Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Jahresbericht, 1904; 8°.

* — K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Abhandlungen der Mathem.-Physische Klasse; XXVIII. Bd., N. 6, 7; XXIX, 1, 2. — Berichte 1903, N. 6; 1904, 1-4. — Abhandlungen der Philologisch-Historischen Klasse. XXII. Bd., N. 4-6; XXIV, 1-3. — Berichte, 1903, N. 3-6; 1904, 1-3. 1903-1904; 8°.

** — Monumenta Germaniae historica. Scriptorum, T. XXXI, pars 1ª (1903); 4°.

* — Vereins für Erdkunde. Wissenschaftliche Veröffentlichungen. VI. Bd. 1904; 8°. — Mitteilungen, 1903, Heft I. 1904; 8°.

* **Liège**. Société Géologique de Belgique. Annales. T. XXX, 2ᵉ livr., XXXI, 1-2. 1904; 8°.

* — Société Royale des Sciences. Mémoires, 3ᵉ Sér., T. V. 1904; 8°.

Lima. Ministerio del Fomento. Boletín del Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. N. 3, 4 (1903); 6-9, 11-14. 1904; 8°.

* **Lisboa**. Commisão do Serviço Geologico de Portugal. Cummunições. T. V, fasc. 1, 2. 1903-1904; 8°. — Mollusques terrestres du Portugal. Lisboa, 1903-1904; 4°.

— Observatoire Royal (Tapada). Observations d'éclipses de Lune par Campos Rodriguez, F. Oom et Teixeira Bastol. — Corrections aux Ascensions Droites de quelques étoiles du Berliner Jahrbuch par Campos Rodriguez. Kiel, 1902-1904; 4°.

* **London**. Royal Astronomical Society. Monthly Notices, Vol. LXIV, Nos. 1-9. 1903; 8°.

* — British Museum. Catalogue of the Collection: Bones of Mammalia, 1862, 1 v. 8°; Monkeys, Lemurs, and Fruit-eating Bats, 1870, 1 vol. 8°; Carnivorous, Pachydermatous, and Edentate Mammalia, 1869, 1 vol. 8°; Seals and Whales, 1866, 1 vol. 8°; Supplement 1871, 1 vol. 8°; Ruminant Mammalia, 1872, 1 vol. 8°; Coleopterous insects, part VII, VIII, 1853-1855, 2 vol. 8°; Illustrations of typical specimens of Coleoptera, 1879, 1 vol. 8°; Coleopterous insects of Madeira, 1857, 1 vol. 8°; Coleopterous insects of the Canaries, 1864, 1 vol. 8°; Hallicidae, 1860, 1 vol. 8°; Hispidae, 1858, 1 vol. 8°; Hymenopterous insects, part I-VII, 1853-1859, 7 vol. 16°; List of Hymenoptera. With descriptions and figures of the specimens, vol. I, 1882, 8°; Neuropterous insects, Part 1ª, 1858, 16°; Hemiptera Heteroptera, Part VII, 1873, 1 vol. 8°; History of the Collections, vol. I, 1904, 8°; Library Catalogue, vol. II, E-K, 1904, 4°; Second Report on Economic Geology, 1904; 8°; Catalogue of Jurassic Plant, part II, 1904, 8°; Introduction to Study of Meteorites, 1904, 8°; 28 vols.

* — Chemical Society. Journal. Vols. LXXXV & LXXXVI; January-November, 1904; 8°. — Proceedings, vol. XIX, N. 274; XX, 275-286. 1904; 8°.

* — Geological Society. Quarterly Journal, Vol. LX, part 1-4, N. 237-240, 1904; 8°. Geological literature added during the year ended December 31st. 1903. 1904; 8°. — List. November 10th. 1904; 8°.

* — Linnean Society. Journal, Botany, Vol. XXXV, No. 248; XXXVI, 253, 254; XXXVII, 257. — Zoology, Vol. XXIX, Nos. 189, 190; 1904. —

Proceeding, 116th session, from November to June 1904. — Transactions, Botany, Vol. VI, part 7-9; Zoology, Vol. VIII, part 13; IX, 3-5; 4°. — List, 1904-1905.

* **London**. R. Microscopical Society. Journal, 1904, part 1-6; 8°.

* — R. Society of Literature. Transactions, Vol. XXIV. Part 4; XV, 1-3ª; 1903-904. — Chronicon Adar de Usk. A. D. 1377-1421, edited with a translation and notes by Sir Ed. Maunde Thompson. 2nd edit. London, 1904; 8°. — Report and List of Fellow, 1904; 8°.

* — Royal Society. International Catalogue of scientific Literature (second annual issue), 1903; 8°. **B**. Mechanics; **C**. Physics; **D**. Chemistry, vol. II, part II; **E**. Astronomy; **K**. Palaeontology, vol. XV; **L**. General Biology, vol. XVI; **M**. Botany, vol. I, part II; **N**. Zoology, vol. XVII, part I, II; **O**. Human Anatomy, vol. XIII; **P**. Physical Anthropology, vol. XIV; **Q**. Physiology, vol. III, part II; **R**. Bacteriology. — Year-Book, 1904; 8°. — Obituary Notice of Fellow, part I-III, 1904; 8°. — Proceedings, Vol. LXXII, No. 487; LXXIII, 488-496; LXXIV, 497-502, 1904. — Transactions Philosophical, Ser. A, vol. 202, 203; Ser. B, vol. 196. 1904; 4°.

* — Zoological Society. Proceedings, 1903, vol. II; 1904, vol. I, II, 1.

— British Association of the advancement of science. Report of the Seventy-third Meeting held *Soutport* in September 1903. 1903; 8°.

* **Louvain**. Université catholique. Annuaire 1904. — Thèses de la Faculté de Théologie, 804-819. — Thèses de la Faculté de philosophie et lettres, 28. — Programme des cours de l'année académique 1903-904. — Bibliographie, 2ᵉ supplément 1901-1903, 1904; E. van Roey, De justo auctario ex contractu crediti, 1903; Fl. De Lannoy, Les origines diplomatiques de l'indépendance belge, 1903; A. J. De Bray, La Belgique et le marché asiatique, Bruxelles, 1903; F. Chavée, Propriétaires et fermiers en Angleterre, 1903; R. Vermaut, Les régies municipales en Angleterre, Courtrai, 1903; Id., Les grèves des chemins de fer en Hollande en 1903, Courtrai, 1903; L. G. Verhoeven, Des effets de commerce, 1903; C. Liégeois, Gilles de Chin. L'histoire et la légende, 1903; — A. Bayot, Le roman de Gillion de Trazegnies, 1903; C. Terlinden, Le pape Clément IX et la guerre de Candie, 1904.

* **Lucca**. R. Accademia lucchese di scienze, lettere ed arti. T. XXXI, 1902; 8°.

* **Luxembourg**. Institut Grand-Ducal. Section des sciences naturelles et mathématiques. T. XXVII (B), 1904; 8°.

* **Lyon**. Diocèse de Lyon. Bulletin historique, 5ᵉ An. (1904), Nos. 25-28; 8°.

* — Société d'Agriculture, Sciences et Industries. Annales, 7ᵉ Série, T. VI (1898), 1899; 8°.

* **Madison**. Wisconsin Academy of sciences, arts and letters. Transactions, vol. XIII, Part II (1901); XIV, 1 (1902); 8°.

— Wisconsin Geological and Natural History Survey. Bulletin, Nos. IX, X, XI (Economic Series, Nos. 5, 7), 1903; XII (Scientific Series, No. 3); 8°.

Madras. Kodaikanal and Madras Observatories. Annual Report of the Director for the period 1st January to 31st December 1903; 4°.

* **Madrid**. Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Annuario 1883-1904, 22 vol. 16°. — Discursos de recepcion, 1863-1903, 52 fasc. 8°.

— Memorias, T. VI, p. 3ª, 2 ed. *al* XVII, XVIII, p. 1ª, XIX, fasc. 1°, XXI, p. 1ª, 1877-1903; 16 vol. 4°. — Revista de los Progresos de las Ciencias exactas, físicas y naturales, T. III-XXI, 1853-1886; 17 vol. 8°. — Libros del Saber de Astronomía, del rey D. Alfonso el Sabio, T. V, p. 1ª, 1 vol. f°. — Programa y Reseña del certamen abierto por la Academia, con motivo del centenario de Calderón, 1881; 8°. — Memoria premiada en el mismo certamen, original de D. Felipe Picatoste, 1881; 8°. — Teoria matematica de la Luz por don Jose Echegaray, 1871; 8°. — Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo el metodo de Wantzel y la división de la circunferencia en partes iguales por D. José Echegaray, 1887; 8°. — Propiedades Elementales relativas à la divisibilidad de los números enteros por D. Ricardo Vazques Illà. Valladolid, 1881; 8°. — Revista, T. I, N. 1-5 (1904); 8°.

* **Madrid**. Real Academia de la Historia. Boletín, T. XLIV, cuad. 1-6; XLV, 1-6; 1904; 8°.

Manchester. Manchester Geolog. & Mining Society. Transact., Vol. XXVIII, p. 10-12 (1904); 8°.

* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, Vol. XVII (1903-904), XIX, fasc. 1 (1904-905); 8°.

* **Mexico**. Observatorio astronómico naciónal. Informes presentados a la Secretaria de Fomento por el Director sobre los trabajos del Establecimiento desde 1° de Enero de 1902 à 30 de Junio de 1903; 8°.

— Observatorio Meteorológico magnético central. Boletín mensual, 1902, marzo-julio; 4°.

* — Sociedad Científica " Antonio Alzate „. Memorias y Rivista, T. XVIII, 3-6; XIX, 2-7; 8°.

** **Milano**. Associazione tipografico-libraria italiana. Catalogo generale della libreria italiana dall'anno 1847 a tutto il 1899. Vol. III, punt. 2-7; 8°.

— Città di Milano. Bollettino statistico mensile. A. XIX (1903); nov.-dic. Notizie riassuntive dell'anno 1903; XX (1904), gennaio-ottobre 1904.

* — R. Istituto lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali, Vol. XIX, fasc. 12, 13 (1904); XX, 3. — Rendiconti, Ser. II, Vol. XXXVI, fasc. 20; XXXVII, 1-19. 1904.

— R. Osservatorio di Brera. Anno 1905. Articoli generali del Calendario ed Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano. 1904; 8°.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di storia naturale. Atti, Vol. XLII, fasc. 4°; XLIII, 1°-3°. 1904; 8°.

** **Minneapolis**. Geological and Natural History Survey of Minnesota. Botanical Studies. 3ª Ser., part III. 1904; 8°.

Monaco. Musée Océanographique. Bulletin, N. 1-19. 1904; 8°. — Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert Ir Prince souverain de Monaco, fasc. XXV-XXVII. 1904; 4° (*dono del Principe Alberto I di Monaco*).

* **Montevideo**. Museo Nacional. Anales, Ser. II, entrega 1. 1904; 4°.

* **Montpellier**. Académie des sciences et lettres. Section des sciences, Mémoires, 2e Sér., T. III, N. 3 (1903). — Section des Lettres. Mémoires, 2e Sér. T. IV, N. 2, 1904; 8°.

* **Moscou**. Société Imp. des Naturalistes. Bulletin (1902), N° 4 (1903), 2-3.

* **München**. K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Abhandlungen. Mathematisch-physikalischen Klasse, XXII Bd., 1 Abth. Abhandlungen. Historischen Klasse, XXIII, Bd., 1 Abth. Sitzungsberichte. Mathematisch-physikalischen Klasse 1903, Heft 4, 5; 1904, Heft 1-2. — Philosophisch-philologischen und historischen Klasse 1903, Heft 4; 1904, Heft 1-3. — Knapp (G. F.). Justus von Liebig nach dem Leben gezeichnet 1903; 4°. — Zittel (K. A. v.). Ueber wissenschaftliche Wahrheit. 1902; 4°.

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires (1902-903); 5e Sér., T. XX. 1903; 8°.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 2me Sér., T. III, 2e-4e trimestre 1903; 8°.

* **Napoli**. Accademia Pontaniana. Atti, Vol. XXXIII. 1903; 8°.

— Collegio degli Ingegneri ed Architetti. Ann. XXII (1904), N° 1, 4, 8, 15, 17-19; 8°.

* — R. Istituto d'incoraggiamento. Atti, 5a ser., vol. V. 1904; 4°.

— Museo Zoologico della R. Università. Annuario. Vol. I, N. 1-20. 1901-904; 8°.

* — Zoologischen Station zu Neapel. Mittheilungen, XVI Bd., 1 u. 3 Heft: XVII Bd. 1, 2. Berlin, 1903; 8°.

— R. Osservatorio di Capodimonte. Osservazioni meteoriche. 1903; 8°.

* — Società di Naturalisti. Bollettino, Ser. I, Vol. XVII. 1904; 8°.

* — Società Reale. Annuario 1904; 8°. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Rendiconti, Ser. 3a, vol. IX (1903) Ni 8-12. X (1904) 1-7.

Natal. Surveyor-General's Department. Second Report of the Geological Survey of Natal and Zululand. By W. Anderson. London, 1904; 4°.

* **Neuchâtel**. Société des sciences naturelles. Bulletin. Tome XXVIII. An. 1899-900; 8°.

* **New York**. American Mathematical Society. Bulletin, 2nd Ser., Vol. X; XI, 1-3. 1904. — Transactions, Vol. V, Nos. 1-3. — Annual Register, January, 1904; 8°. — General Index 1891-904; 8°.

* — Public Library Astor Lenox and Tilden Foundations. Bulletin, Vol. VIII, Nos. 1-11 (1904). 1903; 8°.

* **Nouvelle Orléans**. Athénée Louisianais. Comptes-rendus, 9e série, t. III, livrs. 1e, 2me. 1904.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Bulletin. Vol. X, N. 4; XI, 1. 1903, 1904; 8°.

* **Ottawa**. Geological Survey of Canada. Geological Sheets Nos. 42 to 48, 56 to 58 Nova Scotia. Reference, Part I, Annual Report. Vol. V, 1890-91. Altitudes in the Dominion of Canada with a relief Map of North America. Ottawa, 1901. 1 Vol. and Atl.; 8°. — Dictionary of Altitudes in the Dominion of Canada with a relief Map of Canada. 1903; 8°. — Report on the Great Landslide at Frank, Alta. 1903, 1904; 8°. — Appendix to the Report of the Superintendent of Mines. 1902. 1903; 8°.

* — R. Society of Canada. Proceed. and Transact., 2nd Ser., Vol. IX, 1903; 8°.

* **Padova**. R. Accad. di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie. N. S. Vol. XIX (1903).

— Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Atti. N. S. An. I, fasc. I. 1904; 8°.

* **Palermo.** Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti. 3ª Ser. (An. 1902-1903), Vol. VII. 1904; 4°. — Fondazione di Studi Sensales ed il suo statuto. 1904; 8°.

* — Circolo Matematico. Annuario. 1904; 8°. — Rendiconti, T. XVIII (1904), fasc. 1-6. — Estratti dai Verbali delle adunanze 13 dicembre 1903-22 maggio 1904.

* — R. Istituto Botanico. Contribuzioni alla Biologia vegetale edita da A. Borzì. Vol. III, fasc. II. 1904; 8°.

— Società di scienze naturali ed economiche. Giornale, Vol. XXIV. 1904; 4°.

Paris. Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts. État général par fonds des Archives Départementales, ancien régime et période révolutionnaire. Paris, 1903; 4°. — Inventaire-Sommaire des Archives Départementales, antérieures à 1790. — Aisne. Ville de Liesse. Archives Hospitalières. — Aube. Sér. E (Fonds de Saxe). T. 1er, 1re part. Archives particulières du prince Xav. de Saxe. — Drôme. Archives Civiles. Sér. E, T. VII. — Orne, Archiv. Ecclés., Sér. H, T. IV. — Seine-Inférieure. Arch. Civiles. Sér. C, D. T. II. — Tarn. Ville de Cordes.

— Ministère de l'Instruction Publique. Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. IIe Sér., T. V. Paris, 1903; 4°. — Mémoires publiés par les Membres de la Mission archéologique française au Caire. T. XIX, fasc. 4. 1903; 4°. — Catalogue des thèses et écrits académiques, 19me fasc. An. scol. 1902-1903; 4°.

* — Ministère des Travaux Publics. Annales des Mines, 10e Série, t. IV; 9-12 (1903), V, 1-3, 5-6; VI, 7-8. — Tables des matières de la IXe sér. décennale. 1892-1901; 8°.

* — Institut National de France. Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. Mémoires XXXVI, 1901; XXXVII, 1re partie 1904. Mémoires presentés par divers savants, 1re sér. Sujets divers d'érudition. T. XI; 1902-1904; 4°. — Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques. T. XXXVI (deuxième partie), XXXVII, XXXVIII (1re partie), 1901-903. 1903; 4°. — Corpus Inscriptionum Semiticarum. Pars II, T. I, fasc. 2, 3. Testo e tav. 2, fas. 4° e f° (1902). — Académie des sciences. Mémoires, T. XLVI, XLVII. 1904; 4°. — Académie des sciences morales et politiques. Mémoires, T. XXIII, 1902; XXIV, 1904; 4°. — Ordonnances des Rois de France. Règne de François Ier. T. I (1515-1516). 1902; 4°.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1904; 16°.

* — École Polytechnique. Journal, IIe sér., VIIIme cahier. 1903; 4°.

* — Musée Guimet. Annales. Bibliothèque d'études. T. XIV (1902). Revue de l'histoire des religions; T. XLVII, 3 XLVIII, 1, 3 (1903) XLIX (1904), 1.

* — Muséum d'histoire naturelle. Nouvelles Archives. 4me sér., t. IV, fasc. 2; Vme fasc. 1, 2. — Bulletin, 1903, Nos 5-8. 1902-1903.

* — Société de Géographie. La Géographie, Bulletin, T. VIII (1903); N. 1-6; IX (1904), N. 1-4; 8°.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 4e Sér., T. III, N. 2-5. 1903,

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Bulletin, 4e trim. 1903; 1904, 1e-2e trim.; 8°. – Centenaire (1804-1904). Compte-rendu de la

journée du 11 avril 1904; 4°. — Mémoires, 1901. 7me Sér., T. II (1903). — Mettensia IV. Mémoires et Documents, fasc. 2. 1904; 8°.

* **Paris**. Société Mathématique de France. Bulletin, T. XXXI, fasc. 4; XXXII, fasc. 1-3. 1904; 8°.

— Société Philomatique. Bulletin, 9e Série, T. V, Nos. 3-4 (1903); 1-3. 1904.

* — Société de Spéléologie. Spelunca. Mémoires, N. 23, 24; Bulletin et Mémoires, Nos. 23-37. 1900-903; 8°.

* — Société Zoologique de France. Bulletin, T. XXVIII, 1-8. 1903; 8°.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. III (1903), fasc. 3, 4. IV (1904), fasc. 1-3. 1903; 8°.

* **Perugia**. R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Vol. X, fasc. 1, 2. 1904; 8°. — G. Degli Azzi. Le relazioni tra la repubblica di Firenze e l'Umbria nel secolo XIV secondo i documenti del R. Archivio di Stato in Firenze.

* — Università, Facoltà di Giurisprudenza, Annali, Ser. III, 1903, vol. I, fasc. 4°, 1904, vol. II, fasc. 1°-2; 8°.

* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Journal, 2nd Ser., Vol. XII, part 3. 1903; fol°. — Proceedings, vol. LV, p. 2-3. 1903; 8°.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. XLII, N. 173-175 (1903). 1904; 8°.

* — Wagner Free Institute of Science. Transactions, vol. III, part IV (1898); V (1900); VI (1903); 8°.

Pisa. Società Cattolica italiana per gli studi scientifici. Bollettino mensile 1904, N. 1, 2 4-6, 7-10; 8°.

* — R. Università. Annuario per l'anno accademico 1903-904; 8°.

— Annali delle Università toscane. Tomo XXIV. 1904; 4°.

— Rª Università. Laboratorio di chimica agraria. Studi e ricerche, fasc. 18 (1902); 19 (1903); 8°.

* — R. Scuola Normale. Annali. Scienze fisiche e matematiche, vol. IX. 1904; 8°.

* — Società Toscana di scienze naturali. Memorie, Vol. XX. 1904; 8° — Processi verbali, vol. XIV, N. 1-5; 8°.

Pompei. Santuario. — Calendario, 1904; 16°. — Valle di Pompei, Ann. XIV, N. 1-.

* **Portici**. R. Scuola superiore di agricoltura. Ser. II, vol. III (1903); 8°.

Potsdam. Centralbureau der Internationalen Erdmessung. Veröffentlichungen N. F. Nos. 9-10. Bericht über die Tatigkeit... im Jahre 1903. (1904); 4°. — Verhandlungen der vom 4. bis 13. August 1903 in Kopenhagen abgehaltenen Vierzehnten Allgemeinen Conferenz der Internationalen Edmessung. 1904; 4°.

— K. Preuss. Geodätischen Institutes. Veröffentlichung. N. F. No 14, 15, 16, 17 (1904). Berlin, 1904; 8°, 4°.

* **Poulkovo**. Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Vol. IX, 1, 2; XII; XVII, 1; XVIII, 1. St. Pétersbourg, 1903; 4°.

* **Prag**. K. K. Sternwarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen und der... im Jahre 1903. 64 Jahrgang. 1904; 4°.

* **Praze.** Ceská Akademie Cisarě Frantiska Josefa pro vedy, slovesnost a uměni. — Almanach. Ročník XIII (1903). — Rozpravy (Mathem.-Přirodnická). Třida III, Roč. XI (1902). Třida III, Cislo 20 (1903). Třida II, Roč XII (1903). — Rozpravy. (Pro vědy filos. právní a Histor.) Tr. I, Roč. X (1902). Tr. III. Roč. IX, Cislo I. 1902, 1903; Roč. XI, 1903. — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Sciences mathém. et naturelles. An. VII (1903), VIII (1904); Médecine, An. VII (1903), VIII (1904). — Sbírka pramenůku poznání litheraririho života v cěchách, na Moravě a v Slezsku: Skupina II Cislo 5. Skupina I, Rada 1 Cislo 3-6. Skupina I, Rada II Cislo 4-6; Skupina II, 6, 7; III, 4. — Spisy J. A. Komenského. Cislo 5, 6. — Věstník. Roč. XI, XII. — Bibliografia Ceské historie. 1 vol. 8°. — Bibliotéka Klassiků řeckých a římských etc. Cislo 5-8. — Martina Koláře Ceskomoravská Heraldika. I Část všeobecnà. 1902-1903; 8°. — Historicky Archiv, Cislo 22, 23 (1903); 8°. — Monumenta Palaeographica Bohemiae et Moraviae vydává. G. Friedrich. Sešit 1. Předloženo dne 7. dubna 1904.

* **Rennes.** Société scientifique et médicale de l'Ouest. XIIe An. T. XII, N. 2-4. (1903); 8°.

Rio de Janeiro. Ministerio da Industria, Viação e Obras Publicas. — Boletim mensal do Observatorio. Abril-Julho de 1903; 8°.

— Ministerio da Justiça e Negocios interiores. — Relatorio [e Annexos ao Relatorio] apresentado ao Presidente da Republica dos Estados Unidos do Brasil pelo Dr. J. J. Seabra em Abril de 1903. 2 vol. 8°.

* — Bibliotheca Nacional. — Publicações do Archivio publico nacional. IV. 1903; 4°. — Breves apontamentos para o estudo das questões relativas ao ensino normal primario en pelo Dr. I. Teixeira de Macedo; 1877; 8°. — Diccionario grammatical... da lingua portugueza por F. R. Pereira de Carvalho. 1886; 8°. — Guia da Exposição permanente da Bibliotheca Nacional. 1885; 8°. — Novos apontamentos de origem allemã para o estudo das questões relativas a educação nacional... pelo Dr. J. T. de Macedo. 1880; 8°. — O recurso de graça segundo a legilação brazileira pelo Dr. A. H. de Souza Bandeira Filho. 1878; 8°. — Relatorio apresentado ao Sr. Dr. J. J. Seabra Ministro da Justiça e Negocios interiores pelo Director da Bibliotheca Nacional Dr. M. C. Peregrino da Silva. 1902; 8°. — Relatorio sobre as prisões da França e da Italia em 1889... pelo Dr. J. P. Farinha. 1890; 8°. — Relatorio. Commissão central brazileira de permutações internacionales, pelo Presidente da Commissão. 1888; 8°. — Reforma administrativa. Parecer e projecto de A. De Siqueira, Teixeira e Silva. Via Sacra. Versos. 1901; 8°.

Roma. Ministero degli Affari Esteri. Bollettino dell'emigrazione. An. 1903, N^{i} 12, 13.

— Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio: Annali di Statistica. Ser. IV, N. 105, 106. — Annuario Statistico Italiano. 1904. — Atti della Commissione per la statistica giudiziaria e notarile. Sessione del dicembre 1902. Roma, 1903; Sessione del gennaio 1904. — Censimento della popolazione del Regno d'Italia al 10 febbraio 1901. Vol. III. Po-

polazione presente classificata per professioni o condizioni, IV. Roma, 1904; 8°. — Annali dell'industria e del commercio 1903. L'insegnamento industriale, commerciale e professionale in alcuni Stati esteri. 1903; 8°. — Catalogo della Biblioteca. Suppl. quarto dal 1° novembre 1902 al 30 giugno 1904. — Statistica degli scioperi avvenuti nell'industria e nell'agricoltura durante l'anno 1901; sommaria di quelli avvenuti nel 1902-1903; 1904; 8°. — Statistica della emigrazione italiana per l'estero negli anni 1902 e 1903 e notizie sull'emigrazione da alcuni altri Stati. 1904; 8°. — Movimento della popolazione secondo gli Atti dello Stato Civile nell'anno 1902, nascite, morti e matrimoni; 1904; 8°. — Statistica dei matrimoni, delle nascite, delle morti e delle cause di queste ultime durante l'anno 1903; 8°. — Statistica giudiziaria penale per l'anno 1901. Roma, 1904; 8°. — Statistica giudiziaria civile e commerciale e Statistica notarile per l'anno 1900. Parte I. Statistica giudiziaria civile e commerciale. Roma, 1904. — Statistica delle elezioni generali politiche 6 e 13 novembre 1904; 8°.

Roma. Ministero delle Finanze: Bollett. di Legislazione e Statistica doganale e commerciale. Anno XX (1903), nov.-dic.; Anno XXI (1903) gennaio-ottobre. 1904; 8°. — Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione. Dicembre 1903; gennaio-ottobre 1904. — Relazione sull'Amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1902-1903. 1904; 4°. — Tabella indicante i valori delle merci nell'anno 1903. 1904; 8°. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1903. 1904; 4°. — Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1903. 1904; 4°.

— Ministero della Pubblica Istruzione: **Annuario 1904; 8°.

* — Senato del Regno. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto. Anno 1904, N. 1-2, luglio-agosto; 8°.

— Accademia di conferenze storico-giuridiche. Anno XXIV, fasc. 3°, 4° (1903); 1°, 2°. 1902; 4°.

* — R. Accademia dei Lincei: Annuario 1904; 16°. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Memorie, Serie V, vol. IV (1904). — Rendiconti, Vol. XIII. — Classe di scienze morali, stor. e filolog. Memorie, Parte 1ª, serie V, vol. VIII, IX, X, XI. 1903-1904; 4°, Parte 2ª, Notizie degli scavi, serie V, vol. XI, fasc. 10-12; serie V, vol. I, fasc. 1-3. 1903-1904; 4°. — Rendiconti, vol. XIII, N. 1-8 (1904). — Rendiconto dell'adunanza solenne del 5 giugno 1904.

* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Atti, Anno LVII; Sessione 1ª del 20 dicembre 1903 alla Sessione 7ª, 19 giugno 1904; 4°.

* — R. Comitato Geologico d'Italia. Bollettino, Anno 1903, N. 3, 4; 1904, 1, 2; 8°. — Carta geologica dei vulcani vulsini. 1904; fol. — Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia. Appunti al vol. IX; vol. XII, 1904; 8°. — Catalogo della Mostra fatta dal Corpo Reale delle Miniere all'Esposizione universale di Saint-Louis nel 1904; 8°.

* — Istituto di Diritto Romano. Bullettino, A. XV (1902), fasc. 5-6; An. XVI (1903), fasc. 1-6. 1903; 8°.

* **Roma**. R. Osservatorio astronomico al Collegio Romano. Memorie, ser. III, vol. IV, p. 1ª. 1904; 4°.

* — Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, Anno IX, N. 1-23. Mostra di ragioneria applicata alle aziende agrarie. Relazione della Giuria sui lavori esposti. 1904; 8°.

— Società per gli studi della malaria. Atti, vol. V. 1904.

* **Rovereto**. I. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Agiati. Ser. III, vol. IX (1903), fasc. 3, 4; X (1904), 1, 2; 8°.

* **St-Louis**, Mo. Missouri Botanical Garden. 14th, 15th Annual Report. 1903-904; 8°.

St-Petersbourg. Académie Imp. des sciences. — Comptes-rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. I, livrs. 3. 1904; 4°.

* — Comité Géologique de Russie. Bulletins, XXI (1902), Nos. 5-10 XXII (1903) 1-4; 8°. — Mémoires, Vol. XIII, 4; XV, 1; XVI, 2; XVII, 3; XIX, 2; XX, 1. Nouvelle Série, Nos 1, 2, 4-9, 12. 1902-903; 4°.

* — Observatoire Central Nicolas. Publications, sér. II, vol. IX, fasc. 3e (1903); 4e (1904); 8°. Annales. Année 1901. Observations météorologiques et magnétiques. 1903. 2 vol. 4°.

* — Société physico-chimique russe. T. XXXV, N. 9; XXXVI, 1-8. — Recueil d'articles de Physique dédié à la mémoire de notre cher maître professeur Th. Th. Petrouchewsky. 1904; 8°.

* — **San Francisco**. California Academy of Sciences. Proceedings 3rd. Ser. Botany, vol. II, No 10 (1902). — Geology, vol. II, No 1 (1902). — Mathem.-Phys., vol. I, No 8 (1903). — Zoology, vol. III, No 5-6 (1903). — Memoirs, vol. III (1903).

* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Serie IV, vol. XV, 7-10; XVI, 1-6. 1903-904; 8°.

* — R. Università. Annuario accademico 1903-904; 8°.

— Istituto Botanico della R. Università. Bullettino. An. VI (1904), fasc. 1-4. 8°.

* **Stockholm**. K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Archiv för Botanik. Bd. I, Haft. 4; II, 1-4; III, 1 3. — Archiv för kemi, mineralogi och geologi. Bd. I, 2. — Archiv. för Zoologi. Bd. I, 3-4. 1904. — Accessions-Katalog, 17, 1902. 1904; 8°. — Handlingar, Bd. 37, No 4-8 (1903-1904); 38, 1-4 (1904); 4°. — Kungl. Svenska Vetenskaps Akad. Årsbok för år 1904. 8°. — Observations météorologiques Suédoises, Vol. 43 (1901), 44 (1902), 45 (1903); 4°. — Skrifter i skilda ämnen jämte några bref af A. Retzius. Samlade och utgifna af G. Retzius. 1902; 8°.

* **Stuttgart**. Vereins fur vaterländische Naturkunde in Würtemberg Jahreshefte, 60 Jahrgang. 1904; 8°.

Tacubaya (Mexico). Observatorio Astronómico Nacional. Año de 1904 (XXIV). 1903; 16°.

* **Tōkiō**. Imp. University. Japan. Calendar 2563-64 (1903-904). Journal of the College of Sciences, Vol. XVIII, art. 5-8; XIX, art. 2-9, 11-20; XX, 1, 2. 1903-904; 4°. — Mittheilungen aus der Medicinischen Facultät 1903, Bd. VI, Nos 2.

Tōkyo. Earthquake Investigation Committee in Foreign Languages, Publications, No 15-18. 1904; 8°.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, Vol. XLVI (1903). 1904; 8°.
* — R. Accademia di Medicina. Giornale, An. LXVI (1903), N. 11, 12; An. LXVII (1904), 1-10; 8°.
— Consiglio Provinciale. Atti, Anno 1903. Ciriè, 1904; 8°.
* — Club Alpino italiano. Bollettino pel 1903; Vol. XXXVI, 69. — Rivista mensile. Vol. XXII, N. 12 (1903); XXIII, 1-11; 8°.
— R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria. Miscellanea, 3ª Serie, T. IX. 1904.
* — Istituto di esercitazioni nelle scienze giuridico-politiche (R. Università). Fr. Dindo. Il primo catasto italiano geometrico-particellare. Legnago, 1904; 4°. — C. Lang. La condizione giuridica delle eresie nella storia del diritto italiano. Parte prima, periodo Romano. Torino, 1904; 8°. — M. Maggi. La quota riservata per legge al coniuge superstite nella successione testamentaria. Tortona, 1904; 8°. — G. Volino, Condizione giuridica degli Israeliti in Piemonte prima dell'emancipazione. Torino, 1904; 8°.
* — Municipio. Atti. Ann. 1884-1894, vol. 32-42; Ann. 1902, 1903, vol. 51, 52. Bollettino statistico, mese di ottobre-dicembre 1903; Bollettino statistico dell'anno 1904. Gennaio-Agosto; f°.
— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata. Vol. XVIII (1903); 8°.
— Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia. Atti. Vol. VII, fasc. 4°. 1904; 8°.
* — Società degli Ingegneri e degli Architetti. Atti, An. 1903, fasc. 6; 1904, fasc. 1-6; 8°.
* **Toronto**. Canadian Institute. Transactions, Vol. VII, part 3. 1904; 8°. — Proceedings, No. 12, vol. II, part 6, 1904.
* **Toulouse**. Université. Annales de la Faculté des sciences, 2e Sér., T. V, 3e et 4e fasc. (1903); 4°. — Annales du Midi, Revue de la France méridionale, N. 59-62. — Annuaire pour l'année 1903-904; 8°.
* **Upsal**. Observatoire Météorologique de l'Université. Bulletin mensuel, Vol. XXXV. 1903-904; 4°.
— Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Nova Acta. Ser. III, vol. XX, fasc. II, 1904; 4°.
— Universitet. Skrifter, utgifna af K. umanistika Vetenschaps-Samfundet. Bd. VIII (1902-1904); 8°. — Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt and the White Nile, 1901. Part 1. 1904; 8°. — Nordiska Studier, 1904; 1 v. 8°.
* **Urbana** (Illn. U. S. A.). Illinois State Laboratory of natural history. Bulletin, vol. VI, art. 2. Index; VII, art. 1-3. 1903-904; 8°.
* **Venezia**. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti. T. LXII, disp. 10ª (1902-903); LXIII, 1ª-10ª; 8°. — Memorie, vol. XXVII, N. 1, 2 (1902-903); 4°.
Verona. Accademia di agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, vol. IV e Append., vol. III. 1903-904; 8°.
* **Vicenza**. Accademia Olimpica. Ann. 1901-902, vol. XXXIII (1903); 8°.
Washington. Bureau of American Ethnology. 20th Annual Report, 1898-99. 1903; 4°.

Washington. U. S. Geological Survey. Professional Paper, Nos. 9, 10, 13-15. 1903; 4°. — Water-Supply and Irrigation Paper. Nos. 80-87. 1903; 8°.

— Coast and Geodetic Survey. Report July 1, 1902, to June 30, 1904; 4°.

* — U. S. Naval Observatory. Meteorological Observations and results. 1903-904. 2d Ser. Vol. V. 1903; 4°. — Report... year ending June 30, 1903; Report... June 30, 1904; 8°.

— Carnegie Institution. Year Book, N. 2. 1903; 8°.

* — Smithsonian Institution. Smithsonian Contributions to Knowledge, N. 1413 (1903). — Annual Report of the Board of Regents... Showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year ending June 30, 1902. 1903; 8°. — Report of the U. S. National Museum. 1901 (1903); 1902 (1904); 8°. — Smithsonian Miscellaneous Collections. Part of Vol. XLIV, No 1374, 1903; Vol. XLV, Pub. No 1419. 1904; 8°.

* **Wien**. K. K. Akademie der Wissenschaften. Almanach 1901, 1902; 8°. — Archiv für österreichische Geschichte, XCI Bd., 2 Hälf.; XCII, 1. — Denkschriften Mathematisch-Naturwiss. Klasse. Bd. LXXII. — Fontes rerum austriacarum, 2 Abth. Diplomataria et Acta; LV Bd., 2 Abth., LVI Bd. — Mittheilungen der Erdbeben-Commission. N. F., N. 9-21. — Sitzungsberichte. Mathem.-Naturwissenschaftliche Klasse. Abth. I, CXI Bd., 4-10; CXII Bd.; 1-6, Abt. II a; CXI Bd. 1-10; CXII Bd.; 1-6, Abt. II b, CXI Bd. 1-10; CXII Bd.; 1-6, Abth. III, CXI, Bd. 1-10; Register zu den Bd. 106-110; 8°. — Sitzungsberichte. Philosophisch-historische Klasse. CXLV, CXLVI. 1902-903; 8°.

* — K. K. Geologischen Reichsanstalt. Abhandlungen, Bd. XVII, Heft 6 (1903); 4°. — Jahrbuch Jahrg. 1903, LIII Bd., 2-4 Heft — Verhandlungen, 1903, N. 16-18; 1904, 1-12; 8°.

— K. u. K. Militär Geographischen Institutes. Publikationen für die Internationale Erdmessung. XX Bd. Astronomische Arbeiten. 1903; 4°.

* — Verhandlungen der k. k. Zoologisch-botanischen Gesellschaft. Jahrg. 1903, LIII Bd.; 8°.

* **Würzburg**. Physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Sitzungsberichte, 1903, N. 1-8; 1904, 1-3. — Verhandlungen N. F., Bd. XXXV, N. 8; XXXVI, 1-7; XXXVII, 1-2. 1903-904; 8°.

* **Zagreb**. Kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskog Zemaljskog Arkiva. Vjestnik, 1904 Godina VI.

* — Hervatskoga Arkeološkoga društva. Viesnik, N. S., Sveska VII, 1903-904; 1, 2; 8°.

* — Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. — Rad, Knjiga 153-151 Razredi histor.-filolog. i filosof.-juridički, 60 (1903), 61 (1904); 8°. — Rječnik hrvatskogo ili srpskoga jezika, Svezak 23 Petoga dijela (1903); 8°. — Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena Kniga VIII, Svezak 2 (1903); IX, 1 (1904); 8°. — Ljetopis za godina 1903; 18 Svezak (1904); 8°. — Monumenta histor.-juridica slavorum meridionalium. Vol. IX (1904); 8°.

* — Societas scientiarum naturalium croatica. Glasnik hrvatskoga naravoslovnoga društva. Godina XIV, 1, 2; XV, 1, 2, 1902-903; XVI, 1. 1904; 8°.

* **Zürich.** Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. N. F. XIV Liefg. (Bern, 1904); 4°.
* — Commission géologique suisse. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse, Série géotechnique, livr. III. Berne. 1904; 4°.
* — Naturforschenden Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, XLVIII Jahrg., 1-4 Heft. 1903; 8°.

PERIODICI 1904.

** **Academy** (The) and Literature. London; 4°.
* **Acta** mathematica. Vol. 28, 29. Zeitschrift herausg., von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.
** **Allgemeine** Deutsche Biographie. N. 39-45. Leipzig; 8°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Turin; 8°.
** **Archivio** per le Scienze mediche. Torino; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
* **Beiträge** zur chemischen Physiologie und Pathologie. V Bd.; VI Bd., 1-2 Heft. Braunschweig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift; 8°.
** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Bd. XII (1903), Liefg. 3-5; XIII (1904), 1-4. IV Supplementband, Liefg. 1-3. Leipzig; 4°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXX, 1903, trimestre quartum; XXXI, 1904, primum, secundum, tertium. Lipsiae; 8°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausg. von G. Eneström. Stockholm; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École de Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.

** **Bulletins** de la Société anatomique de Paris, etc. Paris; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
** **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit den neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
* **Comptes-rendus** hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
** Ἐφεμερὶς ἀρχαιολογικὴ Ἐν Ἀθηναῖς. 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
* **Eranos**. Acta philologica Suecana. Edenda curavit Vilelmus Lundström. Upsaliae; 8°.
** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1903. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** di erudizione. Firenze; 8°.
* **Giornale** storico e letterario della Liguria diretto da Achille Neri e da Ubaldo Mazzini. Spezia; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. 1901, Bd. XXXII, 3; 1902, XXXIII, 1, 2. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues), für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. XXV Jahrg. 1902. Berlin; 8°.
* **Jornal** des sciencias Mathematicas e Astronomicas. Publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Comparative Neurology. Granville, Ohio; 8°.

* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca N. Y.; 8°.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (2ª serie). Fasc. V. Caracciolo di Napoli, parte 5ª. Fasc. VI. Caracciolo di Napoli e Moncada di Sicilia. Fasc. VII. Caracciolo di Napoli, Ruffo di Calabria, Moncada di Sicilia. Napoli; f°.

Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Leipzig; 8°.

** **Minerva**. Jahrbuch du gelehrtent Welt. XIII. Jahrg. 1903-1904; Strassburg, 1903; 16°.

* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.

** **Moyen** (Le) **Age**. Bulletin mensuel d'histoire et de philologie. Paris; 8°.

** **Nature**, a Weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.

* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.

** **Palaeontographica**. Beiträge zur Naturgeschichte der Vorzeit. Stuttgart, 1902.

** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Gotha; 8°.

* **Philosophische Studien**. Leipzig; 8°.

* **Physical Review**; a journal of experimental and theoretical physic..... Published for Cornell University. New-York; 8°.

** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. IV Bd., Liefg. 16 u. 17 (1903); 19-24 (1904). Leipzig; 8°.

** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.

** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. Tom. XIX, 2 Decas 1; 24, Decas 3-6. Lipsiae et Gerae; 4°.

Revista do Centro de Sciencias, Letras e Artes de Campinas. Campinas (Braxil); 8°.

** **Revue** archéologique. Paris; 8°.

** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.

* **Revue** de l'Université de Bruxelles. 8°.

** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.

** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.

** **Revue** numismatique. Paris; 8°.

** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.

** **Revue** scientifique. Paris; 4°.

* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.

* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.

** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.

** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.

Rivista di Topografia e Catasto. Torino; 8°.

** **Rivista** filosofica in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia*. Pavia, 1903; 8°.

* **Rivista** internazionale di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.

* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
Séances et **travaux** de l'Académie des sciences morales et politiques. Paris; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze: 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
* **Stazioni** (Le) sperimentali agrarie italiane. Modena; 8°.
** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.
Valle di Pompei. Anno 1903, ottobre, 1903; 1904, maggio, 1904.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap, VIII Deel. Achtste Stuk. Amsterdam; 8°.
* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.
** **Zoologischer Anzeiger**, herausg. von Prof. J. Victor Carus in Leipzig; 8°.

Dal 19 Giugno al 20 Novembre 1904.

Abderhalden (E.). Neuere Versuche über künstliche Partenogenesis und Bastardirung. Berlin, 1904; 8°.
— u. **Oppenheimer** (C.). Ueber das Vorkommen von Albumosen im Blute. Strassburg, 1904; 8°.
— u. **Rona** (P.). Fütterungsversuche mit durch Pankreatin, durch Pepsinsalzsäure plus Pankreatin und durch Säure hydrolysierten Casein. Strassburg, 1904; 8°.
— u. **Barker** (L. F.). Der Nachweis von Aminosäuren in Harne. Strassburg, 1904; 8° (*dall'A. Dr. E. Abderhalden*).
Aicardi (G. L.). La causa universale dei fenomeni. Savona, 1904; 8° (*dall'A.*).
** **Beltrami** (E.). Opere matematiche. T. 2°. Milano.
Berlese (A.). Attività delle soluzioni alcooliche di sublimato corrosivo a titolo elevato in alcune manifestazioni morbose. Firenze, 1904; 8° (*dall'A.*).
Borredon (G.). La grande scoperta del secolo XX. Ischia, 1904; 8° (*Id.*).
Brioschi (Fr.). Opere matematiche. Vol. III. Milano, 1904; 8° (*dono del Comitato per le Onoranze a Fr. Brioschi*).
Caesij (F.). Phylosophicarum tabularum ex frontispiciis naturalis theatri... desumpta. Prima Pars. In stirpium scientiae, ac studiorum institutionem totiusque herbariae syntaxis Prospectus. Studio et cura Cl. conlegae R. Pirotta iterum edendum decrevere. Roma, 1903; 4° (*dalla R. Accad. dei Lincei*).
Davidson (G.). The Apparent Projection of Stars upon the bright Limb of the Moon at Occultation, and Similar Phenomena at Total Solar Eclipses, Transits of Venus and Mercury etc. San Francisco, 1900; 8° (*dall'A.*).

De Vecchi (B.). Due casi di arresto di sviluppo unilaterale del rene. Bologna, 1904; 8°.

— L'azione di alcuni estratti organici sul processo infettivo da *bacillus icteroides*. Siena, 1904; 8°.

— Questioni antiche e moderne sui fenomeni teratologici. Varallo, 1904; 8°.

— Ueber einen Fall von Hypernephrom der Leber. Berlin, 1904; 8°.

— e **Colombo** (G.). La simpatectomia cervicale in relazione con lo sviluppo e il decorso della tubercolosi oculare sperimentale. Bologna, 1904; 8°.

— e **Sinibaldi** (G.). Sarcoma bilaterale del rene complicato a tubercolosi polmonare. Bologna, 1904; 8° (*dall'A. B. De Vecchi*).

Diels (O.) u. **Abderhalden** (E.). Zur Kenntniss des Cholesterins. Berlin, 1904; 8° (*dall'A. Dr. E. Abderhalden*).

Fatio (V.). Faune des Vertébrés de la Suisse. Vol. II. Histoire naturelle des Oiseaux, IIme part. Genève et Bâle, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Fischer (E.) u. **Abderhalden** (E.). Synthese von Polypeptiden. V. Derivate des Prolins (α Pyrrolidin-carbonsäure). Berlin, 1904; 8°.

— Notizen über Hydrolyse von Proteinstoffen. Strassburg, 1904; 8° (*dall'A. Dr. E. Abderhalden*).

** **Forel** (F.-A.). Le Leman. Monographie Limnologique. T. 3me. Lausanne, 1904; 8°.

Galilei (G.). Le Opere. Vol. XIV. Firenze, 1904; 8° (*dono del Ministero dell'Istruzione Pubblica*).

Grenander (S.). Les variations annuelles de la température dans les lacs suédois. Upsala, 1904; 8° (*dall'A.*).

Hauswaldt (H.). Interferenz Erscheinungen an doppeltbrechenden Krystallplatten im konvergenten polarisirten Licht. Mit einem Vorwort von Th. Liebisch. Magdeburg, 1902. 1 vol. di tav.; 4°.

— Interferenz Erscheinungen im polarisirten Licht. Magdeburg, 1904. 1 vol. di tav.; 4° (*dono del sig. Hans Hauswaldt*).

Helmert (F. R.). Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler und Genauigkeit. Berlin, 1904; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Klein (C.). Ueber einem Zusammenhang zwischen optischen Eigenschaften und chemischer Zusammensetzung beim Vesuvium. Berlin, 1904; 8°.

— Mittheilungen über Meteoriten. Berlin, 1904; 8°.

— Ueber das Meteoreisen von Persimmon Creek, bei Hot House, Cheroker Co., Nord Carolina. Berlin, 1904; 8° (*Id.*).

Kohlrausch (F.). Die bisherige Tätigkeit de Physikalisch-technischen Reichsanstalt. Braunschweig, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Largaiolli (V.). Notizie fisiche e biologiche sul lago di Cepich in Istria. Mostruosità del Cavedano. Parenzo, 1904.

— Le diatomee del Trentino. Trento, 1904; 8° (*dall'A.*).

Leonardi (G.). Insetti che distruggono il grano ed altri cereali nei magazzini. Portici, 1903; 8°.

— La cocciniglia del Gelso. Portici, 1903; 8° (*Id.*).

Lohest (M.), **Habets** (A.) et **Forir** (H.). La géologie et la reconnaissance du terrain houllier du nord de la Belgique. Liège, 1904; 8° (*dagli AA.*).

Lussana (S.). Influenza della pressione sulla resistenza elettrica dei metalli. Pisa, 1903; 8°.

— L'orologio portatile inciso da Lorenzo Mascheroni nel 1776. Bergamo, 1904; 8°.

— Proprietà termiche dei solidi e dei liquidi. Pisa, 1904; 8° (*dall'A.*).

Marr (B.). Der Baum der Erkenntnis. Dux, 1904; 8° (*Id.*).

Naccari (A.). Sulla dispersione della elettricità da metalli diversi. Pisa, 1904; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Noether (M.). Luigi Cremona. Leipzig, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Reichenow** (A.). Die Vögel Afrikas. III. Bd. 1 Hälfte. V. Halb. Neudamm, 1904; 8°.

Reycend (G. A.). Commemorazione del Socio Comm. Ing. Giacinto Berruti. Torino, 1904; 8° (*dall'A.*).

Righi (A.). Sulla radioattività dei metalli usuali. Bologna, 1904; 4°.

— Esperienze dimostrative sulla radioattività. Bologna, 1904.

— Di alcuni fenomeni osservati nell'aria ionizzata da corpi radioattivi. Roma, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Stok (J. P. v. der). Analyse des mouvements périodiques et apériodiques du niveau de la mer. Utrecht, 1904; 8° (*dall'A.*).

Toti (A.). La Dacriocistorinostomia come cura radicale conservatrice delle suppurazioni croniche e delle fistole del sacco lacrimale. Risultati ottenuti sui primi sette casi operati. Firenze, 1904; 8° (*Id.*).

Veronese (G.). La Laguna di Venezia. Discorso. Venezia, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

* *Dall'Università di Heidelberg:*

Behr (S.). Beitrag zur Casuistik der aus angeborenen Melanosen des Auges hervorgehenden Tumoren. Heidelberg, 1903; 8°.

Bergdolt (B.). Ueber das Verhalten einiger organischer Verbindungen bei höheren Temperaturen und bei Gegenwart von Kontaktsubstanzen. München; 8°.

Bettges (W.). Quantitative Bestimmungen und Trennungen durch Hydrazinsalze. Heidelberg, 1902; 8°.

Birckenstaedt (M.). Verallgemeinerung der in den " Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable von Herrn L. Koenigsberger aus Heidelberg " dargestellten Hülfsätze über das kinetische Potential. Heidelberg, 1902; 4°.

Bloch (F.). Ueber die Einwirkung des Wassers auf anorganische Salze. Heidelberg, 1903; 8°.

Bluntschili (H.). Der feinere Bau der Leber von Ceratodus forsteri, zugleich ein Beitrag zur vergleichenden Histologie der Fischleber. Jena, 1903; f°.

Bohe (W.). Die Reduktion von Oximen auf elektrolytischen Wege und die Homologen des Benzylamins. Heidelberg, 1902; 8°.

Bohn (R.). Ein Beitrag zur Kenntnis aromatischer Aldehyde. Heidelberg, 1902; 8°.

Bollenbach (H. F.). Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf 2, 4 Dinitrobenzoësäure. Heidelberg, 1902; 8°.

Bucher (K.). Ueber genu valgum und seine Behandlung. Heidelberg, 1903; 8°.

Bundschuh (R.). Zur Pathologie und Therapie der Brucheinklemmung. Tübingen, 1901; 8°.

Charasoff (G.). Aritmetische Untersuchungen über Irreduktibilität. Heidelberg, 1902; 8°.

Darapsky (A.). Die Reduktion der Ketonhydrazine und Ketazine. Leipzig, 1903; 8°.

Dertinger (K.). Ueber tiefsitzende Lipome. Tübingen, 1903; 8°.

Erb (W.). Ueber das Salzsäurebindungsvermögen einiger reiner Eiweisskörper. München, 1903; 8°.

Erler (A.). Ueber Condensationsreaktionen der 1-5-Dichetone. Heidelberg, 1903; 8°.

Fellenz (J. A.). Ueber Xerostomie. Heidelberg, 1903; 8°.

Fischler (F.). Ueber den Fettgehalt in Niereninfarcten, zugleich ein Beitrag zur Frage der Fettdegeneration. Berlin, 1902; 8°.

Flaecher (F.). Ueber p-Methoxyphenyllutidin und p-Methoxyphenyllutidindicarbonsäure. Heidelberg, 1903; 8°.

Focken (R. H.). Ueber chronisch ankylosierende Entzündung der Wirbelsäule. Jena, 1903; 8°.

Fox (M.). Kondensation von aliphatischen Aldehyden mit Malonsäure und Cyanessigsäure bei Gegenwart organischer Basen. Heidelberg, 1903; 8°.

Fraenkel (C.). Ueber den Gefässbündelverlauf in den Blumenblättern der Amaryllidaceen. Jena, 1903; 8°.

Garett (H.). Ueber die Viskosität und den Zusammenhang einiger Colloid-Lösungen. Heidelberg, 1903; 8°.

Gast (P.). Die Bahn des periodischen Kometen 1894 I (Denning). Karlsruhe, 1903; 8°.

Goldschmidt (E.). Zur Aetiologie der Sehrumpfniere. Heidelberg, 1903; 8°.

Grund (G.). Ueber den Gehalt des Organismus an gebundenen Pentosen. Strassburg, 1903; 8°.

Gutmann (L.). Ueber Abkömmlinge der (bb_1) Diazole. Heidelberg, 1902; 8°.

Gutmann (P.). Ueber den Hydrazimonocarbonester. Heidelberg, 1903; 8°.

Haack (O. H. A.). Zur Kenntnis des Methylenaminoacetonitrils. Heidelberg, 1903; 8°.

Hadlich (R.). Ein Fall von Tumor cavernosus des Rückenmarks mit besonderer Berüchsichtigung der neueren Theorieen über die Genese des Cavernoms. Cassel, 1902; 8°.

Hahn (H.). Eine neue Methode zur Gewinnung alkylierter Benzolkohlenwasserstoffe. Heidelberg, 1903; 8°.

Hamburger (C.). Beiträge zur Kenntnis von Trachelius ovum Ehrbg. Jena, 1903; 8°.

Hanfland (F.). Dynamische Untersuchungen über Einführung einer Alkylgruppe. Heidelberg, 1902; 8°.

Hasse (H.). Die Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft und ihre wirtschaftliche Bedeutung. Heidelberg, 1902; 8°.

Hassel (K.). Quantitative Trennungen durch Persulfat in saurer Lösung. Heidelberg, 1903; 8°.

Hildenstab (E.). Magenerkrankungen bei Cholelithiasis. Heidelberg, 1903; 8°.

Hoffmann (W.). Beitrag zur Kenntnis der Tuberkuloseverbreitung in Baden. Würzburg, 1903; 8°.

Holzer (W.). Ueber Albuminurie im Kindesalter, Heidelberg, 1903; 8°.

Hütwold (K.). Ueber die Fälle von Strumitis nach den Beobachtungen der Heidelberger chirurgischen Klinik aus den Jahren 1897-1901. Heidelberg, 1903; 8°.

Jacobsthal (F.). Ueber Diamidosäuren aus ex-Dichlorundecylsäure. Heidelberg, 1903; 8°.

Jahn (A.). Neue Reduktionsmethoden zur quantitativen Bestimmung der Halogene in Chloraten, Bromaten und Jodaten. Heidelberg, 1903; 8°.

Joesting (F.). Beiträge zur Anatomie der Sperguleen, Polycarpeen, Paronychieen, Scleranthеen und Pterantheen. Jena, 1902; 8°.

Jost (E.). Parallaxenbestimmungen aus Durchgangsbeobachtungen in Meridian. Karlsruhe, 1903; 4°.

Kaestel (R.). Die angeborene Verlagerung der Niere in ihrer praktischen Bedeutung. Heidelberg, 1903; 8°.

Kalähne (A.). Schallgeschwindigkeit und Verhältnis der Spezifischen Wärmen der Luft bei hoher Temperatur. Leipzig, 1902; 8°.

Klaiber (E.). Ueber das Verhalten einiger sekundärer Säurehydrazide vom Typus des Dibenzhydrazids und Phtalhydrazids gegen alkalische Oxydationsmittel. Heidelberg, 1902; 8°.

Koch (Ph.). Ueber Fistula gastrocolica carcinomatosa. Berlin, 1903; 8°.

Kölsch (K.). Untersuchungen über die Zerfliessungserscheinungen der ciliaten Infusorien. Jena, 1902; 8°.

Korte (R.). Ueber die Reduktion von p. Isopropylbenzaldazin (Cuminaldazin) in alkalischer Lösung. Heidelberg, 1903; 8°.

Kraft (L.). Studien in der Pyrazol- und Pyridinreihe. Heidelberg, 1902; 8°.

Kuliga (P.). Zur Genese der congenitalen Dünndarmstenosen und Atresieen. Jena, 1903; 8°.

Küster (H.). Ueber den Durchgang von Bakterien durch den Insektendarm. Heidelberg, 1902; 8°.

Lange (A. E.). Ueber die Additionsfähigkeit des Dimethyl-1-3-cyclohexenon-5. Heidelberg, 1902; 8°.

Lehmann (O.). Ueber akute Osteomyelitis im Säuglingsalter. Strassburg, 1902; 8°.

Löffler (G.). Ueber kleine abgekapselte Empyeme im Kindesalter. Heidelberg, 1902; 8°.

Lotterhos (G. W.). Zur Kenntnis der aromatischen Aldehyde. Heidelberg, 1902; 8°.

Lüttge (W.). Panophtalmitis tubercolosa in puerperio. Leipzig, 1902; 8°.

Malzi (J.). Ueber ein Gesetz der electrolytischen Reduktion. Darmstadt, 1903; 8°.

Marangolo (C.). Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf m-Xylylmalonsäurediäthylester. Heidelberg, 1902; 8°.

Margolinsky (S.). Synthese von Betaïnen aus dialkylierten Aminoacetonitrilen. Heidelberg, 1903; 8°.

Mayer (F.). Ueber das Melaxylobenzylhydrazin. Heidelberg, 1902; 8°.

Mayer (M.). Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf 1, 2, 4 Dinitrophenylhydrazin. Heidelberg, 1902; 8°.

Miesemer (K.). Ueber psychische Wirkungen körperlicher und geistiger Arbeit. Leipzig, 1902; 8°.

Miltsch (O.). Ueber die Einwirkung von Luftsauerstoff auf Alkyläther. Heidelberg, 1903; 8°.

Morisse (R.). Ueber die Addition von schwefliger Säure an ungesättigte Verbindungen. Heidelberg, 1903; 8°.

Morstatt (H.). Beiträge zur Kenntnis der Resedaceen. Stuttgart, 1903; 8°.

Muckermann (E.). Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf Bernsteinsäuremonoäthylester, Succinaminsäure und Succinimid. Heidelberg, 1902; 8°.

Müller (L.). Ueber drei Fälle von Chorea chronica progressiva (Chorea hereditaria; Chorea Huntington). Leipzig, 1903; 8°.

Munch (E.). Ueber die Metallverbindungen der Aldehyd- und Keton- Kondensationsprodukte der Säurehydrazide. Heidelberg, 1903; 8°.

Munch (G.). Ueber Diäthylresorcin und seine Derivate. Heidelberg, 1902; 8°.

Neff (J. H.). Zwei Fälle von Exophthalmus pulsans traumaticus. Heidelberg, 1902; 8°.

Neu (M.). Experimentelle und Klinische Blutoruck-Untersuchungen mit Gärtner's Tonometer. Heidelberg, 1902; 8°.

Paege (E.). Zwei Beiträge zur Harnröhrenchirurgie. Heidelberg, 1903; 8°.

Regelmann (K.). Geologische Untersuchung der Quellgebiete von Acher und Murg im nördlichen Schwarzwald. Stuttgart, 1903; 8°.

Reichard (A.). Ueber Cuticular- und Gerüst-Substanzen bei wirbellosen Tieren. Frankfurt, 1902; 8°.

Renz (F.). Die Colporrhaphia fusiformis und deren Ergebnisse. Heidelberg, 1903; 8°.

Ritzhaupt (O.). Ein Fall von tumorartiger secundärer, Leberaktinomykose. Heidelberg, 1903; 8°.

Roeser (H.). Ein Beitrag zur Chirurgie der Milz- und Leberverletzungen. Tübingen, 1902; 8°.

Rönneburg (A.). Ueber eine Synthese von Pyrazolen aus Acetylaceton und Diazoessigester. Heidelberg, 1903; 8°.

Rothmund (C.). Controlle der Pavy'schen Methode für die quantitative Zuckerbestimmung, nebst einem Beitrag zur normalen Reduktionskraft des Harnes. Heidelberg, 1903; 8°.

Saager (A.). Ueber Derivate des Phenoxazins. Stuttgart, 1902; 8°.

Sänger (W.). Ueber Condensationen von Formaldehyd mit 1, 3-Diketonen. Heidelberg, 1903; 8°.

Schaarwächter (H. R.). Ueber bakterielle Darmauswanderung unter dem Einflusse von Curarin. Berlin, 1903; 8°.

Schlippe (P.). Physikalische Untersuchungen bei der Anwendung des Magenschlauches. Naumburg a. S., 1903; 8°.

Schmidt (W.). Ueber 87 abdominale Myomoperationen aus der chirurgischen Klinik zur Heidelberg (1892-1901). Frankfurt a. M., 1902; 8°.

Schmitz (A. J.). Ueber das Hydrazid der Trimesinsäure und der Hemimellithsäure. Heidelberg, 1902; 8°.

Schneider (W.). Nitril und Amid der Phenyllutidindicarbonsäure. Heidelberg, 1903; 8°.

Schobess (R.). Die Behandlung der Chorioiditis disseminata mit Natrium salicylicum. Heidelberg, 1903; 8°.

Scholz (V.). Dynamische Untersuchungen über die Verseifung von Säureestern und die Affinitätsconstanten derselben. Heidelberg, 1902; 8°.

Schöne (G.). Vergleichende Untersuchungen über die Befestigung der Rippen an der Wirbelsäule mit besonderer Berücksichtigung ihrer Lage zur Arteria vertebralis. Leipzig, 1902; 8°.

Schott (A.). Ueber Dauerheilungen nach Gallensteinoperationen. Tübingen, 1903; 8°.

Schröter (F.). Ueber Kondensationen von β-Oxy-α-naphtaldehyd mit Acetessigester und Analogen. Breslau, 1902; 8°.

Schuch (H.). Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat und Semicarbazidchlorhydrat auf Oxymethylencampher. Heidelberg, 1902; 8°.

Seligman (R.). Ueber die Oxydation von Oximen und Prim. Aminen. Zürich, 1902; 8°.

Sevin (O.). Beitrag zur Kenntnis von sieben- und mehrgliedrigen-heteroatomigen Ringen. Heidelberg, 1902; 8°.

Siebe (M.). Ueber den anatomischen Bau der Apostasiinae. Heidelberg, 1903; 8°.

Söhngen (A.). Ueber Prostatitis acuta mit Abscessbildung nach Furunkulose. Leipzig, 1903; 8°.

Steiner (F.). Ueber die Reduktion ungesättigter Phenoläther. Heidelberg, 1902; 8°.

Strumpf (O.). Nitrile und Amide von Pyridindicarbonsäuren. Halle a. S., 1902; 8°.

Tischler (G.). Die Berberidaceen und Podophyllaceen. Leipzig, 1902; 8°.

Tomasczewski (A.). Ueber Spaltungen des Benzoins unter dem Einfluss katalytisch wirkender Substanzen. Breslau, 1902; 8°.

Warnecke (G.). Ueber Nitrile von Monoalkylacetessigsäuren und über Amidopyrazole. Heidelberg, 1903; 8°.

Weber (W.). Ueber Monopropylhydrazin und Dipropylhydrazin. Heidelberg, 1903; 8°.

Wilde (A.). Beiträge zur Anatomie der Linaceen. Heidelberg, 1902; 8°.

Wittmer (H.). Ein Beitrag zur Kenntnis der Beziehungen der akuten Miliartuberkulose zur Operation Tuberkuloser Lymphomata Colli. Tübingen, 1901; 8°.

Wüstenfeld (R.). Ueber die Bildung von Glycylketten mittelst Säureaziden. Heidelberg, 1903; 8°.

Umber (H.). Ueber aliphatische Heptylamidosäuren $C_nH_{2n-1}(NH.C_7H_{15})O_2$. Heidelberg, 1903; 8°.

Dal 26 Giugno al 27 Novembre 1904.

Annali bibliografici e Catalogo ragionato delle edizioni di Barbèra, Bianchi e Comp. e di G. Barbèra con elenco di libri, opuscoli e periodici stampati per commissione. 1854-1880. Firenze, 1904; 4° (*dono dei Figli e Successori di G. Barbèra*).

Atti del Congresso internazionale di scienze storiche. Vol. XI. Storia della filosofia. Storia delle religioni. Roma, 1904; 8°.

Berlanga (M. R.). Catálogo del Museo Loringiano. Málaga, 1903; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Costa (E.). Archivio del Comune di Sassari. Sassari, 1902; 4°.

— Gli Statuti del Comune di Sassari nei secoli XIII e XIV e un errore ottantenne denunziato alla storia sarda. Sassari. 1904; 8° (*dall'A.*).

Dalla Vedova (G.). La Società Geografica italiana e l'opera sua nel sec. XIX. Roma, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

De Casamichela (J.). De Hermocrate syracusanorum imperatore eiusque rebus gestis. Aug. Taurinorum, 1904; 8° (*dall'A.*).

** **Delitzsch** (F.). Assyrische Lesestücke mit grammatischen Tabellen und vollständigem Glossar. Leipzig, 1900; 4°.

Fiorese (S.). Commemorazione di Salvatore Cognetti De Martiis. Bari, 1904; 8° (*dall'A.*).

** **Gelli** (J.). Gli Archibugiari milanesi. Milano, 1905; 4°.

Gor (N.). De l'inutilité d'une lecture incomplète. Turin, 1903; 2 c. 8° (*dall'A.*).

Manara (U.). Delle Società e delle Associazioni commerciali. Vol. II, sez. II. Torino, 1904; 8° (*Id.*).

** **Mazzatinti** (G.) e **Pintor** (P.). Inventari dei manoscritti delle Biblioteche d'Italia. Vol. XII, fasc. 1-6 (1901-1903); 8°.

** **Much** (M.). Die Heimat der indogermanen im Lichte der urgeschichtlichen Forschung. Jena, 1904; 8°.

Negroni (C.). Relazioni e discorsi al Consiglio comunale di Novara. Parte II. Novara, 1904; 4° (*dalla Commissione amministrativa della Biblioteca Negroni*).

** **Parascandolo** (G.). Notizie autentiche sulla famiglia e sulla patria di Gio. Battista della Porta, con appendice delle famiglie nobili e degli uomini illustri di Vico-Equense. Napoli, 1903; 8°.

Pereira de Lima (J. M.). Os Navegadores e Conquistadores Phenicios e Carthaginezes. Lisboa, 1903; 8° (*dall'A.*).

Relacion de las ceremonias y ritos y poblacion y gobernacion de los Indios de la Provincia de Mechuacan. Morelia, 1903; 8° (*dono del sig. dottor M. Martínez Solorzano encargado del Museo Michoacano*).

Rizzacasa (G.). Quattro cerchi con tre croci. Nuova soluzione dell'enigma dantesco in Par., I, 37-42. Cefalù, 1904; 8°.

Roberti (M.). Ricerche intorno alla tutela dei minorenni. Padova, 1904; 8° (*dall'A.*).

Romanin-Jacur (L.). Navigazione interna. Conferenza. Torino, 1904; 8° (*dono del Municipio di Torino*).

** **Scripture** (Ed. W.). The elements of experimental phonetics. London, 1904; 8°.

Stampini (E.). Inventario dei codici superstiti greci e latini antichi della Biblioteca Nazionale di Torino. Torino, 1904; 8° (*dono della R. Univ,*).

Sweden its People and its Industry. Historical and Statistical Handbook published by order of the Government. Stockholm, 1904, 8° (*dalla R. Biblioteca dell'Università di Upsala*).

Taramelli (A.). Rinvenimento di nuove iscrizioni romane dell'antica Turris Libisonis. Roma, 1904; 4° (*dall'A.*).

Torre (A.). Il pensiero filosofico di Giovanni Caroli, modenese. Napoli, 1899; 8° (*Id.*).

* *Dall' Università di Heidelberg.*

Anzeige der Vorlesungen; welche im Sommer-Halbjahr 1903, und Winter Halbjahr 1903-1904 auf der Grossh. badischen Ruprecht-Karls-Universität zu Heidelberg. Heidelberg, 1903; 8° 2 fasc.

Baer (L.). Die illustrierten historienbüchner des XV. Jahrhunderts ein Beitrag zur Geschichte des Formschnitts. Strassburg, 1902; 8°.

Baumann (I.). Die Sprache der Urkunden aus Yorkshire im 15. Jahrhundert. Heidelberg, 1902; 8°.

Beck (H.). Lohn- und Arbeitsverhältnisse in der deutschen Maschinenindustrie am Ausgang des 19. Jahrhunderts. Berlin, 1902; 8°.

Benary (W.). Zur Geschichte des konsonantischen auslauts der Nomina im Alt- und Neufranzöischen. Darmstadt, 1902; 8°.

Beringer (J. A.). Geschichte des Mannheimer Zeichnungsakademie. Strassburg, 1902; 8°.

Berkenbusch (F.). Die deutsche Portland-Cement-Industrie und ihre Kartellbestrebungen. Heidelberg, 1903; 8°.

Breslauer (B.). Die Notenbanken in Württemberg 1876-1900. München, 1903; 8°.

Bertola (A.). Ueber Dante's Werk: " De Monarchia „. Heidelberg, 1903; 8°.

Blum (H.). Das Bevölkerungsproblem im stillen Weltmeer. Berlin, 1902; 8°.

Brandenburger (C.). Das Hauländer-Dorf Goldau bei Posen. Posen, 1903; 8°.

Brie (M.). Savonarola in der deutschen Literatur. Breslau, 1903; 8°.

Buchner (O.). Die mitteralterliche Grabplastik in Nord-Thüringen mit besonderer Berücksichtigung der Erfurter Denkmäler. Strassburg, 1902; 8°.

Buhl (H.). Zur Geschichte der Universität Heidelberg unter Grossherzog Friedrich. Heidelberg, 1902; 4°.

— Römisches Recht- und bürgerlisches Gesetzbuch. Heidelberg, 1902; 4°.

Dönges (R.). Die handelspolitische Bedeutung der Ausfuhrprämien. Frankfurt a. M., 1902; 8°.

Elliott (E. G.). Die Staatslehre John C. Calhouns. Leipzig, 1902; 8°.

Elsenhans (T.). Das Kant-Friesische Problem. Heidelberg, 1902; 8°.

Fleischmann (S.). Die Agrarkrisis von 1845-1855 mit besonderer Berücksichtigung von Baden. Heidelberg, 1902; 8°.

Flex (W.). Ueber den Baconischen und den Cartesianischen Zweifel. Heidelberg, 1903; 8°.

Fox (Ch. J.). Napoleon Bonaparte and the siege of Toulon. Washington, 1902; 8°.

Fuchs (E.). Die Merziger Mundart. Darmstadt, 1903; 8°.

Geisberg (M.). Israhel van Meckenem. Strassburg, 1902; 8°.

Gerhard (G. A.). Untersuchungen zur Geschichte des griechischen Briefes. Tübingen, 1903; 8°.

Gerhard (H.). Die volkswirtschaftliche Entwicklung des Südens der Vereinigten Staaten von Amerika von 1860 bis 1900, mit besonderer Berücksichtigung der Negerfrage. Heidelberg, 1903; 8°.

Gerhardt (F.). Die Landarbeiter in der Provinz Ostpreussen. Lucka, 1902; 8°.

Heubach (D.). Das Kind in der griechischen Kunst. Wiesbaden, 1903; 8°.

Hubner (F.). Zur Lage des Kleinhandels. Heidelberg, 1902; 8°.

Jordan (R.). Die altenglischen Säugetiernamen. Heidelberg, 1902; 8°.

Kaldenberg (E. v.). Die rechtliche Stellung des Versicherungs-Argenten. Strassburg, 1903; 8°.

Kauffmann (F.). Traktat über die Neulichtbeobachtung und den Jahresbeginn bei den Karäern von Samuel B. Moses. Leipzig, 1903; 8°.

Klausa (S.). Einflusse der preussischen Steuerreform auf den ländlichen Grundbesitz der Provinz Schlesien. Merseburg, 1902; 8°.

Klausner (J.). Die Messianischen Vorstellungen des judischen Volkes im Zeitalter der Tannaiten kritisch untersucht und im Rahmen der Zeitgeschichte dargestellt. Krakau, 1903; 8°.

Kollmann (J.). Einige Kapitel aus der Haftpflicht der Betriebsunternehmer der Eisenbahnen. Heidelberg, 1903; 8°.

Kretschmer (E.). Gellert als Romanschriftsteller. Breslau, 1902; 8°.

Levy (L.). Reconstruction des Commentars Ibn Esras zu den ersten Propheten. Pressburg, 1903; 8°.

Levy (R.). Martial und die deutsche Epigrammatik des siebzehnten Jahrhunderts. Stuttgart, 1903; 8°.

Ludtke (G.). Geschichte des Wortes " Gothisch „ im 18. und 19. Jahrhundert. Strassburg, 1903; 8°.

Martin (G.). Geschichtliche Entwicklung der Kartellbildung in der deutschen Sprengstoff-Industrie. Heidelberg, 1903; 8°.

Metzner (R.). Die Staatstheorie des John Locke nach seinem zweiten Traktat " Ueber die bürgerliche Regierung „. Berlin, 1903; 8°.

Michaelson (H.). Lukas Cranach der Aeltere Untersuchung über die stilistische Entwickelung seiner Kunst. Leipzig, 1902; 8°.

Nedderich (W.). Wirtschaftsgeographische Verhältnisse Ansiedlungen und Bevölkerungsverteilung im ostfälischen Hügel- und Tieflande. Stuttgart, 1902; 8°.

Niebergall (F.). Die paulinische Erlösungslehre im Konfirmandenunterricht. Tübingen u. Leipzig, 1903; 8°.

Nikolajewitsch (B. S.). Die kirchliche Architektur der Serben im Mittelalter. Belgrad, 1902; 8°.

Peltzer (A.). Ueber Malweise und Stil in der holländischen Kunst. Heidelberg, 1902; 8°.

Pfannenschmidt (E.). Die landwirtschaftliche Konkurrenz Argentiniens. Heidelberg, 1902; 8°.

Pfeiffer (W.). Ueber Fouqués Undine. Heidelberg, 1902; 8°.

Rahlson (H.). Die badische Industrie der Steine und Erden und ihre Arbeiter. Heidelberg, 1903; 8°.

Richter (F.). Studien über die Diskontpolitik der Zentralnotenbanken unter näherer Berücksichtigung der Bank von England, Bank von Frankreich und Reichsbank. München, 1901; 8°.

Ritzinger (G.). Die Torfwirtschaft und ihre Entwicklung in Bayern. München; 8°.

Schon (J.). Die Ulpian-Celsinische Durchgangstheorie. Rostock, 1903; 8°.

Schorstein (N.). Der Commentar des Karäers Jephet ben' Alì zum Buche Rûth zum ersten Male nach drei Mss. ediert, mit Einleitung und Ammerkungen versehen. Berlin, 1903; 8°.

Schufftan (G.). Studien über die gewerbliche Entwickelung des Gast- und Schankwirtswesens in Deutschland. Breslau, 1903; 8°.

Seibt (G.). Die Wartheschiffahrt. Heidelberg, 1903; 8°.

Sester (F.). Die wirtschaftliche Lage der hausindustriellen Handmaschinensticker in der Ostschweiz. Bonn, 1903; 8°.

Simon (J.). Der Mischna-Commentar des Maimonides zum Tractat Mo' ed katan und zum Tractat Sabbath V, VI, VII. Berlin, 1902; 8°.

Sollas (H.). Goldsmiths Einfluss in Deutschland im 18. Jahrhundert. Heidelberg, 1903; 8°.

Stucke (G.). Französisch " Aller „ und seine romanischen Verwandten. Darmstadt, 1902; 8°.

Stutzke (F.). Innere Wanderungen, die Ursachen des Arbeitermangels in der preussischen Landwirtschaft und des Zuzugs ausländischer Wanderarbeiter. Berlin, 1903; 8°.

Struve (J.). Die Kremper Marsch in ihren wirschaftlichen Verhältnissen. Merseburg, 1903; 8°.

Toepke (G.). Die Matrikel der Universität Heidelberg. Viertel Theil von 1704 bis 1807. Heidelberg, 1903; 8°.

Ullmann (W.). Die hessische Gewerbepolitik von der Zeit der Rheinbundes biz zur Einführung der Gewerbefreiheit im Jahre 1866, insbesondere das Handwerk und das Hausiergewerbe. Darmstadt, 1903; 8°.

Voigtel (M.). Die direkten Staats- und Gemeindesteuern im Grossherzogtum Baden, eine Darstellung ihrer Entwickelung und Ergebnisse von 1866-1901. Jena, 1903; 8°.

Wegener (L.). Der wirschaftliche Kampf der Deutschen mit den Polen um die Provinz Posen. Posen, 1903; 8°.

Weihe (E. M.). Der Einfluss der deutschen Schutzzollpolitik auf die Entwicklung der Industrie und Landwirtschaft. Hamburg, 1902; 8°.

Wickert (F.). Der Rhein und sein Verkehr mit besonderer Berücksichtigung der Abhängigkeit von den natürlichen Verhältnissen. Stuttgart, 1903; 8°.

Wiegand (O.). Adolf Dauer ein Beitrag zur Kunstgeschichte Augsburgs im XVI. Jahrhundert. Strassburg, 1903; 8°.

Wiese (E.). Die Politik der Niederländen während des Kalmarkriegs (1611-1613) und ihr Bundnis mit Schweden (1614) und den Hansestäden (1616). Heidelberg, 1903; 8°.

Dal 20 Novembre al 4 Dicembre 1904.

Chiapusso-Voli (Irene) et **Mattirolo** (O.). Les Bochiardo botanistes piémontais d'après leurs manuscrits inédits. Genève, 1904; 8° (*dall'A. prof. Mattirolo, Socio residente*).

Gianoli (C. A.). Il vino di Ghemme e le sue qualità igieniche. Varallo, 1904; 8° (*dall'A.*).

Guhl (G.). Lüchen=Quadrate. Rechen=Aufgaben zur Uebung des Scharfsinns. Zürich, 1904; 8°.

Guidi (C.). L'ellisse di elasticità nella scienza delle costruzioni. Torino, 1904; 8°.

— Prove di resistenza su voltine di mattoni forati. Torino, 1904; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Mattirolo (O.). Note bibliografiche Allioniane e Nomenclator Allionianus pubblicati in occasione della ricorrenza centenaria della morte di Carlo Allioni 1804-1904. Genova, 1904; 8° (*Id.*).

Scritti botanici pubblicati nella ricorrenza centenaria della morte di Carlo Allioni, 30 luglio 1804-30 luglio 1904. Genova, 1904; 4° (*Id.*).

* *Dall'Università di Upsala:*

Åkerblom (F.). Recherches océanographiques. Upsala, 1904; 8°.

Benedicks (C.). Recherches physiques et physico-chimiques sur l'acier au carbone. Uppsala, 1904; 8°.

Ekman (S.). Die Phyllopoden, Cladoceren und freilebenden Copepoden der nord-schwedischen Hochgebirge. Ein Beitrag zur Tiergeographie, Biologie und Systematik der arktischen, nord und mittel-europäischen Arten. Naumburg a. S., 1904; 8°.

Hesselman (O. A. H. W.). Zur Kenntnis des Pflanzenlebens schwedischer Laubwiesen. Eine physiologisch-biologische und pflanzengeographische Studie. Jena, 1904; 8°.

Hofman-Bang (O.). Studien über schwedische Fluss- und Quellwässer. Uppsala, 1904; 8°.

Holmberg (K.). Bidrag till kännedomen om de fysikalisktkemiska egenskaperna hos vattenlösningar af lantan-, cerium- och thorium-salter. Upsala, 1903; 8°.

Jansson (M.). Om värmeledningsförmågan hos snö. Upsala, 1904; 8°.

Koch (J.). Den elektriska gnistan. En undersökning af de fysikaliska villkoren för dess slocknande. Upsala, 1904; 8°.

Kullgren (C.). Om mettallsalters hydrolis. Stockholm, 1904; 8°.

Lindgren (B.). Sur " le cas d'exception de M. Picard „ dans la théorie des fonctions entières. Uppsala, 1903; 8°.

Lundberg (F.). 1. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen. 2. Återförsäkring af kollektivrisker. Uppsala, 1903; 8°.

Nordenskjöld (I.). Studier öfver molybdensemipentoxid och des föreningar. Stockholm, 1903; 8°.

Trägårdh (I.). Monographie der arktischen Acariden. Jena, 1904; 4°.

Zeipel (E.). Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps. Upsala, 1904; 4°.

Dal 27 Novembre all'11 Dicembre 1904.

Catalogo generale illustrato della Mostra dell'Antica arte senese, aprile-agosto 1904. Siena, 1904; 8° (*dono del Comitato Esecutivo*).

Dictionariu (Nou) Francesŭ-românŭ si românŭ-francesŭ..... de G. M. Antonescu. 2da edit. Bucureşti, 1895; 8°.

Kramar (C. K.). Ueber die sumerisch-gruzinische Spracheinheit. Prag, 1904; 8° (*dall'A.*)

Levi (A.). Dal Mahâbhârata. III. Saggio di versione metrica. Torino, 1905; 8°.

Sforza (G.). Il re Carlo Alberto e gli scavi di Luni. Spezia, 1904; 8° (*dall'A.*).

* *Dall'Università di Upsala:*

Alexanderson (N.). Bidrag till läran om penninganvisning enligt svensk rätt. Upsala, 1904; 8°.

Andersson (E.). Ausgewählte Bemerkungen über den bohairischen Dialect im Pentateuch Koptisch. Uppsala, 1904; 8°.

Arnell (E.). Bidrag till biskop Hans Brasks lefnadsteckning. Stockholm, 1904; 8°.

Årsskrift, Upsala universitets. 1903. Upsala, 1902-4; 8°.

Ekeberg (B.). Studier i patenträt. Upsala, 1904; 8°.

Fernling (G. O. F.). Första kapitlet af Mišnatraktaten Pireke 'Abot. Hebräiska texten med paralellställen ur Midraš, Mišna och Talmud jämte inledning öfversättning och kommentar. Upsala, 1904; 8°.

Föreläsningar och öfningar vid Kungl. Universitetet i Uppsala höst-terminen 1903. Uppsala, 1903; 8°.

— vår terminen 1904. Uppsala, 1904; 8°.

Grath (G. F.). Svenska kyrkans brudvigsel. En historisk-liturgisk framställning. Upsala, 1904; 8°.

Karlberg (G.). Den långa historiska inskriften i Ramses III:s tempel i Medînet-Habu öfversatt och kommenterad. Uppsala, 1903; 8°.

Kjellmark (K.). En stenåldersboplats i Järavallen vid Limhamn. Stockholm, 1903; 8°.

Larsson (I.). Grundzüge der Sprache Logaus. Laut- und Formenlehre. Upsala, 1904; 8°.

Matrikel, Uppsala universitets, på uppdrag af Universitetets Rektor utgifven af Aksel Andersson. 4. 1665-1680. Inbjudningsskrift. Uppsala, 1904; 8°.

Palmgren (C.). English gradation-nouns in their relation to strong verbs. Uppsala, 1904; 8°.

Sundén (K.). Contributions to the study of elliptical words in modern english. Upsala, 1904; 8°.

Dal 4 al 18 Dicembre 1904.

Chiapusso Voli (I.). Appunti intorno alla " Iconographia Taurinensi ", 1752-1868. Genova, 1904; 8°.

— e **Mattirolo** (O.). Les Bocchiardo botanistes piémontais d'après leurs manuscrits inédits. Genève, 1904; 8° (*dall'Autrice*).

Galilei (G.). Le opere. Vol. XV. Firenze, 1904; 8° (*dono del Ministero dell'I. P.*).

Grassi (G.). Corso di elettrotecnica. Vol. I. Alternatori, Dinamo a corrente continua e trasformatori. Torino-Roma, 1904; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Guareschi (I.). Vannoccio Biringucci e la Chimica tecnica. Note storiche: La Chimica presso i Cinesi - Faustino Malaguti. Torino, 1904 (*Id.*).

Haeckel (E.). Die Lebenswunder. Gemeinveständliche Studien über biologische Philosophie. Stuttgart, 1904; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Maggiora (A.) e **Valenti** (G. L.). Sulla sieroprofilassi del tifo essudativo dei Gallinacei. Modena, 1904; 4° (*dagli AA.*).

* ***Dalla " Grossh. Technischen Hochschule zu Karlsruhe ":***

Auerbach (M.). Die Dotterumwachsung und Embryonalanlage vom Gangfisch und der Aesche im Vergleich zu denselben Vorgängen bei der Forelle. Karlsruhe, 1904; 8°.

Bloch (L.). Der Einfluss der Kurvenform auf die Wirkungsweise des Synchronmotors. Stuttgart, 1903; 8°.

Czeija (K.). Die experimentelle Untersuchung der Kommutationsvorgänge in Gleichstrommaschinen. Stuttgart, 1903; 8°.

Fridericiana. Grossherzoglich badische technische Hochschule zu Karlsruhe. Programm für das Studienjahr 1904/1905. Karlsruhe, 1904; 8°.

Hamel (G.). Die Lagrange-Euler'schen Gleichungen der Mechanik. Leipzig, 1904; 8°.

Heymann (S.). Ueber die Nitrophenylketone des m.- und p.-Xylols, des Mesitylens und Pseudocumols. Karlsruhe, 1903; 8°.

Klein (L.). Die botanischen Naturdenkmäler des Grossherzogtums Baden und ihre Erhaltung. Karlsruhe, 1904; 8°.

La Cour (I. Lassen). Leerlauf- und Kurzschlussversuch in Theorie und Praxis. Braunschweig, 1904; 8°.

Ludwig (W.). Projective Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie. Karlsruhe, 1904; 8°.

Marguerre (F.). Experimentelle Untersuchungen am polycyklischen Stromverteilungssystem Arnold-Bragstad-la Cour. Stuttgart, 1904; 8°.

Mehlis (H.). Dampfschnellbahnzug für 120 km. mittlere stündliche Geschwindigkeit (150 Km.-St. maximal). Berlin, 1903; 8°.

Oesterlin (H.). Untersuchungen über den Energieverlust des Wassers in Turbinenkanälen. Berlin, 1903; 8°.

Ottenstein (S.). Das Nutenfeld in Zahnarmaturen und die Wirbelstromverluste in massiven Armatur-Kupferleitern. Stuttgart, 1903; 8°.

Richardt (F.). Ueber Verbrennungserscheinungen bei Gasen. Leipzig, 1904; 8°.

Russ (R.). Ueber Reaktions-Beschleunigungen und Hemmungen bei elektrischen Reduktionen und Oxydationen. Leipzig, 1903; 8°.

Dall'11 Dicembre 1904 al 1° Gennaio 1905.

Biàdego (G.). Per Scipione Maffei. Verona, 1004; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Déchelette** (J.). Les vases céramiques ornés de la Gaule Romaine. Tome 1-2. Paris, 1904; 4°.

Negroni (C.). Relazioni al Consiglio Provinciale di Novara. Novara, 1904; 4° (*dalla Commissione amministrativa della Biblioteca Negroni*).

Rinaudo (C.). Racconti educativi per la 3ª, 4ª e 5ª Classe elementare. Torino, 1903-1904; 3 voll. 8°.

— Corso di Storia nazionale per le Scuole tecniche, complementari femminili e Ginnasio inferiore. Milano, 9 voll. 8°.

— Cronologia della Storia d'Italia dalla fondazione di Roma alla morte di Vittorio Emanuele II. Firenze, 1904; 8°.

— Corso di Storia generale per i Ginnasi, Licei e altri Istituti d'istruzione secondaria civili e militari. Firenze, 1904, 5 voll. 8°.

— Corso di Storia generale per le Scuole Normali e gli Istituti tecnici, secondo i programmi vigenti. Firenze, 1901, 1904; 3 voll. 8°.

— Atlante storico per le scuole secondarie. Torino, 3 fasc., 44 tav., 67 carte.

— Indice della Rivista Storica italiana dal 1884 al 1901 con l'Elenco alfabetico degli autori. Torino, 1904; 2 voll. 8° (*dall'A.*).

Schuyten (C.). Paedologisch Jaarbock. Antwerpen, 1904; 8° (*Id.*).

Volpe (G.). Pisa e i Longobardi. Pisa, 1901; 8°.

— Pisa, Firenze, Impero al principio del 1300 e gli inizi della signoria civile a Pisa. Pisa, 1902; 8°.

— Una nuova teoria sulle origini del Comune. Firenze, 1904 (*dall'A. pel premio di Storia di fondazione Gautieri*).

Dal 18 Dicembre 1904 all'8 Gennaio 1905.

Abderhalden (E.), Neuere Forschungen auf dem Gebiete der Eiweisschemie. Berlin, 1905; 8°.

— Der Arten-Begriff und die Arten-Konstanz auf biologisch-chemischer Grundlage. Braunschweig, 1904; 4°.

— Die Bedeutung der Verdanung der Einweisskörper für deren Assimilation. Göttingen, 1904; 8° (*dall'A.*).

Beck (C. F.). Ueber die Verwertung der Doubletten unserer Bibliotheken. Basel, 1904; 8° (*Id.*).

Haeckel (E.). Kunst-Formen der Natur. 10. u. 11. Liefg. Leipzig, 1904; 4° (*dall'A. Socio straniero*).

Kalecsinszki (A. v.). Ueber die Akkumulation der Sonnenwärme in Verschiedenen Flüssigkeiten. Leipzig, 1904; 8° (*dall'A.*).

Saporetti (V.). Telemetro Saporetti. Milano, 1904; 8° (*Id.*).

Tommasina (Th.). Constatation d'une radioactivité induite sur tous les corps par l'émanation des fils métalliques incandescents. Paris, 1904; 4°.
— Sur le dosage de la radioactivité temporaire pour son utilisation thérapeutique. Paris. 1904; 4°.
— Constatation d'une radioactivité propres aux êtres vivants, végétaux et animaux. Paris, 1904; 4°.
— Sur la genèse de la radioactivité temporaire. Paris, 1904; 4° (*Id.*).
Vallot (J.). J. Vallot et son œuvre. Paris, 1904; 4° (*Id.*).

* *Dall'Università di Strassburg i. E.:*

Aeckerlein (G.). Ueber die Zerstäubung Galvanisch glühender Metalle. Strassburg, 1902; 8°.
Altschüler (E.). Die Conservierung des Hackfleisches mit (neutralem) schwefligsaurem Natrium und einige Bemerkungen über die Beurteilung des Zustandes von Hackfleisch. Strassburg, 1902; 8°.
Arbogast (A.). Ueber Behandlung der Malaena Neonatorum mit Gelatine-Injektionen. Strassburg, 1902; 8°.
Baas (K. H.). Ueber Bacillus pseudanthracis. Strassburg, 1903; 8°.
Bartels (M.). Ueber Encephalo-myelo-meningitis diffusa haemorrhagica mit endophlebitischen Wucherungen. Berlin, 1902; 8°.
Bauer (I.). Beiträge zu den Folgeerscheinungen der Uterusmyome und zur Kasuistik der Kolossaltumoren der veibl. Genitalien. Strassburg, 1903; 8°.
Benkwitz (F.). Ueber die operative Behandlung des Nachstars. Strassburg, 1902; 8°.
Berger (H.). Ueber Rotationsflächen zweiten Grades, die einem gegebenen Tetraeder eingeschrieben sind. Strassburg, 1903; 8°.
Bergheimer (L.). Ueber Schussverletzungen des Halsteils des Oesophagus. Strassburg, 1903; 8°.
Bock (K.). Ueber die Kondensation von Benzaldehyd mit Itakonsäure. Strassburg, 1902; 8°.
Borg (I.). Ueber die Hutchinsonsche Sommereruption. Strassburg, 1902; 8°.
Brecher (F.). Ueber die durch Anlagerung von Ammoniak an ungesättigte Säuren entstehenden β-Amidosäuren. Strassburg, 1902; 8°.
Brême (G.). Ueber die durch Pacchioni'sche Granulationen verursachten Eindrücke der Schädelknochen. Stuttgart, 1903; 8°.
Breymann (M.). Ueber Stoffwechselprodukte des Bacillus pyocyaneus. Jena, 1903; 8°.
Butzon (F.). Ueber Nasenpolypen im Kindesalter. Strassburg, 1903; 8°.
Dietz (R.). Ueber acute Leukaemie. Strassburg, 1903; 8°.
Dinter (A.). Die Anlagerung von Ammoniak an die Muconsäure und die Oxydation der Δ-β-γ-Hydromuconsäure. Strassburg, 1902; 8°.
Ehrmann (R.). Ueber die Peroxyprotsäuren. Strassburg, 1903; 8°.
Friedmann (E.). Beiträge zur Kenntnis der physiologischen Beziehungen der schwefelhaltigen Eiweissabkömmlinge. Braunschweig, 1902; 8°.
Fühner (H.). Lithotherapie. Historische Studien über die medizinische Verwendung der Edelsteine. Strassburg, 1902; 8°.

Goellner (A.). Die Verbreitung der Echinokokkenkrankheit in Elsass-Lothringen. Jena, 1902; 8°.

Goering (H.). Zur Behandlung des Angioma arteriale racemosum besonders des Kopfes. Strassburg, 1903; 8°.

Grabi (H.). Schwangerschaft und Geburt bei Missbildungen der weiblichen Genitalien. Strassburg, 1903; 8°.

Gümbel (Th.). Ueber das Chlorom und seine Beziehungen zur Leukämie. Berlin, 1903; 8°.

Hannes (V.). Ein Fall von Endarteritis syphilitica an der untern Extremität. Strassburg, 1902; 8°.

Hartmann (E.). Ueber tuberkulöse Granulationsgeschwülste der Nasenhöhle. Strassburg, 1903; 8°.

Hellen (E. v. d.). Beitrag zur Anatomie des Zwerchfelles: Da Centrum t en dineum. Stuttgart, 1903; 8°.

Heubner (W.). Die Spaltung des Fibrinogens bei der Fibringerinnung. Leipzig, 1903; 8°.

Heun (H.). Beitrag zur Lehre der Gasphlegmone des Menschen. Strassburg, 1903; 8°.

Hildebrand (W.). Ueber die Condensation des Acetylacetons mit bernsteinsauren Natrium unter Mitwirkung von Essigsäureanhydrid. Strassburg, 1902; 8°.

Himpel (H.). Ueber die Gruppe der 120 Collineationen, durch die ein räumliches Fünfeck in sich selbst übergeht. Strassburg, 1903; 8°.

Hirschhorn (W.). Die erweiterte Freund'sche Operation beim Krebs der Schwangeren Gebärmutter. Mannheim, 1902; 8°.

Hoepffner (C.). Ueber das Vorkommen pathogener Bakterien im gesunden Organismus. Strassburg, 1903; 8°.

Jägerschmid (G. A.). Beiträge zur Kenntnis der Monochlorbromessigsäure. Strassburg, 1903; 8°.

Kalbfleisch (G.). Symmetrische Cykliden. Strassburg, 1902; 8°.

Karpinski (L. Ch.). Ueber die Verteilungen der quadratischen Reste. Strassburg, 1903; 8°.

Kelber (X.). Ueber Dermatitis papillaris capillitii (Kaposi). Strassburg, 1903; 8°.

Kohn (K.). Ueber die Operation verjauchter Myome des Uterus. Strassburg, 1903; 8°.

Kohts (A.). Jleus während der Schwangerschaft. Strassburg, 1903; 8°.

Kraencker (J.). Ueber die Isobutylitaconsäure und deren Verhalten gegen Brom. Strassburg, 1902; 8°.

Kraus (P.). Ueber die Dimethyldioxyglutarsäure und einige Derivate derselben. Strassburg, 1902; 8°.

Kunlin (H.). Die Malaria in Elsass-Lothringen. Strassburg, 1903; 8°.

Lebon (C.). Ueber das Mortalitätscontingent des Keuchhustens. Strassburg, 1902; 8°.

Lehmann (W.). Ueber die Blutmenge der Placenta. Strassburg, 1902; 8°.

Lewandowsky (F.). Zur Theorie des Phlorhizindiabetes. Strassburg, 1902; 8°.

Luxenburger (M.). Zur Kasuistik der vorgenschrittenen ektopischen Graviditäten bei libendem Kind nebst besonderer Berücksichtigung der Therapie. Strassburg, 1902; 8°.

Mangin (J.). Das Hermophenyl in der Behandlung der Syphilis. Strassburg, 1903; 8°.

Matter (O.). Zur Kenntnis der Azlactone und ihrer Umwandlungsprodukte. Strassburg, 1903; 8°.

Matthes (S.). Ueber Menière'sche Krankeit bei chronischer progressiver Schwerhörigkeit. Strassburg, 1902; 8°.

Meyer (A.). Ueber Pulsionsdivertikel des Oesophagus. Strassburg, 1903; 8°.

Meyerhoft (M.). Ein Fall von Ruptur des schwangeren Nebenhornes. Strassburg, 1902; 8°.

Moritz (R. E.). Ueber Continuanten und gevisse ihrer Anwendungen im zahlentheoretischen Gebiete. Gottingen; 8°.

Müller (G.). Ueber die Aetiologie der bei Infektionskrankheiten auftretenden pneumonischen Prozesse. Strassburg, 1903; 8°.

Munsch (V.). Ueber einen Fall von spontaner circumscripter Hautgangraen. Strassburg, 1902; 8°.

Neubauer (M.). Ueber die Blutungen bei Placenta praevia. Berlin, 1902; 8°.

Neukirch (H.). Ueber Actinomyceten. Strassburg, 1902; 8°.

Niemann (A.). Ueber Druckstauung (Perthes) oder Stauungsblutungen nach Rumpfkompression (Braun). Strassburg, 1903; 8°.

Nikes (P.). Abhängigkeit des Geburtsgewichtes der Neugeborenen vom Stand und der Beschäftigung der Mutter. Strassburg, 1902; 8°.

Ohlmann (E.). Ueber Metastasen der Vagina bei Carcinom des Uterus und der Ovarien und die Bedeutung des retrograden Transportes. Strassburg, 1902; 8°.

Peters (W.). Ueber stereoisomere Körper aus dem Aethylacetylaceton durch Blausäureanlegerung. Strassburg, 1903; 8°.

Rebentisch (F.). Neubildungen am missbildeten Uterus. Strassburg, 1903, 8°.

Reichert (F.). Ueber die Einwirkung von Stickstofftetroxyd auf Phenylisocrotonsäure. Strassburg, 1903; 8°.

Rust (J.). Das Geschlecht der Fehl- und Totgeburten. Strassburg, 1902; 8°.

Sachs (E.). Die puerperalen Erkrankungen und Todesfälle der septischen Abteilung der Strassburger Frauenklinik 1891-1901. Berlin, 1902; 8°.

Samuely (F.). Ueber die aus Eiweiss hervorgehenden Milanine. Braunschweig, 1903; 8°.

Schaller (P.). Erfahrungen über subkutane Darmrupturen. Strassburg, 1903; 8°.

Scheen (O.). Ueber die Methylitaconsäure und ihr Verhalten gegen Natronlauge und Brom. Strassburg, 1902; 8°.

Schmidt (J.). Zur Kasuistik des Chorioepithelioma malignum. Strassburg, 1902; 8°.

Schroeder (M.). Beiträge zur Kenntnis der Stoffvechselprodukte des Bacillus lactis aërogenes. Strassburg, 1903; 8°.

Schultze (E.). Zur Pathologie und Therapie des Ulcus corneae serpens. Berlin; 8°.

Schwärtzlin (A.). Ueber die Oxydation der Dimethylitaconsäure und der Dimethylaticonsäure mit Kaliumpermanganat. Strassburg, 1903; 8°.

Wahl (C.). Casuistiche Beiträge zur Kenntnis der Facialisparalysen. Strassburg, 1902; 8°.

Weber (L.). Ueber die Verwendbarkeit des Braun'schen Apparates zur Chloroform-Aethernarkose. Strassburg, 1903; 8°.

Weber (R.). Ueber die Gruppe des Bacillus proteus vulgaris. Strassburg, 1903; 8°.

Weinberger (R.). Die pathologische Anatomie der Puerperal-Eclampsie und Urämie. Strassburg, 1903; 8°.

Wernher (G.). Kondensation von Valerolakton und Bernsteinsäureäthylester mit Natriumäthylat. Strassburg, 1902; 8°.

Zimmermann (A.). Beitrag zur Kenntnis der Hypertrophien angeborenen Ursprungs. Strassburg, 1902; 8°.

Zimmermann (H.). Ueber seltenere Formen der Brustdrüsengeschwülste. Strassburg, 1902; 8°.

Zoepffel (R.). Ueber die Wirkungsgrade narcotisch wirkender, gechlorter Verbindungen der Fettreihe. Leipzig, 1903; 8°.

Dal 1° al 15 Gennaio 1905.

** **Graesse** (J. G. Th.). Orbis latinus oder Verzeichniss der lateinischen Benennungen der bekanntesten Städte etc. Dresden, 1861; 8°.

Levi (U.). I monumenti del dialetto di Lio Mazor. Venezia, 1904; 8° (*dall'A.*).

Spagnolo (A.). L'Arcidiacono Pacifico di Verona inventore della bussola? Venezia, 1904; 8° (*Id.*).

* **Torino**. Istituto di esercitazioni nelle scienze giuridico-politiche (R. Università di Torino).

Bocca (U.). Contributo allo studio della violenza su negozi giuridici. Torino, 1904; 8°.

Brusa (C. F.). Società — Società in nome collettivo — Recesso di un socio gerente — Continuazione del suo nome nella ragione sociale ecc. Torino, 1904; 8°.

Clerici (O.). Sul legato della *penus* (D. 33. 9). Pisa, 1904; 8°.

Ottolenghi (E.). Giurisprudenza commerciale straniera. Francia 1903. Milano, 1904; 8°.

Ricca-Barberis (M.). Degli effetti della sentenza sulla prescrizione del credito. Milano, 1904; 8°.

Occella (P.). La separazione del patrimonio del defunto da quello dell'erede in rapporto all'eredità beneficiata. Alessandria, 1904; 8°.

Sarfatti (M.). Brevi appunti in materia di gestioni d'affari. Milano, 1904; 8°.

* *Dall' Università di Strassburg i. E.*

Cybichowski (S.). Artikel 76 der Reichverfassung. Breslau, 1902; 8°.

Dieckow (F.). John Florio's englische Uebersetzung der essais Montaigne's und Lord Bacon's, Ben Jonson's und Robert Burton's Verhältnis zu Montaigne. Strassburg, 1903; 8°.

Faerber (R.). König Salomon in der Tradition. Wien, 1902; 8°.

Friedlaender (E.). Das Verzeichnis der Ritter der Artustafelrunde in Erec des Hartmann von Aue verglichen mit dem bei Crestien de Troyes und bei Heinrich von dem Türlin. Strassburg, 1902; 8°.

Gross (M.). Geffrei Gaimar. Die Komposition seiner Reimchronik und sein Verhältnis zu den Quellen (v. 819-3974). Erlangen, 1902; 8°.

Hamburger (B.). Maimonides' Einleitung in die Mišna. Berlin, 1902; 8°.

Hauck (P.). Urteile und Kategorien. Eine kritische Studie zu Kants transszendentaler Logik. Strassburg, 1903; 8°.

Hoffmann (A.). Edme Boursault nach seinem Leben und in seinen Werken. Metz, 1902; 8°.

Hoogenhout (N. M.). Untersuchungen zu Lodewijk van Velthem's Spiegel Historiael. Leiden, 1902; 8°.

Hunnius (C.). Natur und Charakter Jahve's nach den vordeuteronomischen Quellen der Bücher Genesis-Könige. Strassburg, 1902; 8°.

Kahlenberg (G.). De paraphrasis Homericae apud tragicos poetas graecos vestigiis Quaestiones selectae. Strassburg, 1903; 8°.

Kapp (W.). Das Christentum Luthers nach seiner religiös-sittlichen Bestimmtheit. Freiburg i. B., 1902; 8°.

Klumel (M.). Mischpâtîm. Ein samaritanisch-arabischer Commentar zu Ex. 21-22, 15 von Ibrâhîm Ibn Jakûb. Berlin, 1902; 8°.

Köster (A.). Die ägyptischen Pflanzensäule der Spätzeit. Paris, 1903; 8°.

Kramer (J.). Das Problem des Wunders im Zusammenhang mit dem der Providenz bei den jüdischen Religiosphilosophen des Mitteralters von Saadia bis Maimûni. Strassburg, 1903; 8°.

Kremer (H.). Die Mitbürgschaft mit Beiträgen zur Lehre von Bürgschaft und Gesamtschuld. Strassburg, 1902; 8°.

Martin (E.). Wolfram von Eschenbach. Strassburg, 1903; 8°.

Popescu (J.). Die Erzählung oder das Martyrium des Barbaren Christophorus und seiner Genossen. Leipzig, 1903; 8°.

Sander (C.). Die Franzosen und ihre Literatur im Urteil der moralischen Zeitschriften Steeles und Addisons. Strassburg, 1903; 8°.

Schilling (L.). Quaestiones rhetoricae selectae. Lipsiae, 1903; 8°.

Schrader (F. O.). Ueber den Stand der indischen Philosophie zur Zeit Mahāvīras und Buddhas. Leipzig, 1902; 8°.

Schwarz (W.). Studien über die aus dem lateinischen entlehnten Zeitwörter der englischen Sprache. Strassburg, 1903; 8°.

Silbermann (S.). Das Targum zu Ezechiel nach einer südarabischen Handschrift herausgegeben mit einer Einleitung und varianten Versehen. Strassburg, 1902; 8°.

Sitftungsfest (Das) der Kaiser-Wilhehms-Universität Strassburg am 1 Mai 1903. Strassburg, 1902; 8°.

Tarral (N.). Laut- und Formenlehre der Mundart des Kantons Falkenberg in Lothr. Strassburg, 1903; 8°.

Veit (M.). Die rechtliche Einfluss der Kantone auf die Bundesgewalt nach schweizerischem Bundesstaatsrecht. Schaffhausen, 1902; 8°.

Dall'8 al 22 Gennaio 1905.

Chauveau (J. B.). " Animal thermostat ". Problèmes d'énergie biologique soulevés par une Note de lord Kelvin sur la régulation de la température des animaux à sang chaud. Etc. Paris, 1903; 4°.

— L'Énergie dispensée par le travail intérieur des muscles dans leurs divers modes de contraction — Points fondamentaux de l'étude des relations qui existent entre ce travail intérieur et le travail extérieur à l'exécution duquel il peut être affecté. Paris, 1904; 4° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Dini** (U.). Indici generali degli Annali di Scienze matematiche e fisiche e degli Annali di matematica pura e applicata. Milano, 1904; 4°.

Frammenti concernenti la Geofisica dei pressi di Roma. N. 11. Omaggio alla memoria di Filippo Keller. Spoleto, 1904; 8° (*dal Prof. L. Palazzo Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica*).

Lavori dell'Istituto di Anatomia e Patologia della R. Università di Torino. Torino, 1904; 8° (*dono del Direttore Prof. Pio Foà, Socio residente*).

Relazione [del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere] per l'aggiudicazione del premio Morelli. Anno 1904. Bergamo, 1904; 8° (*dalla Presidenza dell'Istituzione Morelli*).

* *Dall'Università di Erlangen:*

Amberger (C.). Ueber kolloidale Metalle der Platingruppe. Erlangen, 1904; 8°.

Amberger (K.). Synthetische Versuche zur Darstellung der Diamidostilbendicarbonsäuren. Erlangen, 1904; 8°.

Amson (E.). Ueber eine zwei-zweideutige Punktverwandtschaft der Ebene und eine ein-eindeutige, welche mit ihr in Zusammenhang steht. München, 1904; 8°.

Arnold (V.). Ueber Scoliosis ischiadica. Erlangen, 1903; 8°.

Bartels (R.). Ein Fall von Aneurysma der Carotis interna destra im Sinus cavernosus mit doppelseitiger Stauungspapille. Würzburg, 1903; 8°.

Beecker (A.). Die Nasenregion des Amniotenkopfes. Leipzig, 1903; 8°.

Birk (S.). Ueber den Einfluss von Kreosot, Jodoform, Salol, Chinain, Chlorcalcium und Chlormagnesium auf die Magenverdauung. Erlangen, 1904; 8°.

Brachmann (O.). Zur Kasuistik der Sarkome des Rektum. Erlangen, 1903; 8°.

Brokschmidt (O.). Morphologische, anatomische und biologische Untersuchungen über Hottonia palustris. Erlangen, 1904; 8°.

Brunco (C.). Zwei Fälle von linksseitiger interstitieller Hernie beim Weib. Nürnberg, 1904; 8°.

Dietrich (J.). Der Gebärmutterkrebs und seine Metastasen besonders im Peritonaeum. Erlangen, 1904; 8°.

Doerfler (W.). Ein Fall von traumatischer Brown-Séquard'scher Lähmung mit seinen Complicationen. Biberach a. Riss., 1903; 8°.

Dorschky (K.). Ueber Konstitution und Derivate der Orsellinsäure. Erlangen, 1904; 8°.

Eberlein (L.). Beiträge zur anatomischen Charakteristik der Lythraceen. Erlangen, 1904; 8°.

Eisenach (H.). Ueber die Konstitution der beiden Modificationen des α-Ortho-Nitrosoresorcinmono*äthyl*äthers und α-Ortho-Nitrosoresorcinmono*methyl*äthers. Erlangen, 1904; 8°.

Engels (O.). Ueber die Einwirkung von Amidosulfonsäure auf p-Xylidin und as-m-Xylidin. Erlangen, 1903; 8°.

Fehn (H.). Ueber heterobicyclische Verbindungen und Hydrazone von Dithiokohlensäureestern. Erlangen, 1904; 8°.

Fiedler (E.). Ein seltener Fall von polypösen Magenkarzinom. Erlangen, 1903; 8°.

Fiesselmann (G.). Ueber die Einwirkung von Formaldehyd auf Anthranilsäure. Erlangen, 1903; 8°.

Frickhinger (E.). Die Gefässpflanzen des Rieses. Nördlingen, 1904; 8°.

Gminder (C.). Ueber eine kleine Puerpueralfieber-Epidemie in der Universität-Frauenklinik zu Erlangen. Erlangen, 1904; 8°.

Haffner (A.). Untersuchungen über die physiologischen Verkalkungen der Placenta. Erlangen, 1904; 8°.

Härter (A.). Zwei Fälle von perforierender Tuberkulose an den platten Schädelknochen. Erlangen, 1903; 8°.

Heineke (A.). Zur pathologischen Anatomie und Klinik der Kompression der Rüchenmarks bei Karies der Wirbelsäule. Erlangen, 1903; 8°.

Hoffmann (E.). Untersuchung über die chemische Natur des Ferrum oxydatum saccharatum solubile. Regensburg, 1904; 8°.

Hönighaus (J.). Ueber die operative Entfernung von Gallensteinen aus dem Ductus choledochus (Choledoctomie). Münster in Westf., 1903; 8°.

Hummel (L.). Möller-Barlow'sche Krankheit. Erlangen, 1903; 8°.

Jahn (A.). Darminvagination und ihre chirurgische Behandlung. Erlangen, 1904; 8°.

James (J.). Die Abraham-Lemoinesche Methode zur Messung sehr kleiner Zeitintervalle und ihre Anwendung zur Bestimmung der Richtung und Geschwindigkeit der Entladung in Entladungsröhren. Erlangen, 1904; 8°.

Jamin (F.). Experimentelle Untersuchungen zur Lehre von der Atrophie gelähmter Muskeln. Jena, 1904; 8°.

Katagiri (T.). Ueber Puerperal-Eklampsia mit besonderer Berücksichtigung der Nieren- und Leberveränderungen. Erlangen, 1904; 8°.

Koelling (B.). Ein Fall von aputrider Nekrose des Lungengewebes. Erlangen, 1903; 8°.

Knöll (K.). Zur Kasuistik und operative Behandlung der Aneurysmen der unteren Extremitäten. Erlangen, 1903; 8°.

Knös (R.). Anatomische Untersuchungen über die Blattspreite der einheimischen Farne. 1902; 8°.

Krebser (H.). Ueber die Resultate der Entfernung Maligner Ovarialtumoren. Stuttgart, 1904; 8°.

Kühn (A.). Ueber das Verhalten der Gruppierung N-C-N gegen Acylierungsmittel. Erlangen, 1904; 8°.

Kunstmann (A. E. G. T.). Ueber Peritonitis tuberculosa und deren operative Behandlung. Erlangen, 1903; 8°.

Kurozawa (K.). Ueber den Einfluss verschiedener Ernährungsweise auf die Grösse der Eiweissausscheidung bei chronischer Nephritis. Erlangen, 1903; 8°.

Laarmann (A.). Eine Prüfung über das Eintreten des Gartner'schen " Venenphänomens „ bei Gesunden und bei Kranken mit Kreislaufstörungen. Bochum, 1904; 8°.

Lohmann (J.). Versuche zur Darstellung des Nitroxylchlorids. Beiträge zur Kenntnis des Selens. Erlangen, 1904; 8°.

Lübben (K.). Ueber einen Fall von Papillomen in einem Fistelgange mit sekundärer karzinomatöser Entartung. Erlangen, 1904; 8°.

Lubowski (A.). Zur Geschichte der Fiebertheorien. Erlangen, 1903; 8°.

Mayr (J.). Ueber die Beziehungen der Skoliose zur Lungentuberkulose. Erlangen, 1904; 8°.

Meiner (W.). Ueber Pubertätsalbiminurie. Königsberg i. Pr., 1904; 8°.

Metz (A.). Anatomie der Laubblätter der Celastrineen mit besonderer Berücksichtigung des Vorkommens von Kautschuck. Jena, 1903; 8°.

Metzger (F.). I. Zur Kenntnis der Reduktion der Ketone. II. Ueber ein Entwirkungsprodukt von Schwefelkohlenstoff und Aetzkali auf Dibenzylketon. München, 1904; 8°.

Michel (F.). Ueber Dithiocarbamate sekundärer aromatischer Basen und über eine Verbindung des Formaldehyds mit dem Indigo. Erlangen, 1903; 8°.

Mouson (J. G.). Ein Beitrag zur Kenntnis der Benzimidazole. Erlangen, 1904; 8°.

Niederschulte (G.). Ueber den Dampfdruck fester Körper. Braunschweig, 1903; 8°.

Neischl (A.). Die Höhlen der fränkischen Schweiz und ihre Bedeutung für die Entstehung der dortigen Täler. Erlangen, 1903; 8°.

Oberhofer (M.). Ein seltener Fall von Leberruptur. Erlangen, 1903; 8°.

Opfermann (E.). Beitrag zur Kenntniss der Semicarbazide. Einwirkung von Formaldehyd auf Thioharnstoffe. Erlangen, 1904; 8°.

Peiser (G.). Beitrag zur Kenntnis der in den Kalkschiefern von Solnhofen auftretenden Gattung Eryon und ihrer Beziehungen zu verwandten recenten Tiefseekrebsen. Erlangen, 1904; 8°.

Poeschel (O.). Ein Fall von Verschluss der Vena cava superior. Erlangen, 1903; 8°.

Pott (O.). Zur Prognose der Hernien-Radikaloperation. Leipzig, 1903; 8°.

Ratz (H.). Therapeutische Untersuchungen über Glykosal. Erlangen, 1903; 8°.

Reichard (H.). Radikaloperation bei doppelseitigem Leisten- und Schenkelbruch. Erlangen, 1904; 8°.

Rein (F. O.). Anatomischer Befund bei einem Fall von Tabes dorsalis mit progressiver Muskelatrophie. Leipzig, 1903; 8°.

Reinhart (W.). Ueber einige neue Abkömmlinge des Nitrotoluidins vom Schmelzpunkte 107°. Berlin, 1904; 8°.

Resenscheck (F.). I. Beiträge zur Kenntniss des Tellurs. II. Zur Kenntniss dei Kolloïdalen Goldes. Erlangen, 1904; 8°.

Rid (H.). Die Klimatologie in den geographica Strabos. Ein Beitrag zur physischen Geographie der Griechen. Kaiserslautern, 1903; 8°.

Ruge (C.). Ueber die puerperale Blase und die puerperale Ischurie. Berlin, 1904; 8°.

Ruge (H.). Ueber einen Fall von mächtiger retroperitonealer Dermoidcyste beim Manne. Jena, 1903; 8°.

Scheidemandel (E.). Ein Fall von primären Sarcom der Leber. Nürnberg, 1903; 8°.

Schwarztrauber (J.). Kloake und Phallus des Schafes und Schweines. Leipzig, 1903; 8°.

Seltsam (A.). Untersuchungen über die physikalisch-chemischen Eigenschaften und physiologischen Wirkungen der Salze der Alkalien und Erdalkalien. Erlangen, 1903; 8°.

Seyler (G.) Ueber die Erhaltung der Krümmungslinien bei Orthogonal-Projektion. Passau, 1903; 8°.

Simon (L.). Ein Fall von entzündlichem Papillom. Mannheim, 1904; 8°.

Specht (K.). Ueber des Verhalten der Temperatur und des Pulses vor und nach Körperbewegung bei Gesunden und Kranken. Erlangen, 1904; 8°.

Strunz (M.). Klinischer Beitrag zur Lehre von der Spina bifida. Erlangen, 1903; 8°.

Tölle (F.). Ueber Schschärfe und deren Bestimmung. Erlangen, 1904; 8°.

Ubber (J.). Beitrag zur Kenntnis der Pyridazine. Erlangen, 1903; 8°.

Vahle (H.). Ein Fall von Mammakarzinom beim Manne. Erlangen, 1904; 8°.

Veiel (O.). Ueber Benzimidazole und deren Spaltungsprodukte. Erlangen, 1904; 8°.

Vix (K.). Zur Lehre über die Aortenaneurysmen. Erlangen, 1904; 8°.

Voss (F.). Ueber colloidale Silbersalze. Erlangen, 1903; 8°.

Votsch (W.). Neue systematisch-anatomische Untersuchungen von Blatt und Achse der Theophrastaceen. Leipzig, 1903; 8°.

Wachtel (Fr.). Ueber Taubstummheit in ihrer Beziehung zum Unterricht der Taubstummen. Erlangen, 1903; 8°.

Warsow (G.). Systematisch-anatomische Untersuchungen des Blattes bei der Gattung Acer mit besonderer Berücksichtigung der Milchsaftelemente. Jena, 1903; 8°.

Wille (O.). Ueber einen Fall von Karzinom der weiblichen Genitalien im Anschluss an jahrelanges Tragen eines vernachlässigten Pessars. Erlangen, 1903; 8°.

Wittmann (O.). Studien über den Abbau des Solanidins. München, 1904; 8°.

Wollner (G.). Zur Kasuistik der Leberabscesse im Anschluss an Perityphlitis. Fuerth, 1903; 8°.

Zander (E.). Der Stilplan des männlichen Genitalapparates des Hexapoden. Erlangen, 1903; 8°.

Dal 15 al 29 Gennaio 1905.

Calendario giudiziario di Torino, an. 1905. Torino, 1905; 8° (*dal Presidente del Tribunale Civile e Penale*).

Lajolo (G.). Questione Dantesco-Sallustiana. Novara, 1903; 8° (*dall'A.*).

Lilla (V.). Relazione letta all'inaugurazione dell'anno accademico 1902-1903 della R. Università di Messina. Messina, 1903; 8°.

— Massima relazione fra Dio e il Popolo e breve Saggio critico su le dottrine di Spinoza e di Bruno. Messina, 1903; 8°.

— Un'incoerenza del Galuppi. Messina, 1904; 8°.

— Un giudizio erroneo nella Storia della filosofia cristiana. Napoli, 1904; 8° (*Id.*).

Onoranze al prof. Vincenzo Lilla pel suo XL anno d'insegnamento. Messina, 1904; 8° (*dal prof. V. Lilla*).

* *Dall'Università di Erlangen.*

Abel (O.). Studien zu dem gallischen Presbyter Johannes Cassianus. München, 1904; 8°.

Allfeld (Ph.). Die Bedeutung des Rechtsirrtums im Strafrecht. Erlangen, 1903; 8°.

Barth (H.). Systematische und kritische Darstellung der allgemeinen Gütergemeinschaft des Nürberger Stadtrechts auf der Grundlage der " verneuten Nürnbergischen Reformation „ von Jahr 1564 und der einschlägigen Additional-Dekrete. Nürnberg, 1903; 8°.

Barth (H.). Inwieweit ist eine dingliche Sicherung der persönlichen Wiederkaufsrechtes in Ansehung eines Gründstückes möglich? Cöln, 1903; 8°.

Batteiger (J.). Der Pietismus in Beyreuth. Berlin, 1903; 8°.

Baumann (P. J.). De condicione pendente. Köln, 1903; 8°.

Beck (A.). Die Rechtsverhältnisse der nichtpragmatischen Staatsdiener-nichtpragmatischen Staatsbeamten und Staatsbediensteten im Sinne der K. Allerh. Derordung vom 26. Juni 1894 nach bayerischen Staatsrechte systematisch dargestellt. Weiden, 1903; 8°.

Beith (E.). Die Redhibition des gemeinen Rechts und die Wandelung der bürgerlichen Gesetzbuchs in ihrer rechtlichen Gestaltung, soweit es sich um die Form ihrer Geltendmachung (Vollziehung) handelt. Erlangen, 1903; 8°.

Bibliotheksordnung der Kgl. Bayerischen Universität zu Erlangen. Erlangen, 1903; 8°.

Bitterhoff (M.). Das lateinische inde im Französischen. Guben, 1903; 8°.

Boré (F.), Die Voraussetzungen der condictio causa data causa non secuta des Gemeinen Rechts und diejenigen der ihr entsprechenden Klage bürgerlichen Rechts: der Bereicherungsklage wegen Nicht-Eintritts des Erfolges. Berlin, 1904; 8°.

Burk (G.). Sozial-Eudämonismus und Sittliche Verpflichtung. Langensalza, 1904; 8°.

Castendyck (W.). Die Entwicklung der Kornhausbewegung mit besonderer Berücksichtigung der preussischen und der bayerischen Verhältnisse. Erlangen, 1903; 8°.

Chelius (F.). Lotzes Wertlehre. Erlangen, 1904; 8°.

Clausnitzer (L.). Die Hirtenbilder in der altchristlichen Kunst. Halle a. S., 1904; 8°.

Cleffmann (O.). Kann das in Unkenntnis der Aufrechungsbefugnis Gezahlte zurückgefordert werden? Wattenscheid, 1903; 8°.

Cohen (H. M.). Die Rechtsfähigkeit ausländischer juretischer Personen im Inlande nach dem heutigen Stande der Gesetzebung. Erlangen, 1904; 8°.

Compter (H.). Das Gesetz im formellen und materiellen Sinne. Erlangen, 1903; 8°.

Dormitzer (C.). Der Spezifikationskauf. Fürth, 1904; 8°.

Druschky (B.). Würdigung der Schrift des Comenius Schola Ludus. Wernigerode, 1904; 8°.

Ehrenbacher (E.). Der bayerische Bierlieferungs-Vertrag. Nürnberg, 1903; 8°.

Ehrlich (R.). Die Neubildung der metaphysischen Grundbegriffe durch Descartes und die Motive, die dazu antrieben. Lenzen a. Elbe, 1903; 8°.

Esser (Th.). Einiges über das Verlöbnis und seine juretische Construction nach dem Rechte des bürgerlichen Gesetzbuchs. Bonn, 1903; 8°.

Falckenberg (R.). Gedächtnisrede auf Kant zur Feier der hundertjährigen Wiederkehr des Todestages des Philosophen... Erlangen, 1904; 4°.

Fittig (W.). Die rechtliche Stellung des Prokuristen. Strassburg i. E., 1904; 8°.

Franck (E.). Der Primat der praktischen Vernunft in der frühnachkantischen Philosophie. Erlangen, 1904; 8°.

Fürle (W.). Welche Unterschiede in der Haftung bestehen zwischen der bei Ausübung des Rücktrittsrechts sich ergebenden Rüchgewährsverpflichtung ernerseits uud der conditio wegen Erlöschens der causa andererseits? Berlin, 1904; 8°.

Galliner (S.). Saadia Al-fajjûmi's arabische Psalmenübersetzung und Commentar (Psalm 73-89). Berlin, 1903; 8°.

Gnuse (C.). Die rechtswidrige Hebung fremder Sparguthaben. Bielefeld. 1904; 8°.

Goesch (H.). Untersuchungen über das Wesen der Geschichte. Göttingen, 1904; 8°.

Gramkow (A.). Die Rechtssatze des § 830 Abs. 1 B. G. B. im Verhältnisse zu den Rechtssatzen des gemeinen Rechts für den entsprechenden Tatbestand. Bergedorf, 1904; 8°.

Greiff (E.). Die selbständige Klagbarkeit der gesetzlichen Zinsen in geschichtlicher und dogmatischer Darstellung. Berlin, 1904; 8°.

Hartmeyer (H.). Zum Recht der Kriegscontrebande. Berlin, 1903; 8°.

Hartmann (E.). Jean Jacques Rousseaus Einfluss auf Joachim Heinrich Campe. Neuenburg Wpr., 1904; 8°.

Haveustein (E.). Das Erlöschen der Schuldverhältnisse durch Erfüllung nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Bonn, 1904; 8°.

Herbst (F.). Der Gerichtsstand der Wandelungsklage. Erlangen, 1904; 8°.

Heyn (A.). Die Vermögens-Verwaltung in den Berufsgenossenschaften. München-Dachau, 1903; 8°.

Hillmer (Th.). Der Notweg nach römischem Recht und seine Weiterentwicklung im gemeinen Recht und dem bürgerlichen Gesetzbuch. Borna-Leipzig, 1904; 8°.

Hoeck (H. W.). Die Causa der vertragsmässigen Pfandbestellung an einer beweglichen Sache. Berlin, 1904; 8°.

Hoos (H.). Besitzerwerb und Besitzerhaltung durch Stellvertreter. Wattenscheid, 1904; 8°.

Jacquin (G.). Die Teilnahme am Verbrechen in der deutschen Strafgesetzgebung von Feuerbach bis zum Reichsstrafgesetzbuch. Rothenburg o. Tbr., 1903; 8°.

Italiener (B,). Die Gotteslehre des Thomas Campanella. Peine, 1904; 8°.

Kampers (J.). Das Reportgeschäft und seine volkswirtschaftliche Bedeutung. Münster i. W., 1903; 8°.

Kirchner (V.). Die Religionsphilosophie, besonders christlich-evangelische Auffassung vom " Lohn ", zumal in ihrer doppelten Beziehung zum bürgerlichrechtlichen und zum eudämonistischen Lohngedanken. Erlangen, 1904; 8°.

Koehler (F.). Die Anrechnung von Empfängen unter Lebenden auf den Erbteil und auf den Pflichtteil. Erlangen, 1904; 8°.

Kramer (A.). Fries in seinem Verhältnis zu Jacobi. Leipzig-Reudnitz, 1904; 8°.

Krehbiel (E.). Der Vorvertrag. Edenkoben, 1903; 8°.

Kunze (W.). Das Wesen und die Bedeutung der arrha des gemeinen Rechts im Verhältnis zu der Draufgabe des bürgerlichen Gesetzbuches, der Konventionaltstrafe des genuinen Rechts und der modernen Vertragstrafe. Berlin, 1904; 8°.

Kurnatowski (K. v.). Georg Friedrich Markgraf von Brandenburg und die Erwerbung des Bistums Kurland. Erlangen, 1903; 8°.

Lederle (A.). Ueber die Frage der Möglichkeit der Nachprüfung und anderweiten Feststellung des Anmeldedatums eines Patentes durch die Nichtigkeitsinstanzen beziehungsweise die ordentlichen Gerichte. Erlangen, 1903; 8°.

Lessing (H.). Die Organisation der Bank von Frankreich. München, 1904; 8°.

Liese (E.). Des J. A. Comenius Methodus Linguarum Novissima. Inhalt und Würdigung. Bonn, 1904; 8°.

Lischewski (H.). Ueber Rudolf Seydels Religionsphilosophie. Aachen, 1903; 8°.

Manger (K.). Die französischen Bearbeitungen der Legende der h. Katharina von Alexandrien. Zweibrücken, 1901; 8°.

Millidge (F. A.). Byrons Beziehungen zu seinen Lehrern und Schulkameraden und deren Einfluss auf seine literatische Tätigkeit. Leipzig, 1903; 8°.

Morgenroth (M. E.). Der Anspruch des Besitzers wegen Verwendungen. Bamberg, 1904; 8°.

Nützel (G.). Der Erwerb in gutem Glauben nach dem Sachenrechte des bürgerlichen Gesetzbuches. München, 1904; 8°.

Ohlendorf (L.). Hume's Affektenlehre. Erlangen, 1904; 8°.

Oestergren (A.). Das gesetzliche Pfandrecht des Vermieters und Verpächters nach römischen Recht. Naumburg a. S., 1904; 8°.

Petersilie (E.). Die landwirtschaftlichen Hauptbetriebe in Preussen in den Jahren 1882 und 1895 nach Anzahl, Anbaufläche und Grossenklassen. Erlangen, 1904; 8°.

Philipp (R.). Das Recht auf die Gesellschaftsbeiträge. München, 1903; 8°.

Pieper (C.). Haftet der Reeder nach Seerecht und der Schiffseigner nach Binnenschiffahrtsrecht für ein Verschulden des vom Schiffer (Kapitän) freiwillig angenommenen Lotsen? Aachen, 1903; 8°.

Plath (H.). An welchen Punkten kann Jean Pauls " Levana „ von Rousseau beeinflusst erscheinen? Diesdorf bei Gäbersdorf, 1904; 8°.

Poeppinghausen (J. W. v.). Ueber die Prämienreserve bei der Lebensversicherung insbesondere nach dem R. G. vom 12 Mai 1901. München, 1904; 8°.

Pohl (W.). Die juristiche Natur des Berlieferungsvertrages. Ist der Berlieferungsvertrag inhaltlich erlaubt, und wie ist bei Uebergang des Geschäfts einer Partei auf einen Dritten durch Rechtsgeschäfts unter Lebenden der Eintritt dieses Dritten in den Berlieferungsvertrag zur Sicherung der anderen Partei zu erreichen? Bonn, 1904; 8°.

Pommrich (A.). Des Apologeten Theophilus von Antiochia Gottes- und Logoslhere dargestellt unter Berücksichtigung der gleichen Lehre des Athenagoras von Athen. Leipzig, 1904; 8°.

Radina (A.). Die Analogie auf dem Gebiete der Kasusrektion bei den vier grossen griechischen Dramatikern. Nürnberg, 1904; 8°.

Reimers (H.). Die Quellen der " Rerum Frisicarum Historia „ des Ubbo Emmius. Emden, 1903; 8°.

Riedner (G.). Typische Aukerungen der römischen Dichter über ihre Begabung. ihren Beruf und ihre Werke. Nürnberg, 1903; 8°.

Sachse (F.). Das Aufkommen der Datierungen nach dem Festkalender in Urkunden der Reichskanzlei und der deutschen Erzbistümer. Erlangen, 1904; 8°.

Schaefer (J.). Die richterliche Tätigkeit des Bundesrats auf Grund des Artikels 76 der Reichsverfassung. Hamm. i. W., 1903; 8°.

Scherer (W.). Unterschiede zwischen der *actio Publiciana* und der Klage aus § 1007 des bürgerlichen Gesetzbuches. Rempen (Rhein), 1904; 8°.

Schiefferens (M.). Quellenmässige Darlegung der Lehre von der Willensfreiheit bei Thomas von Aquin mit Berücksichtigung derselben Lehre bei Duns Skotus. Münster i. W., 1904; 8°.

Schmidbauer (A.). Scheck und Anweisung. München, 1903; 8°.

Schwab (E.). Der Rücktritt vom Versuch in seiner Bedeutung für die Teilnahme. Erlangen, 1904; 8°.

Sieges (W.). Die Zahlung der Geldstrafe durch Dritte. Krefeld, 1903; 8°.

Sinauer (J.). Das geschützte Schriftwerk. Nürnberg, 1904; 8°.

Stemmer (K.). Ist die Auflassung ein Rechtsgeschäft? Schweinfurt, 1903; 8°.

Stepp (H.). Die rechtliche Natur der preussisch-hessischen Eisenbahngemeinschaft. Nürnberg, 1903; 8°.

Stöver (D.). Ist die Einigung im Sachenrecht des bürgerlichen Gesetzbuchs ein Rechtsgeschäft? Oldenburg, 1903; 8°.

Taucher (K.). Die Pflicht zur Abretung der Ersatzansprüche nach § 255 des B. G.-B. unter Berücksichtigung des gemeinen Rechtes. Nürnberg, 1904; 8°.

Teutsch (A.). Die Ministerverantwortlichkeit in Bayern. Edenkoben, 1903; 8°.

Trübe (O.). Rudolf Euckens Stellung zum religiösen Problem. Erlangen, 1904; 8°.

Varnhagen (H.). De verbis nonnullis linguae veteris francogallicae una cum fabella quae sermone italico composita et Maria per Ravenna inscripta in bibliotheca accademica erlangensi typis excusa asservatur. Erlangen, 1903; 8°.

Verzeichnis der Vorlesungen,.... im Winter-Semester 1903/04 und Sommer Semester 1904. Erlangen, 1904; 8°.

Weber (H.). Hamann und Kant. Nördlingen, 1903; 8°.

Weber (L.). San Petronio in Bologna. Beiträge zur Baugeschichte. Leipzig, 1903; 8°.

Wehrmann (E.). Das Recht des Freigepäcks. München, 1903; 8°.

Weitz (H.). Die Facultas alternativa. Würzburg, 1904; 8°.

Westphalen (E.). Turgots soziale Politik.

Wessel (L.). Die Ethik Charrons. Erlangen, 1904; 8°.

Winter (M.). Ueber Avicennas Opus egregium de anima (Liber sextus naturalium). München, 1903; 8°.

Witte (J.). Der Kommentar des Aponius zum Hohenliede. Erlangen, 1903; 8°.

Uebersicht des Personal-Standes..... Winter Semester 1903/1904 und im Sommer Semester 1904. Erlangen, 1904.

Dal 22 Gennaio al 5 Febbraio 1905.

Bovero (A.). Ghiandole sebacee libere. Torino, 1904; 8° (*dall'A.*).

Frammenti concernenti la Geofisica dei pressi di Roma. N. 11. Omaggio alla memoria di Filippo Keller. Spoleto, 1904; 8° (*dal prof. L. Palazzo*).

Guareschi (I.). Della pergamena, con osservazioni ed esperienze sul ricupero e sul ristauro di codici danneggiati negli incendi e notizie storiche. Torino, 1905; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Jadanza (N.). Tavole tacheometriche centesimali. 2ª ediz. Torino, 1904; 8° (*dall'A. Socio residente*).

* *Dall'Università di Giessen:*

Aenstoots (C.). Ueber die Pupillenreaktion bei Lidschluss. Giessen, 1904; 8°.

Albert (G.). Die Periostitis an der Dorsalfläche des Fesselbeins der Vorderschenkel der Pferde. Stuttgart, 1904; 8°.

Albrecht (A.). Casuistiche Beiträge zur Differentialdiagnose zwischen den Genital- und den Abdominaltumoren des Weibes. Breslau, 1904; 8°.

Bach (H.). Die Umformungen der Kettenbrüche. Darmstadt, 1903; 8°.

Basten (H.). Das Kephalhaematoma externum beim Neugeborenen insbesondere seine Aetiologie. Giessen, 1904; 8°.

Bernius (F.). Ueber die Komplikation von Uteruscarcinom und Geburt. Mainz, 1904; 8°.

Biehler (R.). Einfluss des Unterbaus auf das Wachstum der Bäume. Giessen, 1903; 8°.

Bierschenk (F.). Zur Frage des hallucinatorischen Wahnsinns. Giessen, 1904; 8°.

Bosseljoon (W.). Ueber Echinokokken im Herzen. Giessen, 1904; 8°.

Brand (K.). Die electrochemische Oxydation aromatisch gebundener Methylgruppen. Giessen, 1903; 8°.

Brauns (R.). Entwicklung des mineralogischen Unterrichts and der Universität Giessen. Giessen, 1904; 4°.

Bresin (G.). Ueber den Einfluss hydroterapeutischer Massnahmen auf den Stoffwechsel. Giessen, 1904; 8°.

Brück (C.). Hydrolyse von Ammoniumsalzen in siedender wässriger Lösung. Giessen, 1903; 8°.

Büscherhoff (G.). Ueber die Unfallverletzungen des Auges im Bergwerke. Giessen, 1903; 8°.

Dennstedt (A.). Die Sinus durae matris der Haussäugetiere Wiesbaden, 1903; 8°.

Eicker (C.). Ein Beitrag zur Casuistik der subcutanen Rupturen des Musculus biceps brachii. M. Gladbach, 1903; 8°.

Elsbergen (K. v.). Ueber das Délorme'sche Verfahren zur Behandlung des chronischen Empyems. Greifswald, 1904; 8°.

Ermes (C.). Ueber die Natur der bei Katatonie zu beobachtenden Muskelzustände. Giessen, 1903; 8°.

Fahr (Th.). Ueber totale Nekrose beider Nieren nach Thrombose der Nierenvenen. Giessen, 1903; 8°.

Falter (L.). Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik bei Kant und Hume. Giessen, 1903; 8°.

Flosdorf (P.). Zwei Fälle von Hernia funiculi umbilicalis. Giessen, 1904; 8°.

Follenius (R.). Ueber die elektrochemische Reduktion von Diketonen. Giessen, 1903; 8°.

Frank (J.). Ein Beitrag zur intraokularen Anwendung des Jodoforms bei intraokularen Eiterungen. Giessen, 1904; 8°.

Frank (M.). Elektrochemische Reduktion von fetten Nitrokörpern und Nitraminen, von aromatischen Nitrosokörpern und Nitrosaminen. Giessen, 1903; 8°.

Freytag (F.). Hydronephrose mit Cystenbildung beim Fötus. Leipzig, 1904; 8°.

Fromme (A.). Ueber die strahlenpilzähnlichen Bildungen der Tuberkelbazillus. Giessen, 1903; 8°.

Georgewitsch (R.). Beitrag zur Kenntnis der pathogenen Eigenschaften des Bazillus der progredienten Gewebsnekrose. Homberg a. d. Ohm, 1904; 8°.

Gerhard (K.). Zur Pathogenität des Bacillus pyogenes suis. Homberg a. d. Ohm, 1904; 8°.

Goldenberg (Th.). Beitrag zur Frage der primären multiplen bösartigen Neubildungen. Bern, 1903; 8°.

Gossmann (A.). Die chronische Periarthritis Tarsi des Pferdes. Stuttgart, 1904; 8°.

Gross (A.). Ueber das tuberkulose Geschwür der Zunge. Giessen, 1904; 8°.

Gumtow (A.). Ueber den Chloroformgehalt der Organe während der Narkose. Giessen, 1904; 8°.

Günther (J. B.). Ueber operative Dauererfolge bei Retroflexio uteri und Prolapsus vaginae. Mainz, 1904; 8°.

Gustap (N.). Das Stockholz seine frühere und jetzige Bedeutung in Deutschland und die Maschinen zu dessen Gewinnung in Theorie und Praxis. Giessen, 1903; 8°.

Guttmann (G.). Die Pestschrift des Jean à la Barbe (1370) zum ersten Male herausgegeben, übersetzt und erklärt. Berlin, 1903; 8°.

Hachenberg (L.). Ueber einen operativ geheilten Fall eitriger Sinusthrombose nach eitriger Mittelohrentzündung. Giessen, 1904; 8°.

Hanssen (P.). Ueber zwei Fälle von Nabelschnur-Zerreissung bei normalen Geburten. Giessen, 1904; 8°.

Hartmann (M.). Die Fortpflanzungsweisender Organismen. erläutert an Protozoen, Volvocineen und Dicyemiden. Leipzig, 1903; 8°.

Hegemann (F.). Erfahrungen über das Lactagol in der Universitäts-Frauenklinik zu Giessen. Borna-Leipzig, 1904; 8°.

Henze (B.). Die chronische Entzündung des Fleischsaumes und der Fleischkrone und ihre Behandlung. Stuttgart, 1903; 8°.

Hermannsdörfer (H.). Ameisensäure als Reductions- und als Lösungsmittel. Giessen, 1903; 8°.

Hodson (F.). Resonanzversuche über das Verhalten eines einfachen Kohärers. Giessen, 1904; 8°.

Junack (M.). Untersuchungen über die Aussen-Desinfection mittel mässig gespannten strömenden Wasserdampfes mit besonderer Berücksichtigung der Desinfection der Milchkannen. Stuttgart, 1904; 8°.

Keiper (W.). Elektrochemische Reduktion einiger Nitro-Azo-Verbindungen. Giessen, 1903; 8°.

Kisskalt (K.). Beiträge zur Lehre von der natürlichen Immunität. I. Die cutane Infection. Leipzig, 1903; 8°.

Klare (Ph.). Ein Fall von Tumor des linken Unterhornes. Warburg, 1903; 8°.

Kösters (A.). Appendicitis im Bruchsack. Giessen, 1904; 8°.

Kothen (C.). Ueber die Morbidität im Wochenbett nach Geburt von macerirten Früchten. Berlin, 1903; 8°.

Kroemer (P.). Die Lymphorgane der weiblichen Genitalien und ihre Veränderungen bei malignen Erkrankungen des Uterus. Berlin, 1904; 8°.

Kurz (W.). Der Uterus von Tarsius spectrum nach dem Wurf. Wiesbaden, 1904; 8°.

Landsberg (G.). Ueber den Alkoholgehalt trierischer Organe. Giessen, 1904; 8°.

Langer (R.). Untersuchungen über einen mit Knötchenbildung einhergehenden Process in der Leber des Kalbes und Dessen Erreger. Leipzig, 1904; 8°.

Leufers (A.). Beiträge zur Synophthalmie der Haustiere. Giessen, 1903; 8°.

Made (H.). Ueber Fareysche Doppelreihen. Darmstadt, 1903; 8°.

Mannheimer (E.). Einwirkung hydrolytisch gespaltener Salze auf die Hydrolyse von Natriumphenolat. Giessen, 1904; 8°.

May (H.). Vergleichende anatomische Untersuchungen Lymphfollikelapparate Darmes der Haussäugetiere. Giessen, 1903; 8°.

Meyer (F.). Untersuchungen über die multiple Necrose der Leber des Rindes. Wolgast, 1903; 8°.

Mitrowitsch (G.). Beitrag zur Kenntnis der Rinderseuche. Homberg a. d. Ohm, 1904; 8°.

Müller (M.). Beitrag zum Verhalten von Salzen in Aceton. Giessen, 1904; 8°.

Nöttebrock (H.). Zur Kenntnis der fötalen Peritonitis. Giessen, 1904; 8°.

Nübling (R.). Zur Kenntnis der Plumbisalze. Halle a. S., 1903; 8°.

Oertgen (J.). Ueber Gelenkmäuse. Giessen, 1903; 8°.

Ohm (R.). Welchen Einfluss hat die Einführung des modernen Infanteriegeschosses auf die Prognose und Behandlung der Infanterie-Schussverletzungen gehat? Giessen, 1904; 8°.

Palzer (Ph.). Ueber Sehnentransplantation bei statischem Plattfuss. Giessen, 1904; 8°.

Peters (J.). Untersuchungen über die Kopfspeicheldrüsen bei Pferd, Rind und Schwein. Giessen, 1904; 8°.

Pfannmüller (F.). Ueber die im Baugewerbe vorkommenden Augenverletzungen. Giessen, 1904; 8°.

Rendschmidt (H.). Bericht über elf Fälle von Sarkom des Uvealtraktus. Giessen, 1903; 8°.

Richter (J.). Experimentelle Untersuchung der beim Nachzeichnen von Strecken und Winkeln entstehenden Grössenfehler. Naumburg a. S., 1904; 8°.

Rommel (E.). Darmverschluss durch den persistierenden, am Nabel geschlossenen Dottergang. Giessen, 1903; 8°.

Sartorius (R.). Bericht über 10 Fälle von Iristuberkulose. Giessen, 1903; 8°.

Schaaf (G.). Zur Kasuistik der Orbitalgeschwülste. Giessen, 1903; 8°.

Schaaf (J.). Ueber die Complicationen der Schwangerschaft, der Geburt und des Wochenbettes durch Herzfehler. Wetzlar, 1903; 8°.

Schaumberger (H.). Ueber einen besonderen Linienkomplex vierten Grades. Giessen, 1904; 8°.

Scheers (G.). Ueber die Wirkung des Physostigmins bei Darmverschluss. Giessen, 1903; 8°.

Schmidt (A.). Die Zeckenkrankheit der Rinder-Haemoglobinaemia ixodioplasmatica boum- in Deutsch, Englisch-Ostafrika u. Uganda. Berlin, 1904; 8°.

Schmidt (O.). Untersuchungen über die Anwendung von Metallpulvern in der Chirurgie. Warburg, 1903; 8°.

Schmidt (P.). Das Verhalten der Oxime von p-Amidoacetophenon und p-Acetochinaldin hinsichtlich der Beckmannschen Umlagerung. Marburg, 1904; 8°.

Schneider (P.). Ein Beitr. zur Kasuistik des Carcinoma penis. Giessen, 1904; 8°.

Schroeder (J.). Chemisches und physikalisch-chemisches Verhalten des Pyridins und von Metallsalzen zu und in Pyridin. Giessen, 1904; 8°.

Schubert (B.). Versuche über Wertbemessung des Sobernheim'schen Milzbrandserums. Borna-Leipzig, 1903; 8°.

Skazil (R.). Das Kalì al Pflanzennährstoff; über die Absatzverhältnisse der Stassfurter Kalìsalze und die Bestrebungen von Seiten des Verkaussyndikats der Kalìverke zu Leopoldshall-Stassfurt diesen Absatz zu erhöhen. Giessen, 1903; 8°.

Stein (K.). Ein Beitrag zur Lehre von der Aetiologie der Tubargravidität. Giessen, 1904; 8°.

Strech (R.). Beitrag zur operativen Behandlung der Unterschenkelvaricen. Giessen, 1904; 8°.

Tauchert (F.). Das perforierende Brennen bei Spat. Pasewalk, 1903; 8°.

Tornau (F.). Der Flötzberg bei Zabrze. Berlin, 1903; 8°.

Trapp (M.). Ueber die Dosierung des Chloroforms mit der Maske. Giessen, 1903; 8°.

Vetter (E.). Ueber Verschliessung von Bauchwunden und Bruchpforten. Darmstadt, 1904; 8°.

Vogt (E.). Verhalten von Kobaltchlorür, Quecksilberchlorid und Stannochlorid in Aceton. Giessen, 1903; 8°.

Vorkampff-Lane (W.). Versuche einer Aufstellung von Kiefernertragstafeln für das Grossherzogtum Hessen gemäss den Bestimmungen des Verein deutscher forstlicher Versuchsanstalten. Giessen, 1904; 8°.

Weingarten (M.). Ueber Schmerzlinderung in der Geburt mit besonderer Berücksichtigung der kombinierten Skopolamin-Morphium-Analgesie. Münster in Westfalen, 1904; 8°.

Weyl (A.). Ueber lokalisierte Tuberkulose des Collum uteri. Giessen, 1904; 8°.

Willems (E.). Zur Therapie der Patellarfracturen. Köln a. Rh., 1904; 8°.

Wilmes (F.). Bericht über 628 Star-Operationen. Giessen, 1904; 8°.

Winterhager (A.). Ueber den Einfluss der Abnabelungszeit auf die Gewichtszunahme der Kinder. Giessen, 1903; 8°.

Wirtz (A.). Beitrag zur Klinik der Wachstummsstörungen, insbesondere der chondrodystrophischen Mikromelie. Giessen, 1904; 8°.

Wolff (L. C.). General-Bericht über die Torfversuche zu Oldenburg im Grossherzogtum (Monat November 1901) im Auftrage der Kgl. Preuss. Ministerien f. Handel und Gewerbe und f. Landwirtschaft. Berlin, 1904; 4°.

Zang (C.). Zur Casuistik der gutartigen Geschwülste des Oesophagus. Giessen, 1904; 8°.

Zang (W.). Die Anatomie der Kiefernadel und ihre Verwendung zur systematischen Gliederung der Gattung Pinus. Giessen, 1904; 8°.

Zöckler (R.). Ueber die eletrochemische Reduktion von Nitrochinolinen. Giessen, 1904; 8°.

Zoeppritz (H.). Zur Frage der perinealen Prostatektomie. Giessen, 1904; 8°.

Dal 29 Gennaio al 12 Febbraio 1905.

Ceretti (P.). Saggio circa la ragione logica di tutte le cose. Vol. V. Torino, 1905; 8° (*dono della signora Franzosini-Ceretti*).

Gargano Cosenza (G.). Il simbolo di Beatrice. Messina, 1903; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura 1902-1904*).

Gasca (C. L.). Trattato della Compra-vendita. Roma, 1905; 2 vol. 8° (*dall'A.*).

** **Monumenta** Germaniae historica. Auctorum antiquissimorum. T. XIV. Berolini, 1905; 4°.

Romano (M.). Ricerche su Vincenzo Cuoco politico, storiografo, romanziere, giornalista. Isernia, 1904; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura*).

Wolff-Beckh (B.). Kaiser Titus und der Jüditsche Krieg. Berlin-Steglitz, 1903; 8° (*dall'A.*).

* *Dall'Università di Giessen:*

Bleichrode (I.). Maimonides' Commentar zum Tractat Sanhedrin, Abschnitt IV-V. Berlin, 1904; 8°.

Callmann (C. P.) Zu den Vorschriften des bürgerlichen Gesetzbuchs über gutgläubigen Eigentums- und Pfanderwerb an beweglichen Sachen. Giessen, 1904; 8°.

Dammer (B.). Das Rotliegende der Umgegende von Altenburg in Sachsen Altenburg. Berlin, 1903; 8°.

Doll (H.). Goethe und Schopenhauer. Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Schopenhauerschen Philosophie. Berlin, 1903; 8°.

Friedlaender (M.). Die Veränderlichkeit der Namen in den Stammlisten der Bücher der Chronik. Berlin, 1903; 8°.

Glaser (K.). Die Mass- und Gewichtsbezeichnungen des französischen. Berlin, 1903; 8°.

Hepding (H.). Der Attiskult. Giessen, 1903; 8°.

Heymann (W.). Französische Dialectwörter bei Lexikographen des 16. bis 18. Jahrhunderts. Giessen, 1903; 8°.

Kehm (O.). Die Entstehung und Entwicklung der Giessener Tabakindustrie. Ulm, 1903; 8°.

Keller (O.). Die Nasalpräsentia der arischen Sprachen. Gütersloh, 1904; 8°.

Klein (A.). Die zentrale Finanzverwaltung im Deutschordensstaate Preussen am Anfang des XV. Jahrhunderts. Leipzig, 1904; 8°.

Koeser (E.). De captivis Romanorum. Gissae, 1904; 8°.

Krogmann (H.). Die Schweinezucht im Grossherzogtum Oldenburg. Warburg, 1903; 8°.

Labion (G.). Darstellung der wirtschaftlichen Verhältnisse eines Eifeldorfes unter besonderer Berücksichtigung seiner landwirtschaftlichen Zustände. Giessen, 1904; 8°.

Lütke-Wentrup (A.). Die geschichtliche Entwickelung der Pferdezucht in der Provinz Westfalen, ihre Förderung durch Staats- und Vereinshilfe und ihr gegenwärtiger Standpunkt. Münster i. Westf., 1904; 8°.

May (H.). Die Landwirtschaft der Wetterau unter Berücksichtigung der naturlichen, wirtschaftlichen und sozialen Derhältnisse. Giessen, 1903; 8°.

Meyer (I. A.). Die virtschaftlichen Verhältnisse des Grund und Bodens der Stadt Giessen in den letzten 25 Jahren. Paderborn, 1903; 8°.

Personalbestand der Grossh. Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Winterhalbjahr 1903/04; Sommerhalbjahr 1904. Giessen, 1903, 1904; 8°.

Rentrop (E.). Setzung der Personalpronomens als Subjekt im älteren Neufranzösisch. Giessen, 1903; 8°.

Rietz (A.). Die Rückforderung von Depots zur Sicherung unverbindlicher Verträge. Berlin, 1903; 8°.

Ruhl (L.). De mortuorum iudicio. Numburgi ad Salam, 1903; 8°.

Satzungen der Universität Giessen. I. u. II. Teil. Giessen, 1904; 8°.

Sauer (B.). Der Weber-Laborde'sche Kopf und die Giebelgruppen des Parthenon. Giessen, 1903; 4°.

Schnert (F.). Die landwirtschaftliche Betriebsweise im Kreise Erbach. Giessen, 1904; 8°.

Teping (H.). Die Entwickelung der Landwirtschaft im oldenburgischen Münsterland während der letzten vier Jahrzehnte. Lutten, 1903; 8°.

Thelen (K.). Die Rindviehzucht im Grossh. Hessen während des neunzehten Jahrhunderts. Odenkirchen, 1903; 8°.

Vogel (K.). Die Besteuerung des Grossbetriebs im Kleinhandel im Königreich Sachsen. Annaberg, Erzgeb. 1903; 8°.

Vorlesungsverzeichnis der Grossh. Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen-Sommerhalbjahr 1904, Winterhalbjahr 1904/05. Giessen, 1904; 8°.

Zörb (K.). Die Volksdichte der Grossh. Hessischen Provinz Rheinhessen. Giessen, 1903; 8°.

Dal 5 al 19 Febbraio 1905.

Al Professore Icilio Guareschi in occasione del XXV anniversario d'insegnamento nella R. Università di Torino. Torino, 1905; 8° (*dal Comitato per le onoranze al medesimo*).

Colomba (L.). La leucite del tufo di Pompei. Roma, 1904; 8°.

— Cenni preliminari sui minerali del Lausetto. Roma, 1904; 8° (*dall'A.*).

De Toni (G. B.). Per il terzo centenario della morte di Ulisse Aldrovandi (4 maggio 1605 - 4 maggio 1905). Cinque lettere di Luca Ghini ad Ulisse Aldrovandi. Padova, 1905; 8°.

— Sylloge Algarum omnium hucusque cognitarum. Vol. IV, Florideae, Sect. IV, Familiae I-VII. Patavii, 1905; 8° (*Id.*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni. 4ª ediz. Parte 1-3. 5. Torino, 1904; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Hemiksen (G.). Sur les gisements de Minérai de fer de Sydvaranger (Finmark-Norvège) et sur des problèmes connexes de géologie. Paris, 1904; 8° (*Id.*).

Kerntler (F.). Die Ermittlung des Eichtligen elektrodynamischen Elementargesetzes, etc. Budapest, 1905; 8° (*Id.*).

Largajolli (V.). Le Diatomee del Trentino. Trento, 1904; 8° (*Id.*).

Lesage (P.). Contribution à l'étude des Mycoses dans les voies respiratoires. Paris, 1904; 8° (*Id.*).

Table analytique des vingt-cinq premiers volumes 1875-1901 des Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Louvain, 1904; 8°.

Table analytique des cinquante premiers volumes 1877-1901 de la Revue des questions scientifiques. Louvain, 1904; 8° (*dono della Société scientifique de Bruxelles*).

Thomsen (J.). Systematisk gennemforte Termokemiske undersgelsers numeriske og teoretiske Resultater. Kobenhavn, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 12 al 26 Febbraio 1905.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane. 2ª serie: Caracciolo di Napoli; Moncada di Sicilia. Napoli, 1905; f°.

Memorie della Rivoluzione siciliana dell'anno 1848 pubblicate nel cinquantesimo anniversario del XII gennaio di esso anno. Palermo, 1898; 2 vol. 8° (*dal Socio residente R. Renier*).

Nuzzo (E.). La lingua italiana nella Campania. Errori e correzioni. Parte I: Fonologia. Salerno, 1904; 8° (*dall'A*).

Pacchioni (G.). Trattato della gestione degli affari altrui secondo il diritto romano e civile. Lanciano, 1893; 8°.

— Corso di diritto romano. Innsbruck, 1905; 8° (*Id.*).

Rio de Janeiro. Bibliothèque Nationale.

O. Bilac. Poesias. Nova edição. Rio de Janeiro, 1904; 1 vol. 16°.

Da hygiene militar do Brasil... pelo Dr. J. M. Cordeiro Gitahy. Rio de Janeiro, s. a.; 8°.

Memoria historica das epidemias da febre Amarella e Cholera-morbo que tém reinado no Brasil pelo Dr. J. Pereira Rego. Rio de Janeiro, 1873; 1 vol. 8°.

Relatorio apresentado ao Sr. Dr. Sabino Barroso Junior Ministro da Justica e Negocios interiores pelo director D. M. C. Peregrino da Silva. 1901. Rio de Janeiro, 1903; 8°.

Terzaghi (N.). Prometeo. Contributo allo studio di un mito Ellenico. Firenze, 1904; 8°.

— Di una rappresentazione della lotta tra Peleo e Tetide e delle relazioni di questo mito con le nozze sacre. Pescia, 1904; 8°.

— Eur. " Phoen „ 119-1122 e l'arte figurata. Torino, 1903; 8°.

— Ad Hes. Theog. 535 ss. Firenze, 1904; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la letteratura*).

Dal 19 Febbraio al 5 Marzo 1905.

* **Catania.** R. Osservatorio.

S. Arcidiacono. Il terremoto di Niscemi del 13 luglio 1903. Modena, 1904; 8°.

— Principali fenomeni eruttivi avvenuti in Sicilia e nelle isole adiacenti durante l'anno 1901. Modena, 1904; 8°.

A. Riccò. Sullo spettro dei materiali incandescenti, eruttati dall'Etna nel 1902. Catania, 1904; 8°.

— Eruzioni e Pioggie. Catania, 1904; 4°.

A. Riccò e L. Mendola. Variazione della trasparenza dell'atmosfera terrestre nel triennio 1901-903. Catania, 1904; 8°.

— Risultati delle osservazioni meteorologiche del 1903 fatte al R. Osservatorio. Catania, 1904; 4°.

Klein (C.). Ueber Theodolithgoniometer. Berlin, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Oddone (E.). Metodi per determinare le coordinate di un aerostato, sua direzione e velocità. Roma, 1904; 4° (*dall'A.*).

Roccati (A.). Edenite delle Alpi marittime. Padova, 1905; 8°.

— Massi e ciottoli granitici nel terreno Miocenico di Lojano (Appennino bolognese). Roma, 1905; 8° (*Id.*).

Travaux de la station Franco-Scandinave des sondages aériens à Hald. 1902-1903. Viborg, Danmark, 1904. 1 vol.; 4°.

Dal 26 Febbraio al 12 Marzo 1905.

** **Monumenta** Germaniae historica. Legum, sectio III; Concilia, T. II, pars prior. Hannoverae, 1904; 4°.

Pivano (S.). Cartario dell'Abazia di Rifreddo. Pinerolo, 1902; 8°.

— I contratti agrari in Italia nell'Alto Medio-Evo. Torino, 1904; 8°.

— Stato e Chiesa. Statuti comunali italiani. Torino, 1904; 8° (*dall'A.*).

Toesca di Castellazzo (G.). Commemorazione del Generale Luigi Palma di Cesnola. Torino, 1905; 8°.

Dal 5 al 19 Marzo 1905.

** **Bertrand** (J.). Les fondateurs de l'Astronomie moderne. 7me édit. Paris, s. a.; 8°.

Cornu (A.). Œuvres divers. 5 vol. 4° e 8° (*dono della signora Cornu*).

Pizzetti (P.). Trattato di Geodesia teoretica. Bologna, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae opus..... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. Tom. XIX, Decas 2. Lipsiae et Gerae; 4°.

Sarre Borioli. Riordinamento delle stazioni ferroviarie di Torino. Progetto N. 3. Scala 1 : 10000. Torino, 1 carta fol.

Dal 12 al 26 Marzo 1905.

Marr (B.). Die Symbolik der Lunation. Dux, 1905; 8° (*dall'A.*).

Strazzulla (V.). I Persiani di Eschilo ed il nomo di Timoteo volgarizzati in prosa con introduzione storica. Messina, 1904; 8° (*Id.*).

Dal 19 Marzo al 2 Aprile 1905.

Carbonelli (J.). Atlas d'Anatomie obstétricale. Préface par M. Paul Bar. Paris, Turin, 1905; 4° (*dall'A.*).

Faccin (D. F.). Nuovo planisfero ad uso della Marina. Pavia, 1905; 8° (*Id.*).

Rajna (M.). Nuovo calcolo dell'effemeride del Sole e dei crepuscoli per l'orizzonte di Bologna, 1904; 4° (*Id.*).

— **Pirazzoli** (R.) e **Masini** (A.). Osservazioni meteorologiche fatte durante l'anno 1903 nell'Osservatorio della R. Università di Bologna. Bologna, 1904; 4° (*dal prof. M. Rajna*).

Stok (J. P. van der). Études des phénomènes de marée sur les Côtes Néerlandaises. II. Résultats d'observations faites à bord des bateaux-phares Néerlandais. Utrecht, 1905; 8° (*dall'A.*).

Texte Synoptique des documents destinés à servir de base aux débats du Congrès international de Nomenclature botanique de Vienne 1905 présenté au nom de la Commission internationale de Nomenclature botanique par J. Briquet, Rapporteur général. Genève, 1905; 4°.

Dal 26 Marzo al 9 Aprile 1905.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (seconda serie). Caracciolo di Napoli. Napoli, 1905; f°.

Mezzo secolo di Vita della Unione tipografico-editrice torinese (già Ditta Pomba e C.), 1855-1904; 8° (*dono dell'Unione tipografico-editrice torinese*).

Revelli (P.). Il Comune di Modica. Descrizione fisico-antropica. Palermo, 1904; 8° (*dall'A.*).

Sforza (G.). La caccia all'Orso in Garfagnana nel secolo XVI. Genova 1905, 8° (*Id.*).

Dal 2 al 16 Aprile 1905.

Belar (A.). A. Cancani. Laibach, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Doflein** (Fr.). Brachyura. Jena, 1904; 1 vol. 4° di testo e 1 Atl.

Natur und Staat, Beiträge zur naturwissenschaftlichen Gesellschaftslehre. VII Teil. Jena, 1905; 8° (*dono del Socio straniero E. Haeckel e dei Professori Conrad e Fraas*).

Dal 9 al 30 Aprile 1905.

Botti (E.). La delinquenza femminile a Napoli. Napoli, 1904; 8° (*dono della R. Biblioteca Universitaria*).

Gambèra (P.). Note dantesche con due tavole astronomiche. Salerno, 1903; 8°.

— Cinque nuove notarelle dantesche. Torino, 1904; 8° (*dall'A. per concorrere al premio di fondazione Gautieri per la Letteratura*).

Mannucci (F. L.). L'anonimo genovese e la sua raccolta di rime (sec. XIII-XIV). Genova, 1904; 8°.

— La cronaca di Jacopo da Varagine. Genova, 1904; 8° (*dono del Municipio di Genova*).

Margini (S.). La Cassa di Risparmio modello all'Esposizione di Milano 1905. Verona, 1903; 8° (*dall'A.*).

Profumo (A.). Le fonti ed i tempi dell'incendio Neroniano. Roma, 1905; 1 vol. 4°.

Dal 16 Aprile al 7 Maggio 1905.

** **Alphéraky** (S.). The Geese of Europe and Asia. London, 1905; 4°.

Angelitti (F.). G. Rizzacasa d'Orsogna. Polemiche dantesche. Firenze, 1903; 8°.

— Dr. G. Boffito, *Dante e Bartolomeo da Parma*. Firenze, 1903; 8°.

— G. Rizzacasa d'Orsogna, *Se Dante fu un precursore di Copernico*. Firenze, 1903; 8°.

— Sullo stato del R. Osservatorio di Palermo e sui lavori in esso eseguiti durante il quinquennio 1899-1903. Relazione. Palermo, 1904; 8°.

— Studio della flessione del cannocchiale del circolo meridiano di Pistor et Martins con osservazioni fatte dal 20 novembre 1901-8 gennaio 1902. Palermo, 1904; 8°.

— Il problema della forma della terra nell'antichità. Palermo, 1905; 8° (*dall'A.*).

Galdieri (A.). Osservazioni sui terreni sedimentarii di Zannone. Napoli, 1905; 8° (*Id.*).

Gori (G.). Tavola per le riduzioni delle letture dei microscopii. Palermo; 8°.

— Regola per convertire il tempo sidereo in tempo medio. Palermo (*dal Direttore dell'Osservatorio di Palermo*).

Haeckel (E.). Le meraviglie della vita, complemento ai " Problemi dell'Universo ". Prima traduzione italiana del Dr. D. Rosa, disp. 1ª. Torino, 1905; 8° (*dono dell'Unione Tipografico editrice*).

Largaiolli (V.). Le diatomee del Trentino. Trento, 1905; 8°.

— Le diatomee del Trentino. 1. Il fiume Noce. Padova, 1905; 8° (*dall'A.*).

Michelucci (E.). L'insolazione a Palermo. Palermo, 1904; 4° (*dal Direttore dell'Osservatorio*).

Zona (T.) e **Cantelli** (F.). Osservazioni della durata del passaggio del Sole al Meridiano fatte al R. Osserv. di Palermo nell'anno 1900, 1901, 1902. Palermo, 1903-904; 4°.

— e **Sartorio** (G. W.). Protuberanze solari osservate nel R. Osservatorio astronomico di Palermo nell'anno 1904. Palermo, 1905; 4° (*Id.*).

Dal 30 Aprile al 14 Maggio 1905.

Archer de Lima. Livre de Sonnets. Paris, 1903; 8° (*dall'A.*).

Boffito (G.). La " Quaestio de aqua et terra „ di Dante Alighieri (Ediz. principe del 1508 riprodotta in facsimile). Introduzione storica e trascrizione critica del testo latino. Firenze, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Biadego (G.). Un ignoto pittore veronese. Padova, 1904; 2 c. in-8°.

— Della vita di Orlando Flacco pittore veronese e di alcune sue opere. Firenze, 1905; 8°.

— Cesare Betteloni. Paralipomeni. Venezia, 1905; 8° (*Id.*).

Dal 7 al 21 Maggio 1905.

Bruno. Théorie exacte et notation finale de la Musique. Porto, 1903; 4° obl. (*dall'A.*).

Cabreira (A.). Quelques mots sur les Mathématiques en Portugal... avec biographie de l'Auteur. Lisbonne, 1905; 8° (*Id.*).

Carruccio (A.). Relazione sull'andamento scientifico, morale ed economico della Società Zoologica italiana durante il 1904. Roma, 1905; 8°.

Littel (F. B.). The Astronomical and Astrophysical Society of America. Sixth Meeting, Philadelphia, Pa., 1904. New York, 1904; 8° (*dal sig. Littel editore*).

Parona (E.). Dizionario di termini medici dal nome dell'Autore. Opera postuma. Milano, 1905; 8° (*dono del Socio C. F. Parona*).

Rajna (M.). Pietro Tacchini. Commemorazione. Bologna, 1905; 8°.

— Sull'eclisse solare del 30 agosto 1905. Bologna, 1905: 8°.

— Circostanze dell'eclisse solare del 30 agosto 1905 calcolate per tutta Italia e regioni circonvicine. Catania, 1905; 4° (*dall'A.*).

** *Tables* générales des Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences. T. XCII a CXXI. 5 janvier 1881 à 30 décembre 1895. Paris, 1900; 4°.

Dal 14 al 28 Maggio 1905.

Fòffano (Fr.). Storia dei Generi Letterari italiani. Il Poema cavalleresco. Milano; 8° (*dall'A.*).

Garrett Chatfield Pier. A New historical Stela of the Intefs. Chicago, 1905; 8° (*Id.*).

** **Lübker** (F.). Lessico ragionato dell'Antichità classica (6ª ediz. tedesca). Tradotto con molte aggiunte e correzioni da C. A. Murero. Roma, 1898; 8°.

Dal 21 Maggio all'11 Giugno 1905.

** **Couturat** (L.). L'Algèbre de la logique. Paris, 1905; 8°.

Haeckel (E.). Le meraviglie della Vita. 1ª Trad. italiana autorizzata dall'Autore del Dr. Daniele Rosa, 2ª disp. Torino, 1905; 8° (*dono dell'Unione Tipografico-editrice*).

Issel (A.). Terminologia geografica relativa alla configurazione orizzontale della terra emersa, al mare e alle profondità marine. Genova, 1904; 8°.

— Osservazioni geologiche fatte nei dintorni di Torriglia. Genova, 1904; 8°.

— Osservazioni intorno alla frana del Corso Firenze in Genova. Perugia, 1904; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Prix Nobel (Les) 1902. Stockholm, 1905; 8° (*dall' " Académie R. Suédoise des Sciences „*).

** **Stokes** (G. G.). Mathematical and Physical papers. Vol. V. Cambridge, 1905; 8°.

Dal 28 Maggio al 18 Giugno 1905.

Bertolini (C.). Appunti didattici di diritto romano; fasc. 1, 2. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

Bontempi (F.). Storia delle Scienze e delle Arti italiane dall'êra romana al secolo ventesimo, al regno di Umberto I Re d'Italia. Torino, 1905; 8° (*Id.*).

Castelli (G.). Il pregiudizio di una lingua universale. Roma, 1905; 8° (*Id.*).

** **Litta.** Famiglie celebri italiane. 2ª serie. Caracciolo di Napoli, fasc. X, f°.

Marti (L.). Dalle valli alle vette. Cantiche. Milano, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura*).

Natale (M.). Antonio Beccadelli detto il Panormita. Caltanisetta, 1902; 8° (*Id.*).

Pascal (C.). Graecia Capta. Saggi sopra alcune fonti greche di scrittori latini. Firenze, 1905; 8° (*dall'A.*).

Resoconto dell'anno 1904 della Cassa di Risparmio di Torino; 1905; f°.

Romualdo Bobba. Cinquant'anni d'insegnamento (1854-1904). Scuola tipografica di S. Benigno Canavese, 1905; 4° (*dono dei figli di* R. Bobba).

Solmi (A.). Ademprivia. Studii sulla proprietà fondiaria in Sardegna. Pisa, 1904; 8° (*dall'A.*).

Dall'11 al 25 Giugno 1905.

Borredon (G.). Excelsior ovvero l'Astronomia ridotta alla sua più semplice espressione. Pozzuoli, 1905; 8° (*dall'A.*).

Haeckel (E.). Le meraviglie della vita. Prima traduzione italiana autorizzata dall'Autore del Dr. Daniele Rosa. Torino, Unione tip.-edit., 1905; 8°.

Helmert (F. R.). Ueber die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. Berlin, 1905; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni. Parte 4ª, Teoria dei Ponti, 3ª ediz. Torino, 1905; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Mattirolo (O.). Come le ariste delle Graminacee penetrano e migrano nei tessuti degli animali. Torino, 1905; 8° (*Id.*).

Dal 18 Giugno al 2 Luglio 1905.

Année (L') linguistique publiée sous les auspices de la Société de Philologie. T. II (1903-1904). Paris, 1904; 8° (*dono del Socio corrispondente A. Marre*).

Bargilli (G.). Manoscritti della Regia Accademia Militare. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

De Sarlo (Fr.). Lo spiritualismo al recente Congresso di Psicologia. Firenze, 1905; 8°.

— La Psicologia come scienza empirica. Bologna, 1905; 8° (*dall'A.*).

Grandeau (L.). L'Agriculture et les Institutions agricoles du Monde au commencement du XXe siècle. Paris, 1905 (*Id.*).

** **Justiniani Augusti** Digestorum seu Pandectarum codex Florentinus olim Pisanus phototypice expressus. Vol. I, fasc. IV. Roma, MCMV; f°.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Novembre 1904.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Segre, Peano, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Jadanza che funge da Segretario in assenza del Socio Camerano che trovasi a Roma per ragioni d'ufficio. — Scusa l'assenza il Socio Salvadori, Direttore della Classe.

Letto il processo verbale della seduta precedente è approvato.

Il Presidente, dopo aver salutato i colleghi, dà lettura dei telegrammi mandati ai Sovrani ed alla Regina Madre, in occasione della nascita del Principe Ereditario, e di quelli ricevuti in risposta.

Comunica una lettera del Ministero della Istruzione Pubblica dell'Impero Germanico, che trasmette una targhetta in bronzo coniata in occasione della celebrazione del 2° centenario della fondazione della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Partecipa l'invito del Comitato permanente del Congresso internazionale di Botanica che si terrà a Vienna nel 1905. Il Prof. Mattirolo rappresenterà l'Accademia se potrà prendervi parte.

Il Presidente comunica la morte del Socio corrispondente Emilio Villari, Professore nella Università di Napoli, avvenuta

il 20 agosto scorso, e quella del Socio corrispondente Roberto Armando Philippi, Direttore del Museo di Santiago (Cilì) avvenuta il 23 luglio 1904.

Vengono presentati dal Presidente i seguenti libri pervenuti in dono all'Accademia:

1° il 2° volume delle *Opere matematiche* di Francesco Brioschi, inviato in dono dal Comitato per le onoranze al medesimo;

2° il ritratto del Socio straniero Giorgio Gabriele Stokes, dono della *Cambridge Philosophical Society*;

3° *Sulla dispersione della elettricità da metalli diversi,* del Socio Prof. Naccari;

4° *Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit,* del Socio straniero F. R. Helmert;

5° tre opuscoli relativi ad esperienze sulla radioattività, del Socio corrispondente Righi;

6° un opuscolo del Prof. Veronese Socio corrispondente, intitolato: *La laguna di Venezia*;

7° il 2° volume della *Faune des Vertébrés de la Suisse,* del Socio corrispondente Victor Fatio;

8° tre opuscoli di Mineralogia del Socio corrispondente C. Klein;

9° un opuscolo del Socio corrispondente F. Kohlrausch;

10° la biografia di L. Cremona, scritta dal Socio corrispondente M. Noether in Erlangen;

11° una commemorazione del Socio G. Berruti, dono del Prof. G. A. Reycend, Direttore della Scuola di applicazione degl'Ingegneri di Torino;

12° due opuscoli del Socio Guidi, aventi per titolo, uno: *Prove di resistenza su voltine di mattoni forati;* l'altro: *L'ellisse di elasticità nella Scienza delle costruzioni.*

Il Socio Mattirolo presenta un volume intitolato: *Scritti*

botanici pubblicati nella ricorrenza centenaria della morte di Carlo Allioni, uno dei primi Socii della nostra Accademia; ne discorre brevemente ed invita i colleghi a visitare il busto in bronzo inaugurato nell'Orto botanico, opera dello scultore Ettore Ridoni. Il Presidente, su proposta di Mattirolo, ringrazierà l'artista per l'opera fatta in onore di un insigne Socio della nostra Accademia.

Presenta inoltre un opuscolo scritto in collaborazione colla signora Irene Chiapusso-Voli, avente per titolo: *Les Bochiardo Botanistes piémontais.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

1° *Sopra una particolare equazione differenziale del 1° ordine,* del Dr. Mineo Chini, dal Socio Peano;

2° *I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la Storia della Geodesia.* Nota 2ª: *Saigey e le variazioni della gravità,* dell'Ing. Ottavio Zanotti-Bianco, dal Socio Jadanza;

3° *Echinodermi Miocenici dei dintorni di S. Maria Tiberina (Umbria),* del Dr. Airaghi Carlo, dal Socio Parona;

4° *Sulla dispersione della elettricità nei vapori di jodio,* del Dr. Adolfo Campetti, dal Socio Naccari;

5° *Contributo alla conoscenza della infiltrazione adiposa,* del Socio Pio Foà.

LETTURE

Sopra una particolare equazione differenziale del 1° ordine.

Nota di MINEO CHINI.

In una precedente Nota (*) misi in rilievo una vasta classe di equazioni differenziali della forma:

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$$

caratterizzate dall'esistenza di una relazione lineare che passa fra tre loro soluzioni particolari, equazioni di cui detti l'espressione dell'integrale generale. Essendomi ora proposto di determinare altre classi di equazioni della suddetta forma, integrabili con sole quadrature, ho voluto passare alla ricerca di tutte quelle che ammettono come fattore integrante un'espressione del tipo:

$$(y - x_1)^{m_1}(y - x_2)^{m_2}(y - x_3)^{m_3},$$

con m_1, m_2, m_3 quantità costanti, e x_1, x_2, x_3 funzioni della variabile x: la quale ricerca è suggerita dal Darboux nella sua *Théorie des surfaces* (**).

Tale studio non presenta difficoltà teoriche; ma l'importante è di vedere se anche sia possibile determinare con sole quadrature i coefficienti delle equazioni richieste: e questo appunto ho potuto provare.

Dopo ciò, passando al caso più semplice in cui il fattore integrante sia della forma:

$$(y - x_1)^{m_1}(y - x_2)^{m_2},$$

(*) *Sopra una particolare equazione differenziale del 1° ordine,* " Rendiconti del R. Istituto Lombardo ", serie II, vol. XXXVI, a. 1903.

(**) Vol. IV, pag. 447.

ho riconosciuto che allora le corrispondenti equazioni appartengono alla categoria di quelle da me studiate nella precedente Nota; e quindi ho anche potuto dar subito l'espressione del loro integrale generale, senza fare uso di quel fattore integrante.

Si comprende poi come si possa, con analogo procedimento, determinare delle classi di equazioni integrabili, pure fra quelle il cui secondo membro sia un polinomio in y di grado superiore al terzo.

§ I.

Osserviamo dapprima che, senza mancare affatto alla generalità, possiamo sempre ritenere che nell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$$

il coefficiente a_3 (il quale deve supporsi non nullo) sia ridotto all'unità. Giacchè se fosse una funzione qualunque di x, potremmo cambiare la variabile in guisa tale che nell'equazione trasformata il coefficiente di y^3 fosse uguale all'unità (*).

Occupiamoci dunque delle equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + y^3 \tag{1}$$

(dove α, β, γ sono funzioni di x) che ammettono un fattore integrante μ della forma:

$$\mu = (y - x_1)^{m_1} (y - x_2)^{m_2} (y - x_3)^{m_3} \tag{2}$$

con m_1, m_2, m_3 quantità costanti, e x_1, x_2, x_3 funzioni di x.

Affinchè ciò si verifichi, sarà necessario e sufficiente che abbia luogo l'identità:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} + (\alpha + \beta y + \gamma y^2 + y^3) \frac{\partial \log \mu}{\partial y} + (\beta + 2\gamma y + 3y^2) = 0.$$

(*) Basterebbe infatti porre $\int a_3 dx = t$, ed assumere poi t come nuova variabile.

Cioè:

$$(3) \qquad (\alpha + \beta y + \gamma y^2 + y^3) \times$$
$$\times \{ m_1(y-x_2)(y-x_3) + m_2(y-x_3)(y-x_1) + m_3(y-x_1)(y-x_2) \} +$$
$$+ (\beta + 2\gamma y + 3y^2)(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3) -$$
$$- \left\{ m_1(y-x_2)(y-x_3)\frac{dx_1}{dx} + m_2(y-x_3)(y-x_1)\frac{dx_2}{dx} + m_3(y-x_1)(y-x_2)\frac{dx_3}{dx} \right\} = 0.$$

Il primo membro della (3) è una funzione intera di quinto grado in y, i coefficienti della quale sono funzioni di x; e perciò dovremo uguagliare a zero ciascuno di essi. Ma l'annullarsi del coefficiente di y^5 ci conduce anzitutto alla condizione:

$$(4) \qquad m_1 + m_2 + m_3 + 3 = 0,$$

alla quale debbono dunque soddisfare gli esponenti m_1, m_2, m_3 che figurano nell'espressione del fattore integrante μ.

Uguagliando poi a zero gli altri coefficienti, verremo ad ottenere 5 relazioni in cui entrano i 3 coefficienti α, β, γ dell'equazione differenziale, e le 3 funzioni x_1, x_2, x_3 del fattore integrante.

Ora, annullando nella (3) il coefficiente di y^4, e tenendo conto della condizione (4), avremo:

$$(5) \qquad \gamma = \Sigma mx,$$

con $$\Sigma mx = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3.$$

Annullando poi il coefficiente di y^3, e facendo uso delle (4) e (5), otterremo:

$$(6) \qquad 2\beta = (\Sigma mx)^2 + \Sigma mx^2,$$

con $$\Sigma mx^2 = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2.$$

Mentre l'annullarsi del coefficiente di y^2, coll'uso delle (4), (5), (6), ci darà:

$$(7) \qquad 6\alpha = (\Sigma mx)^3 + 3\Sigma mx \,.\, \Sigma mx^2 + 2\Sigma mx^3 - 2\frac{d}{dx}\Sigma mx.$$

Si noti subito che possiamo anche scrivere:

$$(8)\qquad \gamma=\Sigma mx,\ 2\beta=\gamma^2+\Sigma mx^2,\ 3\alpha=-\frac{d\gamma}{dx}+\gamma(3\beta-\gamma^2)+\Sigma mx^3.$$

Restano finalmente da uguagliarsi a zero il coefficiente di y ed il termine indipendente da y nella (3).

Ora, applicando le (4), (5), (6), (7), e dopo alcune riduzioni, otterremo come resultato le due nuove equazioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} 2m_1(3x_1+\Sigma mx)\frac{dx_1}{dx}+2m_2(3x_2+\Sigma mx)\frac{dx_2}{dx}+2m_3(3x_3+\Sigma mx)\frac{dx_3}{dx}= \\ \quad =(\Sigma mx)^4+8\Sigma mx.\Sigma mx^3+6\Sigma mx^4+3\Sigma mx^2.\}\,2(\Sigma mx)^2+\Sigma mx^2\{, \\ 2m_1(3x_2x_3+\Sigma mxx)\frac{dx_1}{dx}+2m_2(3x_3x_1+\Sigma mxx)\frac{dx_2}{dx}+2m_3(3x_1x_2+\Sigma mxx)\frac{dx_3}{dx}= \\ \quad =\Sigma mxx.\}\,(\Sigma mx)^3+3\Sigma mx.\Sigma mx^2+2\Sigma mx^3\{-3x_1x_2x_3\}\,(\Sigma mx)^2+\Sigma mx^2\{ \end{cases}$$

con $$\Sigma mxx=m_1x_2x_3+m_2x_3x_1+m_3x_1x_2.$$

Dunque: *Per avere tutte le possibili equazioni del tipo* (1) *che ammettono come fattore integrante un'espressione della forma* (2), *dovremo anzitutto fissare per gli esponenti* m_1, m_2, m_3 *tre costanti qualunque legate dalla relazione* (4); *e poi scegliere per* x_1, x_2, x_3 *una terna di funzioni della variabile* x, *in guisa che risultino soddisfatte le due equazioni* (9). *Dopo ciò, i valori dei coefficienti* , β, γ *che figurano nella* (1) *saranno dati rispettivamente dalle formule* (7), (6), (5).

Noi potremo, per es., fissare:

$$m_1=m_2=m_3=-1,$$

e con ciò verremo a determinare tutte le equazioni del tipo (1) che ammettono come fattore integrante un' espressione della forma:

$$(10)\qquad \frac{1}{(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)}.$$

In tal caso è facile riconoscere che i secondi membri delle (9)

si annullano entrambi, e queste due equazioni si riducono perciò alle altre:

$$(x_2+x_3-2x_1)dx_1+(x_3+x_1-2x_2)dx_2+(x_1+x_2-2x_3)dx_3=0$$

$$[x_1(x_2+x_3)-2x_2x_3]dx_1+[x_2(x_3+x_1)-2x_3x_1]dx_2+$$
$$+[x_3(x_1+x_2)-2x_1x_2]dx_3=0.$$

Se ne ricava facilmente:

$$dx_1=dx_2=dx_3.$$

E quindi:

$$x_1=X+c_1,\ x_2=X+c_2,\ x_3=X+c_3,$$

dove X indica una funzione qualunque di x, e c_1, c_2, c_3 sono tre costanti arbitrarie.

Ora, osservisi che i coefficienti α, β, γ vengono ad avere in questo caso speciale i valori seguenti:

$$\alpha=\frac{1}{3}\left(\frac{dx_1}{dx}+\frac{dx_2}{dx}+\frac{dx_3}{dx}\right)-x_1x_2x_3,\quad \beta=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1,$$
$$\gamma=-(x_1+x_2+x_3).$$

Da cui si deduce l'uguaglianza:

$$\alpha+\beta y+\gamma y^2+y^3=\frac{1}{3}\left(\frac{dx_1}{dx}+\frac{dx_2}{dx}+\frac{dx_3}{dx}\right)+(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3).$$

Possiamo dunque concludere: *Tutte le equazioni* (1) *aventi un fattore integrante del tipo* (10) *sono quelle della forma:*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+(y-X-c_1)(y-X-c_2)(y-X-c_3),$$

con X *funzione qualunque di* x, *e* c_1, c_2, c_3 *costanti arbitrarie.*

Il detto fattore integrante è:

$$\frac{1}{(y-X-c_1)(y-X-c_2)(y-X-c_3)}.$$

§ II.

Come già si disse, una funzione μ della forma (2) risulterà fattore integrante di un'equazione differenziale del tipo (1), solamente quando gli esponenti m_1, m_2, m_3 siano legati dalla (4), e le funzioni x_1, x_2, x_3 soddisfino alle (9). Per conseguenza una di tali funzioni sarà del tutto arbitraria; mentre, fissata questa, si avranno le altre due integrando il sistema di equazioni differenziali (9).

Noi potremo, per es., supporre $x_3 = 0$; e con ciò verremo a determinare tutte le equazioni del tipo (1) aventi come fattore integrante un'espressione della forma:

$$y^{m_3}(y - x_1)^{m_1}(y - x_2)^{m_2}. \tag{11}$$

Osserviamo però che anche il caso di $x_3 \neq 0$ si può in sostanza ridurre a quest'ultimo. Infatti, dopo aver determinate le equazioni (1) che ammettono un fattore integrante della forma (11), se cambiamo y in $y - x_3$, con x_3 funzione arbitraria di x, le suddette equazioni conserveranno evidentemente la forma (1), ed il fattore integrante (11) si cambierà in uno del tipo (2). Di più, a causa dell'arbitrarietà della funzione x_3, le equazioni così trasformate ci forniranno *tutte* quelle richieste dal caso generale.

Ora, nell'ipotesi di $x_3 = 0$, le equazioni (9) si riducono alle altre:

$$\left\{\begin{aligned}
&2m_1\}(m_1+3)x_1 + m_2x_2\{\frac{dx_1}{dx} + 2m_2\}m_1x_1 + (m_2+3)x_2\{\frac{dx_2}{dx} = \\
&= m_1(m_1+1)(m_1+2)(m_1+3)x_1^4 + 4m_1m_2(m_1+1)(m_1+2)x_1^3x_2 + \\
&+ 6m_1m_2(m_1+1)(m_2+1)x_1^2x_2^2 + 4m_1m_2(m_2+1)(m_2+2)x_1x_2^3 + \\
&+ m_2(m_2+1)(m_2+2)(m_2+3)x_2^4, \\
&\qquad 2m_3x_1x_2\left(m_1\frac{dx_1}{dx} + m_2\frac{dx_2}{dx}\right) = \\
&= m_3x_1x_2\}m_1(m_1+1)(m_1+2)x_1^3 + 3m_1m_2(m_1+1)x_1^2x_2 + \\
&+ 3m_1m_2(m_2+1)x_1x_2^2 + m_2(m_2+1)(m_2+2)x_2^3\{.
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

E le (8) diventano:

$$m_1x_1 + m_2x_2 = \gamma$$
$$m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = 2\beta - \gamma^2$$
$$m_1x_1^3 + m_2x_2^3 = 3\alpha - \gamma(3\beta - \gamma^2) + \frac{d\gamma}{dx}.$$

Se quindi si eliminassero le funzioni x_1 ed x_2 fra queste ultime tre equazioni, si avrebbe una relazione tra α, β, γ, $\frac{d\gamma}{dx}$ e due costanti arbitrarie m_1, m_2; alla quale relazione dovranno dunque soddisfare i coefficienti di ogni equazione del tipo (1), affinchè essa ammetta un fattore integrante della forma (11). Ma per la determinazione di questi coefficienti occorrerà integrare il sistema (12), nel quale m_1 ed m_2 rappresentano, come già si disse, due costanti arbitrarie; mentre è:

$$m_3 = -(m_1 + m_2 + 3).$$

Ora, nel caso in cui sia $m_3 \neq 0$ (cioè $m_1 + m_2 + 3 \neq 0$) e $x_1 \neq x_2 \neq 0$, il sistema (12) equivale all'altro:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{x_1}\dfrac{dx_1}{dx} = (m_1+1)(m_1+2)x_1^2 + 2m_2(m_1+1)x_1x_2 + m_2(m_2+1)x_2^2, \\[2ex] \dfrac{2}{x_2}\dfrac{dx_2}{dx} = m_1(m_1+1)x_1^2 + 2m_1(m_2+1)x_1x_2 + (m_2+1)(m_2+2)x_2^2. \end{cases}$$

Ed è facile provare che il sistema dei suoi integrali generali si ottiene con sole quadrature.

Infatti, dopo aver diviso membro a membro le precedenti equazioni, pongasi:

$$x_2 = zx_1,$$

con z nuova variabile. Otterremo allora l'equazione differenziale:

$$(14)\quad 2\frac{dx_1}{x_1} = \frac{m_2(m_2+1)z^2 + 2m_2(m_1+1)z + (m_1+1)(m_1+2)}{z\{(m_2+1)z^2 + (m_1-m_2)z - (m_1+1)\}}\,dz,$$

nella quale le variabili x_1 e z sono separate, ed il cui integrale generale è quindi:

$$x_1^2 = C_1 e^{\varphi(z)};$$

essendo C_1 una costante arbitraria, e:

$$\varphi(z) = \int \frac{m_2(m_2+1)z^2+2m_2(m_1+1)z+(m_1+1)(m_1+2)}{z\}(m_2+1)z^2+(m_1-m_2)z-(m_1+1)\{} dz.$$

Ma dalla prima delle (13) si ricava:

$$2\frac{dx_1}{x_1} = x_1^2\}m_2(m_2+1)z^2+2m_2(m_1+1)z+(m_1+1)(m_1+2)\{dx.$$

E tenendo conto della (14), avremo perciò l'equazione differenziale tra x e z:

$$\frac{dz}{z\}(m_2+1)z^2+(m_1-m_2)z-(m_1+1)\{} = C_1 e^{\varphi(z)} dx.$$

L'integrale generale di questa equazione è:

$$\psi(z) = C_1 x + C_2,$$

dove C_2 indica una nuova costante arbitraria (al pari di C_1) e

$$\psi(z) = \int \frac{dz}{z\}(m_2+1)z^2+(m_1-m_2)z-(m_1+1)\{ e^{\varphi(z)}}.$$

Ora, eliminando la variabile ausiliaria z tra le due equazioni:

$$\varphi(z) = 2\log x_1 - \log C_1, \quad \psi(z) = C_1 x + C_2,$$

otterremo una relazione della forma:

$$\Phi(x, x_1, C_1, C_2) = 0.$$

Eliminando la stessa variabile fra le due equazioni:

$$\varphi(z) + 2\log z = 2\log x_2 - \log C_1, \quad \psi(z) = C_1 x + C_2,$$

perverremo ad un'altra relazione della forma:

$$\Psi(x, x_2, C_1, C_2) = 0.$$

E le due relazioni così ottenute costituiranno appunto l'integrale generale del sistema (13).

Immaginando poi di risolverle rispetto alle funzioni incognite x_1 ed x_2 (il che però non è necessario), avremo le effettive espressioni di queste funzioni sotto forma esplicita. Infine, coll'uso delle formule (5), (6), (7), dopo aver fatto in esse $x_3 = 0$, conosceremo i coefficienti α, β, γ delle equazioni differenziali cercate. E l'integrale generale di queste si determinerà poi con sole quadrature.

Per esempio, vogliansi determinare tutte le equazioni differenziali del tipo (1) aventi come fattore integrante un'espressione della forma:

$$y(y - x_1)^{-1}(y - x_2)^{-3} = \frac{y}{(y - x_1)(y - x_2)^3}.$$

Dovremo anzitutto integrare il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}\dfrac{dx_1}{dx} = 3x_2^2 \\[2ex] \dfrac{1}{x_2}\dfrac{dx_2}{dx} = x_2^2 + 2x_1x_2. \end{cases}$$

Se ne deduce dapprima l'equazione tra x_1 ed x_2:

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 + 2x_1}{3x_2}.$$

Ponendo in essa:

$$x_2 = zx_1,$$

avremo l'altra:

$$2\frac{dx_1}{x_1} = \frac{3dz}{1 - z};$$

il cui integrale generale è:

$$x_1^2 = C_1(1 - z)^{-3}. \tag{15}$$

Ma si deduce pure:

$$\frac{dx_1}{x_1} = 3x_1^2z^2.dx = 3C_1z^2(1 - z)^{-3}.dx.$$

E perciò potremo scrivere l'equazione differenziale tra x e z:

$$\frac{(1-z)^2}{z^2}\,dz = 2C_1 dx\,;$$

il cui integrale generale è:

$$z - 2\log z - \frac{1}{z} = 2C_1 x + C_2. \tag{16}$$

Ora, l'eliminazione della variabile ausiliaria z tra le (15) e (16) si otterrà subito, osservando che dalla (15) si ricava:

$$z = 1 - \sqrt[3]{\frac{C_1}{x_1^2}}.$$

Quindi la (16) diventa:

$$1 - \sqrt[3]{\frac{C_1}{x_1^2}} - 2\log\left(1 - \sqrt[3]{\frac{C_1}{x_1^2}}\right) - \frac{\sqrt[3]{x_1^2}}{\sqrt[3]{x_1^2} - \sqrt[3]{C_1}} = 2C_1 x + C_2.$$

E questa relazione, per ogni coppia di valori attribuiti arbitrariamente alle costanti C_1 e C_2, definisce x_1 quale funzione di x.

Infine si avrà:

$$x_2 = x_1 - \sqrt[3]{C_1 x_1}.$$

§ III.

Se poi, oltre ad essere $x_3 = 0$, supponiamo che sia pure $m_3 = 0$, noi verremo a determinare tutte le equazioni del tipo (1) che ammettono come fattore integrante un' espressione della forma:

$$(y - x_1)^{m_1}\,(y - x_2)^{m_2}. \tag{17}$$

Allora dovrà risultare anzitutto:

$$m_1 + m_2 + 3 = 0. \tag{18}$$

E poichè la seconda delle equazioni (12) si riduce in tal

caso ad una identità, non rimarrà da considerare che la prima di queste equazioni. Essa, a causa della condizione (18), diventa:

$$(19) \qquad -2m_1m_2(x_2-x_1)d(x_2-x_1)=m_1m_2(m_1m_2-2)(x_2-x_1)^4.dx.$$

Se quindi gli esponenti m_1 ed m_2 sono entrambi differenti da zero, ed inoltre è $x_1 \neq x_2$, la precedente equazione differenziale potrà scriversi:

$$-2\,\frac{d(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^3}=(m_1m_2-2)dx.$$

Perciò il suo integrale generale sarà:

$$(x_2-x_1)^2=\frac{1}{(m_1m_2-2)x+C},$$

con C costante arbitraria.

Dovremo dunque prendere:

$$x_2=x_1\pm\frac{1}{\sqrt{(m_1m_2-2)x+C}},$$

essendo x_1 una funzione di x del tutto arbitraria. Ma allora, applicando le (5), (6), (7) e tenendo conto della (18), si deduce che i coefficienti dell'equazione (1) avranno in questo caso i valori seguenti:

$$\gamma=m_2\rho-3x_1, \quad \beta=\frac{1}{2}\,m_2(m_2+1)\rho^2-2m_2\rho x_1+3x_1^2,$$

$$\alpha=\frac{dx_1}{dx}-\frac{1}{2}\,m_2(m_2+1)\rho^2x_1+m_2\rho x_1^2-x_1^3;$$

essendo:

$$\rho=x_2-x_1=\pm\frac{1}{\sqrt{(m_1m_2-2)x+C}}=\pm\frac{1}{\sqrt{C-(m_2+1)(m_2+2)x}}.$$

E quindi l'equazione (1) diventa:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx_1}{dx}+(y-x_1)\left\{\frac{1}{2}\,m_2(m_2+1)\rho^2+m_2\rho(y-x_1)+(y-x_1)^2\right\}.$$

Concludiamo pertanto: *Tutte le equazioni della forma* (1) *che*

ammettono come fattore integrante un'espressione del tipo (17) [supponendo m_1 ed m_2 diversi da zero, e $x_1 \neq x_2$] *sono le seguenti:*

$$(20) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} + (y - X)\left\{\frac{1}{2}m(m+1)\rho^2 + m\rho(y - X) + (y - X)^2\right\},$$

dove X *indica una funzione qualunque della variabile* x, m *è una costante arbitraria* (differente da zero e da -3), *e*

$$\rho = \pm \frac{1}{\sqrt{C - (m+1)(m+2)x}},$$

con C *costante arbitraria.*

Il fattore integrante sarà:

$$\frac{(y - X - \rho)^m}{(y - X)^{m+3}}.$$

Ora, nella mia Nota già citata dimostrai che ogni equazione differenziale del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3,$$

la quale ammetta tre integrali particolari distinti y_1, y_2, y_3 legati dalla relazione lineare omogenea:

$$y_1 + k y_2 - (k+1) y_3 = 0,$$

con k costante arbitraria differente da zero e da -1, è necessariamente della forma:

$$(21) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-b}{a-b}\frac{da}{dx} + \frac{y-a}{b-a}\frac{db}{dx} + c(y-a)(y-b)\left(y - \frac{a+kb}{k+1}\right),$$

dove a, b, c indicano delle funzioni qualunque della variabile x (purchè sia $a \neq b$).

I tre integrali particolari sono:

$$y_1 = a, \quad y_2 = b, \quad y_3 = \frac{a+kb}{k+1},$$

e l'integrale generale della (21) è:

$$(y-a)\,(y-b)^k\left(y-\frac{a+kb}{k+1}\right)^{-k-1}=Ce^{\frac{k}{k+1}\int c(a-b)^2dx}$$

con C costante arbitraria.

Ciò posto, è facile riconoscere che la (20) appartiene precisamente alla categoria formata da queste ultime equazioni differenziali: giacchè la (21) si riduce alla (20) quando si prenda:

$$a=X-(m+1)\rho,\quad b=X+\rho,\quad c=1,\quad k=m+1.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione (20) sarà:

$$(22)\quad \{y-X+(m+1)\rho\}(y-X-\rho)^{m+1}=K\rho^2(y-X)^{m+2},$$

con K costante arbitraria.

Nella (22), oltre a non considerare per m i valori zero e -3, già esclusi, dobbiamo supporre che m sia pure differente da -1 e -2; giacchè questi due numeri corrisponderebbero ai valori 0 e -1 della costante k che figura nella (21), e che invece debbono essere esclusi. Ma pei valori -1 e -2 di m la (20) diventa rispettivamente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+(y-X)^2(y-X-\rho)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+(y-X)\,(y-X-\rho)^2$$

con ρ quantità costante. E perciò il suo integrale generale sarà rispettivamente:

$$\int\frac{dz}{z^2(z-\rho)}=x+K,\quad \int\frac{dz}{z(z-\rho)^2}=x+K,$$

con $z=y-X$.

§ IV.

Infine osserviamo che supponendo nullo, oltre ad m_3, anche uno degli altri esponenti m_1 ed m_2 (per es. m_2), noi verremo a considerare tutte le equazioni (1) che ammettono un fattore integrante della forma:

$$(y - x_1)^{m_1}. \tag{23}$$

L'equazione (19) si riduce allora ad una identità, e quindi la funzione x_1 che figura nella (23) rimane del tutto arbitraria. Mentre l'esponente m_1 dovrà avere necessariamente il valore -3.

In questo caso, che è il più semplice di tutti, le formule (5), (6), (7) dànno pei coefficienti dell'equazione differenziale (1) i valori seguenti:

$$\alpha = \frac{dx_1}{dx} - x_1^3, \quad \beta = 3x_1^2, \quad \gamma = -3x_1.$$

Perciò le equazioni richieste sono tutte e sole quelle della forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} + (y - X)^3,$$

con X funzione qualunque di x.

Il fattore integrante del tipo (23) è:

$$\frac{1}{(y - X)^3};$$

e l'integrale generale dell'equazione sarà:

$$y = X \pm \frac{1}{\sqrt{C - 2x}},$$

con C costante arbitraria.

Genova, settembre 1904.

I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia.

Nota 2ª (1) — *Saigey e le variazioni della gravità*

dell'Ing. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO
Libero Docente di Geodesia nell'Università di Torino.

I.

Come già avvertimmo a p. 14 della nostra nota precedente (*Atti*, p. 700), ne occorre trattenerci alquanto sui lavori quasi ignorati di Saigey, perchè le sue idee hanno avuto un'influenza indiretta sugli studi a lui posteriori di geodesia e geofisica. Nei suoi primi lavori Saigey si occupa anche della figura matematica della Terra, e cerca di determinare la distanza del livello effettivo del mare, da un ellissoide o sfera scelto a rappresentare quella. Le sue idee, feconde ed originali, non furono espresse, come crede Günther, nel 1842 (2), ma assai prima, nel 1827. I lavori ad esse relativi sono contenuti nel tomo settimo, 1827, del *Bulletin des Sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques,* che dal suo direttore barone De Ferussac è detto comunemente *Bulletin de Ferussac*, e che aveva per collaboratori i più eletti ingegni di quel tempo, quali Ampère, Poisson, Poinsot, Navier, Lacroix, Cauchy, Cournot, De Freycinet, Damoiseau, Mathieu, Francœur, ecc. Quei lavori sono stampati alle pagine 25-44, 171-184. I primi due sono rendiconti delle pubblicazioni di Sabine e Freycinet sulle loro determinazioni della gravità. Il terzo ha per titolo *Comparaison des observations du pendule à diverses latitudes faites par Biot, Kater, Sabine, De Freycinet et Duperrey.* È in quest'ultimo che compaiono le teorie di Saigey.

(1) " Atti „, vol. XXXIX, 1904.

(2) Günther Siegmund, *Handbuch der Geophysik.* Stuttgart, 1897, vol. I, pag. 193.

Nel secondo di questi lavori sono raccolte in un quadro le osservazioni istituite da Borda e Biot, in unione a Mathieu, Bouvard, Chaix, Arago (1), Kater (2), Sabine (3), Freycinet (4), Duperrey (5), che Saigey si propone di discutere sotto varii punti di vista. Egli dà la latitudine, longitudine, elevazione sul mare di ogni stazione; in varii modi ed unità di misura la lunghezza osservata ad ogni stazione, ed esprime quindi tutte quelle lunghezze in millimetri, riducendole per ultimo al livello del mare. Si è su questa riduzione che dobbiamo indugiarci alquanto, perchè essa anche oggi forma oggetto di discussione. Qui ne conviene riportare integralmente il passo che vi si riferisce.

" Pour réduire le pendule, de la station au niveau de la mer, on a suivi plusieurs règles de calcul. D'après M. de Laplace il ne faut point tenir compte de l'attraction de la couche de matière comprise entre la station et le niveau de la mer (6): considérant la longueur du pendule comme proportionnelle à la force qui le sollicite, ou comme inversement proportionnelle au carré de sa distance au centre de la terre, on a

$$\frac{l'}{l} = \frac{(r+h)^2}{r^2}, \text{ d'où } l' = l\left(1 + \frac{2h}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right),$$

h étant la hauteur de la station où le pendule est l, duquel on veut déduire le pendule l' à la distance r du centre de la terre, ou au niveau de la mer. La correction est, comme l'on voit,

$$+\frac{2h}{r}\,l,$$

en négligeant le terme très-petit $\frac{h^3}{r^2}$. M. de Freycinet prend

(1) *Recueil d'observations géodésiques - Base du systèmes métrique*, vol. 4°.

(2) " Philosophical Transactions „ di Londra, 1818, 1819.

(3) " Philosophical Transactions „ di Londra, 1825.

(4) *Observations du pendule, faites dans le voyage autour du Monde pendant les années 1817-18-19-20.* Nella relazione di quel viaggio. Parigi, 1826, Pillet.

(5) Quelle di Duperrey non erano pubblicate quando Saigey componeva il suo lavoro; lo furono poi nelle " Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi „, 1827, e nella *Connaissance du Temps* pel 1828 e pel 1830.

(6) Il passo di Laplace al quale allude Saigey è certamente quello da noi riportato a pag. 10 della *Nota Prima* (" Atti „, p. 696). Nella *Mécanique Céleste* non ci venne fatto di trovare un passo che possa corrispondere a quanto dice Saigey.

pour r le rayon moyen de la terre. Mais Biot prend le rayon de celle-ci, considérée comme elliptique, à la latitude de la station. Le cap. Kater tien compte de l'attraction de la couche comprise entre le niveau de la mer et la station; et en cela il a suivi le conseil de M. Yong (*sic*) (voyez les *Transactions Philos.* pour 1819, p. 70) (1). Cette méthode consiste à regarder comme égale aux $\frac{2}{3}$ de la densité moyenne de la terre (5,5), la densité de la couche en question, et à ne tenir compte que de son élévation et de sa déclivité en grand (2).

" Ici l'on regarde, avec M. de Laplace, l'attraction de la couche comme l'une des causes locales de perturbation, causes dont on ne peut apprécier l'énergie que dans leur ensemble, et l'on ramène au niveau de la mer, la longueur du pendule observée à la station, à la latitude λ, en y appliquant la correction

$$\frac{lh}{6376984}\left(2+\frac{1}{152}\operatorname{sen}^2\lambda+\frac{1}{288}\cos^2\lambda\right).$$

" Les deux premiers termes expriment la correction due à la hauteur de la station au-dessus de la mer considérée provisoirement comme ayant un aplatissement de $\frac{1}{305}$; c'est la formule de M. Biot. Le troisième terme est la correction qui provient de la différence de force centrifuge à la station et au niveau de la mer. Ce terme est insensible pour de petites hauteurs; ainsi à Paris il apporte au pendule une correction de $0^{mm},00001695$ seulement; pour Clermont $0^{mm},0001068$. Pour le Mont Cenis, dont l'élévation est de 1943^{m}, cette correction est telle qu'elle change en 4,21, la densité moyenne de la terre 4,39 donnée par M. Carlini, d'après ses observations du pendule (voyez le *Bulletin* de mai 1825, n° 323).

" La formule précédente prend, sans erreur sensible, la forme

$$\frac{lh}{6376984}\left\{\frac{577}{288}+\frac{1}{322}\operatorname{sen}^2\lambda\right\},$$

(1) Per questa correzione di Young vedi Zanotti Bianco: *Il Problema Meccànico della Figura della Terra.* Torino, Bocca, 1880, Parte Prima, p. 254, che è oggi il solo libro italiano che ne tratti.

(2) Qui Saigey cade in una svista, perchè la regola o correzione di Young ammette che la densità dello strato che si considera sia $^1/_2$, non i due terzi della densità media terrestre.

et c'est avec cette correction que l'on a calculé, colonne 7, les longueurs des pendules au niveau de la mer „.

Helmert nel volume II del suo classico libro *Die Mathematischen und Physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie*, si è servito di molti dati dei quali si valse anche Saigey: ma giova avvertire che per i dati d'osservazione di Kater e di Sabine egli s'attenne alla riduzione fattane da Baily (1), e quindi si riscontrano differenze. Così Helmert ricavò le osservazioni di Biot e Mathieu, non dalla fonte citata in nota, alla quale attinse Saigey, ma bensì da una memoria di Biot, intitolata: *Mémoire sur la Figure de la Terre* (" Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France „, vol. VIII, 1829). Per Freycinet e Duperrey, Helmert s'attiene ai dati forniti da Baily nella memoria citata.

Da quanto afferma Saigey nel brano sopra riportato, e da quello di Laplace trascritto a p. 10 della Nota Prima, risulta evidentemente che Laplace fu il primo ad intuire, come nel ridurre la gravità al livello del mare, per determinare la figura della Terra convenisse tener conto della sola variazione della gravità in altezza, considerando poi la massa sottostante alla stazione e sporgente sul livello medio del mare, come una causa di perturbazione. Oggi quel modo di ridurre la gravità si dice riduzione o correzione di Faye. Qui è conveniente tessere brevemente l'istoria di queste riduzioni della gravità al livello del mare. Per ciò fare stabiliamo prima con Helmert (2) alcune notazioni, ora universalmente accettate nella trattazione di questo argomento, ed alle quali è quindi necessario l'attenerci:

g l'accelerazione della gravità osservata in un punto P della effettiva fisica superficie terrestre;

g_0 la somma $g+$ la riduzione normale al livello del mare, ovvero (con espressione meno rigorosa) $g+$ la riduzione al livello del mare come nell'aria libera;

---

(1) *A report on the experiments made by the late Cap. Henry Foster R. N. with the pendulums token out by him in his scientific voyage in the years 1828-1831, with a view to determine the figure of the Earth.* " Memoirs of the Royal Astronomical Society „, VII, 1834.

(2) *Ueber die Reduction der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleinigungen auf ein gemeinsames Niveau*, " Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wissenschaften zu Berlin „, 1902, XXXVI.

g_0' la somma $g_0 +$ la riduzione per il terreno (riduzione al terreno orizzontale, riduzione o correzione topografica);

g_0'' la differenza $g_0' -$ l'attrazione verticale dello strato fra P ed il livello del mare, strato supposto di eguale spessore e piano;

γ_0 la parte normale dell'accelerazione della gravità al livello del mare.

γ la stessa, normalmente ridotta all'altezza H del punto P.

Bouguer, a dar conto della parte da lui presa alla misura dell'arco del Perù (prima metà del secolo decimo ottavo) pubblicò nel 1749 un'opera intitolata: *La Figure de la Terre déterminée par les observations de MM. Bouguer et de la Condamine, avec une relation abrégée de ce voyage,* par M. Bouguer, Paris, MDCCXLIX. La settima sezione di quest' opera ha il titolo: *Détail des Expériences ou Observations sur la gravitation avec des remarques sur les causes de la Figure de la Terre.* In questa Bouguer si occupa dell'attrazione a differenti altezze sul livello del mare. Egli trova che sopra una montagna all'altezza H sul livello del mare l'attrazione è proporzionale a $(R-2H)\Theta_m + \frac{3}{2}H\Theta$, ove R è il raggio terrestre, Θ_m e Θ la densità media della Terra e la densità della montagna. Da questa si deduce la formola

$$(1) \qquad g_0'' = g\left\{1 + \frac{2H}{R}\left\{1 - \frac{3}{4}\,\frac{\Theta}{\Theta_m}\right\}\right\},$$

che è quella solita di riduzione per la gravità, che è data in tutti i libri (1). A proposito di questa formola Helmert scrive: " Bouguer trascura, per motivi facili a vedersi, nel confronto di g_0'' e g la deviazione della forma del terreno circostante da una delimitazione orizzontale, nonchè l'influenza della forza centrifuga (2): come si scorge, poi, quella formola trascura la piccola influenza della forma ellissoidica della Terra. Ciò è però di poca importanza rispetto alla circostanza, che nel paragone di g_0'' e g solo le masse della effettiva faccia terrestre, vicino al punto al quale g si riferisce, vengono considerate come masse perturbatrici. Rappresentiamoci per contro il complesso di tutti

(1) Todhunter, *History*, etc., vol. I, pp. 247, 248. — Helmert, nota citata.

(2) Come vedemmo, Saigey ne teneva conto; ma oggi la si trascura sempre.

i punti della vera superficie terrestre: allora per ciascun punto di essa l'accelerazione della gravità g relativa al passaggio dal livello del mare all'altezza H corrisponderebbe all'attrazione di un altro sistema di masse, cioè all'attrazione della massa interna terrestre e a quella della massa terrestre esterna, vicino al punto corrispondente. Questi valori g non corrispondono quindi alla condizione di essere i quozienti differenziali del potenziale di una massa determinata secondo l'altezza. Lo stesso vale naturalmente per i g_0'', giacchè qui all'opposto di prima, partendo dai g effettivamente osservati, nella riduzione ci si riferisce ad una massa variabile, cioè la differenza variabile di tutta la massa terrestre, e della massa vicina circostante al luogo.

" Secondo questo modo di vedere, anche il modo di riduzione da g a g_0'', che si dice di Bouguer non sarebbe generalmente applicabile. Giacchè, al fine di renderlo applicabile, non si può neppur pensare a tener sempre conto realmente di tutta la massa terrestre esterna (1), giacchè ciò significherebbe l'immaginare nel passaggio da g a g_0'' la massa esterna terrestre come sbucciata. Di più con questo processo andrebbe generalmente congiunto un notevole spostamento del livello del mare, che in taluni luoghi potrebbe ammontare fino a parecchie centinaia di metri, e sarebbe anche praticamente affatto ineffettuabile, il riportare unicamente le accelerazioni della gravità ad un nuovo e deformato livello del mare.

" Prima di procedere all'esame del procedimento di Bouguer, io debbo, per amore della verità storica, dichiarare ancora che Bouguer propriamente non ebbe di mira la riduzione al livello del mare della g osservata all'altezza H sul livello del mare. Egli si proponeva unicamente di paragonare fra loro le due

---

(1) Dalla p. 340 della *Geodesy* di A. R. Clarke appare che si sono sollevati dei dubbi circa la necessità di non tener conto della forma sferica della Terra nel calcolo dell'attrazione delle masse esterne superficiali (nota di Helmert). Ivi Clarke allude ad una formola data da Pratt. Vedasi *A Treatise on Attractions, Laplace's Functions and the Figure of the Earth*, Londra, Macmillan, 1871, p. 56, ed il nostro trattato, Parte Prima, p. 276. Clarke osserva pure che la formola di Pratt, che tien conto della curvatura della Terra, fu accuratamente discussa nel volume V *Pendulum Operations* del " Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India ". Debra Dun e Calcutta, 1879.

accelerazioni della gravità che erano state osservate a Quito e nella vicina costa del mare, e di constatare gli effetti dell'attrazione perturbanti le due accelerazioni. A ciò il suo calcolo offriva una base utilizzabile. Rimane però a vedersi se egli lo avrebbe considerato anche come base della formola generale di riduzione (I), quando egli avesse avuto bisogno di stabilirne una. Per quanto a me consta, nel citato scritto, non si trova nulla di ciò (1). Il problema più generale di rendere fra loro paragonabili le accelerazioni della gravità di qualsivoglia luogo della Terra, per mezzo di convenienti riduzioni, fu per la prima volta trattato da Tommaso Young nel 1819, ma solo assai secondariamente in una lettera al capitano Kater, che fu stampata a pagina 93 delle *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pel 1819, Young dice, si suole ridurre al livello del mare senza tener conto dell'attrazione delle masse che si innalzano sopra il livello del mare; appare quindi che dal procedimento di Bouguer non si fosse ricavata alcuna regola generale. Egli insegna quindi per il caso di un esteso altipiano come si debba correggere l'usuale formola di riduzione, affatto corrispondentemente alla formola (1). A quest'ultima giunse anche Poisson nell'anno 1833, nella seconda edizione del suo *Traité de Mécanique*, I, p. 492-496. Sebbene Poisson presupponga un grande continente, tuttavia egli tien conto soltanto delle masse vicine „.

Young avverte che se si tratta di un monte situato sopra un'isola, la riduzione al livello del mare deve farsi con altro procedimento, perchè non si può ammettere che la massa sporgente di materia abbia estensione grandissima rispetto all'altezza, giacchè l'isola è piccola e subito dopo il suo contorno si ha il mare (2). Se nella formola (1) si fa $\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{1}{2}$, si ha

---

(1) I volumi XVIII (1901), XIX (1902), XX (1903) del " Bulletin Astronomique „ contengono un lavoro del signor G. Bigourdan, intitolato: *Sur diverses mesures d'arcs de méridien faites dans la première moitié du XVIIIe siècle.* In questo si esamina pure in disteso il libro di Bouguer: è strano che non vi si faccia cenno della sua regola per la gravità.

(2) Young, *Remarks on the Probabilities of Errors in physical Observations and on the density of the Earth*, " Philosophical Transactions „ pel 1819, riprodotto nel volume II, p. 8-28, dei *Miscellaneous Works of the late Thomas*

$g_0'' = g\left(1 + \frac{5}{4}\frac{H}{R}\right)$. Se si trascura l'azione della montagna, la correzione da apportarsi a g_0'' è proporzionale a $\frac{2H}{R}$; se invece se ne tien conto, essa è proporzionale a $\frac{5}{4}\frac{H}{R}$, ed il rapporto di queste due correzioni è $\frac{5}{8} = 0{,}625$. Young prendeva $\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{5}{11}$, invece di $\frac{1}{2}$, per cui ottenne per quel rapporto $\frac{29}{44} = 0{,}66$ circa. Stokes avverte che Airy avendo notato che $\Theta = 2{,}5$ è un po' troppo piccolo e $\Theta_m = 5{,}5$ è un po' troppo grande, usa il valore 0,6 invece di 0,66. Le osservazioni moderne mostrano che $\Theta = 2{,}5$ è un valore attendibilissimo, mentre assai probabilmente $\Theta_m = 5{,}5$ è troppo piccolo, quindi il valore di Young è da preferirsi a quello di Airy.

Stokes nella sua memoria sulla variazione della gravità, si esprime come segue circa la riduzione della gravità: " Poichè la superficie reale della Terra, non è rigorosamente una superficie d'equilibrio, a cagione dell'elevarsi dei continenti e delle isole sul livello del mare, è necessario di considerare primiera-

---

Young. Nel volume V, che concerne il pendolo, del " Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India „, p. [228], leggesi in nota il passo che qui sotto traduciamo a titolo di documento storico; questa nota è firmata J. H. = J. Herschel: " Non è mai troppo tardi il render giustizia. La " Regola „ qui ed in altri capitoli previamente citati, designata quale *Regola di Young*, non deve veramente venire associata col nome del Dr. Young. Todhunter nella sua *History of the Theories of Attraction and the Figure of the Earth* (§ 1618), osserva che Bouguer ha già impiegato la formula, e che D'Alembert indipendentemente ha mostrato il bisogno di essa. Sembrerebbe quindi che, per non aver conosciuto i loro scritti, Young non sia stato che un plagiario: ma un'egual colpa è a noi attribuibile, per averne a lui dato il credito. Ma la verità è che quella sua menzione del termine addizionale fu soltanto incidentale, e se non fosse per la sua asserzione non troppo corretta, dell'essere stata " usualmente „ trascurata, la colpa sarebbe tutta di quelli che dopo, senza eccezione, lo citarono parlando di essa; finchè divenne " Regola di Young „. Io dico non troppo corretta, poichè all'epoca (1819) dello scritto in cui si legge quel passaggio, le sole osservazioni pendolari, oltre quelle peruviane, in cui la riduzione al livello del mare fosse di qualche conseguenza, erano quelle di Biot ed Arago. Rimpiango che nello stampare il capitolo nono di questo volume, si sia forse dato qualche corso a questo malinteso „. J. H. „

mente in qual maniera si dovrebbero ridurre le osservazioni onde rendere applicabile la teoria precedente. Nell'articolo 13 si dimostra che la Terra può essere considerata come limitata da una superficie d'equilibrio e che le espressioni precedentemente investigate possono venir applicate, purchè si riguardi il livello del mare come la superficie limitante, e la gravità osservata venga ridotta al livello del mare tenendo conto unicamente del cambiamento di distanza dal centro della Terra. Però la gravità ridotta con quel metodo sarebbe soggetta a variare irregolarmente da un luogo ad un altro, in conseguenza dell'attrazione del terreno fra la stazione e la superficie del mare supposta prolungata sotterraneamente, giacchè quest'attrazione sarebbe maggiore o minore, a seconda dell'altezza della stazione sul livello del mare. Al fine però di rendere le osservazioni istituite in luoghi differenti, paragonabili fra loro, sembra meglio il tener conto di quell'attrazione nel ridurre al livello del mare, ma poichè questa correzione è introdotta violando la teoria in cui si considera come superficie di equilibrio quella della Terra, è necessario esaminare l'effetto che l'abituale trascuranza della piccola correzione sovra menzionata, produce sui valori della gravità media e dello schiacciamento dedotti da osservazioni istituite in molti luoghi „.

Più avanti, come già vedemmo, Stokes accenna alla regola di Young. A questo proposito è interessante riferire qui, quello che Helmert pensa della opinione di Stokes (1): " Stokes nella sua più volte rammentata memoria *On the variation of gravity* ammette dapprima che la riduzione al livello del mare si debba fare soltanto secondo la formola $g\left(1+\frac{2h}{R}\right)$. A ciò egli giunge nell'ipotesi che si possa senza alterazione essenziale della forma della superficie del mare immaginare condensate su di essa le masse sporgenti sul livello del mare. Più lungi poi Stokes os-

(1) Helmert, *Höhere Geodäsie*, II, p. 173. Abbiamo ommesso due o tre linee di Helmert, nelle quali egli rimanda per le formole adoperate da Stokes ad altre parti del suo libro: in esse è incorso un errore di stampa, rimanda alla formola (10) del § 34 di quel capitolo, e doveva dire § 32, come è avvertito nell'*Errata*.

serva che generalmente con quel metodo rimangono ancora delle anomalie di g, e che sia tuttavia perciò meglio (però inquanto g è dato solo in alcuni punti) di ridurre secondo la regola di Young. Che però egli riterrebbe la riduzione secondo $g\left(1+\frac{2h}{R}\right)$ come la sola giusta, quando g fosse dato generalmente, appare da ciò che egli computa l'influenza delle grandezze di riduzione secondo la regola di Young sul risultato finale, per questo caso. Secondo questo calcolo l'errore è solamente — 0.0000012 e quindi trascurabile „.

Nel 1852, coi tipi di Robert Baldwin, Paternoster Row, Londra, il signor Robert Grant, F. R. A. S. pubblicò un lavoro utilissimo e per molti rispetti pregevole, intitolato: *History of Physical Astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century.* Gli inglesi intendono per *physical astronomy* la meccanica celeste: oggi però anch'essi applicano quel qualificativo di *fisica* a quel ramo dell'astronomia, che si occupa d'investigare la costituzione fisica e la composizione chimica dei corpi celesti. In questo libro il nome di Saigey non compare, le ricerche di Bouguer sull'attrazione delle montagne vi sono ricordate, ma non la riduzione della gravità: nè vi si trova menzione del libro di Zach sull'attrazione delle montagne. Il signor Grant, poi, come d'altronde tutti, per quanto mi consta, meno Saigey, ignora le idee di Laplace sulla riduzione della gravità. Egli attribuisce al Dr Young tutto il merito di aver scoperto la riduzione totale della gravità, opinione non esatta, e che, come vedemmo, non è più divisa dai compatrioti del signor Grant e del Dr Young. Così nella storia di Grant non leggesi accenno ai lavori di Poisson su questa riduzione, che egli fece di pubblica ragione nel 1833 nella seconda edizione della sua *Meccanica*, che anche oggi è un trattato così degno di studio e di tutta attenzione. Thomson e Tait nella loro *Natural Philosophy*, vol. I, p. 365, menzionano la regola di Young, per avvertire che, applicando il teorema di Clairaut alla determinazione dello schiacciamento terrestre, per mezzo dei valori della gravità, non si deve servirsi di essa, ma è d'uopo ridurre la gravità unicamente per l'altezza. Questo loro concetto è precisamente quello di Laplace, come si disse.

Il signor Brillouin nel suo scritto *Les réductions de la pe-*

santeur au niveau de la mer (" Revue Générale des Sciences ", 1900, p. 878-79), dà come formola di Bouguer:

$$g_0'' = g\left(1 + \frac{2H}{R}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\right)\right).$$

A questo proposito Helmert scrive (1): " Solamente Bouguer, invece del fattore $\frac{3}{2}$, ha il fattore $\frac{3}{4}$, giacchè nel trapasso alla superficie del mare, egli immaginava asportata la massa innalzantesi su quella nella vicinanza del punto, così che quella non agisce sul punto del livello del mare ".

Il signor Poincaré nelle sue *Figures d'équilibres d'une masse fluide* (Paris, Naud, 1903) con una trattazione, sfortunatamente guasta da errori di stampa, deduce una quantità, la cui metà è la correzione di Bouguer. Il signor Poincaré si occupa ancora della correzione di Bouguer nel suo scritto *Les mesures de la gravité et la Géodésie* (" Bulletin Astronomique ", tomo XVIII, 1901, pp. 5-39). Helmert si occupa della correzione di Young e Bouguer a p. 166 del volume secondo delle sue *Theorieen*, ed ivi propone di chiamare *correzione di Bouguer* il metodo di riduzione della gravità che tien conto della variazione in altezza e dell'attrazione della massa sovrastante al livello del mare supposta orizzontale. Pratt non nomina Bouguer. Tisserand (*Mécanique Céleste*, vol. II, p. 347 e seguenti) dà la formola di Bouguer, ma non menziona Young.

Di Bouguer, invece, fa menzione D'Alembert nel suo scritto *Sur l'effet de la pesanteur au sommet et au pied des montagnes* (" Opuscules Mathématiques ", vol. VI), cui tien dietro una *Addition à l'article précédent*. Egli, a proposito di Bouguer, così si esprime a proposito della *Figure de la Terre*: " On y trouve une Théorie de l'Attraction des Montagnes, mais beaucoup moins générale que celle qui a été l'objet de ce Mémoire ". È curioso a notarsi che la teoria di Bouguer è oggi più che mai studiata e discussa; i lavori di D'Alembert, a questo riguardo, si menzionano, come fa Todhunter per esattezza bibliografica, certo per

(1) *Compte rendu des Séances de la treizième Conférence de l'Association Géodésique Internationale tenue à Paris, 1901.* Beilage, B. IX. *Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten*, p. 372.

null'altro. Come è facile anche ai forti intelletti l'illudersi sul valore dei proprii lavori! Ma, come è noto, D'Alembert non peccava certo di modestia.

Oggidì, come dicemmo, si chiama *correzione di Faye* quella che vale a ridurre al livello del mare la gravità osservata, tenendo conto della sola altezza. Veramente a norma del buon diritto la si dovrebbe dire *di Laplace*, come risulta da quanto è detto in principio della nota presente. Per vedere perchè la si dica di Faye ritorniamo ai lavori di Saigey che formano oggetto di questa nota.

II.

Saigey prosegue: " Appliquant la méthode des *moindres carrés* à la discussion de ces longueurs qui, dans la supposition de l'ellipticité de la Terre, doivent toutes satisfaire à la formule

$$l = x + y \operatorname{sen}^2 \lambda$$

où x est la longueur du pendule à l'équateur et y son accroissement jusqu'au pole, on arrive à la formule

$$l = 0^{m},99102557 + 0,00507188 \operatorname{sen}^2 \lambda$$

laquelle a été calculée avec tout le soin possible et en employant de nombreuses vérifications. Elle a servi à calculer les longueurs du pendule, de la huitième colonne du tableau ".

Egli trova per il pendolo all'equatore $0^{m},99102557$, ed al polo 0,99609745, e per lo schiacciamento " à peu près $\frac{1}{282}$ ". Questa determinazione di Saigey manca nell'opuscolo pubblicato dal *Dépôt de la guerre* del Belgio, intitolato: *Grandeur et forme de la Terre*, *Oscillations du pendule* (Bruxelles, 1876). Quest'opuscolo va di paio con l'altro pubblicato dallo stesso *Dépôt* nell'anno medesimo ed intitolato: *Grandeur et forme de la Terre déterminées par les mesures d'arcs*. È utile l'avvertire la separazione dei due titoli del primo opuscolo: *Grandeur et forme de la Terre* e *Oscillations du pendule*, poichè è noto che colle oscillazioni del pendolo ed il teorema di Clairaut, non si può determinare che la *sola figura della Terra*.

Nel volume V dell'*Account of the Operations of the Great*

Trigonometrical Survey of India, che contiene le operazioni del pendolo (Calcutta, 1879), si parla molto dei lavori di Saigey, ma non di quello che si menzionò più sopra in questa nota, bensì della sua *Petite Physique du Globe*, pubblicata nel 1842, che abbiamo già lodata nella Nota Prima. Nella detta *Petite Physique*, capitolo LXXXIX e seguenti, si tratta della misura del pendolo e della forma della Terra che da essa risulta. Ivi troviamo i risultati di 80 stazioni pendolari eseguite da 15 osservatori, che conduce ai seguenti valori: Pendolo all'equatore $0^m,991072$; pendolo al polo $0^m,996258$; schiacciamento $\frac{1}{291}$.

Nel citato volume dell'*Indian Survey* si trovò per lo schiacciamento $\frac{1}{290}$. Clarke nella sua *Geodesy*, p. 350, trova $\frac{1}{292,2 \pm 1,5}$; vicinissimo a quello di Saigey. Il valore più recente ricavato da Helmert è $\frac{1}{298,3}$ (1). Ivanow (2) trova: pendolo all'equatore $0^m,990997$; pendolo al polo 0,996237: la formola d'Ivanow è $L = 99^{cm},0997 + 0,5240 \operatorname{sen}^2 \varphi'$ (*a*), ove φ' è la latitudine geocentrica al livello del mare. Helmert al luogo citato alla nota (1), modifica alquanto la formola di Ivanow, ponendo

$$\operatorname{sen}^2\varphi' = \operatorname{sen}^2\varphi - \alpha \operatorname{sen}^2 2\varphi$$

e trova per l'accelerazione della gravità

$$\gamma_0 = 978^{cm},075\,(1 + 0,005287 \operatorname{sen}^2\varphi - 0,000018 \operatorname{sen}^2 2\varphi):$$

non dice però quale valore abbia adottato in tal calcolo per lo schiacciamento α. Con tale formola di γ_0, egli calcola lo schiacciamento dello sferoide normale, che corrisponde alla gravità normale, e trova $\frac{1}{296,6}$, che con ulteriori correzioni riduce a $\frac{1}{298}$ in cifre tonde. Ora richiamiamo l'attenzione al seguente passo di Helmert, perchè l'osservazione che vi si fa al calcolo

(1) *Der Normale Theil der Schwerkraft in Meeresniveau*, " Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wissenschaften zu Berlin „, XIV, 1901, p. 328.

(2) *De l'influence des termes du troisième ordre de la fonction perturbatrice du mouvement de la terre autour de son centre de gravité sur les formules de la nutation* (" Bollettino dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo „, 1898).

di Ivanow si deve fare anche per quelli di Saigey e di Clarke: " Ora per poter far confronti colla formola

$$\gamma_0 = 978^{cm},046 \{1 + 0,005302 \operatorname{sen}^2\varphi - 0,000007 \operatorname{sen}^2 2\varphi\},$$

bisogna ancora tener conto di ciò, che Ivanow ha introdotto nel calcolo anche le piccole isole oceaniche, mentre io le ho tralasciate a causa del valore troppo grande della loro gravità. Ciò si manifesta ancora malgrado la riduzione di condensazione eseguita da Ivanow. Le isole giacciono quasi esclusivamente fra i 40° di latitudine Nord ed i 40° di latitudine Sud ". Da un calcolo approssimato poi, Helmert trova che l'aver trascurato le isole produce all'incirca un ingrossamento del coefficiente di $\operatorname{sen}^2\varphi$ dell'importo di 0,005300, e corrisponde ad una diminuzione approssimata del termine principale a 978,060.

Saigey come Clarke tennero entrambi conto delle isole oceaniche. E così siamo ritornati ai lavori di Saigey.

La colonna intestata *A* nel quadro di Saigey contiene il numero di secondi di tempo medio del quale il pendolo osservato avanza o ritarda sul pendolo calcolato. Poi scrive: " La colonne marquée *B* exprime les élévations ou abaissements du niveau de la mer, auxquels on peut attribuer les discordances dans la marche des pendules observés et calculés. Ces nombres dérivés de la formule $h = \frac{r \times \text{différence des pendules}}{\text{somme des pendules}}$, ne sont pas exactement tels qu'il les faudrait pour mettre d'accord le calcul et l'observation des pendules, puisqu'on ne tient point compte de l'attraction de la matière qui, par sa présence, formerait le renflement, et par son absence, la dépression supposée, et d'ailleurs l'attraction de la terre irrégulière ne s'obtiendrait point comme si elle était elliptique ou sphérique " (1). Dopo ciò Saigey determina quella che egli chiama la *forma del meridiano* di Parigi o di Londra, ossia le ondulazioni che questo meridiano presenta, rispetto ad una sfera di raggio 6376984. Ciò non è dichiarato esplicitamente, ma si può ricavare dal contesto, quantunque una volta parli di un *niveau elliptique moyen*, che non

(1) Abbiamo creduto inutile il riferire il quadro di Saigey, ritenendo solo necessarie al nostro scopo le conclusioni che egli ne dedusse, nel suo citato studio del 1827.

dice cosa sia. Poi applica lo stesso procedimento a varii luoghi situati fra i tropici e trova che: " Il y a, comme on voit, de fortes dépressions dans le voisinage des îles qui sont fort éloignées des continents „. Questa credo sia la prima spiegazione proposta di irregolarità nella gravità presentata dalle isole oceaniche: nella geografia fisica e matematica di Schmidt pubblicata nel 1829, che riassume tutto quanto si sapeva a quell'epoca intorno a ciò, non ne è cenno.

Nella seconda parte del suo lavoro Saigey ritorna più volte sulla spiegazione da lui proposta dell'eccesso di gravità constatata nelle isole molto lontane dalle coste. " Enfin toutes les îles fort éloignées des continents offrent un abaissement remarquable dans le niveau de la mer... Ainsi le niveau réel de l'Océan... se trouve abaissé près des îles qui en sont fort éloignées (des continents) „. Il lavoro poi si termina con molte considerazioni sulla figura della Terra e sulle ondulazioni del livello del mare.

Saigey ha poi ripreso e svolto le sue idee nel suo aureo libretto *Petite Physique du Globe*, più volte citato. Il libro IX è tutto intiero (p. 106-145) dedicato al pendolo ed alla discussione delle misure istituite con esso. Non sono dati i calcoli, ma solo i risultati di essi. Leggiamo in questa trattazione un buon sommario storico delle misure del pendolo fino al 1840: nel capitolo LXXXIX sulla lunghezza assoluta del pendolo, è esposto chiaramente quanto concerne la riduzione del pendolo al vuoto: e come conclusione Saigey raddoppia tutte le antiche correzioni o riduzioni al vuoto del pendolo osservato nell'aria. Con questo procedimento egli ottiene un quadro contenente dieci valori della lunghezza del pendolo a Parigi, scarta i più antichi, e si attiene al valore definitivo, media degli altri, $993^{mm},92$, ossia in metri $0^{m},99392$: così, se si volesse adottare la solita approssimazione di tralasciare l'ultima cifra se inferiore al 5, si avrebbe $0^{m},9939$. Ora questo è appunto il valore dato dall'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pel 1904: in sessantadue anni di progresso meccanico e matematico si è giunti a confermare il valore di Saigey! Wolf (1) trova per la lunghezza del pendolo a Parigi $0^{m},993922$

(1) *Collection de Mémoires relatifs à la Physique publiés par la Société Française de Physique.* Tome IV. *Mémoires sur le pendule précédés d'une Bibliographie.* Paris, Gauthier-Villars, 1889.

e scrive: " La longueur trouvée par Borda, convenablement corrigée par M. Peirce est $0^m,993918$; et M. Peirce lui-même a trouvé $0^m,9939175$ (*U. S. Coast and Geodetic Survey*, 1881, p. 463)„. Tutti questi valori coincidono (stando alla quinta decimale e colla usuale approssimazione) con quello di Saigey: e si avverta che il valore di Wolf, limitato alla quinta cifra, coincide con quello di Saigey; e che la sesta è un 2, cioè completamente trascurabile. Al principio del capitolo seguente Saigey scrive quanto segue:

" On vient de voir que l'exactitude si vantée des observations du pendule simple, ne va pas au delà du quatrième chiffre; et l'on ne connaît la longueur du pendule pour Paris qu'à un dixième de millimètre près. Il ne faut pas se faire à ce sujet une illusion démentie par la comparaison de toutes les valeurs obtenues à l'aide des divers modes d'expérimentation. On laissera donc là les neuf ou dix chiffres par lesquels certains auteurs ont cru devoir exprimer ces longueurs, et l'on se bornera à l'emploi de cinq chiffres, limite de la précision que l'on peut atteindre, même dans l'emploi du pendule invariable „. Queste parole di Saigey sono vere anche oggi: il suo consiglio fu seguito ed oggi non si tengono che cinque cifre. A proposito di questa quinta cifra ci si consenta una digressione.

III.

Il prof. Lorenzoni, uno dei più valorosi astronomi, ed osservatore scrupoloso e coscienzioso quant'altri mai, ha dato un prospetto di 18 determinazioni, così dette assolute, della lunghezza del pendolo, a secondi, eseguite in nove luoghi ed in epoche diverse e ridotte all'Istituto Geografico di Vienna, colla misura della gravità relativa fatta mediante l'apparato Sterneck in tutti i casi, meno uno in cui fu usato l'apparato Defforges. Le prime 16 determinazioni erano state date da Sterneck; i nn. 17, 18, (5′), (9′), (12′), (12″) furono aggiunti dal prof. Lorenzoni in due memorie successive (1).

(1) Lorenzoni, *Determinazione relativa della gravità terrestre negli Osservatorî di Vienna, di Parigi e di Padova mediante gli apparati e colla cooperazione dei signori colonnello di Sterneck e comandante Defforges*, " Atti del R. Istituto Veneto „, serie VII, tomo IV, 1892-93. — *Determinazione rela-*

Lunghezza del pendolo a secondi per Vienna . dedotta dalla determinazione di

1	Peters 1870 in Berlino	993mm,745
2	Lorenzoni 1886 in Padova . . .	756
3	Anton 1878 in Berlino	760
4	Peters 1869 in Altona	763
5	Peirce 1877 in Ginevra	765
(5′)	Biot 1824 in Parigi	769
6	Plantamour 1869 in Berna . . .	773
7	„ 1865, 1866, 1871 in Ginevra	777
8	Mahik 1891 in Amburgo	782
9	Peirce 1876 in Berlino	791
(9′)	Biot 1825 in Padova	803
10	Bessel 1835 in Berlino	804
11	Biot 1825 in Padova	805
12	Sabine 1828 in Altona	810
(12′)	Biot 1824 in Milano	812
(12″)	Pucci e Pisati riveduta da Reina in Roma	815
13	Oppolzer in Vienna (Türkenschanze) 1884	834
14	Defforges 1883 a Parigi (mediante Padova)	835
15	Oorff 1877 in Monaco di Baviera . .	837
16	Messerschmitt in Zurigo	842
17	Defforges 1883 in Parigi (direttamente) .	855
18	„ 1893 „ „ .	873

Altre determinazioni non figuranti nello scritto di Lorenzoni.

(2)	Sterneck 1891 (adottato generalmente per la riduzione a Vienna)	836
	Kriska 1894 passando per Potsdam . .	837

---

tiva della gravità terrestre a Padova, a Milano ed a Roma fatta nell' autunno 1893 mediante l'apparato pendolare dello Sterneck, ibidem, serie VII, tomo V, 1893-94. — *Relative Schwerebestimmungen ausgeführt im Jahre 1892, in Berlin, Potsdam, und Hamburg, in den Ost-Alpen, Karpaten und der ungarischen Tiefebene. Von Oberstlieutenant Robert von Sterneck*, etc. (Separat-Abdruck aus den " Mittheilungen des k. u. k. milit.-geograph. Institutes „, Band XII, 1892). Vienna, 1893.

Dopo il suo quadro Lorenzoni scrive: " Questo prospetto ci dice che il problema della determinazione della lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi domanda nuovi studî prima di potersi dire completamente risolto „.

Everett poi a p. 80 del suo libro, che fa testo, intitolato: *Illustrations of the C. G. S. system of Unites with tables and Physical Constants*, Londra, Macmillan, 1902, scrive: " Intorno al valore di g vi sono grandi discrepanze fra le varie scuole di geodesia. Le autorità francesi nei rapporti al Congresso di Parigi del 1900 adottano 980,692, invece di 980,617 (dato da Helmert), come il valore medio della gravità g al livello del mare alla latitudine di 45°; ed essi dànno 981,264, come il valore a Greenwich ridotto al livello del mare, che darebbe per il valore reale circa 981,25, mentre Sabine (" Phil. Trans. „, 1831) trovò 981,13 ed Airy in *Figure of the Earth* di circa la stessa data, diede 981,20, che è anche dato da Helmert come la determinazione di Heaviside „. Se si facessero confronti fra i valori della gravità in un medesimo luogo, risultanti da varie determinazioni, si otterrebbero delle discrepanze analoghe a quelle fin qui ricordate. Citiamo un esempio di disaccordo fra dati, d'altronde autorevolissimi: l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* 1904, dà per la gravità a 45° ed al livello del mare 980,606, Helmert 980,617. Si vede dunque che anche nei risultati più attendibili il disaccordo sulla quinta cifra, quando g è espressa in metri, è completo: della quarta cifra si può essere meno malsicuri, quantunque gli esempi sopra addotti siano a questo riguardo molto istruttivi. Che diciamo poi della quinta cifra di *una sola determinazione*? La massima parte dei luoghi ove fu determinata la gravità sono in questo caso, e sulla quinta cifra dei valori di g relativi ad essi sono più che giustificati i dubbi che si possono sollevare. Ci si può anche domandare: se questa cifra è incerta, perchè applicare la seconda parte della correzione di Bouguer, che affetta solo, generalmente, la quinta cifra, e così incerta per la densità del suolo che contiene? Lo stesso può dirsi per la riduzione al terreno orizzontale. Questa è una ragione da aggiungersi alle altre di cui diremo più avanti, per attenersi all'avviso di Laplace e correggere la gravità solo per l'altezza, ossia applicarvi la sola prima parte della correzione di Bouguer, parte che è ora detta correzione di Faye, ma che deve, giova ripeterlo,

dirsi di Laplace; e perchè meno incerta e perchè assai spesso modifica anche la quarta cifra, che sappiamo raggiungere in modo meno incerto. In quanto sopra però non deve ravvisarsi altro che una questione proposta alla disamina dei geodeti, non certo una critica dei procedimenti ora in uso, che sono razionali, ma che data l'incertezza della determinazione sperimentale sono forse fin troppo delicati per essere applicati a numeri solo relativamente esatti. Gli studî venturi ci istruiranno a questo riguardo. Inoltre giova non scordare che la gravità è per la natura delle cose variabile in grandezza e direzione, e quando i mezzi per la sua misura saranno tali da fornirci risultati più esatti di quelli che sappiamo oggi ottenere, lo studio delle variazioni della gravità in intensità s'imporrà. Per quanto riguarda le variazioni della gravità in direzione, le ricerche sulla variazione della latitudine, sia periodica che secolare, ci diranno col tempo, il valore di essa, per la parte generale, cioè comune a tutti i punti della Terra. Se rimarrà in ogni luogo una parte residua, questa potrà attribuirsi a cause particolari, operanti sopra una ristretta regione. Ma questi sono studî e ricerche di lena secolare. Frattanto non è forse ozioso l'avvertire che sarebbe bene investigare se nelle determinazioni sia assolute che relative non abbia influenza l'azimut del piano d'oscillazione, la stagione dell'anno e l'ora del giorno (per rispetto alle posizioni del Sole e della Luna) e se su questo genere di misura sia completamente nulla l'azione del magnetismo terrestre. Non sono certo ricerche facili nè semplici: ma in problemi così complessi, la scoperta del vero, della legge del fenomeno, può dipendere da cause ritenute insignificanti, quando tali non sono. In ricerche di natura tanto delicata ed ignorata non è mai soverchia la prudenza, nè inutile il premunirsi contro l'intervento possibile e naturale di forze trascurate. Sarebbe poi di grande utilità lo studio ed il confronto fra i risultati ottenuti con apparecchi diversi. Dovendo introdurre nella discussione, a mezzo del teorema di Clairaut, i risultati dell'osservazione è indispensabile per giungere ad un risultato accettabile, che quei risultati siano fra loro paragonabili e sotto ogni rispetto di eguale attendibilità. Soddisfano a questa condizione i risultati ottenuti coll'apparecchio Defforges e con quello Sterneck? La risposta non si ha finora.

IV.

Finita la digressione, riprendiamo l'esame dei lavori di Saigey. Nei capitoli seguenti, Saigey discute le osservazioni del pendolo in 80 stazioni, e ne deduce dei valori per la forza attrattiva e la gravità sulla superficie della Terra. Passa quindi ad esaminare le irregolarità della gravità: è in questo capitolo che troviamo confermate le sue idee sulla gravità nelle isole, lo riproduciamo quindi testualmente:

" Jusqu'à présent nous avons considéré le globe dans son ensemble, abstraction faite de ses irrégularités. Celles-ci sont *apparentes*, et alors elles forment le relief des continents et le bassin des mers; ou bien elles sont *cachées*, et naissent de la variation de densité dans les couches profondes, et des excavations neptuniennes et volcaniques. Toutes ces irrégularités troublent plus ou moins le niveau de l'Océan, que l'on prend pour point de départ dans les opérations géodésiques.

" Pour mettre en évidence ces causes perturbatrices il suffit de reconnaître leur influence sur la marche du pendule. Si la terre était formée de couches uniformément denses et bornées par une surface régulièrement elliptique, la longueur du pendule à secondes varierait, de l'équateur aux pôles, suivant la loi précise des sinus carrés des latitudes. Mais, d'après les nombres formant la dernière colonne du précédent tableau, les pendules réellement observés s'écartent plus ou moins de cette loi. Pour en mieux juger, nous mettrons tous ces résultats en trois tableaux: le 1er, renfermant les plus grands écarts au-dessus des moyennes calculées; le 3e, les plus grands écarts au-dessous de ces moyennes, et le 2e, les résultats intermédiaires, le tout exprimé en centièmes de millimètre.

Bonine	+29	Gounsah-Lout	+5
Oualan	+25	Schettland du Sud	+5
Sainte-Hélène	+20	Formentera	+4
Ile de France	+18	Porto Bello	+4
Guam	+16	Ile Hare	+3
F. de Norhona	+14	Spitzberg	+3
Ile Mowi	+13	Ile Melville	+3
Saint-Thomas	+12	Ile des Etats	+3
Ascension	+10	Ile Gallopagos	+2
Lipari	+7	Petersbourg	+1
Petropowlofsk	+6	Stockholm	+1

Ile Brassa	0	Barcelone	—3
Jamaïque	0	Fiume	—3
Unst	0	Valparaiso	—3
Arbury Hill	0	Rawack	—4
Cap Horn	0	Paramatta	—4
Port-Jackson	0	Clifton	—4
Portsoy	—1	Londres	—4
Sierra-Leone	—1	Schanklin	—4
Port-Bowen	—1	New-York	—4
Leith	—2	Sitka	—4
Padoue	—2	Bahia	—4
Toulon	—5	Rio Janeiro	—8
Cap de B.-Esper.	—5	Hammerfest	—8
Groënland	—6	Malouines	—8
Altona	—6	Milan	—9
Dunkerque	—6	Trinité	—10
Greenwich	—7	Figiac	—10
Paris	—7	Maranham	—11
Monte-Video	—7	Koenisberg	—12
Clermont	—8	Drontheim	—12
Madras	—8	Bordeaux	—12
Para	—8	San-Blas	—12

" A l'exception des deux dernières stations, celles qui forment le premier tableau donné ci-dessus sont toutes des îles situées au large des mers: là, le pendule a une longueur trop grande, accusant ainsi un excès dans la force attractive. Au contraire, le troisième tableau, à l'exception des Malouines, ne renferme que des stations placées sur la côte ou dans l'intérieur des continents; le pendule y est trop court, et par la suite la pesanteur trop faible.

" On avait d'abord cru que l'excès de pesanteur observé dans quelques îles devait être attribué à la nature volcanique de leur sol. Mais le faible accroissement de densité qui en pouvait résulter, était plus que compensé par la moindre densité des eaux de la mer, qui est très profonde dans le voisinage de ces îles.

" Les calculs faits dans les suppositions les plus favorables, démontrent jusqu'à l'évidence que les lieux où la pesanteur est trop forte, sont précisément ceux qui, par leur nature et leur entourage, sont le moins capables de produire cet excès dans la force attractive de la terre. Il a donc fallu conclure de ce

fait, aujourd'hui basé sur un nombre suffisant d'observations, qu'à égalité de latitude, le niveau des eaux est *surbaissé* au milieu de l'Océan, en sorte qu'il se rapproche plus du centre du globe; et qu'au contraire, ce niveau est *surélevé* dans le voisinage des grandes terres, de manière à s'éloigner de ce centre.

" Maintenant, pour calculer ces dépressions et ces exhaussements du niveau réel de la mer, relativement à son niveau elliptique ou moyen, il est nécessaire de connaître la densité du globe comparée à celles des matières qui en forment la surface, par exemple à la densité de l'eau prise pour unité. Tel sera l'objet des chapitres suivants ".

In tali capitoli sono esposti i varî metodi per la determinazione della densità media della Terra, noti alla sua epoca: a questi egli ne aggiunge uno suo, per vero dire tale da non poter condurre che a risultati poco approssimati, ma che per dovere di storico deve pur essere ricordato. Il capitolo che ne contiene l'esposizione ha per titolo: *Densité de la terre déterminée par la déviation du fil à plomb, due à l'attraction d'un continent*; in esso si ottiene il risultato che la densità media della Terra, sta a quella del suolo della Francia, come 1,7 all'unità, che conduce ad un risultato molto inferiore al vero, benchè s'accordi discretamente colle determinazioni di Bouguer e Maskelyne.

Negli ultimi capitoli del volume secondo del suo libro, Saigey ritorna sul livello del mare, con idee assai giuste. Egli scrive a questo proposito nel capitolo sulle livellazioni, quanto segue: " Le seul moyen d'arriver à connaître exactement le niveau de l'Océan dans l'intérieur des terres, serait d'y conduire l'eau d'elle même par les canaux ". Ciò è secondo le idee di Gauss e Bessel. In altri capitoli egli s'occupa poi del seguente problema, cambiamento del livello del mare prodotto dall'azione di una massa perturbatrice: egli suppone tutta la terra ricoperta d'acqua e la massa perturbatrice collocata in un punto della superficie: " Si l'on désigne par R le rayon terrestre et par M la masse du globe, le changement de niveau h en un point quelconque de l'Océan sera exprimé par

$$h = \frac{m}{M} R \left\{ \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\alpha}} - 1 \right\}$$

α étant la distance angulaire de ce point à la masse perturbatrice m. Cette formule est établie dans les deux conditions nécessaires et suffisantes: 1° que la résultante des masses M et m soit partout normale à la nouvelle surface de l'Océan, et 2° que le volume des eaux soulevées soit égal au volume des eaux déprimées „. Poi suppone che la massa venga introdotta nell'acqua, e quindi anche che una porzione del globo terrestre sia occupata da terra ferma: ma s'accontenta d'indicare la via a seguire, senza svolgere i calcoli. Il capitolo CXX è occupato dallo studio di quest'altro problema: Cambiamento di livello dell'Oceano per l'azione di un'isola circolare e di spessore uniforme e piccolissima. Il problema è d'indole affatto teorica, perchè vi si suppone l'isola " appliquée et moulée sur la surface de l'Océan, dont elle suivra tous les mouvements „. Sul cap. CXXII vogliamo dare informazioni alquanto più ampie, perchè il problema che vi si studia è stato ampiamente trattato da Helmert (1), che di Saigey fa soltanto menzione in una nota e sull'autorità di Hann (2). Quanto dice Helmert, sull'autorità di Hann, va completato dal lato storico.

Saigey definisce prima ciò che egli intende per la forma media e circolare dell'Europa, che egli considera dapprima come giacente sulla superficie del mare, che egli suppone prolungato a mezzo di canali nell'interno dei continenti: calcola poi la deviazione del filo a piombo e la sopraelevazione del pelo liquido a varie distanze dal centro. Egli trova che sulla sponda dell'Europa, quale egli la suppose, l'acqua si eleva di 19 metri, ed al centro di 94. Suppone quindi che la base dell'Europa si prolunghi sotto le acque, immergendovisi colla pendenza di 1 metro per 370 metri di distanza, e trova col calcolo che la parte sottomarina, fino a 200 metri di profondità, produce un'elevazione di livello che è di 27 metri al centro dell'Europa e di 17 metri alla sponda. Così che al centro dell'Europa si ha un'elevazione totale di $94 + 27 = 121$, alla sponda di $19 + 17 = 36$, ed osserva che sulla sponda la sopraelevazione è già un terzo di

(1) *Die Mathematischen und Physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie*, II, Capitolo IV.

(2) *Ueber gewisse beträchtliche Uregelmässigkeiten des Meeres-Niveaus*, in " Gaea „, 1876, p. 73 e 137.

quanto è al centro, così che l' effetto della parte sottomarina tende a regolarizzare l'elevazione di questo livello.

Il capitolo CXXIII è intitolato così: *Hauteur des continents et profondeur de l'Océan, relativement à son niveau moyen.* Trascriviamo qui i dati citati da Hann ed ai quali allude Helmert: " Si l'on admet que la hauteur moyenne dont l'Océan est soulevé par un continent soit proportionnelle à la racine carrée de la surface totale de ce continent et à sa hauteur moyenne, on obtiendra les résultats suivants pour l'élévation du niveau.

Elevazione del livello.

Continente	Al centro	Alla sponda	Media
Europa	121	36	59
Asia	422	144	206
Africa	354	116	172
Nuova Olanda . . .	100	30	48
America Settentrionale	184	54	89
America Meridionale	242	76	118

Dopo aver dato questo quadro Hann scrive le seguenti righe:

" Ma questi numeri sono d'assai troppo piccoli, poichè Saigey non tenne conto dell'azione della differenza di massa fra il mare e la parte sommersa dei continenti. Essi rappresentano anche solo valori medii, non i massimi valori che si otterrebbero, se si considerassero elevati ed estesi altipiani, come ad esempio sulla costa occidentale delle due Americhe, poichè nel calcolo non fu introdotta che l'altezza media dei continenti. Ad ogni modo essi possono sempre mostrare, come anche in un apprezzamento notevolmente troppo basso, siano ancora ragguardevoli le perturbazioni del livello del mare „. Su queste perturbazioni in generale ed in particolare dovremo poi ritornare ed indugiarci a lungo, quando avremo a discorrere dei lavori di Bessel, Fischer, Bruns ed Helmert.

Helmert scrive: " Secondo Hann, *Gaea*, 1876, vol. 12, p. 79, Saigey nel suo scritto *Petite Physique du Globe* ha calcolato le perturbazioni altimetriche delle superficie di livello (al centro e alla costa per dischi continentali circolari), nonchè nell'interno trasversalmente; però gli spessori dei dischi sono riguardati solo come proporzionali alle elevazioni sopra il mare „ (1). Quanto

(1) *Theorieen...*, II, p. 353.

abbiamo detto ci fa vedere che Saigey ha tenuto conto anche di una porzione sommersa (per l'Europa fino a 200 mètri). Avvertiamo ancora che le altezze medie dei continenti usate da Saigey sono d'assai inferiori a quelle che oggi hanno corso nella geografia.

Così sarebbe terminata l'esposizione delle idee di Saigey: vedremo, procedendo in questi studî, come prendendo le mosse dai fatti che egli mise in luce, si sia dimostrato che la spiegazione che egli ne dava non corrispondeva pienamente ai computi più esatti e completi istituiti di poi. Vogliamo aggiungere ancora, che il calcolo e la discussione delle osservazioni del pendolo che egli istituì per dedurne lo schiacciamento furono generalmente ed immeritatamente poste in non cale. Solo nel volume quinto, dedicato al pendolo, dell'*Account of the Operations of the Great trigonometrical Survey of India* (Calcutta, 1879), si tenne buon conto dei suoi lavori, come abbiamo già rammentato, e gli si rese la dovuta giustizia scrivendo " *Now all authorities agree — Sabine, Airy, Baily, Saigey...* „. C. Wolf nella sua eccellente bibliografia del pendolo, al numero che riguarda la *Petite Physique du Globe* di Saigey, scrive: " *Dans le 2e volume, résumé très complet et discussion des observations du pendule* „.

Echinodermi miocenici dei dintorni di S. Maria Tiberina (Umbria).

Nota del Dott. CARLO AIRAGHI.

(Con una Tavola).

Troppo lungo sarebbe il voler far la storia delle discussioni sorte in rapporto al riferimento geologico della zona marnoso calcareo arenacea dell'Umbria, eocenica secondo alcuni, miocenica secondo altri (1). Ricorderò solo che recentemente venne dal Comitato Geologico nominata una Commissione coll'incarico di visitare le località più caratteristiche per poter poi d'accordo addivenire ad una soddisfacente soluzione del problema, e quindi alla determinazione sicura del posto di quelle roccie nella serie geologica; e che questa Commissione " con sufficiente copia di " osservazioni e di argomenti ha potuto stabilire che la zona di " cui trattasi si compone veramente di due piani distinti, i quali

(1) Tra i principali autori che si occuparono di detta formazione vedi: G. Bonarelli, *Alcune form. terz. foss. dell'Umbria* (" Boll. Soc. geol. it. „, 1899). — Id., *Descr. geol. dell'Umbria centrale* (Relaz. della Commissione giud. del V concorso al premio Molon, " Bollett. Società geologica italiana „, 1901). — C. de Stefani, *Il mioc. dell'App. sett., a proposito dei due recenti lavori di Oppenheim e Sacco* (" Proc. verb. Soc. toscana di Sc. nat. „, 1900). — Id., *Il tortoniano dell'alta valle del Tevere* (" Proc. verb. Soc. tosc. di Scienze nat. „, 1879). — G. di Stefano, *Il calc. con grandi Lucine dei dintorni di Centuripe in prov. di Catania* (" Acc. Gioenia „, 1903), nota a pag. 18. — B. Lotti, *Sull'età della form. mar. aren. foss. dell'Umbria sup.* (" Boll. R. Com. geol. „, 1900-901). — A. Lupi, *Fauna mioc. presso Tagliacozzo* (" Boll. Soc. geol. ital. „, 1904). — F. Sacco, *Sull'età di alc. terr. terz. dell'App.* (" Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, 1899-900). — R. Ugolini, *Sopra alcuni foss. dello Schlier del M. Cedrone* (" Boll. Soc. geol. ital. „, 1899). — A. Verri, *Cenni sulle form. dell'Umbria sett.* (" Boll. Soc. geol. ital. „, 1897). — Id., *Sulle diverg. di veduta circa le form. eoc. e mioc. dell'Umbria* (" Boll. R. Com. geol. „, 1903). — Id., *Le form. con ofioliti nell'Umbria*, ecc. (" R. Ist. lombardo „, 1903). — A. Verri e G. de Angelis, *Contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (" R. Acc. dei Lincei „, 1899). — Id., *Secondo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (" Boll. Soc. geol. ital. „, 1900). — Id., *Terzo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (" Boll. Soc. geol. ital. „, 1901).

" benchè di *facies* non molto dissimili devono riferirsi, in base " al complesso dei loro caratteri stratigrafici e paleontologici, il " superiore al miocene, l'inferiore all'eocene „ (*Relaz. al R. Com. geol. sui lav. eseg. per la carta geol. nel 1903 e prop. di quelli da eseg. nel 1904*).

Colla speranza pertanto di portare un nuovo contributo che potesse maggiormente avvalorare i dati paleontologici di detta Commissione, di buon grado accettai l' invito del Chiarissimo Prof. Sacco di studiare un'abbastanza ricca collezione d'echinodermi da lui stesso raccolti alla Cascina Dogana e a Tocerano presso S. Maria Tiberina.

Nel contempo ne ebbi altri favoritimi dalla gentilezza dei Chiarissimi Prof. Di Stefano e Silvestri provenienti dalle stesse località e facenti parte delle loro collezioni.

Così nella formazione marnoso calcarea delle località sopra dette, tenuto conto anche delle specie già citate dal De Angelis e Ugolini, ho potuto accertare la presenza delle seguenti specie:

Pentacrinus Gastaldii Michtti.
Antedon rhodanicus Font.
Cidaris avenionensis Desmoul.
Cidaris Peroni Cott.
Arbacina tenera de Lor.
Echinocyamus Studeri Sism. sp.
Clypeaster crassicostatus Agass.
Clypeaster laganoides Agass.
Pliolampas vasalli Wright sp.
Pliolampas camerinensis de Lor. sp.
Pliolampas aremoricus Bazin sp.
Pliolampas Silvestrii n. sp.
Echinolampas angulatus Mér.
Echinolampas hemisphaericus Lam. sp.
Conolampas plagiosomus Agass. sp.
Maretia Saccoi n. sp.

Come si vede, si tratta d'una fauna a echinodermi perfettamente miocenica, a *Clypeaster*, a *Pliolampas*, ad *Arbacina*, priva affatto di specie proprie del terziario antico, tanto eoceniche che oligoceniche. Escluse le due specie nuove insieme al *Clypeaster laganoides*, che dal tongriano del Bacino della Bormida sale fino alla Pietra di Finale, al *Conolampas plagiosomus* che si rinviene nell' aquitaniano di Acqui e nell'elveziano, e all'*Echinolampas hemisphaericus*, comune a tutto il miopliocene, tutte le altre fin'ora vennero trovate in depositi langhiani (*Pliolampas vasalli*, *Arbacina tenera*, *Antedon rhodanicus*), o elveziani (*Pliolampas aremoricus*) o tanto negli uni che negli altri (*Pentacrinus Gastaldii*, *Cidaris avenionensis*, *Cidaris Peroni*, *Echinocyamus Studeri*, *Clypeaster crassicostatus*, *Echinolampas angulatus*).

Davanti ad un tale stato di cose, indipendentemente da

considerazioni stratigrafiche, sono inclinato a credere che la formazione marnoso arenacea dei dintorni di S. Maria Tiberina, da cui provengono i fossili da me studiati, debba presentare solo il miocene, e con tutte le probabilità il langhiano, stante che la fauna a echinodermi in essa rinvenuta più che con ogni altra presenta maggiori affinità con quella di Avignon (1).

Torino, R. Museo Geologico, 1904.

DESCRIZIONE DELLE SPECIE

Pentacrinus Gastaldii Michtti.

1847. *Pentacrinus Gastaldii* Michelotti, *Descr. des foss. mioc. de l'Italie sept.* (" Nat. Verh. ", ecc. Haarlem), pag. 59, tav. 16, fig. 2.
1901. " " de Angelis, *Terzo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 16 (*cum syn.*).

Benchè non abbia in esame alcun esemplare di questa specie citata dal De Angelis, pur tuttavia ricordo che è comune nel miocene medio dei colli di Torino, di Serravalle Scrivia, nella molassa di Montese, di Gaiato, nel langhiano di St-Étienne du Grès, Notre Dame du Château, di Angles presso Avignon.

Località: Tra S. Maria Tiberina e la C. Dogana.

Antedon rhodanicus Font.

Tav., fig. 14, 15.

1879. *Antedon rhodanicus* Fontannes, *Ter. tert. du bassin du Rhône*, pag. 52, tav. 2, fig. 10.
1897. " " de Loriol, *Descript. de quelques échin.* (" Bull. Soc géol. de France), pag. 121, tav. 4, fig. 8 (*cum syn.*)

Un esemplare solo del diametro di mm. 11 che causa ad uno schiacciamento si avvicina molto a quello figurato da Fon-

(1) Oltre che del lavoro di de Loriol (*Descript. de quelques échin.*, " Bull. Soc. géol. de France ", 1897) e di quelli di H. Nicolas (*Étude des terr. tert. des env. d'Avignon*, " Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences ", Paris, 1897; *Étude sur les terr. tert. des env. d'Avignon*, Avignon, 1897), per gli opportuni confronti mi sono valso anche d'una collezione d'echinodermi dei pressi di Avignon del R. Museo geologico di Torino.

tannes. La faccia dorsale è subpentagonale con una marcata concavità delimitata da pareti ornate da confusi solchi che terminano in una piccola depressione centrale. I margini sono convessi, e stante all' abrasione subìta, le faccette articolari sono poco visibili. La faccia superiore è quasi completamente coperta dalle prime articolazioni che si elevano piramidalmente; l'apertura centrale è subrotondeggiante e da essa discendono cinque carene limitanti cinque faccette attraversate orizzontalmente da una linea interrotta nel mezzo da un marcato foro.

Questa specie del langhiano della val del Rodano si distingue dall'*Antedon oblitus* Michtti per la faccia dorsale maggiormente depressa nella regione centrale e per quella superiore fornita d'un'apertura centrale di gran lunga più piccola.

Località: Tocerano.

Cidaris avenionensis Desmoul.

1838. *Cidaris avenionensis* Desmoul., *Tabl. des Échin.*, pag. 336.
1901. „ „ de Angelis, *Terzo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 15.
1901. „ „ Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* („ Pal. ital. „), pag. 18, tav. 1, fig. 1, 8 (*cum syn.*).

Una centinaia di radioli molto ben conservati, subcilindrici, terminanti a punta o a cupola, ornati di granuli rotondi, conici, compressi, disposti in serie longitudinali più o meno regolari, come si osserva in quelli del miocene della collina di Torino. Ho pure in esame delle placche interambulacrali con forte tubercolo perforato, circondato da una grande area scrobicolare delimitata da una regolare serie di granuli.

È una delle specie più comuni nell'elveziano dei colli di Torino, di Rosignano Monferrato, nella molassa marnosa di Montese (langhiano), nella zona a *Globigerina* a Malta (langhiano), e nell' elveziano e langhiano di Francia, Portogallo, Svizzera, Algeria.

Località: Tra S. Maria Tiberina e la C. Dogana, C. Dogana, Tocerano.

Cidaris Peroni Cott.

1877. *Cidaris Peroni* Cotteau, *Descr. de la faune tert. de la Corse* (" Ann. de la Soc. d'Agr. de Lyon "), pag. 431, tav. 1, fig. 8, 14.
1901. " *Münsteri* de Angelis, *Terzo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 15.
1901. " *Peroni* Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* (Op. cit.), pag. 22, tav. 1, fig. 23, 25 (*cum syn.*).

Il de Angelis, considerando il *Cid. Peroni* Cott. come facente parte del *Cid. Münsteri* Sism., lo cita sotto questo ultimo nome, ma, come ho già dimostrato nel lavoro citato, il *Cid. Münsteri* Sism. entra nella sinonimia del *Cid. avenionensis* Desmoul., epperò il *Cid. Peroni* Cott. va considerato come specie autonoma.

Fin'ora questa specie si rinvenne nel langhiano dei dintorni di Bonifacio e di Cagliari, di Notre Dame du Château e di Angles presso Avignon, nel miocene medio di Pianosa e di Serravalle Scrivia.

Località: Tra S. Maria Tiberina e la C. Dogana.

Arbacina tenera de Lor.

1902. *Arbacina tenera* de Lor., *Notes pour servir à l'étude des échin.*, fasc. X, pag. 11, tav. 4, fig. 4.

Sei piccoli esemplari subcircolari, subemisferici al di sopra, piani al di sotto, con zone porifere diritte, depresse, con pori disposti in numero di tre paia per placca, sovrapposti gli uni agli altri quasi in linea retta; con ambulacri stretti con due serie di tubercoli imperforati, lisci, mammellonati; con interambulacri aventi pure due serie di tubercoli ma più sviluppati con zona intermedia coperta da numerosi granuli; peristoma circolare, apparecchio apicale mal conservato.

Di questa specie ho in esame anche alcuni esemplari di Avignon che li trovo eguali a quelli di C. Dogana.

L' *Arbacina tenera* De Lor. si distingue dall' *Arb. monilis* Agass. per la forma meno globosa, la faccia superiore meno rigonfia, l'inferiore meno depressa, i tubercoli più sviluppati; dall'*Arb. parva* Michtti perchè più globosa e coperta da granuli più piccoli e fitti.

È una specie del langhiano di Avignon.

Località: C. Dogana, Tocerano.

Echinocyamus Studeri Sism. sp.

1842. *Anaster Studeri* Sismonda, *Mon. degli echin. foss. del Piemonte* (" Mem. R. Accad. di Torino "), pag. 44, tav. 2, fig. 8, 9.
1879. *Echinocyamus Studeri* Foresti in Verri, *Le formaz. con ofioliti nell'Umbria*, ecc. (Op. cit.), pag. 12.
1900. " " de Angelis, *Secondo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 23.
1901. " " Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* (Op. cit.), pag. 29, tav. 4, fig. 10 (*cum syn.*).

Di questa specie citata dal Foresti pei dintorni di S. Maria Tiberina non ho in esame alcun esemplare, però credo utile ricordare ch' essa non solo è comune nell' elveziano di Torino e nel langhiano di Malta, ma anche in quello di Angles presso Avignon.

Di questa località infatti ho sott'occhio diversi esemplari che secondo De Loriol (l. c.) sarebbero da riferire all'*Echin. umbonatus* Pomel, ma che io non trovo per nulla differenti da quelli della specie in questione.

Località: Tra S. Maria Tiberina e C. Dogana.

Clypeaster crassicostatus Agass.

1840. *Clypeaster crassicostatus* Agassiz, *Catal. syst. foss.*, pag. 61.
1901. " " Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* (Op. cit.), pag. 35, tav. 2, fig. 5, tav. 4, fig. 6 (*cum syn.*).

Due buoni esemplari dalla forma oblunga (mm. 56,100), subpentagonale, larga (mm. 46,94), angolosa, colla faccia superiore alta (mm. 17,35), quella inferiore depressa attorno al peristoma; con ambulacri lunghi, diritti, stretti, digitiformi, con zone porifere larghe, leggermente depresse, e quelle interporifere alte e rigonfie; peristoma profondo, periprocto subrotondo, apparecchio apicale stelliforme.

Sono esemplari che non differiscono quindi dai tipi della collina di Torino, di Rosignano, da quelli del langhiano della Corsica e Sardegna descritti da Cotteau.

Questa specie fu pure riscontrata nell' elveziano d'Austria a Brunn, Hoflein, d'Ungheria a Kemencze e d'Algeria a Tiaret, Dj, Garribon.

Località: Tocerano.

Clypeaster laganoides Agass.

Tav. fig. 5-6.

1847. *Clypeaster laganoides* Agassiz et Desor., *Catal. raison. des Échin.*, pag. 73.
1901. „ „ Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* (Op. cit.), pag. 33, tav. 2, fig. 4 (*cum syn.*).

Sono diversi esemplari, oblunghi, pentagonali, angolosi (lunghezza mm. 75, 79, 30, 96, larghezza mm. 68, 71, 27, 72), colla faccia superiore poco rigonfia (mm. 17, 17, 8, 16), quasi uniformemente inclinata sui margini, con quella inferiore piana; cogli ambulacri lunghi, petaloidei, aperti; con zone porifere larghe, depresse, arcuate, con zone interporifere convesse, larghe il doppio d'una zona porifera; cogli interambulacri stretti e leggermente rigonfi; col periprocto subcircolare vicino al margine, l'apice ambulacrale subcentrale.

Ho in esame i modelli in gesso dei tipi del *Clyp. latirostris* Agass. (60) e del *Clyp. marginatus* Lam. (57) e li trovo affini a questa specie, ma il primo è meno allungato con ambulacri meno rigonfi e gli interambulacri più convessi, il secondo è più alto nella regione ambulacrale, con ambulacri più brevi e gli interambulacri più convessi.

È una specie del langhiano di S. Manza in Corsica, dell'elveziano di Finale Marina e del tongriano del bacino della Bormida.

Località: Tocerano.

Pliolampas vasalli Wright sp.

Tav., fig. 7-10.

1855. *Pygorhynchus vasalli* Wright, *Foss. Echin. Malta* (" Ann. Mag. Nat. Hist. „), pag. 271.
1892. *Breynella* „ Gregory, *Malt. foss. Echin.*, " Royal Soc. of Edinburgh), pag. 602 (*cum syn.*).

Due esemplari allungati (mm. 33, 30 di lunghezza e mm. 28, 25 di larghezza), subcilindrici, arrotondati all' avanti, rostrati posteriormente, colla faccia superiore rigonfia (mm. 17, 15), carenata nell'area interambulacrale impari, coll'apice ambulacrale spostato all'avanti fornito di tre pori genitali mancando l'anteriore sinistro; cogli ambulacri petaloidei, aperti, con spazio interporifero largo quanto una zona porifera; con peristoma sub-

centrale, pentagonale, allungato longitudinalmente, con periprocto ovale in senso longitudinale, fornito alla base d'un solco largo e poco profondo.

Questa specie si distingue dal *Pliolampas medfensis* Cott. per essere meno rostrata posteriormente e per avere l'apice ambulacrale meno centrale e il periprocto posto più in alto.

Secondo Gregory essa sarebbe il tipo del genere *Breynella* da lui fondato nel 1892, ma io credo che di detto genere non sia il caso di tenerne conto essendo posteriore al genere *Pliolampas* stabilito da Pomel nel 1888, genere che si distingue dall'*Echinanthus* per la mancanza del poro genitale anteriore sinistro.

A Malta il *Pliolampas vasalli* venne trovato nella zona a *Globigerina* (langhiano), in Corsica nella zona a *Pecten bonifacensis* (langhiano).

Località: C. Dogana, Tocerano.

Pliolampas aremoricus Bazin sp.

Tav., fig. 16-18.

1884. *Echinanthus aremoricus* Bazin, *Échin. mioc. de Bret.* (" Bull. Soc. Géol. de France), pag. 40, tav. 1, fig. 26-30.

1896. „ „ de Loriol, *Descript. des Échin. tert. du Portugal* (" Direct. des trav. géol. du Portugal „), pag. 41, tav. 12, fig. 2.

Un solo esemplare, ovoidale allungato (lunghezza mm. 39, larghezza mm. 30), arrotondato all'avanti, più largo e angoloso posteriormente, colla faccia superiore alta (mm. 22) e convessa, con carena nell'area interambulacrale impari, colla faccia inferiore leggermente concava; apice ambulacrale spostato all'avanti con tre pori genitali, mancando l'anteriore sinistro; ambulacri superficiali, larghi, aperti; periprocto ovale, allungato, posto sopra ad un largo solco ma poco profondo; peristoma pentagonale allungato longitudinalmente.

L'esemplare che riferisco a questa specie è forse un po' più allungato e ovoidale dei tipi dell'elveziano della Bretagna, pur tuttavia non credo che da questi si possa separare, tanto più che alla stessa specie venne già riferito un altro esemplare da De Loriol trovato nel miocene di Porthindo d'Arrabida in Portogallo, che si presenta anch'esso più allungato e ovoidale.

Anche questa specie per le ragioni già esposte sopra la riferisco al genere *Pliolampas*.

Località: C. Dogana, M. Cedrone.

Pliolampas camerinensis de Lor. sp.

Tav., fig. 11-13.

1882. *Echinanthus camerinensis* de Loriol, *Descript. des Échin. de Camerino* (" Mém. Soc. de Phys. et Hist. nat. de Genève "), pag. 20, tav. 1, fig. 9.

1887. " " Ugolini, *Sopra alcuni foss. dello Schlier del M. Cedrone* (Op. cit.), pag. 2.

1900. " " de Angelis, *Secondo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 259.

Un piccolo esemplare identico a quelli illustrati da De Loriol. È ovoidale, allungato, più largo posteriormente che all'avanti, colla faccia superiore alta, convessa, leggermente carenata posteriormente, quella inferiore depressa attorno al peristoma, quella posteriore verticale; apparecchio apicale con tre pori, privo del sinistro anteriore; ambulacri corti, superficiali; peristoma pentagonale, allungato; periprocto piccolo, allungato, sopra marginale.

Questa specie si distingue facilmente tra le congeneri per le sue piccole dimensioni. Anche questa specie essendo priva del poro genitale sinistro anteriore e fornita d'un peristoma pentagonale allungato, credo che piuttosto che al genere *Echinanthus* debba riferirsi al genere *Pliolampas*.

Località: C. Dogana.

Pliolampas Silvestrii n. sp.

Tav., fig. 1-4.

Un esemplare lungo mm. 33, largo mm. 28, alto mm. 16, quasi uniformemente arrotondato all'avanti e all'indietro, colla faccia superiore uniformemente convessa, coll'area interambulacrale posteriore un poco carenata; colla faccia inferiore depressa attorno al peristoma. Ambulacri petaloidei, aperti, leggermente convessi, con spazio interporifero largo quanto una zona porifera. Peristoma subpentagonale, allungato longitudinalmente, periprocto grande, allungato, quasi totalmente invisibile dalla faccia

superiore, fornito alla base di largo e profondo solco; apparecchio apicale privo del foro genitale anteriore sinistro.

Questo nuovo *Pliolampas* lo distinguo dal *Pliol. vasalli* Wright perchè più rotondeggiante, meno rostrato, meno rigonfio, cogli ambulacri più convessi, il periprocto più allungato e sviluppato. Dal *Pliol. aremoricus* Bazin lo distinguo pure perchè più rotondeggiante, meno gibboso nell'area interambulacrale impari e più depresso.

Località: C. Dogana.

Conolampas plagiosomus Agass. sp.

1840. *Conoclypeus plagiosomus* Agassiz, *Catal. Syst. foss.*, pag. 5.
1899. „ „ Ugolini, *Sopra alcuni foss. dello Schlier del M. Cedrone* (Op. cit.), pag. 4.
1900. „ „ de Angelis, *Secondo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 259.

Non ho in esame alcun esemplare di questa specie, ma data la descrizione d'Ugolini non si può dubitare della sua presenza nello *Schlier* del M. Cedrone.

È una specie che fin'ora venne trovata in depositi del miocene medio e inferiore.

Località: M. Cedrone.

Echinolampas angulatus Mér.

Tav., fig. 19-20.

1847. *Echinolampas angulatus* Mérian in Agassiz et Desor., *Catal. rais. des Échin.*, pag. 108.
1889. „ „ Ugolini, *Sopra alcuni foss. dello Schlier del M. Cedrone* (Op. cit.), pag. 2.
1900. „ „ de Angelis, *Secondo contr. allo studio del mioc. nell'Umbria* (Op. cit.), pag. 259.
1901. „ „ Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* (Op. cit.), pag. 47, tav. 5, fig. 3 (*cum syn.*).

Ho in esame una cinquantina di buoni esemplari. Sono di una forma ovoidale, talora allungata, talora invece allargata, arrotondati all'avanti e rostrati posteriormente, colla faccia superiore talora depressa, piatta, talora alta, subconica, con quella inferiore depressa attorno al peristoma; con apice ambulacrale spostato all'avanti, cogli ambulacri subpetaloidei, larghi, lunghi,

superficiali, aperti, con zone porifere strette, col peristoma subcentrale, pentagonale, allungato trasversalmente, periprocto grande trasversale.

Sono esemplari che corrispondono quindi a quelli illustrati da De Loriol rinvenuti a Camerino, a quelli della molassa miocenica di St.-Juste (Drôme), a quelli di Rosignano, e a quelli di Avignon che si conservano nel Museo geologico di Torino.

Località: Tra S. Maria Tiberina e C. Dogana, Dogana, M. Cedrone, Tocerano.

Echinolampas hemisphaericus Lam. sp.

1816. *Clypeaster hemisphaericus* Lamarck, *Anim. s. vert.*, vol. III, pag. 187.
1901. *Echinolampas* „ Airaghi, *Echin. terz. del Piemonte e Liguria* (Op. cit.), pag. 48 (*cum syn.*).

Un esemplare non tanto ben conservato, ma che, data la sua taglia, la forma subcircolare, la faccia superiore uniformemente convessa, quella inferiore piana, coi margini rotondeggianti; gli ambulacri larghi, lunghi, subpetaloidei, aperti alla estremità libera; l'apice ambulacrale subcentrale spostato all' avanti, il peristoma pentagonale, trasversale, il periprocto grande, trasversale, quasi inframarginale, non mi lascia alcun dubbio trattarsi dell'*Echin. hemisphaericus* (Lam.).

Questa specie è comune in tutti quanti i giacimenti miocenici e pliocenici.

Località: C. Dogana.

Maretia Saccoi n. sp.

Tav., fig. 21-22.

Specie di piccole dimensioni (lunghezza mm. 30, larghezza mm. 29, altezza mm. 13), subdepressa, allargata all'avanti, cuoriforme, fortemente intaccata dal solco anteriore, colla faccia superiore appena convessa, inclinata sui margini, quella inferiore piana. Sommità apicale eccentrica all' avanti; ambulacro impari fornito di fori piccoli disposti a paia lontani tra loro; ambulacri pari anteriori leggermente depressi, divergenti, lunghi, colle zone porifere anteriori molto più atrofizzate che le posteriori; ambulacri posteriori meno divergenti, lanceolati. Peristoma

grande, labiato, spostato molto all'avanti. Dei grossi tubercoli fortemente scrobicolati coprono le aree interambulacrali pari.

La forma depressa dell'esemplare in esame, la larghezza e la profondità del solco anteriore l'avvicinano alla *Maretia tenuis* Peron, ma i tubercoli sono più numerosi e più grandi, gli ambulacri posteriori più lunghi, gli anteriori più divergenti.

Dallo *Spatangus Hoffmanni* Gold. si distingue perchè più depresso e perchè fornito di un solco anteriore più profondo e largo e infine perchè ornati da tubercoli di gran lunga più sviluppati.

Località: C. Dogana.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

1-4.	*Pliolampas Silvestrii* n. sp.	Coll. Silvestri.
5-6.	*Clypeaster laganoides* Agass.	R. Museo geol. Torino.
7-8.	*Pliolampas vasalli* Wright sp.	Id. Id. Id.
9-10.	*Pliolampas vasalli* Wright sp.	Id. Id. Id.
11-13.	*Pliolampas camerinensis* de Lor. sp. . .	Id. Id. Id.
14-15.	*Antedon rhodanicus* Font.	R. Ufficio geol. Roma.
16-18.	*Pliolampas aremoricus* Bazin sp. . . .	R. Museo geol. Torino.
19-20.	*Echinolampas angulatus* Mér.	Id. Id. Id.
21-22.	*Maretia Saccoi* n. sp.	Id. Id. Id.

a fot.

ELIOT. ING. MOLFESE-TORINO

Sulla dispersione dell'elettricità nei vapori di jodio.

Nota del Dr. ADOLFO CAMPETTI.

1. — Sono ben note le numerose e svariate esperienze eseguite allo scopo di dimostrare e misurare la conducibilità dei gas portati a temperatura elevata, come è pure noto che in determinate condizioni si manifesta in queste esperienze la così detta conducibilità unipolare; vale a dire la dispersione dell'elettricità negativa comincia ed avviene in modo completo (da un elettrodo posto in seno al gas caldo) ad una temperatura, alla quale la positiva rimane ancora quasi completamente sull'elettrodo che ne è carico.

Che la conducibilità dei gas caldi dipenda da una ionizzazione del gas stesso non è adesso posto da alcuno in dubbio; ma mentre alcuni, come Elster e Geitel (1), pensano che la ionizzazione del gas avvenga esclusivamente alla superficie degli elettrodi, altri invece, come M. Clelland (2), ritengono che, almeno alla pressione ordinaria, la conducibilità dipenda essenzialmente da una ionizzazione che ha luogo nell'interno del gas e che, anche a pressioni inferiori, questa ionizzazione agisca insieme alla elettrizzazione sugli elettrodi. Secondo ogni probabilità ambedue le cause agiscono e l'una e l'altra in diversa misura, a seconda pure della natura del gas.

A questo proposito ricorderò il recente lavoro di A. Byk (3), il quale, in base alle sue esperienze eseguite con elettrodi di platino e di altri metalli (zinco, argento, rame) nell'aria e nell'anidride carbonica alla pressione ordinaria, crede poter concludere che la ionizzazione avvenga sopratutto direttamente in seno al gas riscaldato, in quanto che egli trova la conducibilità del

(1) " Wied. Annalen ", 38.
(2) " Proceed. of the Cambridge Phil. Soc. ", 1900 e 1902.
(3) " Physikalische Zeitschrift ", 1903, No. 24.

gas indipendente dalla natura dell'elettrodo; il fenomeno della conducibilità unipolare si manifesta poi nelle sue esperienze in modo sicuro.

È tuttavia opportuno osservare come le conclusioni di queste e altre simili esperienze lascino sempre qualche incertezza, giacchè, la superficie di contatto del gas con le pareti calde del recipiente (di vetro, porcellana, ecc.) entro cui è riscaldato essendo molto grande di fronte alla superficie degli elettrodi, se queste pareti agiscono sulla ionizzazione del gas, la loro influenza può coprire completamente le variazioni dovute alla diversa natura degli elettrodi stessi.

Le esperienze che io ho eseguite sono dirette a due scopi: in primo luogo ad esaminare con qualche precisione la conducibilità di gas, diversi dall'aria, a temperatura elevata, e in secondo luogo a studiare l'influenza che la natura degli elettrodi ha sulla ionizzazione del gas e specialmente dal punto di vista dell'influenza che può avere su questa ionizzazione l'azione chimica che ha luogo tra il gas stesso e gli elettrodi. Le mie esperienze sono state finora in numero molto limitato per le ragioni che indicherò in fine: tuttavia esse accennano a questo resultato, che cioè, quando tra l'elettrodo ed il gas riscaldato esiste una energica azione chimica, varia notevolmente anche la velocità di dispersione dell'elettricità da quest'elettrodo. Queste esperienze starebbero dunque in relazione con quelle eseguite riscaldando del rame o del rame ossidato in aria, ossigeno o idrogeno: salvo che in queste ultime esperienze la temperatura era notevolmente più elevata che nelle mie, se la differenza nella dispersione doveva essere notevole da un caso all'altro.

In generale poi tutte le esperienze da cui appare una influenza dell'azione chimica sulla dispersione in seno ai gas caldi possono forse stare in rapporto con quelle di Strutt (1), Mac Leunan (2), ecc. e con altre recenti del prof. Naccari (3) sulla cosiddetta radioattività dei metalli comuni. Se infatti un'azione chimica tra il metallo e il gas a temperatura elevata aumenta o varia comunque la rapidità di dispersione della elettricità, non

(1) " Nature ", 67, 1903.
(2) " Beiblätter ", 10, 1903.
(3) " Nuovo Cimento ", luglio 1904.

è fuor di luogo il pensare che un tale effetto possa manifestarsi (sebbene in grado assai minore) anche a bassa temperatura e, almeno in parte, a questa causa essere da attribuire le differenze fra radioattività di alcuni metalli comuni. (Vedasi a questo proposito anche Armstrong H. E., " Nature ", 67, 1903).

2. — Volendo esaminare la conducibilità dei vapori di jodio alla pressione ordinaria era impossibile operare con recipiente chiuso e fissare sulla parete di questo gli elettrodi (dei quali uno fosse in comunicazione coll'elettroscopio e l'altro a terra), giacchè, se le pareti del recipiente sono da per tutto riscaldate, è impossibile l'isolamento dell'elettrodo, e se d'altra parte la regione del recipiente ove gli elettrodi sono fissati è mantenuta a bassa temperatura, allora, per il principio delle pareti fredde, quivi l'jodio si condensa, l'isolamento cessa e al tempo stesso la tensione del suo vapore nella regione calda si abbassa. Per tali ragioni l'jodio veniva ridotto in vapore entro una provetta aperta del così detto *Resistenzglas* di Jena, come quello che è meno soggetto ad azioni chimiche e più difficilmente fusibile. Tale provetta, più larga al fondo che all'estremo aperto, era tenuta verticalmente e immersa colla sua parte più larga entro un bagno di limatura di ferro scaldato mediante una stufa a gas. Nella provetta, e precisamente verso il fondo, stavano disposti, alla distanza di circa un centimetro, due elettrodi di platino della superficie di 0,25 e 2 cent. quadrati rispettivamente, portati da due lunghi tubetti di vetro ripiegati fuori della provetta ad angolo retto e fissati entro un blocco di paraffina: entro a questi tubetti passavano i fili che facevano comunicare i detti elettrodi, l'uno col suolo, l'altro colle foglie di un elettroscopio di Exner graduato mediante una pila Leclanchè di 100 coppie. La temperatura nell'interno della provetta era determinata mediante una coppia termoelettrica platino platino iridiato isolata dal gas della provetta coll'essere rinchiusa entro un tubo di vetro a pareti sottili. Tale coppia (il cui comportamento per temperature non troppo elevate è perfettamente regolare) fu confrontata, entro un bagno di lega di piombo e stagno, con un termometro a mercurio recentemente tarato sino a 423° dal *Reichsanstalt* di Berlino. — Le esperienze non si facevano mai mentre il gas della stufa era acceso; ma, causa

la lentezza della trasmissione del calore all'interno della provetta, dopo spento il gas, si aspettavano molti minuti sino a che la temperatura nel gas fosse vicina al suo valor massimo: in prossimità di questo massimo la temperatura si conservava pressochè costante per parecchi minuti. Nelle esperienze eseguite nei vapori di jodio, dopo introdotto jodio in eccesso in guisa da poter ritenere scacciata tutta l'aria della provetta, si aspettava (prima di caricare l'elettrodo) che fosse cessata l'uscita dei vapori dall'apertura superiore della provetta, apertura che veniva ridotta al minimo possibile mediante un dischetto di mica perforato in corrispondenza dei sostegni degli elettrodi.

In tutti i casi esperienze preliminari venivano fatte per determinare la perdita di carica dipendente dai sostegni, che era però sempre assai piccola; queste esperienze servivano poi a correggere i risultati delle altre. Nelle esperienze qui riferite l'elettrodo carico era quello di minor superficie: la carica si faceva mediante una pila secca.

Nelle tre tabelle che seguono sono riportati i risultati delle esperienze di confronto tra la dispersione nell'aria e nei vapori di jodio alla stessa temperatura e per tre diverse temperature; in queste tabelle t indica il tempo decorso dal principio dell'esperienza in minuti o secondi, T la temperatura, V il potenziale cui era carico, nel tempo corrispondente, l'elettrodo.

t	*Elettricità positiva*		*Elettricità negativa*	
	V nell'aria $T = 427°$	V nell'jodio $T = 430°$	V nell'aria $T = 427°$	V nell'jodio $T = 423°$
0′	139,5	140	139	139
1′	139	130	137	128
2′	139	125	135,5	121,5
3′	138,5	122	135	117,5
4′	138,5	119	134,5	115,5
5′	138,5	117	133,5	114
6′	138,5	115	133	113
7′	138,5	114	132	111,5
8′	138	112	131,5	110,5
9′	138	111	131,5	109
10′	138	110	131	108

Come apparisce dalla tabella, la dispersione tanto nell'aria quanto (sebbene in grado minore) nell'jodio sembra maggiore per la elettricità negativa che per la positiva e un comportamento analogo si manifesta nelle esperienze a temperatura di circa 500° riferite nella tabella che segue:

t	*Elettricità positiva*		*Elettricità negativa*	
	V nell'aria $T = 490°$	V nell'jodio $T = 499°$	V nell'aria $T = 496°$	V nell'jodio $T = 502°$
0′	139	139	139	139
15″	—	112,5	—	102
30″	—	95	131	80,5
45″	—	78	—	67
1′	128,5	63,5	125,5	49
1′30″	—	53,5	—	36
2′	121	44	112	
3′	113	36	99,5	
4′	106,5		92	
5′	102		85,5	
6′	98		79,5	
7′	94		74	
8′	89,5		70,5	

Anche a questa temperatura la dispersione dell'elettricità negativa è più forte che quella della positiva; non sono segnate le indicazioni dell'elettroscopio al disotto di 30 Volta, perchè non molto sicure. Le esperienze, riferite nella tabella seguente, fatte a temperature di 525° e 535° gradi circa riguardano solo la dispersione nell'aria: giacchè nell'jodio a queste temperature l'elettricità positiva (partendo dal potenziale iniziale di 139 Volta) veniva scaricata completamente in 45″ circa, la negativa circa in 30″.

Esperienze nell'aria.

t	*Elettricità positiva*		*Elettricità negativa*	
	V $T = 524°$	V $T = 534°$	V $T = 524°$	V $T = 537°$
0′	139	139	139	139
30″	121,5	115,5	130,5	129,5
1′	104	92	125,5	119
1′,30″	88	71,5	118,5	107
2′	73	58	111	95,5
2′,30″	64,5	44,5	107	84,5
3′	58,5	36	100,5	76,5
3′,30″	51,5	—	96	70,5
4′	46,5	—	91,5	62,5
4′,30″	—	—	88	58

Queste ultime esperienze mostrano che, a queste temperature, un aumento piccolo nella temperatura accresce notevolmente la conducibilità: è anche importante notare come, da esse apparisca (contrariamente alle precedenti) una dispersione maggiore per la elettricità positiva che per la negativa nell'aria: la causa di tal fatto (in opposizione alle esperienze precedenti) devesi probabilmente ricercare nell'incandescenza delle pareti della provetta (il vui vetro può aver subìta una piccola alterazione superficiale per l'azione dei vapori di jodio) e degli elettrodi stessi, a questa temperatura. Tale incandescenza provoca nel gas a contatto una elettrizzazione e quindi una ionizzazione probabilmente diversa da quella che ha luogo a temperatura più bassa. Ad ogni modo a questa temperatura di circa 530° le esperienze riescono un po' incerte; dovendo notarsi solo in particolare la fortissima dispersione nei vapori di jodio.

3. — Altre esperienze furono poi eseguite cambiando la natura dell'elettrodo carico e precisamente sostituendo al platino una lamina di argento delle stesse dimensioni: fu provata di nuovo per le varie temperature la dispersione anche nell'aria, giacchè era cambiata la provetta e la distanza degli elettrodi.

Nelle tabelle qui appresso che si riferiscono ad esperienze eseguite a temperatura di circa 300° la colonna I riguarda la dispersione dall'elettrodo di platino nell'aria, la II dall'elettrodo di platino nell'jodio, la III dall'elettrodo di argento nell'aria, la IV dall'elettrodo di argento nell'jodio.

t	*Elettricità positiva.*			
	I. $T = 307°$	II. $T = 308°$	III. $T = 306°$	IV. $T = 303°$
0	139	139	139	139
30″	—	135	—	127,5
1′	139	132,5	139	118,5
2′	138,5	130,5	138,5	109,5
3′	138,5	128,5	138,5	102
4′	138,5	127	138,5	96,5
5′	138,5	125	138,5	91
6′	138,5	123,5	138,5	86,5
7′	138,5	122.5	138,5	83,5
8′	138,5	120,5	138,5	80
9′	138,5	—	138,5	77,5
10′	138,5	—	138,5	74

t	*Elettricità negativa.*			
	I. $T = 309°$	II. $T = 306°$	III. $T = 307°$	IV. $T = 306°$
0	139	139	139	139
30″	—	134,5	—	—
1′	138,5	131	138,5	129
2′	138	128	138,5	122,5
3′	138	126	138	119
4′	138	125,5	138	115
5′	138	125	138	112
6′	138	122,5	138	109
7′	138	120,5	138	106,5
8′	138	119	138	103
9′	138	118	138	100,5
10′	138	—	138	98,5

Se si confrontano le colonne I e III relative alla dispersione nell'aria con elettrodo di platino o di argento, si vede che non esiste (conformemente alle esperienze di A. Byk) differenza apprezzabile, mentre invece si nota subito confrontando le colonne II e IV che una assai forte differenza esiste tra la dispersione in un'atmosfera di vapori di jodio da un elettrodo di platino e quella da un elettrodo di argento: la dispersione appare tuttavia più forte per la elettricità positiva che per la negativa e questo fu confermato da ripetute esperienze.

Un'altra serie di esperienze fu poi eseguita alla temperatura di 360 a 370 gradi: le conseguenze sono le stesse delle ora esposte, salvo naturalmente una dispersione maggiore, come appare dalle due tabelle alla pagina seguente.

Le esperienze riferite nelle ultime quattro tabelle sono particolarmente interessanti, perchè mostrano il forte aumento che si ha nella dispersione quando si adopera un elettrodo di argento in luogo di un elettrodo di platino nei vapori di jodio. Tuttavia queste esperienze presentano sempre qualche irregolarità ed incertezza dipendenti specialmente (oltre che dall'azione, d'altronde inevitabile, delle pareti di vetro della provetta sulla ionizzazione del gas contenuto) dal fatto che, dovendosi operare con recipiente aperto, non sempre riesce di evitare il mescolarsi dei vapori di jodio coll'aria esterna.

In particolare resterebbero da eseguire le esperienze seguenti: 1° Esaminare il comportamento di elettrodi di altri metalli, oltre il platino e l'argento; 2° Esaminare per il caso dell'elettrodo di argento (o, quando ne sia il caso, di altro metallo) se la variazione nella dispersione si ha quando è di argento l'elettrodo carico od anche quando è di argento quello posto a terra, oppure soltanto quando nel vapore venga introdotta una lamina di argento isolata. Se non che la difficoltà di apprezzare piccole differenze di conducibilità nelle condizioni sperimentali ora accennate mi ha sconsigliato dal proseguire coi vapori di jodio le suaccennate esperienze. Mi propongo però di eseguire esperienze analoghe con altri gas (cloro, ammoniaca, acido cloridrico), coi quali sia possibile operare in condizioni più opportune.

t	*Elettricità positiva.*			
	I. $T = 360°$	II. $T = 362°$	III. $T = 363°$	IV. $T = 367°$
0	139	139	139	139
30″	138,5	—	138,5	120
1′	138,5	131	138	101
1′,30″	138,5	—	138	79,5
2′	138	125,5	138	64
2′,30″	138	—	138	51,5
3′	138	122,5	138	41
4′	138	120	138	33
5′	138	118	138	24
6′	138	116	138	—
7′	138	115	138	—
8′	138	113,5	138	—
9′	138	112,5	138	—

t	*Elettricità negativa.*			
	I. $T = 359°$	II. $T = 361°$	III. $T = 362°$	IV. $T = 364°$
0	139	139	139	139
30″	—	—	—	123,5
1′	138,5	130,5	138	103,5
1′,30″	—	—	—	81
2′	138	125	138	65,5
3′	137,5	121,5	138	49
4′	137,5	119	137,5	40
5′	137,5	117	137,5	31
6′	137,5	114,5	137,5	—
7′	137,5	113	137	—
8′	137,5	112	137	—
9′	137,5	111	137	—

4. — Intanto però dalle eseguite esperienze risulta, per il caso di un elettrodo di argento nei vapori di jodio, una ionizzazione dovuta ad azione chimica, per la reazione cioè tra l'jodio e l'argento dell'elettrodo; caso che presenta qualche analogia

anche con quello studiato dal Naccari e successivamente dal Barus, della ionizzazione cioè prodotta nell'aria per la combustione lenta del fosforo.

Prima di terminare non voglio tralasciare di ricordare che R. J. Strutt (1), in un suo lavoro sulla scarica dell'elettricità positiva dai metalli caldi a temperature relativamente poco elevate, trovò che la temperatura alla quale l'elettroscopio diminuiva la sua deviazione di 10 divisioni all'ora, era, a seconda della natura dell'elettrodo, la seguente:

Rame nell'aria	$T = 287°$
Ossido di rame nell'aria . . .	$T = 266°$
Ossido di rame nell'idrogeno .	$T = 310°$
Argento nell'aria	$T = 250°$
Argento nell'idrogeno	$T = 228°$

Da queste esperienze egli conclude che l'azione chimica è piuttosto sfavorevole che favorevole alla dispersione dell'elettricità positiva.

Non è strano che alcune azioni chimiche siano favorevoli ed altre sfavorevoli alla ionizzazione del gas; se non che le esperienze qui riportate mi sembrano essere poco concludenti tanto nell'un senso quanto nell'altro e tanto meno permettere una conclusione così generale, sia perchè in alcuni tra i casi esaminati (ad es.: argento nell'aria oppure nell'idrogeno) l'azione chimica a quella temperatura deve essere estremamente piccola, sia perchè la natura del gas e dell'elettrodo devono esercitare una influenza non trascurabile sulla ionizzazione e quindi sulla dispersione, indipendentemente da qualsiasi azione chimica. Tale influenza infatti si manifesta nella ionizzazione prodotta alla superficie di un metallo per opera dei raggi catodici, e per quanto il processo dell'ionizzazione sia qui assai diverso, è probabile che accada pure qualche cosa di simile.

Nelle mie esperienze ed in altre l'influenza della natura dell'elettrodo in alcuni gas (aria, anidride carbonica) non si manifesta o per la breve durata dell'esperienza, o per l'azione ionizzante delle pareti calde del recipiente.

Torino, Istituto di Fisica dell'Università, Ottobre 1904.

---

(1) R. J. Strutt, " Philosophical Magazine ", 2, 1902.

Contributo alla conoscenza dell'infiltrazione adiposa.

Nota del Socio PIO FOÀ.

(Con una Tavola).

In questi ultimi anni si è venuta accentuando fra i Patologi la discussione, sul significato che assume in determinate circostanze la presenza del grasso in alcuni organi o in alcune parti di essi. I vecchi termini di degenerazione e di infiltrazione furono sottoposti ad un esame critico in base alle più recenti risultanze sperimentali. Stimo pertanto non superfluo il pubblicare i risultati di mie ormai vecchie ricerche sulla presenza del grasso in taluni elementi e in talune circostanze, le quali fin'ora avevano poco richiamato su di esse l'attenzione degli studiosi.

Le mie più vecchie osservazioni riguardano la presenza del grasso nelle masse trombotiche ed eventualmente nelle pareti dei rispettivi vasi sanguigni. Usavo prima di fissare i pezzi in liquido di Flemming e colorarli colla safranina e alcool picrico; in seguito ho trovato molto più opportuno adoperare il metodo di Marchi; pertanto, tenevo i pezzi per tre o quattro giorni nel liquido di Müller e poi li passavo per altrettanto tempo nella miscela osmio-bicromica, indi lavavo e indurivo in alcool. A questo modo si conserva molto meglio l'elasticità del tessuto, l'acido osmico penetra più a fondo, e i tagli si possono ugualmente colorare colla ematossilina e coll'eosina oppure col liquido di V. Giesow. Il metodo di Marchi conserva benissimo le piastrine nei trombi che risultano da esse, e concede anche di valutare la proporzione degli elementi che compongono l'insieme della massa trombotica, e di distinguere nettamente l'intreccio dei filamenti fibrinosi.

È assai frequente di trovare nelle masse trombotiche non affatto recenti, ma neppure molto antiche, degli elementi ricchi

di grasso. I leucociti possono non presentare grasso, oppure sono forniti solo di poche e piccole gocciole di grasso, ora isolate, ora confluenti. In certi casi, però, e più spesso in quei trombi che si formano in vicinanza di focolai flogistici, o di grandi essudazioni sierose purulente, si trovano cellule con nucleo bilobato o plurilobato, il cui protoplasma è assai sottile e disteso come un velo carico di moltissime gocciole adipose. Più di frequente si trovano nei trombi, delle grandi cellule probabilmente endoteliali il cui protoplasma è gremito di gocciole di grasso. Queste possono essere di varia grandezza, e accumularsi senza ordine nel protoplasma, oppure talvolta sembrano disporsi in circoli concentrici regolarmente intorno al nucleo. La distribuzione degli elementi adiposi nella massa del trombo non è regolare; talvolta se ne trovano sparsi in tutto il trombo, e tra essi si trovano anche talora delle gocciole libere come se derivassero dallo sfacelo degli elementi stessi in cui erano depositate; il più spesso, però, gli elementi infiltrati di grasso si trovano accumulati in una parte sola del trombo, e per lo più negli strati periferici.

Vi sono dei trombi delle più diverse provenienze che possono presentare cumuli di cellule grandi ricchissime di grasso, e altri che non ne presentano affatto. I trombi recentissimi ordinariamente non presentano cellule fornite di grasso; io ne vidi di acutissimi formatisi nella cavità del cuore, nell'arteria polmonare e nei seni della dura madre, nelle vene periferiche degli arti, da cause non bene precisabili, e nei quali la fibrina era scarsa, gli elementi sanguigni abbastanza uniformemente distribuiti, e non vi si trovavano elementi adiposi. Esaminai dei trombi acuti del cuore, o dell'arteria polmonare, quasi interamente costituiti da piastrine e senza alcuna traccia di grasso. Ho anche trovato privi affatto di grasso contro la mia aspettativa dei trombi delle vene vescicali o uterine in casi di cistite suppurativa o di sepsi puerperale, sebbene questi trombi fossero ricchi di leucociti polimorfi, e così pure alcuni casi di trombi marantici, sebbene si debbano essere prodotti lentamente; ma al contrario ho raccolto molti altri casi di trombosi del cuore e dei vasi grossi e piccoli, in cui si trovavano degli accumuli di grosse e di piccole cellule fornite di grasso. Citerò alcuni esempi, e fra questi un caso di trombosi di una grossa diramazione dell'arteria polmonare in una vecchia morta di bronchite suppurativa

diffusa. Negli strati più corticali del trombo si trovavano molti elementi carichi di grasso, e nella parte centrale si trovavano elementi più piccoli, apparentemente leucociti, molto ricchi anch'essi di gocciole adipose, le quali si trovavano anche isolate un po' dappertutto, ora minutissime come granuli, ora grosse e apparentemente libere negli interstizi della fibrina. La vecchia era in istato marasmatico; negli ultimi tempi della sua malattia il cuore era molto indebolito e in istato di atrofia bruna; forse si è formato un trombo nel cuor destro e di là fu spinto in un ramo della polmonare, cosicchè l'inferma morì dopo breve tempo. È difficile affermare d'onde provenisse quel grasso, certo è che esso si presentava in goccie di tutte le grandezze con tendenza a fondersi tra loro.

Un altro esempio lo traggo da un caso di morte per bronchite putrida e gangrena polmonare in un soggetto che era da poco guarito di un tifo addominale, ma ad esso era seguìta una estesa trombosi della vena cava, delle vene iliache e delle vene femorali. Da una vasta piaga da decubito era partita probabilmente l'infezione bronchiale o polmonare che condusse a morte il paziente, e che aveva probabilmente favorita la stessa trombosi estesa a metà del corpo. Avendo esaminato il trombo delle vene iliache ho trovato che gran parte di esso era composto di accumuli di leucociti impigliati in poca fibrina e senza traccia di grasso; invece l'altra metà presentava molti grossi elementi riccamente infiltrati di gocciole di grasso di ogni grandezza, e disposti fra le fibre della fibrina.

Un altro caso si riferisce ad un cancro del fegato con trombosi dell'arteria polmonare. In mezzo ai densi fasci fibrinosi sono moltissimi elementi in cui si vede il nucleo alla periferia, e tutto il protoplasma, largo e sottile come un velo, porta innumerevoli goccie adipose di ogni grandezza. Meno numerose ma dello stesso aspetto sono le cellule grandi ricche di grasso che vidi entro dei trombi dell'arteria polmonare in casi di infarti emorragici del polmone in cardiopatici; però in altri casi i trombi risiedenti nei vasi della parte colpita da infarto possono non presentare alcuna traccia di elementi adiposi.

Fra i casi da me osservati ve n'è uno che si riferisce ad una trombosi della polmonare sviluppatasi in un bambino durante l'assorbimento di una vasta raccolta di essudato sieroso-

purulento della cavità pleurica. Nel trombo èvvi una grande quantità di cellule grandi gremite di grosse e di piccole goccie di grasso. Un caso clinicamente poco chiaro si riferisce ad una endo-miocardite in un soggetto che negli ultimi giorni era stato curato con iniezioni di olio canforato. Si è trovato una trombosi recente delle due arterie Silviane con edema del cervello e leggiero stravaso di sangue sulla corteccia dei corpi striati: eravi versamento sieroso-emorragico nelle cavità pleuriche, trombosi nelle due cavità del cuore, e aree di apparente degenerazione grassa nel miocardio e nei muscoli papillari. Questi avevano l'apice sclerozato, e un generale opacamento era anche nell'endocardio ventricolare; nei reni erano alcuni piccoli infarti recenti necrotici. Si è trovato che i trombi del cuore contenevano moltissimo grasso libero; anche all'apice dei muscoli papillari si trovano cumuli di goccie libere di grasso evidentemente tra gli interstizi delle fibre muscolari. Più verso la base del muscolo papillare il grasso aveva infiltrato completamente le cellule connettive interstiziali; gli endoteli dei vasi capillari, e anche le cellule connettive delle pareti di alcune diramazioni di piccole arterie; infine il grasso si accumulava ai poli del nucleo delle cellule muscolari, ossia nel sarcoplasma, e talora così intensamente da formare un ammasso tondeggiante od ovale composto di fine fittissime gocciole intorno al nucleo, mentre la parte striata non presentava alcuna degenerazione. Il molto grasso ancora libero nel trombo recente del cuore e negli interstizi delle fibre muscolari; l'impregnazione degli endoteli e degli elementi connettivi delle pareti vascolari, e l'accumulo intorno al nucleo dei sarcoblasti risparmiando completamente la parte striata delle cellule cardiache, depone per un fenomeno d'assorbimento e di infiltrazione e non esclude il sospetto che ne fosse causa l'olio canforato iniettato a scopo di cura forse in quantità troppo abbondante. Altri casi importanti ho esaminato di trombosi in soggetti cancerosi sempre colla presenza di molti larghi elementi ricchi di goccie di grasso di ogni grandezza: ma di particolare importanza fu il caso di trombosi parietale della aorta, e completa della succlavia e della omerale con gangrena secca dell'arto corrispondente in un soggetto affetto da cancro ulcerato del retto. Nella letteratura sono conosciuti altri casi di trombosi di grossi vasi arteriosi con esito di gangrena, in soggetti can-

cerosi (1). Il caso da me osservato rivelava un fatto non tanto recente, perchè il trombo parietale dell'aorta era già quasi interamente organizzato, e quello della omerale cominciava esso pure a dare origine alla canalizzazione.

La massa trombotica ancora esistente presentava in alcune sezioni dei cumuli di cellule infiltrate di grasso, e dei blocchi di grasso libero proveniente dallo sfacelo di quelle cellule accanto all'intima. In altri tagli eseguiti attraverso l'arteria e il trombo rispettivo, si vedeva ancora del grasso nel trombo, ma del pari si osservava che esso era penetrato attraverso la tonaca intima e si era depositato negli strati fra la tonaca media e l'intima, assumendo un aspetto nei preparati fissati nel liquido di Marchi, come se si fosse fatta con inchiostro di china un'iniezione dei canalicoli del suco, " (Saftkanälchen) „ (Fig. VI).

In questo caso, come in altri simili, la massa trombotica recente presentava molte cellule fornite di grasso, ed è difficile dire se esse fossero dapprima come tali circolanti nel sangue fino al momento in cui si è fatto il trombo, oppure se nel sangue esistesse libero il grasso, il quale avrebbe poi infiltrato alcuni elementi non ancora necrosati del trombo. Certo è che nel caso presente, essendo il trombo di vecchia data, il grasso rispettivo ha potuto essere assorbito e andò ad infiltrare gli elementi connettivi degli strati più interni della tonaca media.

In vecchi trombi organizzati non ho trovata alcuna traccia di infiltrazione adiposa, e parimenti non ho trovato grasso negli antichi trombi contenuti entro sacchi aneurismatici. I così detti polipi fibrinosi del cuore e dei grossi vasi, sia nel cadavere dei pneumonici, sia in quello di tifosi, non presentavano alcuna traccia di grasso.

Tra i molti casi di deposito di grassi in organi alterati, ne raccolsi qualcuno in cui anche morfologicamente il modo di disporsi del grasso è tale che depone per una semplice infiltrazione nell'antico senso della parola. Così fu di un caso di enorme steatosi degli epiteli nella prostata di un tisico, in cui macroscopicamente non si sarebbe giudicato null'altro che un'atrofia, e che

---

(1) V. Lanceraux, *Traité d'Anatomie pathologique*, Tome I, pag. 608. Paris, 1875. — J. M. Charcot, *Maladies des Poumons et du système vasculaire*, Tome V, 1888, pag. 312.

io ho preparato col metodo Marchi solo perchè desideravo esaminare i trombi che erano nelle sue vene. Trovai in quella prostata che tutto l'epitelio era gremito di goccie di grasso di varia grossezza, così da impedire la distinzione dei nuclei, e da riempire come un ammasso adiposo tutto l'otricolo ghiandolare. Anche le pareti dei piccoli vasi sanguigni intercorrenti fra gli otricoli ghiandolari erano alquanto infiltrate di grasso.

In casi di diabete d'origine pancreatica, ho confermato l'esistenza nel rene di una assai circoscritta infiltrazione grassa (1). Essa era rappresentata da una corona di gocciole adipose di varia grandezza depositata alla estrema periferia delle cellule epiteliali nei canalicoli contorti. Il resto del corpo cellulare e il nucleo rispettivo erano colorabili colla safranina (il pezzo era stato fissato in liquido di Flemming) e sembravano d'aspetto normale. Un deposito di gocciole estremamente fine e più scarse si trovava nelle cellule epiteliali delle vicine anse di Henle, mentre i glomeruli malpighiani e le pareti dei vasi sanguigni apparivano privi di grasso.

L'esame fatto di molti reni normali di coniglio fissati col metodo di Marchi mi aveva dimostrato che nelle cellule epiteliali anche della *cortex corticis* non si trovavano gocciole di grasso, oppure si trovavano molto raramente poche gocciole isolate (2). Da ciò mi era venuta l'idea di provare che cosa avvenisse dell'epitelio renale del coniglio, quando avessi innestato un pezzo di rene nella cavità addominale, o sotto la cute di un altro coniglio o di una cavia, e trovai che estraendo il rene dopo tre o quattro giorni e fissandolo col metodo di Marchi, si trova che l'epitelio dei canalicoli all'estrema periferia presenta spesso un deposito di finissime granulazioni per lo più limitato alla parete esterna (3).

---

(1) von Hansemann, " Virchow's Archiv „, 1897, Bd. 148, S. 355. *Ueber die Fettinfiltration der Nierenepithelien.*

(2) V. Dr A. Cesaris-Demel, *De la rapide apparition de la graisse dans les infarctus renaux,* " Archives Italiennes de Biologie „, tom. XXIV, fasc. III, 1895, Turin.

(3) Ai primi di ottobre del 1903 io ho presentato i risultati di queste mie vecchie ricerche sperimentali, fin allora inedite, al Congresso dei Patologi Italiani in Firenze, i cui atti sono stati pubblicati in un numero apposito dello " Sperimentale „ a Firenze, nel dicembre 1903, anno LVI,

Le gocciole non sono tutte di uguale grandezza, e il reperto ricorda un poco quello suddescritto nei reni da diabete pancreatico.

Il fatto, però, è anche più evidente e più completo, perchè comprende tutta la sezione del canalicolo, e non come nel caso precedente la sola parte periferica, quando si abbia fatto la legatura di un ramo dell'arteria emulgente, provocando così la formazione di un infarto, e lo si esamini dopo tre o quattro giorni. Questo per quanto concerne l'epitelio della *cortex-corticis*, perchè, appena un po' più sotto, l'epitelio di tutti i canalicoli non presenta alcun deposito di gocciole adipose. Ma coll'introduzione assettica di frammenti di rene di coniglio o di cavia, rivestito della sua capsula, nella cavità addominale di una cavia o di un coniglio normale, si ricava un altro inatteso risultato. Il pezzo introdotto può ritrovarsi dopo quattro giorni ancora libero nella piccola pelvi, o lassamente aderente ad un'ansa intestinale, oppure avviluppato nell'omento, e nessuna infiltrazione di elementi si compie negli interstizi dell'organo.

Fissato nel liquido di Marchi, e poi tagliato dopo induramento nell'alcool e colorati i tagli colla ematossilina, si osserva sempre che lungo la rete vascolare e lo scarso connettivo che l'accompagna situato fra i canalicoli della sostanza corticale, si accumulano grosse e piccole goccie di grasso, rispettando l'epitelio dei canalicoli corrispondenti (Fig. I). È una vera infiltrazione interstiziale adiposa, la quale però non oltrepassa di solito lo strato più corticale nella parte esterna dell'organo. Invece dalle papille lungo i vasi tra i canalicoli collettori, salgono del pari delle goccie adipose, e arrivano fino quasi al confine colla sostanza corticale. Spesso innestando un frammento sottile di rene della lunghezza di un centimetro e dello spessore di 2-3 mm. si ottiene

---

fasc. VI, pag. 803. Pochi giorni prima, al Congresso dei Patologi Tedeschi, il Prof. Ribbert comunicava di aver fatto esperimenti, identici a quelli che furono da me indipendentemente eseguiti, traendone quasi identiche conclusioni. Gli Atti del Congresso dei Patologi Tedeschi a Cassel, furono pubblicati più tardi nel 1904, e solo allora io ne ebbi cognizione. Le stesse considerazioni valgono rispetto ad alcune ricerche sperimentali quasi identiche alle mie, fatte da A. Dietrich e pubblicate nel vol. V, fasc. I, 1904 dei lavori del laboratorio di v. Baumgarten (*Wandlungen der lehre von den fettigen Degeneration*).

che la parte corticale sia infiltrata, più i due margini esterni del pezzo e un po' anche la parte che riguarda l'ilo, mentre nello spessore, ossia nella parte media del pezzo innestato non vi ha alcuna penetrazione di grasso. Si direbbe che il pezzo è rimasto avvolto in un'atmosfera adiposa, la quale non lo ha impregnato tutto intero ma solo la corteccia e le due estremità, non oltrepassando questo limite neppure se il pezzo viene lasciato nell'addome anche per 15 giorni. Le goccie di grasso si accumulavano nelle cellule connettive e negli endoteli dei capillari frapposti ai canalicoli e il di cui epitelio poteva ancora essere discretamente conservato così da permettere la colorazione dei nuclei, come mi risulta da un preparato di sezione frontale di un rene di cavia levato dopo 15 giorni dall'addome di un'altra cavia dove era stato introdotto, e poi fissato nel liquido di Flemming. L'infiltrazione grassa non oltrepassa la parte corticale periferica salvo ove decorrono dei rami arteriosi intercanalicolari, che sono accompagnati dall'infiltrazione per un più lungo tratto verso la sostanza midollare. Era evidente per la sede e per la forma del deposito a goccie di ogni grandezza, che si trattava di una infiltrazione di grasso venuto dall'ambiente, e non già della trasformazione in grasso del protoplasma stesso degli elementi; ma a rendere anche più sicura l'interpretazione del fatto ho eseguito degli altri esperimenti consistenti a introdurre nell'addome di una cavia dei frammenti di un dato rene, parte liberi e parte rinchiusi ermeticamente in tubetti di celloidina (1). Riestraendo i pezzi dopo alcuni giorni, si vedeva che il rene introdotto libero nella cavità addominale presentava il solito reperto della parziale infiltrazione grassa corticale o periferica; invece, il rene che era stato rinchiuso nel tubetto di celloidina aveva subìto anch'esso la mortificazione del protoplasma epiteliale, ma non presentava alcuna traccia di infiltrazione adiposa, perchè evidentemente la parete del tubo, se era permeabile per il siero peritoneale, non lo era, però, per il grasso in esso contenuto. Sotto l'azione del succo peritoneale o dei fermenti che esso contiene, aveva luogo la progressiva dissoluzione degli ele-

(1) Vedi Dietrich, l. cit. (*Wandlungen der Lehre u. s. w.*).

menti parenchimatosi, senza alcuna conversione degli albuminoidi in grasso; questo proveniva dal di fuori, ed è solo nei casi in cui il tubo di celloidina non fosse ben chiuso, che anche il pezzetto di rene in esso introdotto poteva presentare del grasso, ma il modo in cui questo si distribuisce in tali casi, rivela già di per sè la sua provenienza. Infatti, un pezzettino di rene venne introdotto in un tubetto di celloidina in modo che la parte corticale del rene posasse sul cul di sacco del tubetto, mentre la sostanza midollare era rivolta all'orificio che non era stato ben chiuso.

Esaminato il pezzo dopo alcuni giorni si è osservato che la parte corticale la quale posava sul fondo del tubetto non presentava alcuna infiltrazione grassa ed era caduta in mortificazione, mentre la parte midollare aveva ricevuto dal pertugio rimasto nel tubetto il grasso che penetrò lungo il connettivo e lungo i vasi interposti ai canalicoli collettori e si depose su tutta la papilla (Fig. V).

L'infiltrazione grassa del pezzo innestato ha luogo assai presto, e il fenomeno non guadagna in estensione lasciando il pezzo più a lungo nell'addome, perchè dopo la prima invasione non ha più luogo altra penetrazione di grasso.

Dopo questi primi risultati ho ripetuto gli esperimenti con altri organi e precisamente con fegato (Fig. II), cuore e milza, ecc., e ottenni sempre gli stessi effetti. Il fegato presentava una ricca infiltrazione grassa interstiziale nelle parti periferiche, mentre erano risparmiate dal grasso le cellule epatiche stesse; altrettanto avveniva nel cuore in cui era evidente l'infiltrazione nel connettivo e nelle pareti dei capillari tra le file di cellule muscolari, le quali non presentavano grasso di sorta. Gli effetti erano presso a poco uguali, sia che il pezzo fosse innestato sotto la cute o nella cavità addominale: in taluni casi l'innesto sottocutaneo sembrava fornisse una infiltrazione più abbondante. I pezzi di controllo rinchiusi in tubetti di celloidina hanno dato sempre lo stesso risultato: cioè la necrosi del tessuto senza alcun intervento del grasso. Avendo tenuto dei pezzi di organi freschi raccolti assetticamente nella soluzione fisiologica di NaCl, in termostato per 24-48 ore, ho veduto io pure la quantità di finissime gocciole adipose che si mettono in evidenza negli elementi pa-

renchimatosi (1), ma questo fenomeno evidentemente non ha nulla a che fare coi risultati da me ottenuti.

Dopo questa serie d'esperimenti ho ricercato se si sarebbero ottenuti gli stessi risultati, alterando prima in qualche modo gli organi che volevo poi introdurre nel cavo peritoneale o sottocute di altri animali. A tale scopo, ho prodotto nel rene un infarto necrotico colla legatura di un ramo dell'arteria emulgente, e dopo tre giorni l'ho fissato col metodo di Marchi. Ho potuto confermare ciò che fu già descritto da Israel; e più di recente da Fischler (" Centralblatt f. Path. Anat. ", u. s. w., 1902, S. 417), che la parte morta non presenta traccia di grasso, il quale invece si trova tutto intorno nelle parti limitrofe, ove si ha un disturbo della circolazione, ma gli elementi non sono ancora mortificati, e nel parenchima non compreso nell'infarto non vi è traccia alcuna d'infiltrazione grassa. Allora ho innestato nell'addome e sotto cute di un coniglio un frammento dell'infarto renale comprendendovi un tratto del parenchima normale circostante, e dopo tre giorni estratto il frammento innestato e trattato al solito modo ho trovato che il contenuto in grasso e la distribuzione dello stesso nell'area dell'infarto non era sensibilmente modificata; invece, il parenchima circostante aveva subìto quella solita infiltrazione grassa che si ottiene coll'innesto di frammenti d'organi normali. Ho già notato più sopra che nel territorio dell'infarto si scorge l'accumulo di numerose fittissime goccioline adipose negli epiteli della *cortex-corticis*; ebbene anche questi non mutano d'aspetto anche dopo tre giorni d'introduzione del pezzo nella cavità addominale (Fig. III, IV).

Avendo da mie precedenti ricerche ottenuta la produzione di una tipica circoscritta infiammazione interstiziale del rene di coniglio, introducendo in esso direttamente per infizione il bacillo di Friedländer (2), ho ripetuto con sempre uguale risultato

(1) Hauser G., " Arch. f. exper. Pathol. ", Bd. XX, p. 162. V. Kotsowsky, " Archives des Sciences biologiques publiées par l'Institut Impérial de Médecine expérimentale à St-Pétersbourg ", 1902. — A. Dietrich, *Die an aseptisch aufbewahrten Organen auftretenden morfologischen veränderungen in ihren Beziehungen zur Antolise.* " Verh. d. deutsch. path. Gesellsch. ", VI Tagung. Kassel, 1903.

(2) Vedi: Pio Foà, *Sulla infiammazione interstiziale,* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 1896-97.

gli antichi miei esperimenti e ottenni dopo tre o quattro giorni la presenza di un focolaio flogistico. Allora ho introdotto il frammento di rene contenente l'area flogistica nella cavità addominale di altro coniglio, e dopo il solito trattamento, ho veduto che l'area flogistica presentava molte e minute goccie d'infiltrazione nelle cellule dell'essudato, ma tutto intorno si trovava una abbondante infiltrazione di grasso, il quale non si era fermato alla corteccia, come nei frammenti di rene normale, ma si era copiosamente diffuso per tutto l'organo accumulandosi negli endoteli vasali e nelle cellule del connettivo interstiziale.

A queste due ho aggiunto altre esperienze, sempre nell'idea di modificare l'organo così da variare eventualmente il risultato che si ottiene dalla rispettiva introduzione nel cavo addominale. In un coniglio ho legato temporaneamente per un'ora e mezza l'arteria emulgente, e poi, slegata l'arteria, ho chiuso la ferita, ed estirpai il rene dopo 10-12 ore. L'esame dell'organo estirpato, fatto col solito metodo, non mi ha rivelato la presenza di grasso, e l'esame dello stesso organo dopo che un frammento era stato introdotto per quattro giorni nella cavità addominale ha dimostrato la solita infiltrazione grassa corticale senza alcuna apparente differenza dal rene normale. Parimenti ho cercato di alterare il parenchima renale. con alcune iniezioni endovenose di 0,1 gr. di bicarbonato di potassio, e ottenni solo uno stato debolissimo di irritazione rilevato dalla presenza dopo tre-quattro giorni di qualche figura cariocinetica nell'epitelio dei canalicoli contorti. I frammenti di questi reni introdotti nella cavità addominale ed esaminati dopo tre giorni col solito metodo non mi hanno dato risultati sensibilmente diversi da quelli ottenuti col rene normale.

Finalmente ho introdotto sotto cute o nella cavità addominale dei frammenti di coaguli freschi ottenuti dal sangue di animali normali, e dopo il solito trattamento ebbi ad osservare solo la presenza di qualche rara gocciola nei pochi leucociti impigliati nel coagulo.

Volendo ora dal complesso delle osservazioni trarre qualche conclusione, apparisce evidente che si tratti di fenomeni di pura infiltrazione adiposa i quali non avvengono in quelle parti in cui gli elementi sieno completamente mortificati. Il deposito ha luogo quasi esclusivamente nei connettivi e negli endoteli vasali, pro-

babilmente perchè la vitalità di questi ultimi è superiore a quella dei rispettivi elementi parenchimatosi, i quali presto cadono in necrosi. Forse è dovuto ad una maggiore vitalità dell' epitelio nella *cortex-corticis* del rene, il fatto che esso è il solo elemento parenchimatoso che presentasse talvolta una infiltrazione adiposa nei nostri esperimenti.

L'introduzione nell'organismo di un pezzo morto, come è l'infarto necrotico del rene, non attrae il grasso, il quale, invece, infiltra il vicino parenchima ancora vivente; così intorno ad un focolaio flogistico le alterazioni circolatorie possono favorire in più larga estensione l'infiltrazione adiposa. Trattasi forse di un fenomeno vitale di attrazione del grasso da parte degli elementi connettivi ed endoteliali? Trattasi di un fenomeno che analogamente ad altri consimili si potrebbe denominare: adipotassi? O basterebbe affermare che in elementi i quali per l'ambiente in cui furono collocati ebbero a trovarsi in istato di minore vitalità, mutano così le condizioni fisiche da agevolare in essi la penetrazione del grasso? Oppure devesi ammettere che sieno penetrati nel pezzo innestato i componenti dell'adipe neutro, i quali furono per sintesi congiunti da un fermento nelle cellule connettive ed endoteliali tutt'ora viventi? (Ribbert, " Verhand. der Deutschen Pathol. Gesellschaft „, Sechste Tagung, 1903. — Hagemeister F., *Beitrag zur Kenntnis des Fettdegeneration,* " Virchow's Arch. „, Bd. 172, 1903, S. 331. — Hester, *Fettspaltung und Fettauftan im Gewebe,* " Virchow's Archiv „, Bd. 164, pag. 293). Le idee prevalenti sulla origine della polisarcia, che è un fenomeno di generale infiltrazione grassa dei connettivi e che si attribuisce a minore vitalità degli elementi, avrebbero esse trovato una conferma nelle parziali esperienze d' infiltrazione grassa, che ho più sopra descritto?

Ritornando ai reperti anatomici riguardanti i trombi, le pareti vascolari e lo stato di alcuni organi, mi sembra evidente che il grasso ritrovato fosse in essi penetrato dal di fuori. In verità nei trombi trovati in caso di assorbimento di essudati, o di materiale proveniente da cancri ulcerati, sembra potersi ammettere che gli elementi forniti di grasso possano essere stati come tali trasportati nel sangue, ma ove si trovasse in un trombo del sangue contenente grasso e degli endoteli staccati non ancora mortificati, è lecito ammettere che in questi possa essere

penetrato il grasso libero circostante nello stesso modo che avviene negli endoteli vasali dei pezzi introdotti sotto cute o nell'addome, o come avvenne negli elementi connettivi della parete vascolare nel caso suddescritto di trombosi dell'arteria omerale in un soggetto canceroso. Il coagulo innestato non poteva dare risultato positivo, perchè i pochi elementi che contiene sono già morti, e non vi erano endoteli ancora viventi, mescolati al sangue che fu estratto per salasso dall'animale vivente.

Se circostanze morbose diminuiscono la vitalità degli elementi parenchimatosi senza ucciderli, è lecito supporre che anche in essi possa più facilmente penetrare dal di fuori il grasso o i suoi componenti, come sembra potersi interpretare nel caso suddescritto di infiltrazione grassa negli epiteli renali di diabetici, limitati allo strato più periferico del protoplasma e presentantesi come un accumulo di gocciole di varia grossezza simile nell'aspetto a quello che si ottiene negli epiteli della *cortex-corticis* per introduzione di un frammento di rene nella cavità addominale o sotto la cute di un animale.

Queste ricerche non possono avere la pretesa di decidere la questione generale se la così detta degenerazione grassa non sia essa pure che una semplice infiltrazione (1); esse rivelano solo alcune circostanze le quali favoriscono il depositarsi del grasso in taluni elementi cellulari, ossia, per usare un'opportuna espressione di Ribbert, circostanze che favoriscono una *patologica deposizione di grasso* in alcuni tessuti.

---

(1) La bibliografia ricchissima di questa particolare questione, si può trovare facilmente in molte opere recenti. Segnalo fra i lavori italiani quelli del Dott. Ernesto Cavazza, " Policlinico „, vol. IX, 1902 (del Laboratorio del Prof. A. Bignami), e quello del Dott. Traina, *Ueber das Verhalten des Fettes u. s. w.*, " Ziegler's Beiträge „, Bd. 35, 1904. Vedi anche A. Dietrich, l. c., pag. 9; Herxheimer G., *Ueber Fettinfiltration und Degeneration*, " Lub. Oestert. Ergebn. d. Allg. Path. „, VIII Jahrg., 1902. Wiesbaden, 1904.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. I. — Rene di cavia dopo 4 giorni di permanenza nella cavità addominale della cavia (infiltrazione intercanalicolare).

„ II. — Fegato di cavia dopo 8 giorni di permanenza nella cavità addominale della cavia.

„ III. — *a)* Infarto necrotico da legatura di un ramo dell'arteria renale, dopo 3 giorni - *b)* parenchima renale limitrofo all'infarto.

„ IV. — Il rene precedente dopo 4 giorni di permanenza nella cavità addominale di una cavia. *a)* Parte necrotica immutata - *b)* Parte normale colla infiltrazione grassa come nella figura I.

„ V. — Rene di cavia introdotto nella cavità addominale di una cavia entro un tubetto di celloidina non perfettamente chiuso. *a)* Parte del rene verso il fondo del tubetto in istato di mortificazione completa e senza grasso - *b)* Papilla del rene rivolta verso l'apertura accidentale del tubetto, in cui è penetrato il grasso.

„ VI. — Assorbimento di grasso contenuto nel trombo *a)* tra la tonaca media e la intima *(b)* dell'arteria omerale.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

Fig. 1

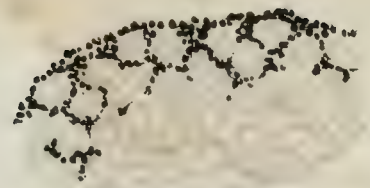


Fig. 2

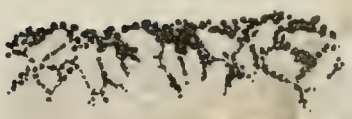


Fig. 3

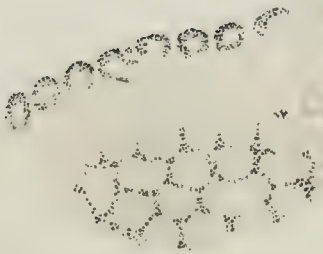


Fig. 4

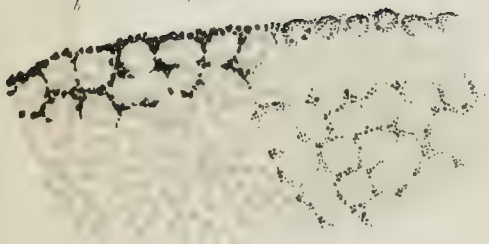


Fig. 5

Fig. 6

Lit. Salussolia, Torino

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 27 Novembre 1904.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero. Direttore della Classe, Rossi, Manno, Graf, Cipolla, Carutti, Pizzi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Brusa, Allievo e Chironi.

Il Presidente saluta i Soci ed augura loro felice l'anno accademico. Quindi il Segretario dà lettura dell'atto verbale dell'adunanza 26 giugno 1904, che è approvato.

Sono fatte dal Presidente le seguenti comunicazioni:

1° dei telegrammi inviati ai Sovrani ed alla Regina Madre in occasione della nascita del Principe di Piemonte e delle risposte avute;

2° della lettera del Ministero dell'Istruzione pubblica dell'Impero Germanico, accompagnante il dono d'una targhetta in bronzo coniata pel secondo centenario di fondazione dell'Accademia delle scienze di Berlino;

3° delle lettere con cui i signori Alessandro Baudi di Vesme e Carlo Frati accettano di far parte della Commissione per la riproduzione fototipica del *Messale Rosselli.*

A proposito di questa riproduzione, il Socio Cipolla rende conto di quanto la Commissione ha fatto sino ad oggi e presenta due facciate del manoscritto, riprodotte accuratamente dall'ing. Molfese.

Il Presidente partecipa con parole di rimpianto i decessi dei due Soci stranieri prof. Otto von Böhtlingk dell'Università di Lipsia ed Enrico Wallon, segretario perpetuo, nell'Istituto di Francia, dell' " Académie des inscriptions et belles lettres ". Comunica pure d'aver appreso recentemente dai giornali la morte del Socio corrispondente Luigi Palma di Cesnola.

Il Direttore della Classe Socio Ferrero fa omaggio d'un volume del Socio corrispondente Don Manuel R. Berlanga, *Catálogo del Museo de los excellentisimos Señores Marqueses de Casa Loring,* Málaga, 1904, rilevandone il valore per le ricerche archeologiche.

Il Socio Pizzi presenta con parole d'encomio il *Saggio di versione metrica dal Mahâbhârata* di Attilio Levi, Torino, 1904.

Dalla Presidenza sono presentati l'opuscolo del Socio corrispondente G. Dalla Vedova, *La Società geografica italiana e l'opera sua nel secolo XIX,* Roma, 1904 ed il suntuoso volume di *Annali bibliografici delle edizioni Barbèra,* Firenze, 1904, mandato in omaggio all'Accademia da quella benemerita Casa in occasione del cinquantesimo anniversario della sua fondazione.

Per la inserzione nelle *Memorie* il Socio Graf presenta uno scritto del Socio corrispondente Wendelin Foerster, *Sulla quistione dell'autenticità dei codici d'Arborea.* Il Presidente designa a riferirne in una prossima adunanza i Soci Graf e Cipolla.

Sono presentate per gli *Atti*:

1° dal Socio De Sanctis la sua commemorazione di Teodoro Mommsen;

2° dal Socio Renier lo scritto del Socio corrispondente Giuseppe Biadego, *Una falsa iscrizione intorno all'anfiteatro di Verona*;

3° pure dal Socio Renier una nota del Dr. Bernardo Sanvisenti, *Un giudizio nuovo su Cristóval de Castillejo ne' suoi rapporti coll'italianismo spagnuolo.*

LETTURE

TEODORO MOMMSEN

Commemorazione letta dal Socio GAETANO DE SANCTIS.

" Il maestro è l'uomo. In null'altro si manifestano più nettamente le buone e cattive caratteristiche della personalità scientifica di uno che nella sua efficacia sugli scolari „. Così scrive con ragione Otto Seeck. Per questo, dopo aver discorso altrove della vita e dell'opera scientifica di Teodoro Mommsen (1), non sarà discaro ai colleghi se, invece di ripetermi o di andare in traccia di aneddoti più o meno autentici e più o meno interessanti sull'illustre storico di Roma, mi contenterò in questa breve commemorazione di dar notizia dell' opera di lui come insegnante (2).

Il Mommsen cominciò il suo insegnamento universitario nel 1848 a Lipsia come professore straordinario di diritto romano. Destituito per ragioni politiche, accettò di buon grado nel 1852 un invito ad insegnare nella facoltà giuridica di Zurigo. E qui rimase egli alcuni anni, insegnando e scrivendo nella libera Svizzera la storia dell'antica libertà romana. Tornò in Germania aderendo nel 1854 ad un invito della facoltà giuridica di Breslavia. Dopo pochi anni si stabilì a Berlino prima semplicemente come membro dell'Accademia delle scienze, per meglio attendere alla direzione della raccolta delle iscrizioni latine a lui affidate dall'Accademia, ma poco dopo anche come titolare della cattedra di storia antica nella facoltà filosofica di quella università: cattedra che oggi, dopo il compianto Ulrico Köhler, occupa nuo-

(1) " Riv. di Filologia „, XXXII (1904), p. 207 segg.

(2) Pel rimanente ricorderò soltanto che nacque a Garding (Schleswig) il 30 novembre 1817 e morì il 1° novembre 1903 e che della nostra Accademia fece parte in qualità di Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche dal 3 gennaio 1861.

vamente uno dei maggiori tra i viventi storici dell'antichità, Edoardo Meyer.

Il Mommsen come insegnante è stato giudicato variamente (1). Non aveva un gesto misurato ed elegante; la sua voce era chiara, ma acuta e sottile. Aveva gli occhi vivi e penetranti, la fronte spaziosa, il volto mobile ed arguto. Chiunque l'ha visto o chi ha visto anche soltanto il busto parlante che di lui scolpì il Lobach (2) sa che il suo non era aspetto di uomo volgare: ma certo non era neppure un aspetto molto regolare e simpatico: nè la sua voce sottile conosceva le inflessioni che cercano il cuore dell'uditore. Veniva egli sempre accuratamente preparato alle lezioni e fornito di quegli appunti che i professori esitano a sciorinare soltanto in quelle università dove, più che gli uomini di studio, sono apprezzati i virtuosi della chiacchiera. Ma non aveva troppo facile la parola nè troppo felice la memoria in fatto di nomi e di date; e più che del periodo rotondo si curava della espressione esatta del pensiero. Onde non gli faceva difficoltà di riprendersi se questo gli pareva men bene espresso, cercando innanzi agli scolari una espressione più precisa, nè di consultare i suoi appunti per fornire una data esatta al posto di un'approssimazione suggeritagli dalla memoria.

Le sue lezioni al pari de' suoi scritti erano limpide e prive affatto di quella oscurità che agli occhi degl'ignoranti passa per profondità. Pochi che hanno scritto sistematicamente di diritto son riusciti così chiari come il Mommsen nel *Diritto pubblico romano* e nel *Diritto penale*. La natura però non gli aveva fornito doti di brillante conferenziere, e, non avendo avuto la tentazione di tenere conferenze in luogo di lezioni, ha potuto appunto perciò essere un insegnante universitario efficace: efficace, s'intende, non per i curiosi e i dilettanti, che cercano un po' di coltura generale da spacciare nelle conversazioni, nei giornali quotidiani o nei libri per gli editori popolari. Il Mommsen non sapeva

(1) Le notizie di fatto sono attinte in massima parte agli scritti di due scolari del Mommsen, Fritz Jonas, " Deutsche Rundschau „, 93 (1897), p. 399 segg., e Otto Seeck, ibid. 118 (1904), p. 75 segg.

(2) Riprodotto nei " Beiträge zur alten Geschichte „, IV (1904), p. I e VI. Ivi è anche un'eccellente riproduzione d'una riuscitissima statuetta dello stesso scultore rappresentante il Mommsen che legge.

scendere al livello di questo genere di pubblico, perchè credeva che il fine dell'insegnamento universitario fosse più alto; e quindi le sue aule non erano frequentate da quella folla che ingombra spesso le aule dei professori che dell'ufficio loro hanno un concetto meno elevato e meno severo. Ed era anche troppo severo il Mommsen per concedere qualche cosa alla preparazione manchevole della scuola secondaria. Le sue lezioni erano per gli scolari quali debbono essere, non quali spesso sono nella realtà; e così i mediocri le disertavano non di rado andando in traccia di pane meglio adatto pei loro denti. Ma gl'intelligenti e gli studiosi rimanevano e provavano pel maestro una venerazione quasi religiosa.

Questo sentimento non è sempre favorevole allo stabilirsi tra maestri e scolari di quella confidenza che è indispensabile allo scambio delle idee e però alla efficacia dell'insegnamento. Sia pure il professore uno scienziato di prim'ordine, se gli scolari si sentono, a torto o a ragione, distanti da lui, schiacciati dalla sua superiorità, l'insegnamento non può riuscire proficuo. Ma a ravvicinare il maestro a quegli scolari che intendevano occuparsi seriamente di studî storici serviva al Mommsen il suo " seminario „. Il metodo che nelle esercitazioni del suo seminario adoperava il Mommsen è suppergiù quello stesso che si usa in generale in Germania. Il giovane svolgeva per iscritto il tema scelto da lui stesso o assegnatogli dal maestro, nel caso che spontaneamente ne avesse fatto richiesta. La dissertazione veniva passata ad un altro studente che presentava pure per iscritto le proprie osservazioni in proposito. Il maestro si riservava un paio di giorni per esaminare gli scritti del disserente e dell'opponente. Poi nel seminario prendeva la parola egli stesso. Riassumeva la questione e discuteva le idee d'ambedue i giovani non senza una certa dose di causticità e non senza colpire con qualche frizzo i difetti e gli errori dei due lavori: e poi indicava quali conclusioni ricavava in proposito egli stesso dai dati delle fonti. Era libero del pari al disserente ed all'opponente ed a tutti gl'iscritti nel seminario di prendere la parola nella discussione.

In queste discussioni il Mommsen era spietato soltanto quando giudicava gli errori o le mancanze dei lavori dovute a doca serietà o a poca coscienza. E vi erano scolari che, colpiti

in pieno petto dalla sua severità di scienziato che perdona poco agli altri perchè perdona poco a sè, lasciavano senz'altro, dopo una di queste prove, il suo seminario. Ma quando non riscontrava difetti di coscienza o di buona volontà, correggeva sì severamente e spesso sarcasticamente, ma non in modo da far disperare il paziente. Ciò a cui mirava era d'insegnare il rispetto alla verità ed alla scienza. Inesattezze di citazioni, manchevole esame delle fonti, sintesi avventate: tutto ciò il Mommsen colpiva inesorabilmente. E voleva che gli scolari imparassero a tener conto di qualsiasi minuzia risultante dalle fonti e si persuadessero che lo storico non deve trascurar nulla e che le sintesi tentate senza serietà di preparazione e senza piena conoscenza del materiale non sono che ciarlatanerie.

Lo scrittore tedesco da cui attingo queste notizie si rallegra che le esercitazioni pratiche dirette dai professori nei loro seminarî siano in Germania libere da qualsiasi regolamento governativo; cosicchè ad ogni professore è dato ordinarle secondo i proprî criterî. In Italia purtroppo non è così. Abbiamo sì le scuole di magistero che corrispondono, sia pur lontanamente, ai seminarî tedeschi. Ma le prescrizioni regolamentari inceppano la libera iniziativa dell'insegnante e, imponendo un indirizzo esclusivamente didattico, privano per tre quarti almeno quelle scuole della utilità che potrebbero avere ove l'indirizzo scientifico si contemperasse con quello didattico. Quindi l'azione che un professore, non entusiasta a dir vero dell'insegnamento, ma coscienzioso com'era il Mommsen, poteva esercitare sul giovane nel suo seminario era di gran lunga superiore a quella che col massimo zelo può esercitarsi nella scuola di magistero.

Ma non era soltanto il seminario che serviva a stabilire rapporti amichevoli e a dar luogo a scambio d'idee tra il Mommsen e i suoi studenti. I discepoli che frequentavano il seminario invitavano qualche volta il maestro a quei ritrovi gioviali comuni tra gli studenti germanici, in cui si alternano *inter pocula* coi motti allegri i discorsi più serî e il canto dei *Lieder* tedeschi.

Il Mommsen non credeva menomare la sua dignità accettando gl'inviti, amava anzi questi ritrovi, e là, spogliata ogni pedanteria, faceva sfoggio della sua svariata coltura e della originalità de' suoi giudizî. Or certo questo modo d'affratellarsi con gli studenti non è adatto ai costumi nostri, nè sarei io dav-

vero a raccomandarlo ai professori italiani. È però a dolere che parte il regolamento, parte il costume, parte le reciproche suscettibilità rendano in Italia, almeno nelle facoltà filologiche, tanto raro un vero affiatamento tra professori e studenti e tanto difficile quindi al professore di formarsi una scuola. Un gran numero di scolari ha invece avuto il Mommsen, che hanno appreso dal maestro il rigore del metodo, l'esattezza e l'amore inconcusso della verità. E con essi il maestro è rimasto in rapporti cordiali aiutandoli nei loro studî ed incoraggiandoli anche dopo usciti dall'università e riscuotendo in cambio da loro affetto e devozione senza limiti. E così anche dopo la morte dell'illustre Storico, l'opera sua, diretta al progresso della scienza, si perpetua non solo per l'efficacia che continueranno ad avere i suoi libri, ma anche per mezzo degli scolari, tedeschi e italiani, da lui addestrati al lavoro scientifico.

Una falsa iscrizione intorno all'Anfiteatro di Verona.

Nota di GIUSEPPE BIÀDEGO, socio corrispondente.

Leandro Alberti, parlando di Verona, scrive: " Ecci etiandio quivi il grand'Amphitheatro molto antico (da 'l uolgo Harenna nominato) da L. V. Flaminio fabricato secondo una tavola di marmo ritrovata nella Chiesa di S. Fridiano di Lucca con tal' inscrittione: L. V. Flaminius Roman. Cons. ac Vniuersae Graeciae Domitor, Amphitheatrum Verone propriis Sumptibus Erexit Anno AB Vrbe Condita DIII „ (1). Si noti che il libro dell'Alberti vide la luce, la prima volta, nel 1550 e quindi in cotesto anno fu fatta conoscere al pubblico la detta iscrizione. La ripubblicò dieci anni dopo il Caroto (2). Ad essa accenna una deliberazione consigliare del 1568, relativa ai ristauri dell'Anfiteatro. " Amphitheatrum nostrum quod Arena nuncupatur, spectaculis et ludis publicis destinatum *a Quinto Flaminio Romano Proconsule, ut ferunt, seu potius a Republica Veronensi conditum* „ (3). Già nel cinquecento la fede nella veridicità della scoperta cominciava a vacillare.

Dei molti che trattarono criticamente dell'Anfiteatro veronese, parecchi mostrano di conoscerla: Scipione Maffei, che la chiama " quella tanto scioccamente finta Inscrizione „ (4); Alessandro Carli, che nota che fu sempre tenuta " in conto di un'impostura „ (5); Bartolomeo Giuliari, che rileva che " essa à tutti

(1) L. Alberti, *Descrittione di tutta Italia.* Bologna, MDL, c. 413*r*.

(2) G. Caroto, *De la antiqità de Verona.* Verona, MDLX, c. 33*v*.

(3) Ant. Arch. Ver. Archivio del Comune. Atti dei Consigli, vol. MM, c. 195. Deliberazione 25 maggio 1568.

(4) S. Maffei, *Degli anfiteatri e specialmente del Veronese, libri due.* Verona, 1728, p. 126.

(5) A. Carli, *Dell'Anfiteatro di Verona, ragionamento critico.* Verona, 1785, pag. 2.

i caratteri della falsità „ (1); Saverio Dalla Rosa, che non ne tien conto perchè " da esperti critici è rifiutata e riconosciuta non legittima „ (2). Il Mommsen la relegò fra le false (3). Fa eccezione soltanto uno scrittore recente, che, dopo averla riferita, soggiunge: " Se questa lapide esistesse veramente, non ci sarebbe più questione „ (4), come se il solo fatto della sua esistenza potesse esser prova assoluta, indiscussa della sua genuinità.

Premesso questo, è interessante sapere come l'iscrizione lucchese fosse nota molto tempo prima che l'Alberti la facesse pubblica. Il conte Lodovico Nogarola scriveva da Verona, il 15 febbraio 1526, al marchese di Mantova Federigo Gonzaga questa lettera esistente nell'Archivio di Stato di Mantova e ch'io devo alla cortesia del direttore di quell'Archivio, Cav. Alessandro Luzio:

Ill^me^ ac Invictissime Marchio etc.

Se l'osservantia, et affetione, che universalmente io porto a tutta la Illma casa Gonzaga, et in particular a vostra Eccll.^tia^, io havessi saputo in altra manera dimostrare, che con il darvi molestia con le mie mal accomodate littere, certamente non l'haverei pretermissa, ma non essendomene di altra sovvenuto, a questa come più comune, e sicura, al presente sono ricorso, e certo non senza caggione, imperocchè nelli passati giorni ritrovandomi in Mantova, alla tavola di vostra Eccll.^tia^, fui dimandato dal Sor Costanzo chi fosse stato il Conditore dello Amphitheatro Veronese, io li dissi come da un frate canonico di Santo Agustino io haveva inteso, nella cità di Lucha nella chiesa di santo Frediano, ritrovarsi una tavola antica di pietra, nella quale di tal conditore si facea mentione, nomato L. Q. Flaminio, vostra Eccll.^tia^ allhora dimandò, se fosse gran numero di parole che tal memoria esplicasse, io le risposi esser poche, per laqualcosa giunto a Verona, e sovvenutomi della dimanda di vostra Eccll.^tia^, mi è paruto di tal memoria farla partecipe, acciochè quella conosca, benchè in picciol cosa, la prontezza del animo mio a farli sempre cosa grata, vostra Eccll.^tia^ adunque accetterà l'infrascritta memoria con benegno animo, e degnerassi alcuna

(1) B. Giuliari, *Riflessioni intorno ad una lettera dell'ab. Giuseppe Venturi concernente l'Anfiteatro di Verona.* Verona, 1817, p. 25.

(2) S. Dalla Rosa, *Della origine dell'Anfiteatro di Verona.* Verona, 1821, pag. 23.

(3) *Corpus*, XI, 201.

(4) G. Rogger, *Memoria storica dei principali spettacoli ch' ebbero luogo nell'Anfiteatro l'Arena.* Verona, 1873, p. 4.

fiata ricordarsi, come li sono servitor deditissimo, il quale per infinite volte se le raccomanda, et humilmente le bascia le mani. Da Verona alli xv di febraro MDXXVI.

D. V. Ill.ma S.

Servo deditissimo Ludovico Nogarola Conte.

In civitate Lucensi in Eclesia divi Frediani
L. Q. Flaminius roman. cons. ac universe
Grecie domitor, Amphitheatrum Verone
Sumptibus propriis a fundamentis erexit
Anno ab Urbe Condita
DIII

Allo Ill.mo et Eccll.mo Signor
Federico Gonzaga marchese
di Mantova Digni.mo et
Patron mio singular.mo.

Il conte Lodovico Nogarola, il quale mostrava di prestar fede all'iscrizione lucchese, che fissava persino l'anno di fondazione dell'Anfiteatro di Verona, non era uomo volgare. Studiò a Bologna e a Padova sotto il Pomponazzi e il Bagolino. Avea familiari, oltre le classiche, molte lingue moderne. Tradusse da Platone, da Plutarco e da altri; prese parte al Concilio di Trento, ove recitò un'orazione. Lasciò moltissimi scritti inediti (1). Lodovico Nogarola meriterebbe uno studio particolare. Un tentativo fu fatto da Ettore Galli col suo opuscolo: *Un cattolico imperialista del secolo XVI* (2), nel quale però si limita a studiare alcuni versi di carattere politico religioso del Nogarola, grande ammiratore di Carlo V e poi di Filippo II, che per lui erano i veri ideali del principe. Ma bisognerebbe ricostruirne la vita e rintracciarne e studiarne tutti i lavori editi e inediti.

Ettore Galli mette l'anno di nascita al 1507 appoggiandosi ad un sonetto del Nogarola del 1557, che ha questi due versi:

Rivolto ha il sole il quinquagesimo anno
D'onde ho cangiato il pel criso e costume.

In altre parole, secondo l'interpretazione del Galli: ho cinquant'anni, per cui ho cangiato pelo e costume. Io credo invece che l'interpretazione deva esser diversa, cioè: son passati i cin-

(1) Maffei, *Ver. Ill.* Milano, 1825, III, 311-17.
(2) Pavia, 1877.

quant'anni (e, par voglia dire, da un pezzo) e perciò ho cangiato pelo e costume. Ma lasciando da parte i due versi in questione, è sicuro che se il Galli avesse letto l'orazione funebre recitata da Valerio Palermo, nel 1559, in onore di Lodovico Nogarola, non avrebbe detto che questi nacque nel 1507. Il Palermo ricorda che il Nogarola adolescente si recò a studiare presso l'Ateneo Padovano; ma essendo sorto *magnum et periculosum bellum inter Caesarem Venetosque, illi in patriam redire necesse fuit* (1). Il Nogarola recossi a Padova quando tutto era quieto; ma subito dopo per la guerra tra Venezia e Massimiliano, quindi nel 1509, fu richiamato a casa. A due anni, per quanto precoce d'ingegno, il Nogarola non si sarà certo recato agli studî universitarî; per cui è evidente che la nascita bisogna portarla addietro di parecchi anni. Ma v'ha di più. Il Palermo, quando viene a parlare degli ultimi anni del Nogarola ha queste frasi: *ingravescente aetate, aetatis iniuriam, senectutis cariem* (2). Ora potevasi discorrere di età molesta, acciaccosa, di vecchiezza a 52 anni? Chè tanti ne avrebbe avuto il Nogarola alla sua morte, se fosse nato veramente nel 1507.

Lodovico Nogarola nacque in fine del secolo decimoquinto. La famiglia abitava nella contrada di S. Zenone oratore. Un'anagrafe del 1545 gli assegna 54 anni; 65, una del 1555; e 67, un'altra del 1557 (3). L'anno di nascita bisogna porlo quindi nel 1490 o nel 1491. Alla sua morte, nel 1559, aveva 69 anni.

Mi sono indugiato su questa particolarità della nascita, perchè essa ha riferimento alla lettera sopra pubblicata. Valerio Palermo narra che il Nogarola, compiuti gli studî (da Bologna, ristabilita la quiete della pace, erasi restituito alla Università di Padova), era tornato a Verona, ove gli amici e i suoi concittadini lo attendevano. " Ibi (prosegue il lodatore) iam totum abdere se in studia cogitabat, cum e vestigio ab Hercule Gonzaga Cardinale amplissimo, Mantuam arcessitus est, ut illius

(1) [V. Palermo], *Orationes duae simulque pastorale carmen quibus funera trium fratrum Nogarolarum Comitum Veronensium deflentur.* Venetiis, MDLXIIII, p. 21. Il discorso in lode di Lodovico è intitolato: *Oratio in funere Ludovici Nogarolae comitis habita Veronae MDLIX.*

(2) V. Palermo, *Orationes duae*, etc., pp. 29 e 31.

(3) *Ant. Arch. Ver.* Arch. del Comune. Anagrafi. San Zeno in Oratorio.

studiorum socius et adiutor esset. Apud hunc ita se magnifice gessit et animi sui, tum magnitudinem, tum doctrinam declaravit, ut ex ijs omnibus muneribus, in quibus antistes ille eius opera est usus, egregiam semper laudem sit consecutus. Erat in omnes praecipua quadam humanitate praeditus a nullo honesti officii genere abhorrens; simplex eius animus, quique simulandi artem vehementer oderat; nec minus etiam beneficus et liberalis. Ex quo profecto illud audeo dicere, nihil ei defuisse, quod ad comparanda hominum studia ac voluntates, desideratur „ (1).

Dalla lettera su riferita emerge chiaramente che nel 1526 il Nogarola o s'era appena staccato, o, più probabilmente (quantunque scrivesse da Verona), era ancora a Mantova presso il cardinale Ercole Gonzaga; v'era, circondato da tanta stima, come apparisce dalle parole appositamente trascritte del Palermo, che non è possibile supporre che non avesse ancora vent'anni, anche senza riflettere che difficilmente a diciannove anni poteva aver già compiuto gli studi universitari. Nel 1526 il Nogarola aveva trentacinque anni; e non è ardita congettura il dire che da più anni trovavasi alla Corte dei Gonzaga.

Uomo di acuto ingegno e di molta dottrina, era tutto dedito alle speculazioni teologiche e filosofiche; ma non aveva inclinazione e forse nemmeno attitudini alla disamina storica, alla critica dei documenti, il cui studio iniziavasi appena allora. Il Nogarola era un discepolo, un erede della cultura, della dottrina umanistica che aveva trionfato per tutto il quattrocento. L'iscrizione che si disse trovata nella chiesa di S. Frediano di Lucca, è certamente una falsificazione umanistica, come ce ne furono tante in quel secolo. A Verona son note le iscrizioni romane dei Bagni di Caldiero senza dubbio false e tra le false registrate dal Mommsen. L'antichità classica risorta dovea tutto spiegare e celebrare, e di tutto dar notizia; e quando i documenti facevano difetto, si fabbricavano con facilità. Com'era possibile non sapere quando fu eretto e da chi l'Anfiteatro Veronese, una così grandiosa e solenne testimonianza dell'antica civiltà italica?

Francesco Corna da Soncino nella sua cronachetta e descrizione di Verona, in ottava rima, compilata nel 1477 (come leg-

(1) V. Palermo, *Orationes duae*, etc., pp. 22-23.

gesi nell'ultima stanza), descrivendo largamente l'Anfiteatro, ha questi due versi:

De questo non si trova l'architeto
chi 'l fabricasse nè chi 'l mandò ad effetto!

E più innanzi, ritornando sull'origine del monumento e volendo riferire le voci che correvano, e dire più chiaramente la sua opinione, ha queste tre stanze:

Alchuni dice che un consol romano
el qual era bandito de sua terra
si venne ad habitar in questo piano
et tra 'l monte e 'l fiume fece serra;
da poi per gran discordia che gli aviano
se mosse li romani a fargli guerra:
questi dice che havendo lui vinto
sì li constrinse a far sto lambarinto.

Questa cotal ragione a mi non pare
haver de fede vera conclusione,
ma inver più presto lo facesse fare
el populo per sua comunione
vogliando lor la sua patria exaltare
de grande fama laude e conditione
che gli era usanza quasi in ogni parte
fare qualche edificio con grande arte.

Se sto theatro fusse [stato] fabricato
da uno solo homo per sua vigoria
mai el suo nome non saria manchato
de magnitudine o ver tirania
perchè dimostraria che fusse stato
homo famoso de gran signoria:
el nome suo saria fra la gente
per lui impreso sin al dì presente (1).

Il Corna scarta la congettura del console romano, dell'*uomo* che *solo*, cioè coi soli suoi mezzi, avrebbe innalzato il grandioso

---

(1) *Fioretto delle antiche croniche de Verona et de tutti li soi confini: e de le reliquie che se trovano dentro in detta cittade.* Venetia, Rusconi, 1515. Cito da questa stampa antica del Corna, l'unica che esista, in attesa dell'edizione critica promessa, con altre cronache veronesi, da Carlo Cipolla.

edificio: quest'uomo si sarebbe acquistata tanta fama che il suo nome sarebbe giunto sino a noi.

Marin Sanuto nel suo *Itinerario per la terra ferma veneziana*, compiuto nel 1483, dove parla dell'Anfiteatro non accenna punto all'architetto e al tempo di sua fondazione; ma discorrendo più innanzi dell'Arco dei Gavi riferisce l'opinione che considerava il superbo monumento sepolcrale una porta dell'Arena; e poichè su questo monumento stava la nota iscrizione: *Lucius Vitruvius L. L. F. Cerdo architectus,* conclude: " unde apar Lucio Vitruvio che scrise de architectura, fu veronese ed auctor celeberrimo, edificasse l'Arena et di quella fosse *conditor* " (1).

Riferisco queste due testimonianze del Corna e del Sanuto per far notare che ancora nel 1477 e nel 1483, se si andava almanaccando intorno all'Anfiteatro e alla sua origine, non si era per anco infiltrata la notizia di quel Flaminio, di cui parla l'iscrizione lucchese. Il che vuol dire che fino al 1483 l'iscrizione non era ancora stata fabbricata, o almeno non era generalmente nota. Fu compilata e diffusa solo in sulla fine del decimoquinto secolo; e nei primi del cinquecento correva per le mani delle persone colte che della sua autenticità non dubitavano punto, finchè giunsero Leandro Alberti a darla fuori nel 1550, e il veronese Caroto a riprodurla nel 1560. Ma non vorrei affermare che il Caroto riproducendola vi prestasse intera fede. Subito dopo se ne comincia a dubitare, proprio in un documento pubblico, qual'è la sovraccennata deliberazione Consigliare del 1568 (2).

Verona, 31 ottobre 1904.

---

(1) Marin Sanuto, *Itinerario per la terra ferma veneziana nell'anno MCCCCLXXXIII.* Padova, 1847, pp. 99 e 101.

(2) Adriano Valerini nelle sue *Bellezze di Verona* (Verona, 1586) dice: " L'Anfiteatro dal volgo detto l'Arena, tre anni innanzi l'avvenimento di Christo fabricato da Lelio Quinto Flaminio Romano, o, come altri vogliono, dalla Republica Veronese " (pp 21-22). Il Valerini nel 1586 non credeva più che tanto a quel Lelio Q. Flaminio. Egli riferisce la notizia che l'Anfiteatro fu intagliato da Enea Vico da Parma che lo dedicò a Cosimo de' Medici e riprodusse l'epigrafe in questione. Enea Vico nacque a Parma il 29 gennaio 1523 e morì a Ferrara nell'agosto del 1567 (Affò, *Scritt. parmig.*, VI, 524-5). Sarebbe interessante vedere questa incisione, la quale (se recasse

l'anno) potrebbe farci conoscere se la pubblicazione dell'epigrafe fatta dall'Alberti nel 1550 sia la prima in ordine di tempo.

Aggiungo che Lorenzo Schrader (*Monumentorum Italiae libri quattuor.* Helmaestadii, 1592) reca a p. 334*r* con qualche variante l'iscrizione. La raccolta dello Schrader fu compilata dopo tre viaggi in Italia compiuti negli anni 1556, 1567 e 1591. L'iscrizione vien riprodotta non sotto *Lucca* ma sotto *Verona*; il che vuol dire che lo Schrader ignorava la provenienza e venne a cognizione di essa a Verona e probabilmente da qualche raccolta epigrafica veronese.

Aggiungo la notizia di due altre stampe possedute dalle RR. Gallerie di Firenze e indicatemi dalla cortesia di Corrado Ricci. L'una è incisa da B. Braner nel 1558. In essa leggesi la nota iscrizione così: *L. Q. Flaminius Romanus Consul ac universae Graeciae domitor sumptibus propriis Amphitheatrum Veronae erexit anno ab urbe condita DIII.* A sinistra, su di una grossa pietra: *M. Mantuae Benauldio P. I. Con. Iulius Fidelis* P. H. A. G. *declarabat* MDLVIII.

L'altra stampa, del 1560, è incisa dal Lafreri. Nella parte superiore di essa leggesi: *Amphitheatri Veronen. diligens et accurata delineatio quod ludis publicis gladiatorio muneri et ferarum venationib. exhibendis, Imp. Caes. Aug. suasu, post bella civili pace Po. Ro. terra marique parta, nobilissima colonia Verona, opere rustico, in foro boario extra Urb. moenia, aere publico collocavit. Unum omnium quae nobis antiquitas reliquit, Civium perpetua diligentia, et quantum humana ope praestari potuit, magis a temporum iniuria praeservatum. Anteriorem enim porticum partem, quam alam vocant, ingenti terremotu quassatam, anno salut. MCXVII corruisse annalibus veronensium proditum est.* In una cartella in basso a destra: *Romae, Anno MDLX Anton Lafrerij Sequani formis ad genitium archetypum fidelissime expressa.*

Trascrivo, da ultimo, la descrizione della stampa di Enea Vico, quale si legge nel Bartsch, *Le peintre graveur*, vol. XV, p. 349, n° 419: " Vue de l'amphitheatre de Rome *(sic)*. Grand morceau composé de deux pièces jointes en largeur. On lit à la gauche d'en bas, sur une pierre: *Al gran Cosimo de Medici. D. D. Enea Vico da Parma et intagliava.* Sur une seconde pierre, à coté de la première est ecrit: *Lelius Quintus Flaminius — Senatus Venetiae in decennium* „.

Un giudizio nuovo su Cristóval de Castillejo ne' suoi rapporti coll'italianismo spagnuolo.

Nota di BERNARDO SANVISENTI.

Nel cinquecento la Spagna veniva cogliendo i più maturi e rigogliosi frutti d'un buon secolo di influsso italiano, palesatosi non solo nella poesia, ma anche nella cultura. Dall'imitazione esteriore, dalla traduzione letterale di qualche più felice nostra espressione poetica, dalla quasi timida citazione delle opere italiane, si era giunti sul suolo iberico ad un'arte altrettanto spagnuola sostanzialmente, quanto formalmente così elevata e fine da poter gareggiare appunto col modello che aveva studiato (1). D'altra parte, tutto quanto da noi si denomina umanismo veniva pur sorgendo e vigoreggiando in Ispagna, dietro l'esempio, l'incitazione e l'efficacia dei cultori italiani dei classici studî. Di modo che se vi fu momento in cui più che mai l'Italia signoreggiasse lo spirito spagnuolo, questo accadde in quel torno di tempo; e come sin dall'iniziarsi della nostra egemonia eran sôrti scrittori spagnuoli (2) che avversavano il predominio straniero per molte ragioni e artistiche e nazionali, così nella maggior potenza di essa non sarebbe stato strano l'aversi notato più robusti avversarî. Il comun consenso de' critici accennerebbe a Cristoforo Castillejo (3), come a colui che tale spirito d'opposizione incarnò meglio d'altri; onde quell'appassionato lirico ed insigne umorista avrebbe potuto seriamente influire sur una reazione all'italianismo, ove, per esempio, la sua

(1) Pel primo sorgere dello studio della nostra poesia in Spagna v. i miei *Influssi di Dante, del Petrarca e del Boccaccio nella lett. spagn. del 400.* Milano, 1902.

(2) V. *Influssi* cit., p. 33 e segg.

(3) Nato in Ciudad Rodrigo il 1490 o 91, vissuto gran tempo a Vienna ed ivi morto il 1556. Cfr. Wolf, *Cristóbal de Castillejo's Lobspruch der Stadt Wien*, in " Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissenschaften ", phil.-hist. Classe, Wien, 1849, p. 292, *passim.*

vita anzichè a Vienna, come accadde, si fosse svolta sul suolo stesso nativo. Io richiamando l'opera di questo spagnuolo spirito bizzarro ad un esame attento, voglio vedere se il giudizio ormai tradizionale su di lui, sia oggettivamente esatto.

Tra le poesie del C., che ancor oggi si possono studiare dalle antiche stampe (1), v'ha quella intitolata o meglio diretta *contra los que dexan los metros castellanos y siguen los italianos* (2), la cui originalità costituisce già di per sè una ragion sufficiente perchè essa fosse meglio nota di quel che non sia ai più, e più largamente accennata dagli studiosi di cose spagnuole. In essa adunque il poeta richiama l'attenzione del Santo Uffizio, così premuroso nel castigare qualsiasi setta nuova, sur una chiesuola di poeti castigliani, che si sono novellamente ribattezzati col nome di Petrarchisti, e che

han renegado la fe
de las trobas castellanas
y tras las italianas
se pierden diziendo que
son mas ricas y galanas.

Tanto delitto, finge quindi il C. di far giudicare a quattro grandi figure di scrittori spagnuoli: il de Mena, Jorge Manrique, il Cartagena, Bartolomé de Torres Naharro. Vanno, pertanto, il Boscan ed il Garcilasso, quali i migliori rappresentanti della nuova letteratura, innanzi a un tribunale di poeti presieduto da quelli or detti, ma composto, si comprende, dai più noti letterati del buon tempo antico; e meravigliano gli astanti colla loro apparenza di spagnuoli, ma col nuovissimo loro linguaggio, il quale anzichè parlare di

canciones y villancicos
romances y cosa tal
arte mayor y real
y pies quebrados y chicos
y todo nuestro caudal

(1) *Las obras de Cristóval de Castillejo.* Madrid, 1573; esemplare della Nazionale di Madrid, segnato R, 1485.

(2) Ivi, p. 269 e segg.

loda altamente

sonetos de gran estima
madrigales y canciones
de differentes renglones
octava y tercera rima
y otras bravas invenciones.

Ma v'ha di peggio, poichè finiscono col far comprendere:

aquellos viejos autores
no aver savido hazer
buenos metros nì poner
en estylo los amores;
y que el metro castellano
no tenia autoridad
de dezir con magestad
lo que se dize en Toscano
con mayor felicidad.

A sì audace insolenza par che i giudici contrappongano una calma esemplare; s'accontentano infatti di richiedere i due poeti di un saggio delle loro predilette novità; onde il Boscan risponde col seguente sonetto:

Si las penas que days son verdaderas,
como muy bien lo sabe el alma mía,
¿ porque no me acaban? y seria
sin ellas mi morir muy mas de veras;
mas si por dicha son tan lisongeras,
que quieren retoçar con mi alegria,
¿ dezid porque me matan cada dia,
con muerte de dolor de mil maneras?
mostradme este secreto ya señora
y sepa yo de vos pues por vos muero,
si aquesto que padezco es muerte ó vida.
porque siendome vos la matadora
mayor gloria de pena ya no quiero
que poder yo tener tal homicida.

e Garcilasso con questa ottava:

y ya que mis tormentos son forçados,
aunque vienen sin fuerça consentidos,
¿ pues que mayor alivio á mis cuydados,
que ser por vuestra causa padecidos?

si como son por vos bien empleados,
de vos fuessen señora conocidos,
la mas crecida angustia de mi pena
seria de descanso y gloria llena.

Come è prevedibile, i vecchi giudici dànno dell'arte nuova un poco lieto giudizio; Juan de Mena sorride all'ottava:

onze sylabas por pie

(buon uomo!) le aveva usate anche lui da molto tempo; il Manrique accusa le strofe di ridondanza, poche idee e molte parole, ei dice, e sì che la brevità è dote del castigliano; Garci Sanchez s'adira addirittura contro i novatori e dice d'essere ben superiore al Petrarca; il Cartagena giudica le strofe nuove malinconiche e nemiche di piacere; il Naharro le trova pesanti, sebbene egli stesso le avrebbe scritte con gran facilità, ove lo avesse creduto opportuno. Ma, in conclusione, si approva la buona intenzione dei novatori e per onorarla un trovatore compone un sonetto in cui dice:

musas italianas y latinas
gentes en estas partes tan extraña,
¿dezid como venistes à España,
tan nuevas y hermosas clavellinas?
¿ó quien os ha traydo á ser vezinas
del Tajo y de sus montes y campaña?
¿ó quien es el que os guía y acompaña
de tierras tan agenas peregrinas?
Don Diego de Mendoça y Garcilasso
nos traxeron y Boscan, Luis de Haro
por orden y favor del dios Apolo;
los dos lleno muerte passo a passo
el otro Solyman; y por amparo
solo queda Don Diego y basta solo (1).

È ovvio l'osservare anzitutto in questa composizione il tono apertamente burlesco, che la informa; non dico satirico, chè per

(1) Di Luis de Haro non si hanno notizie; v. Fitzmaurice Kelly, *History of sp. lit.* London, 1893, p. 152; ma pensando alla data di morte degli altri due s'avrebbe il *terminus a quo* per la datazione della poesia al di qua del 1542.

esso sarebbero occorse ben altre punte e, per di più, una sostenuta stringatezza ed una forza di concetti, di cui invece si nota assoluta mancanza. La strofe scorre via facile, sin troppo, anzi ostentatamente trasandata, ed il ridicolo scaturisce più dalle situazioni prese nel loro complesso, che dal vero e proprio contenuto. Non muove, in fatti, a riso lo scorgere uomini della gravità d'un de Mena, della altezza d'un Torres Naharro, cavarsela quasi con una pietosa crollatina di spalle, nel giudicare le profonde novità ed il genio poetico del Garcilasso e del Boscan? E come si spiegherebbe, altramente che per burla, quel principio della poesia, in cui si invoca l'Inquisizione, proprio dal C. che ne dovette conoscere per prova gli artigli (1)? Io credo che quando noi partiamo dalla forma di questo componimento e diamo ad essa un giusto valore, ci poniam sulla via maestra per giudicarlo e per esso giungere a nuova sentenza sull'autore. Poichè, come già dicemmo, ai critici, che per l'appunto si fondano precipuamente sulla poesia testè esaminata, parve di ravvisare nel C. un pugnace avversario dell'italianismo; cosicchè dal parere, come al solito, equo e lucido del vecchio Wolf (2), a quello che par colga meglio nel vero del recentissimo Beer (3), alla opinione del Ticknor (4), alla brillante critica del Fitzmaurice (5), non vediamo passare troppo sostanzial differenza, se pur non si voglia dare gran peso ai particolari. In poche parole, agli ispanisti sembrò che il C. abbia decisamente avversato l'influsso italiano, che l'abbia ostacolato e deriso, che, in fine, ove diversamente avesse potuto esplicare la sua attività nella stessa Spagna, ben più tardi vi avrebbe dominato l'arte d'Italia.

---

(1) L'Inquisizione aveva proibita la pubblicazione delle opere del C.; nell'ed. appunto da me studiata v'è la nota che dà il permesso e che avverte quindi tolto il divieto di cui esse eran colpite insieme alla *Propaladia* di B. Torres Naharro ed al *Lazarillo de Tormes*.

(2) Wolf, op. cit., p. 302, n. 2.

(3) *Span. Literaturgeschichte*. Leipzig, 1903, II, p. 50.

(4) *Hist. de la litt. esp.*, II, p. 33 e segg.

(5) Op. cit., p. 152. Gioverà al lettore aver dinanzi le parole, non scevre d'esagerazione, dell'ispanista inglese: " Had he lived in Spain [il Castillejo] " it is probable that Castillejo's mordant ridicule might have delayed the " Italian supremacy. As it was, his flouts and jibes arrived too late, and " the old patriot died, as he had lived, a brilliant, impenitent, futile " Tory ...

Con che sarebbe stato molto interessante il vedere come un uomo, solo con qualche frizzo, avesse potuto cancellare lo studio di parecchie generazioni e l'opera maturata da oltre un secolo. Che il C. qua e là abbia lanciato dei motti contro i novatori, è vero; che egli la abbia avuta in ispecie col Boscan è ancor più vero; anzi tale animosità spiega molto. In una sua poesia *contra los encarecimientos de las coplas españolas que tratan de amores* il nostro autore ha questa offesa al Boscan:

los requiebros y primores
quien los niega de Boscan?
y aquel estylo galan
con que cuenta sus amores;
mas trobada una copla muy peccada
el mismo consellaran *(sic)*
que no sabe donde va
nì se funda sobre nada (1).

Ora, dall'invidia del connazionale, cui più volonterosa sorrideva la gloria, facilmente passò il C., spirito mobile in estremo, all'astio contro la scuola cui egli apparteneva, e però al desiderio di porla in derisione. Ma dal detto al fatto ci corre; e la esposta poesia ce lo dimostra. Come possiamo noi credere che questa sul serio disprezzi l'italianismo, quando al fine ha una lode per esso? Come quel C. che fu grande almeno nelle liriche in cui dipinse i suoi amori, o davvero volle pungere come nel *la vida de corte* e nel *Diálogo entre él y su pluma,* scese sì in basso da non capire che mal s'addicevano alla bisogna sua gli uomini da lui invocati? Si rifletta: il de Mena fu tra i primi a sentire e manifestare l'influsso di Dante; Garci Sanchez de Badajoz fu tra coloro che della imitazione italiana sentiron più oltre che i riflessi (2); il Torres Naharro (3), poi, non solo imitò la poesia petrarchesca *de opósitos*, per dirla alla spagnuola, ma scrisse sonetti in italiano, e nel teatro suo, notiamo, concepito in Italia, veggonsi le traccie del Machiavelli e dell'Ariosto.

(1) Ed. cit., p. 264. Il Fitzmaurice recando gli ultimi due versi di questa strofa legge al posto di *consellaran*, certamente errato, *confesaria.*

(2) V. i miei *Influssi* cit., capo III; e capo V, p. 217 segg.

(3) V. M. Menéndez y Pelayo, *B. Torres Naharro y su Propaladia.* Madrid, 1900, *passim.*

Degli italianisti illuminati sarebbero, dunque, sul serio, chiamati a deridere l'italianismo! Questo non concorderebbe punto coll'esperto maneggio che d'altronde il C. fa dei metri italiani e col posto che egli occupa, pel *Diálogo de las condiciones de las mugeres*, nella letteratura misogina spagnuola, sôrta per l'influsso del Boccaccio (1). Io, per tanto, credo che desideroso della celebrità, quale ei doveva conquistare colla vivacità d'un non dispregevole ingegno, trovò opportuno salire alla gloria per men comuni o men battute vie ed intese al suo scopo armato di brio, di facezie e paradossi. Ma si tenga nota; ed è strano che ciò sia stato obliato sin qui; della stima che il C. fa della nostra Italia; poichè egli nella dedica a Martin de Guzman della sua versione del *de senectute* e del *de amicitia* ciceroniani, per confortare gli Spagnuoli a tener in conto giusto il loro volgare, adduce, tra gli altri argomenti, l'esempio d'Italia " pues en la " lengua ytaliana que manó de la latina también como la nuestra, " todo el mundo sabe quanto se estima Petrarca (proprio lui " il corifeo de' novatori!) y los modernos de agora, aunque sean " personas de mucha suerte, preçian ynfinito un buen soneto, " y quieren ya quasi que conpita en este caso su bulgar con " el latin „ (2). Epperò il C. al corrente di quanto accadeva ai suoi dì pare voglia piuttosto porre in ridicolo gli eccessi delle novità, anzichè le novità, e voglia dire: accettate bensì il nuovo ed osservate ciò che si fa fuori di Spagna, ma ricordatevi d'essere Spagnuoli, ed il nuovo non vi ponga in dimenticanza sdegnosa l'arte patria. In tanto ei pure compone ne' metri nuovi, dimostra come li maneggi accanto a quelli nazionali e come si possa raggiungere una certa eccellenza in entrambi, ed alla fine non valga la pena nè d'accapigliarsi, nè di credersi gran che geniali per conoscere l'una piuttosto che l'altra maniera; veh: in fatti, come stanno assieme nella sua esilarante poesia ridanciana!

Che se con un paragone io posso meglio significare la mia impressione ed il giudizio, che tengo, della poesia del Castillejo, dirò ch'ei non assunse già l'aria, il che parrebbe superficial-

(1) V. *Influssi* cit., p. 322.
(2) V. Wolf, op. cit., p. 136.

mente, di chi riduce il nuovo al vecchio (come il Cavallotti buon'anima allorchè esaminando le *odi barbare* del Carducci scopriva che i versi nuovissimi erano semplici accoppiamenti di ben noti versi italiani), ma si pose, con altro ingegno ed altra fortuna, per la via battuta gloriosamente nel secolo scorso dall' Heine, quando coll'*Atta Troll* volle distruggere, con tant'altre cose, le viete forme romantiche della patria sua, e pur mostrò che fine e schietto e sano romantico ei fosse!

L' Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze conferirà nel 1905 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Letteratura, Storia letteraria, Critica letteraria, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1902-1904. Il premio sarà di L. 2500, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

Torino — Vincenzo Bona Tipografo di S. M. e Reali Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 4 Dicembre 1904.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, NACCARI, SPEZIA, SEGRE, PEANO, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI e JADANZA che funge da Segretario in assenza del Prof. CAMERANO, che trovasi a Roma per ragioni d'ufficio. — Scusa l'assenza il Socio FILETI.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio GUARESCHI presenta in omaggio alla Classe un opuscolo avente per titolo: *Vannoccio Biringuccio e la Chimica tecnica. Note storiche. La Chimica presso i Cinesi. Faustino Malaguti.*

Il Socio GRASSI presenta il 1° volume del suo *Corso di elettrotecnica.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° dal Socio PEANO, *Metodo di Newton perfezionato e nuovo metodo pel calcolo assintotico delle radici reali d'equazioni,* del Prof. F. GIUDICE;

2° dal Socio SPEZIA, *Sull'aplite di Cesana Torinese,* osservazioni del Dr. Giuseppe PIOLTI.

Il Socio Morera presenta una sua Memoria da inserirsi nei volumi accademici, avente per titolo: *Sull'attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali di seconda specie.*

La Classe con votazione segreta accoglie all'unanimità la Memoria del Socio Morera per l'inserzione nel volume delle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Metodo di Newton *perfezionato e* Nuovo Metodo *pel calcolo assintotico delle radici reali d'equazioni.*

Nota di FRANCESCO GIUDICE.

In una mia Nota (*) ho fatto vedere che se $f(x)$ è funzione intera a coefficienti reali, algebrica o trascendente, e dell'equazione

$$f(x) = 0$$

si conosce un valore approssimato a d'una radice reale α, si può formare un'equazione algebrica, che sia d'un qualsiasi grado prefissato ed abbia una radice tra a ed α. In quella Nota il metodo di Newton pel calcolo assintotico delle radici reali fu generalizzato in modo da non potersene attendere ulteriori miglioramenti. Io ottengo il mio risultato generale per via geometrica ed anche per via puramente analitica; i miei ragionamenti, così per l'una come per l'altra via, sono assai più brevi e semplici di quelli che si leggono anche nei trattati recenti, i quali non pervengono che alla regola di Newton-Fourier applicabile solo dopo il penoso lavoro della separazione delle radici, od al più a quella di Newton-Fouret (**) poco meno esigente.

Ritorno quindi ora sul mio lavoro per fermare l'attenzione, mediante esempi, sull'importanza pratica del metodo perfezionato e sulla sua validità incondizionata ed immediata per il

(*) V. F. Giudice, " Giornale di Matematiche „; Napoli, Gennaio-Febbraio 1903, pag. 14.

(**) V. p. es. J. Neuberg, *Cours d'Algèbre supérieure*; Liège, 1902, pp. 228-232. — G. Bauer, *Vorlesungen über Algebra*; Leipzig, 1903, pp. 225-238. — G. Papelier, *Précis d'Algèbre et de Trigonométrie*; Paris, 1903, pp. 279-282.

calcolo approssimato delle radici reali senza preventiva separazione.

Faccio poi conoscere un *nuovo metodo*, che potrebbe dirsi *del quoziente*, dà un'approssimazione più rapida del metodo di NEWTON da me perfezionato, ed è più generale.

Prima però faccio vedere come anche per separare le radici reali, se si voglian separare in precedenza, possa riuscir molto comodo il metodo perfezionato, il quale, limitato all'uso d'equazioni di primo grado, è contenuto nella seguente regola:

Sia f(x) *funzione reale della variabile reale* x, *che s'annulli almeno una volta mentre* x *cresca da* α *a* β *ed abbia prima derivata compresa tra i due numeri diversi da zero* a *e* b *per tutti i valori di* x *compresi tra* α *e* β. *Si ha che: almeno uno dei due numeri*

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{a}, \qquad \alpha - \frac{f(\alpha)}{b}$$

è maggiore di α; *se uno solo supera* α, *esso è compreso tra* α *e la minor radice superante* α *dell'equazione* $f(x)=0$; *se sono entrambi maggiori di* α, *uno è tra* α *e la minore delle radici maggiori di* α *dell'equazione* $f(x)=0$, *l'altro supera questa radice: ed almeno uno dei numeri*

$$\beta - \frac{f(\beta)}{a}, \qquad \beta - \frac{f(\beta)}{b}$$

è minore di β; *se uno solo è minore di* β, *esso è compreso tra* β *e la maggior radice minore di* β; *se sono entrambi minori di* β, *uno è tra* β *e la maggiore delle radici minori di* β *dell'equazione* $f(x)=0$, *l'altro è minore di questa radice.*

Separazione delle radici reali. — Si voglian separare le radici reali tra a e b dell'equazione a coefficienti reali

$$f(x) = 0,$$

supposto che $f(x)$ ammetta derivata finita nell'intervallo $a \div b$. In causa di quest'ipotesi si può fissare un numero positivo k in modo che $f'(x)$ sia compreso tra $-k$ e k per tutti i valori di x compresi tra a e b. Allora, indicando con α la minor radice

maggiore di a, se esista, avremo per la precedente regola che, se

$$a_1 = a + \frac{|f(a)|}{k}, \quad a_2 = a_1 + \frac{|f(a_1)|}{k}, \quad a_3 = a_2 + \frac{|f(a_2)|}{k}, \ldots,$$

od a_n tende a limite non maggiore di b, ed allora

$$\lim a_n = \alpha$$

perchè, in tal caso,

$$\lim f(a_n) = k \lim (a_{n+1} - a_n) = 0;$$

oppure non v'è radice tra a e b, ed in questo caso, indicando con h il limite inferiore dei valori di $|f(x)|$ in $a \vdash b$, si ha che, se $a_{n-1} < b$, certamente

$$a_n > a + n\frac{h}{k},$$

per cui si troverà certamente un a_r maggiore di b e sarà così riconosciuto che nessuna radice è compresa tra a e b.

Si può pur partire da b: se β è la maggior radice minore di b, se esista, e

$$b_1 = b - \frac{|f(b)|}{k}, \quad b_2 = b_1 - \frac{|f(b_1)|}{k}, \quad b_3 = b_2 - \frac{|f(b_2)|}{k}, \ldots,$$

o b_n tende ad un limite non minore di a e

$$\lim b_n = \beta,$$

o si trova un b_n minore di a ed in questo caso non v'è radice tra a e b.

Se si tratti d'equazione algebrica, si perverrà sempre facilmente (*) ad isolare α tra un a_n ed un a', oppure β tra un b_m ed un b'. Resteranno così da separare le radici comprese tra a' e b, oppure tra a e b'. Restan da separare le radici comprese tra a' e b' se son calcolati a' e b' ed $a' < b'$.

(*) V. F. Giudice, " Giornale di Matematiche "; Napoli, 1903, pag. 190.

1° Esempio (*):

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

	1	0	—2	—5
2		2	2	—1
		4	10	
	1	6		
1		7	17	16
		8	25	
	1	9		

Per la regola di Budan, da questo quadro di Ruffini (**), che dà le trasformate alle radici diminuite di 2 e di 3 dell'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, si riconosce che quest'equazione ha unica radice positiva compresa fra 2 e 3 e che fra 2 e 3 non hanno radici nè la prima nè la seconda equazione derivata. Per la regola di Newton-Fourier, che è applicabile a partire da 3, si riconosce solo che la radice positiva è compresa fra 2 e $3 - \frac{16}{25}$, cioè tra 2 e 2,36.

Col metodo perfezionato si riconosce dallo stesso quadro che l'accennata radice è compresa tra $2 - \frac{-1}{25}$ e $2 - \frac{-1}{10}$, cioè tra 2,04 e 2,1.

(*) V. Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies*; Paris, MDCCXL, pag. 7.

(**) Questa disposizione di calcolo s'attribuisce comunemente ad Hörner, che l'usò nel 1819; per sentimento d'italiano e di maggior giustizia noi la leghiamo invece al nome già reso immortale dal teorema d'irresolubilità per radicali delle equazioni algebriche generali di grado superiore al 4°. V. Paolo Ruffini, *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*, pag. 24; Modena, 1804 (Memoria in-4°, coronata dalla Società italiana delle Scienze).

2° Esempio (*):

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

	1	0	—7	7
1		1	—6	1
		2	—4	
	1	3		
1		4	0	1
		5	5	
	1	6		

Questo quadro dà i coefficienti delle trasformate alle radici diminuite di 1 e di 2 dell'equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$. Da esso vedesi che l'equazione non ha radici tra 0 ed 1, ne può aver due tra 1 e 2 e non ne ha di maggiori di 2. Vedesi inoltre che la prima equazione derivata ha una radice e la seconda non ne ha tra 1 e 2. E rilevasi ancora che, se sonvi due radici tra 1 e 2, la minore supera $1 - \frac{1}{-4}$ cioè 1,25 e la maggiore è minore di $2 - \frac{1}{5}$ cioè di 1,8. Può quindi convenire, lasciandosi guidare dalle regole di Newton, diminuire successivamente di 0,3 e di 0,06 le radici già diminuite di 1.

	1	3	—4	1
0,3		3,3	—3,01	0,097
		3,6	—1,93	
	1	3,9		
0,06		3,96	—1,6924	—0,004544
		4,02	—1,4512	
	1	4,08		

(*) V. Lagrange, *Traité de la résolution des équations*; Paris, 1808, pag. 55.

Qui si hanno i coefficienti delle trasformate alle radici diminuite di 1,3 e di 1,36 dell'equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$. Tenendo anche conto dei risultati precedenti si vede che questa equazione ha due radici tra 1 e 2; e ricorrendo anche alla regola di Newton-Fourier, che è applicabile da 2 per la radice maggiore, vedesi che son comprese tra 1,3 ed 1,36 e tra 1,36 ed 1,8. Col metodo perfezionato si vede che la radice minore è tra $1{,}36 - \frac{-0{,}004544}{-1{,}93}$ ed $1{,}36 - \frac{-0{,}004544}{-1{,}4512}$ cioè tra 1,357 ..... ed 1,3568 .....

Avendo considerate due equazioni che si trovano in quasi tutti i trattati dopo che Newton applicò il suo metodo di risoluzione alla prima, e Lagrange applicò ad entrambe il suo metodo delle frazioni continue, e Cauchy (*) trattò l'una e l'altra col suo metodo di trasformazione del primo membro in differenza di due funzioni crescenti nell'intervallo considerato (e precisamente col particolar metodo di separazione del gruppo dei termini positivi da quello dei negativi combinato col metodo di Newton), equazioni quindi che non furon scelte ora con criterio d'opportunità, non si potrà fare a meno di riconoscere che anche la convenienza pratica del metodo perfezionato si palesa subito con qualsiasi equazione.

Nuovo metodo. — Se

$$f(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + f(\alpha)$$

e ρ è radice dell'equazione $f(x) = 0$, allora

$$(\rho - \alpha)\, Q(\rho) + f(\alpha) = 0$$

onde, con semplicissime considerazioni analitiche simili a quelle da noi fatte nel fascicolo di gennaio-febbraio 1903 del " Giornale di Matematiche di Napoli ", si deduce che:

Se f(x) *è funzione reale della variabile reale* x, *che s'annulli almeno una volta mentre* x *cresca, o decresca, da* α *a* β, *e se* $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, *che indicheremo con* Q(x), *è compreso tra i due numeri*

(*) V. Cauchy, *Analyse algébrique*; 1821, pag. 505 e pag. 464.

p e q *diversi da zero per tutti i valori di* x *compresi tra* α *e* β, *si ha che: almeno uno dei due numeri*

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{p}, \quad \alpha - \frac{f(\alpha)}{q}$$

è compreso tra α *e la più vicina ad* α *delle radici comprese nell'intervallo* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ *dell'equazione*

$$f(x) = 0;$$

questa radice è compresa tra quei due numeri quando p *e* q *sono d'egual segno.*

Questo nuovo metodo non esige che $f(x)$ sia derivabile, epperò è ancora più generale del metodo di Newton perfezionato. Esso dà migliori risultati, perchè, quando esiste $f'(x)$ nell'intervallo considerato, l'oscillazione di $Q(x)$ è generalmente minore di quella di $f'(x)$, in quanto che, se ξ è compreso tra α e β, $f'(x)$ diviene almeno una volta uguale a $Q(\xi)$ mentre x cresce, o decresce, da α a ξ.

Il nuovo metodo riuscirà utile combinato con quello di Newton, quando questo sia applicabile. Per la disposizione del calcolo giova osservare che: Se i numeri dell'ultima linea di quadro di Ruffini siano

$$c_0, \; c_1, \; \ldots, \; c_{n-1}, \; c_n$$

e siano i coefficienti della trasformata alle radici diminuite di α dell'equazione $f(x) = 0$, allora identicamente $c_n = f(\alpha)$ ed

$$f(x) = (x - \alpha)[c_0(x - \alpha)^{n-1} + \ldots + c_{n-2}(x - \alpha) + c_{n-1}] + f(\alpha),$$

per cui il quoziente $Q(x)$ della divisione di $f(x) - f(\alpha)$ per $x - \alpha$ ha il valor conosciuto c_{n-1} quando $x = \alpha$, e quando $x = \alpha + \beta$ ha il valore che ha

$$c_0 y^{n-1} + c_1 y^{n-2} + \ldots + c_{n-2} y + c_{n-1}$$

quando $y = \beta$, e si calcola quindi facilmente con la regola di Ruffini.

Per il 1° esempio si potrebbe fare il breve calcolo del seguente quadro:

	1	0	—2	—5
2		2	2	—1
		4	10	
	1	6		
0,1			10,61	
		6,1		

Col nuovo metodo si vedrebbe già che la radice positiva dell'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

è tra $2 - \frac{-1}{10,61}$ e $2 - \frac{-1}{10}$, cioè tra 2,094... e 2,1, per cui, scrivendo soltanto le cifre sicure, tal radice è 2,09... e, per continuare il calcolo approssimato, converrebbe diminuire di 0,09 le radici della trasformata alle radici diminuite di 2.

Conclusione. — Newton ha usato il suo metodo senza preoccuparsi del pericolo di non avvicinarsi alla radice indefinitamente ed anche di allontanarsene. Fourier ha osservato che, se una radice ρ dell'equazione $f(x) = 0$ è isolata in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$ dove non abbia radici l'equazione $f'(x)f''(x) = 0$, allora $f''(x)f(x)$ è negativo per uno dei due valori a, b di x ed è positivo per l'altro; se questo è c e

$$c_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}, \ \ldots, \ c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}, \ \ldots,$$

c_{n+1} è compreso fra c_n e la radice ρ e

$$\lim_{n=\infty} c_n = \rho.$$

Fouret ha ridotte le condizioni di Fourier osservando esser sufficiente che la derivata seconda $f''(x)$ abbia il segno di $f(c)$ in tutto l'intervallo, senz'altra condizione. Ha fatto conoscere questo risultato notevole nelle " Nouvelles Annales „ del 1890 e più tardi rivolse la domanda seguente ai matematici:

" L'application de la méthode d'approximation de NEWTON au calcul d'une racine d'une équation $f(x)=0$ ne réussit à coup sûr, comme on le sait, que si, dans l'intervalle compris entre cette racine et la valeur approchée que l'on en connait, $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe. Dans le cas contraire, ne pourrait-on pas, par une transformation convenable, obtenir une nouvelle équation, pour laquelle ces conditions seraient remplies, dans l'intervalle correspondant? " (*).

Diede risposta affermativa il sig. LÉMERAY, ma la sua trasformazione (**), consistente nel considerare la $a^{f(x)}-1=0$ di stesse radici della $f(x)=0$, non è praticamente utile.

Noi abbiamo tolta qualsiasi condizione: col metodo perfezionato partendo da un numero qualunque si può calcolare assintoticamente con calcolo sicuro così la più prossima radice superiore come la più prossima inferiore: con esso metodo, come s'è visto, è ancora possibile separare le radici comprese in qualsiasi intervallo. Il nuovo metodo, quello del quoziente, può sostituire convenientemente il metodo di NEWTON perfezionato e può esser valido anche quando non lo sia il metodo di NEWTON.

(*) V. FOURET, " L'Intermédiaire ", III, Paris, 1896, pag. 82, N. 808.
(**) V. E. M. LÉMERAY, " L'Intermédiaire, III, pag. 258.

Genova, Ottobre 1904.

Sull' aplite di Cesana Torinese.

Osservazioni del Dr. GIUSEPPE PIOLTI
Libero docente di Petrografia ed Assistente al Mus. Min. dell'Univ. di Torino.

(Con una Tavola).

A circa un chilometro dall'abitato di Cesana Torinese ed a destra della strada che conduce a Bousson scorgesi un po' in alto una rupe sporgente dai terreni coltivati, rotta in varî punti e divisa in grossi massi. Alcuni di questi vennero portati al basso per formare un grossolano argine sulla sponda sinistra del torrente Ripa.

Il colore della roccia è grigio scuro, leggermente azzurrognolo, tantochè a primo aspetto il materiale potrebbe facilmente scambiarsi per una quarzite. Però l'esame microscopico dimostra trattarsi invece d'un'*aplite*, ossia d'una roccia avente una grande affinità coi graniti, e siccome finora rocce granitiche non vennero incontrate in Val di Susa, così credetti opportuno di farne uno studio particolareggiato non solo per la novità del fatto, ma anche perchè la sua giacitura è alquanto differente dalle giaciture descritte per le apliti.

È impossibile ora riconoscere subito con quale roccia fosse originariamente a contatto quella di cui discorro, perchè, come dissi, attorno non vi sono che campi coltivati. Ma esaminando attentamente i frammenti rocciosi *(schisti calcarei, filladi, calcari compatti grigi)* che si incontrano nel terreno, prima della rupe suddetta, e le masse in posto dopo di essa, riesce evidente che l'aplite doveva costituire un dicco (la cui parte visibile ha attualmente una larghezza media di m. 3,50) fra i *calceschisti filladici*, nome con cui generalmente indicansi dai geologi Italiani gli schisti calcarei della località, alternati con filladi e talora anche con calcari compatti, grigi. Riconobbi sul posto tale alternanza, poco oltre la rupe d'aplite, sulla strada Cesana-Bousson. Vedremo in seguito quali altri argomenti rafforzino l'ipotesi di questa giacitura dell'aplite.

I massi in riva alla Ripa lasciano poi scorgere passaggi e modalità della roccia, sia per la struttura che pel colore, ed anche di ciò discorrerò più oltre.

È evidente che i calceschisti filladici, i quali dovevano funzionare da salbanda all'aplite, per la loro facilissima schistosità e per l'azione chimica dell'acqua sgretolandosi si ridussero in minuti frantumi che si trovano ancora nel terreno dei campi circostanti: l'aplite invece resistette. È noto invero come tale roccia resista assai all'azione degli agenti atmosferici; ed il Rosenbusch (1) dice che talora, appunto per ciò, le masse d'aplite sporgono fuori dalle rocce circostanti a mo' di muri. Rompendo la roccia si osservano sporadicamente e molto raramente ora noduli di *quarzo* ed ora sezioni di *albite* talora aventi un centimetro di lunghezza ed una larghezza di mezzo centimetro. Ma tale fatto è così raro che non si può parlare di struttura porfirica; d'altronde anche il Rosenbusch (2) osserva che tale struttura è rara. Accade anche, frantumando la roccia, di incontrare nell'interno straterelli, dello spessore di un millimetro ed anche meno di pura *glaucofane*, con aspetto liscio e finamente striati, aspetto paragonabile alla superficie di sfregamento che si scorge in certe argille scagliose. Ciò indica movimenti che devono essere avvenuti nella roccia.

Esaminando i preparati microscopici, ciò che colpisce di più è lo stato frammentario degli elementi: pare quasi d'avere sott'occhi una breccia costituita in maggioranza da *quarzo*, *plagioclasio* ed *ortosio*, cementati da quarzo e plagioclasio in grani più piccoli (fig. 1. Luce polarizzata. Prismi incrociati. Ingrandimento = 32 diametri).

Non è raro il caso di incontrare grossi cristalli di plagioclasio rotti e disgiunti, come si può molto bene riconoscere per il corrispondersi delle linee di geminazione nei due frammenti e per l'estinzione esattamente simultanea di essi. Lo spazio tra un frammento e l'altro è riempito da quarzo in grani assai piccoli. In altri casi cristalli di plagioclasio sono parzialmente corrosi, presentando insenature nelle quali havvi anche quarzo in

(1) *Elemente der Gesteinslehre.* Stuttgart, 1898, p. 208.

(2) *Mikr. Phys. der Massigen Gesteine*, Dritte Auflage. Stuttgart, 1896, pag. 461.

grani piccolissimi. La struttura cataclastica accennata, la presenza delle superficii di scorrimento ed il trovare talora nei plagioclasii le linee di geminazione distorte indicano che la roccia dovette subire forti movimenti.

Credo inoltre che acque mineralizzate circolanti dovettero sciogliere una parte degli elementi per ridepositarli, senza escludere che possano essere avvenuti mutamenti di composizione chimica in quelli in causa di reazioni speciali.

Una tale ipotesi se è già di per sè ammissibile in un distretto eminentemente eruttivo, per la presenza delle diabasi, come quello di cui discorro e di cui già mi occupai or son nove anni, s'accorda poi colle esperienze dello Spezia relative all'azione dell'acqua contenente silicato sodico sul quarzo ed agli accrescimenti in detto minerale dati da acqua contenente silice (1) proveniente dalla decomposizione d'un vetro.

Il Rosenbusch (2) poi osserva che anche nelle apliti si verificano questi fenomeni di rotture e spostamenti.

Elementi accessorî sono: *anfiboli* di varia natura (sui quali ritornerò in seguito) ed in tale quantità che si potrebbero quasi considerare come elementi essenziali della roccia, radunati in plaghe ondulate, contorte, coll'aspetto presentato dalla mica nelle rocce schistose e con un certo parallelismo; poscia *titanite*, *apatite* in lunghi aghi incolori che sono inclusi tanto nel quarzo quanto nei feldspati. Polverizzando la roccia e sottoponendola ad un trattamento con acido nitrico e molibdato ammonico ottenni nettissima la reazione del fosforo. Infine elemento accessorio sporadico e che s'incontra meno spesso è la *pirite* in esaedri. Il plagioclasio è rappresentato da due specie. Seguendo il metodo del Becke potei stabilire che i grossi cristalli, geminati secondo la legge dell'albite, hanno un indice di rifrazione sempre minore di quello del quarzo e l'estinzione delle lamelle emitrope ha luogo con un angolo di circa 2° rispetto alle linee di gemi-

(1) *Contribuzioni di geologia chimica. Solubilità del quarzo nelle soluzioni di silicato sodico,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XXXV, adunanza del 13 maggio 1900. — *Esperienze sul quarzo,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, adunanza del 16 gennaio 1898. — *Esperienze sul quarzo e sull'opale,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. XXXIII, adunanza del 19 giugno 1898.

(2) 2ª opera citata, pag. 462.

nazione. Riducendo la roccia in frammenti minutissimi ed isolando il feldspato col ioduro di metilene ottenni lamine di sfaldatura: trovai anche qui che nei grossi cristalli di plagioclasio su 001 l'estinzione delle lamelle emitrope è quasi simultanea: per cui conchiusi che il feldspato è *oligoclasio.*

Secondo il Rosenbusch (1) il plagioclasio delle apliti è oligoclasio; però varî autori trovarono anche altri feldspati. Così il Dimitrow (2) in un'aplite della Bulgaria trovò che il plagioclasio sta fra la labradorite e la bytownite. David, Smeeth e Schofield (3) in un'aplite di Victoria Land descrivono il plagioclasio come compreso fra l'albite e l'oligoclasio. Il compianto Riva nelle sue osservazioni sulle rocce filoniane del gruppo dell'Adamello affermava che nell'aplite da lui studiata il plagioclasio talora era albite, talora oligoclasio acido (4). Il Matteucci per l'aplite dell'isola d'Elba trovò che il plagioclasio è albite (5). Il Lacroix (6) in un'aplite dell'Ariège trovò il microclino dominante, poi l'albite, l'albite-oligoclasio e l'oligoclasio.

L'Hermann Veit Graber accenna alla sola presenza d'oligoclasio acido in un dicco d'aplite che taglia la granitite e schisti in una località della Carinzia (7).

I piccoli cristalli di plagioclasio che assieme al quarzo in piccoli elementi funzionano da materiale di riempimento hanno un indice di rifrazione quasi sempre maggiore di quello del quarzo. Nelle lamine di sfaldatura, su 010 l'estinzione oscilla da 13° a 14° in senso negativo. Su 001 le lamine di sfaldatura, colla geminazione secondo la legge dell'albite, dànno un angolo d'estinzione di 5° rispetto alle linee di geminazione. Quindi credo trattisi di un'*andesina basica.*

Riassumendo, scorgesi che la natura del plagioclasio nelle apliti può variare notevolmente.

---

(1) 1ª opera citata, pag. 206.

(2) *Beiträge zur Geol. und Petrogr. Kenntniss des Oitosü-Gebietes in Bulgarien,* " Denk. d. K. Ak. d. Wiss. „. Wien, Bd. LX, 1893, pag. 500.

(3) *Notes on antartik roks collected by M. R. Borchgrevink,* " Journal and Proceed. of the Roy. Soc. of New South Wales „, XXIX, 1895, p. 471.

(4) " Atti della Soc. It. di Scienze nat. e del Mus. Civ. di Storia nat. in Milano „, XXXVII, 1897, pag. 90.

(5) " Atti Soc. Tosc. di Scienze nat. „, XVI, 1898, pag. 127.

(6) " Bull. de la Soc. franç. de Minéralogie „, 1898, pag. 272.

(7) " Jahrb. der K. K. Geol. Reichsanstalt „, XLVII, 1897, pag. 277.

Il quarzo contiene numerose inclusioni di varî anfiboli e, come già dissi, anche di apatite.

L'ortosio presenta la geminazione di Karlsbad ed è sempre in individui relativamente grossi; non si trova nella massa di riempimento costituita da andesina e da quarzo in grani piccoli; anch'esso contiene apatite ed anfiboli.

La titanite è disseminata fra i varî elementi della roccia e non si trova mai inclusa nè nel quarzo, nè nei feldspati. Gli anfiboli sono di tre specie e così disposti per ordine di frequenza: *glaucofane, attinoto* ed *arfwedsonite*. Questa ha un pleocroismo dal verde-azzurro al verde-giallo, al verdognolo ed un angolo d'estinzione da 11° a 15°. Tali anfiboli sono isolati e non si tratta d'un accrescimento d'un anfibolo con un altro. Certo però devesi ammettere una formazione contemporanea.

Per spiegare la grande quantità di glaucofane contenuta in questa roccia parmi si possa ricorrere all'ipotesi già da me fatta della possibile presenza di acque mineralizzate con silicato sodico, composto che per la sua facile solubilità può trovarsi presente nelle acque circolanti nella crosta terrestre. Ciò ammettendo riescirebbe anche più facile lo spiegare a cagion d'esempio la presenza della cossaite nei calceschisti del Colle di Bousson, dell'albite in molti calcari e della glaucofane nel calcare del Grand Roc.

Sotto il nome di *paisanite* l'Osann descrisse una roccia (vedi riassunto della descrizione in: Rosenbusch, 2ª opera citata, p. 465) che forse qualcuno potrebbe ritenere simile alla mia pel fatto d'essere un'aplite contenente una certa quantità d'anfibolo della serie Riebeckite-Arfwedsonite, ma chiunque legga la suddetta descrizione si convincerà che quantunque l'aplite di Cesana possa chiamarsi un'aplite glaucofanitico-anfibolica o più semplicemente un'aplite anfibolica, tuttavia non è possibile ammettere l'identità delle due rocce, perchè quella dell'Osann presenta l'ortosio sempre sui bordi accresciuto con un ortosio sodico (ciò che non si verifica nell'aplite di Cesana) e non contiene plagioclasio in cristalli isolati. Poscia la paisanite non contiene glaucofane e finalmente nella sua massa fondamentale, che corrisponderebbe a quella che nella mia roccia funziona da cemento ai grossi cristalli di quarzo, di plagioclasio e d'ortosio, non ha individui isolati di plagioclasio.

Particolarità dell'aplite.

L'aplite di Cesana, ora descritta (che chiamerò *aplite scura*), costituisce la varietà più abbondante; ma io rinvenni altre varietà e di queste una è in special modo importante, come vedremo in seguito. Però, prima di discorrerne, voglio accennare ad una particolarità che si incontra raramente nell'aplite scura e cioè la presenza di noduli raggiungenti talora le dimensioni di un uovo di gallina, d'un colore verdognolo chiaro e che quindi spiccano con molta evidenza sul fondo grigio-azzurro della roccia. Facendo un preparato microscopico comprendente la parte circostante ed una parte del nodulo, scorgesi che questo è costituito dagli stessi elementi della roccia inglobante, solo che la glaucofane vi si trova in piccolissima quantità essendo rappresentata da qualche raro aghetto isolato: a tale fatto è dovuta la differenza di tinta. È invece abbondante l'attinoto; il nodulo poi è circondato da un involucro dell'ultimo minerale, indi da uno di puro quarzo e poi di nuovo dall'attinoto che forma come la zona di separazione dall'aplite scura. Questo accentramento d'attinoto si verifica non solo qui ma anche in altri casi paragonabili in parte a quello che è stato detto per la glaucofane; ossia rompendo la roccia si trovano talora straterelli sottilissimi d'attinoto, senza esservi però una superficie di slittamento.

Avviene anche di trovare questi noduli coperti da uno straterello di pura glaucofane, mentre quelli non contengono nemmeno traccia dell'ultimo minerale. Pare quindi che la glaucofane funzioni come da superficie di separazione fra le due formazioni, il che farebbe supporre essersi detto minerale formato dopo pel contatto dell'aplite coi calceschisti filladici, e col concorso di acque mineralizzate con silicato sodico, come vedremo meglio discorrendo del contatto.

L'aplite scura fa passaggio, talora saltuariamente, talora per gradi, ad una roccia più chiara avente l'aspetto d'un microgranito biotitico: l'unica differenza consiste nella notevole diminuzione della glaucofane e degli altri anfiboli.

Ma la varietà più importante è una roccia di color grigio chiarissimo, coll'aspetto della precedente, poichè ad occhio nudo sopra un fondo bianco osservansi macchiette scure regolarmente

disseminate. Invece al microscopio scorgesi che non havvi più traccia della struttura brecciata caratteristica dell'aplite scura; ma tanto il quarzo che i feldspati sono press'a poco equidimensionali, allotriomorfi (fig. 2. Luce polarizzata, prismi incrociati, ingrandimento = 32 diametri). All'oligoclasio s' aggiunge un plagioclasio compreso tra l'albite e l'oligoclasio. Poi notasi l'assoluta mancanza della glaucofane e della titanite; inoltre l'attinoto (alla cui presenza son dovute le macchiette suddette) non è riunito in ciuffi ondulati, ma sparso in piccoli aggregati fibrosi fra gli altri elementi della roccia. Per cui, benchè sul posto quanto sto per dire non sia più riconoscibile, perchè la massima parte del dicco venne distrutta per liberarsi dall'incomodo ospite nei campi e per servire a consolidare l'argine situato più in basso sulla sponda sinistra della Ripa, tuttavia credo che questa aplite chiarissima rappresentasse la parte centrale del dicco, mentre l'aplite scura doveva rappresentare le salbande. Mi conforta in questo concetto l'osservazione già fatta delle superficî di slittamento già notate appunto nell'aplite scura. In questa la formazione della glaucofane, siccome già accennai, credo sia stata causata da un complesso di reazioni chimiche avvenute fra l'aplite chiara e la roccia attraversata. E, senza entrare in discussioni molto ipotetiche, basta osservare che la soda necessaria alla formazione della glaucofane può essere stata fornita in piccola parte dalle miche degli schisti incassanti ed in parte maggiore da acque mineralizzate contenenti silicato sodico, come già dissi.

Finalmente un'ultima varietà si distingue dalla precedente, ad occhio nudo, solo pel fatto che rompendo la roccia si trovano patine d'attinoto ed i preparati microscopici fatti coi frammenti di roccia non intersecati da straterelli di attinoto sono identici a quelli testè descritti, cioè gli elementi sono quasi equidimensionali, mancano la glaucofane e la titanite. Ma invece i frammenti che comprendono accentramenti d'attinoto hanno al microscopio una struttura identica a quella dell'aplite scura, ossia presentano una struttura brecciata. Ciò prova come anche in questa parte del dicco, tra la centrale e quella verso le salbande, debbano essere avvenuti movimenti, indicati dalla struttura cataclastica.

Contatto dell'aplite.

La maggior parte della superficie della rupe d'aplite mostra una rottura fresca e nessuna cognizione si può ricavare intorno ai rapporti che potevano esistere fra la roccia venuta a giorno e quella incassante; ma fortunatamente in un certo punto una leggiera patina d'alterazione superficiale permette di supporre che ivi la roccia non fu toccata, non essendovi tracce di lavorazione.

Preparati microscopici di tal parte della rupe lasciano scorgere plaghe d'aplite cementate da quasi tutti gli elementi dell'aplite stessa, ma con un aspetto così particolare che è impossibile non riconoscere il fatto d'una rottura e d'una successiva cementazione. È a notarsi che nella parte funzionante da cemento non vi son più nè glaucofane, nè altri anfiboli, ma questi sono sostituiti dalla *sericite*, che è poi uno dei componenti essenziali degli schisti incassanti. A meglio chiarire la cosa feci preparati microscopici di una fillade raccolta in posto poco distante dalla rupe e trovai essere la roccia costituita dai seguenti elementi: *quarzo, sericite, muscovite*, *sostanza carboniosa*. Il primo ha frequenti inclusioni di *rutilo*, ora in cristalli semplici ed ora geminati. Elemento accessorio comune è una *tormalina* azzurro-pallida pel R. O., incolora pel R. S., qualche volta policroma, essendo un cristallo bruno in una sua parte ed azzurro nell'altra. I preparati della porzione esterna della rupe poc'anzi menzionati devono quindi ritenersi come rappresentanti una vera breccia di sfregamento.

In altre sezioni sottili si scorge come un intimo miscuglio degli elementi dell'aplite con quelli della roccia incassante. Osservansi rari aghi di glaucofane ed una grande quantità di sericite. La roccia è schistosa e fra i piani di schistosità sonvi numerosi straterelli di glaucofane mista a *tremolite*. Fibre di quest'ultimo minerale sono talora terminate alle estremità da glaucofane. Si direbbe quasi che gli elementi necessarî per formare la glaucofane esistessero in parte, ma non fossero in quel dato punto in quantità sufficiente. Passaggi identici da un anfi-

bolo all'altro vennero già osservati e specialmente in questi ultimi tempi dal Roccati (1).

Fra i varî argomenti da me finora esposti per sostenere l'ipotesi che l'aplite dovesse originariamente trovarsi fra i calceschisti filladici certo non va dimenticato quello di incontrare l'andesina e la titanite (che contengono calce) nella massa finissima granulare che ingloba i grossi cristalli di quarzo, d'ortosio e d'oligoclasio e di non trovare la titanite inclusa in altri minerali. A mio avviso tali fatti sono una prova evidente di reazioni avvenute fra i calceschisti filladici e la roccia venuta a giorno. D'altronde, come s'è visto, nei campioni di roccia che si debbono considerare come aver dovuto far parte del centro del dicco mancano la glaucofane e la titanite.

Conclusione.

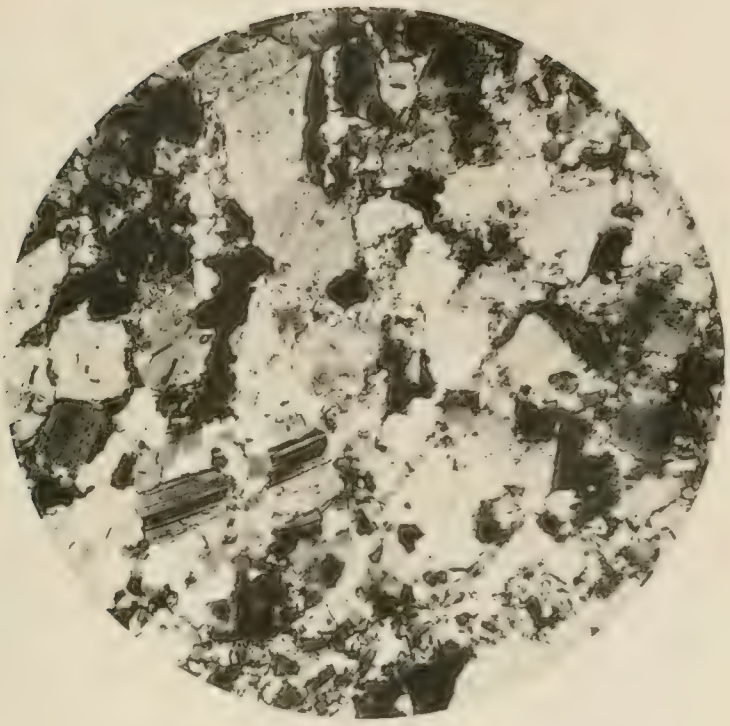
Nella regione di cui trattai, in un'epoca posteriore alla formazione dei calceschisti filladici e forse sincrona colla grande eruzione diabasica del Mt Gimont, fuvvi un'eruzione di aplite attraverso ai calceschisti suddetti. Quando questi ultimi si siano deposti è ancora oggetto di controversia, come è noto, fra i geologi. Ed a tal proposito, affatto recentemente, un autorevole geologo italiano, l'Ing. Ettore Mattirolo emise un'idea che merita molta considerazione: " È del resto probabile che i calceschisti, " che con *facies* talora alquanto diversa da località a località " troviamo indifferentemente associati a quasi tutte le formazioni " delle Alpi Occidentali, sieno a riguardarsi come prodotti di " metamorfismo di sedimenti d'una stessa natura, depostisi in " epoche geologiche diverse; che vi sieno cioè a diversi livelli " geologici calceschisti petrograficamente equivalenti, per modo " che la zona che attualmente ad essi si intitola, comprenda " terreni di età diversa „ (2).

(1) *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso. Serra dell'Argentera*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, vol. XXXIX, adun. del 19 giugno 1904, pag. 16 dell'*estratto*.

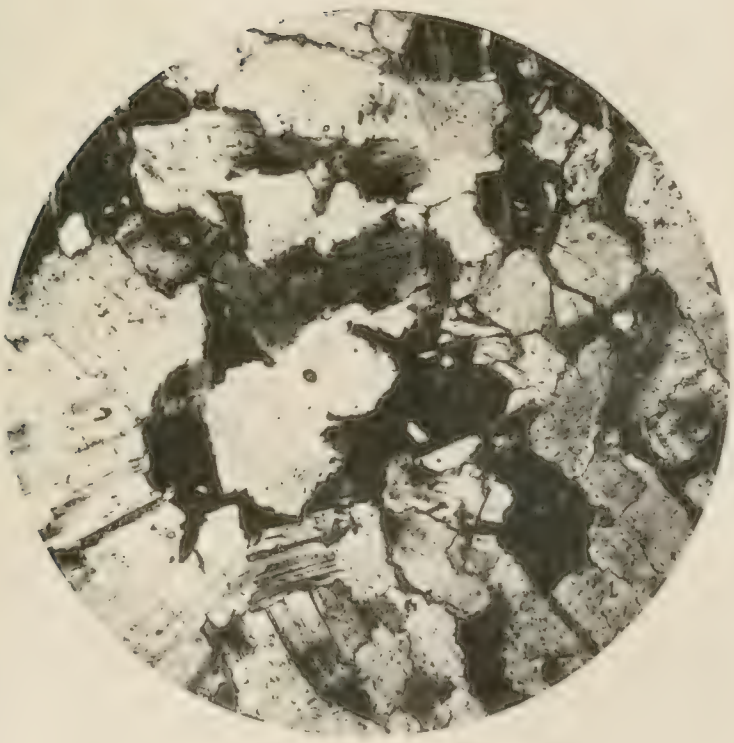
(2) *Le Valli di Lanzo (Alpi Graie)*. Edizione fatta per cura del Club Alpino italiano, Sezione di Torino. Paravia, 1904. — Ettore Mattirolo, *Schiarimenti sulla Carta geo-litologica delle Valli di Lanzo*, pag. 524.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

1



2



fot.

ELIOT. ING. MOLFESE-TORINO

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza dell'11 Dicembre 1904.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pizzi, Carle, Brusa, Allievo, Carutti, Chironi, Ruffini e Renier, Segretario.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 27 novembre 1904.

Il Presidente comunica:

1°, una lettera di ringraziamento del Socio Prof. Icilio Guareschi per la parte presa dall'Accademia alle onoranze pel suo 25° anno d'insegnamento;

2°, i ringraziamenti del Presidente dell' " Académie des inscriptions et belles-lettres „ dell'Istituto di Francia, per le condoglianze inviate in occasione della morte del Segretario perpetuo Enrico Wallon.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 18 Dicembre 1904.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Jadanza, Fileti, Peano, Guidi, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Camerano Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Foà e Mosso.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Guareschi il quale ringrazia della parte presa dall'Accademia alle onoranze che a lui vennero tributate in occasione del suo 25° anno d'insegnamento.

Il Presidente presenta il volume del Socio straniero Ernesto Haeckel, intitolato: *Die Lebenswunder* che egli inviò in dono all'Accademia.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1° Dott. Federico Sacco, *Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino settentrionale e centrale*, dal Socio Parona:

2° Dott. Beppo Levi, *Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche*, dal Socio Segre;

3° Dott. Filippo Rimondini, *Sul calcolo approssimato degli integrali doppi a limiti costanti*, dal Socio Peano;

4° Dott. Adolfo Campetti e M. Nozari, *Sulla variazione del grado di dissociazione elettrolitica con la temperatura*, dal Socio Naccari;

5° Dott. Enrico Festa, *Osservazioni intorno agli Orsi dell'Ecuador*, dal Socio Camerano.

Per ultimo il Socio Mattirolo presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie* il lavoro del Dott. Giovanni Negri, intitolato: *La vegetazione della collina di Torino.* Il Presidente delega i Soci Mattirolo e Parona a riferire intorno a questa *Memoria.*

LETTURE

Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino settentrionale e centrale.

Nota del Prof. FEDERICO SACCO.

(Con cinque Tavole).

Vent'anni or sono ebbi a pubblicare negli *Atti* di questa Accademia una Nota: *Sopra alcuni fenomeni stratigrafici osservati nei terreni pliocenici dell'alta Valle Padana*; più tardi nello studio sopra l'*Appennino settentrionale*, 1892, presentai pure, in due tavole, una serie di sezioni in gran parte naturali rappresentanti fenomeni stratigrafici, specialmente dell'Eocene, osservati in detta regione appenninica. In seguito continuai sempre ad osservare e raccogliere, in parte colla fotografia, in parte con schizzi ad occhio dal vero, alcuni esempi di detti fenomeni che ebbi ad incontrare durante il rilevamento geologico sommario dell'Appennino settentrionale e centrale.

Siccome credo che questi dati di fatto ricavati direttamente da sezioni naturali siano assai interessanti per la conoscenza, non solo della stratigrafia della regione in cui furono osservati, ma della tettonica terrestre in generale, mostrandoci e provandoci con assoluta sicurezza come veramente si comportano gli strati durante l'assetto orogenico della crosta terrestre, specialmente sotto l'azione delle pressioni tangenziali o verticali, così parvemi opportuno raccoglierli assieme e pubblicarli come disegni bensì solo schematici, per ragioni economiche, ma assai suggestivi ed importanti perchè tratti direttamente dal vero.

Sembrami in tal modo di riescire più utile alla conoscenza della tettonica in generale e della stratigrafia appenninica in modo speciale, che non con esperienze di gabinetto (le quali per quanto interessanti non possono naturalmente eseguirsi nelle stesse condizioni che verificansi in natura) oppure con grandi e

compreensive sezioni ideali pure assai attraenti, ma che purtroppo spesso debbono cangiarsi secondo il vario modo di interpretare la serie stratigrafica, tanto più che questa è tuttora assai discussa nella regione appenninica in questione.

Le dimensioni di queste sezioni naturali sono variabilissime nè era sovente possibile darne la scala precisa, essendo state disegnate o fotografate a distanze diversissime, da pochi metri a qualche chilometro; ma nel complesso tali dimensioni risultano dalle relative indicazioni che accennano o ad un semplice taglio di strada, o ad una sponda di fiume, o ad un completo fianco di montagna; del resto ciò non ha in fondo una importanza assoluta trattandosi solo di infinite gradazioni di ampiezza, cioè di grado ma non di natura, in questi fenomeni di corrugamento e simili che cominciano a percepirsi sotto il campo del microscopio, quali minime pieghettature, nelle sezioni sottili di roccia, poi in semplici campioni di roccie specialmente se schistose, sin che gradatamente si arriva alle grandiose onde od immense rughe della crosta terrestre, anche di centinaia di chilometri di ampiezza, che originarono i rilievi montuosi e le depressioni oceaniche.

La serie cretacea, sia quella normale calcarea, sia quella schistosa, si presenta particolarmente corrugata e contorta in tutto l'Appennino, ma trattandosi di fenomeno già tanto noto per questo terreno, mi limitai in riguardo a pochi esempi, presentandone invece specialmente di quelli osservati nei terreni terziarii.

Desiderando di rimanere nel campo positivo delle constatazioni di fatto, non mi lasciai attrarre dalle tante considerazioni che si potrebbero fare e dalle conseguenze teoriche che si potrebbero trarre dai fenomeni illustrati. Basti ricordare che in parecchi casi riesce evidente che le pieghe derivano da pressioni, agenti specialmente d'alto in basso, causate dalla pila di terreni sovraincombenti a terreni marnoso-argillosi od altrimenti assai plastici (Vedi Fig. 76, 79, 90, 91); invece nel maggior numero dei casi devesi specialmente ricorrere a pressioni tangenziali che possono naturalmente aver diversa origine a cominciare dalla semplice diseguaglianza di spessore e di peso nella pila degli strati sovraincombenti ad una data formazione, o da lenti scorrimenti di masse disposte in leggiero pendìo (sia libere, sia

urtanti contro una resistenza passiva prodotta da masse rigide o quasi rigide), finchè si arriva a quei lentissimi ma irresistibili ravvicinamenti di grandiosi massicci rocciosi, arcaici o paleozoici, della crosta terrestre, movimenti causati dal graduale concentramento dell'interno terrestre, e che obbligano le formazioni intermedie a corrugarsi come esplicai nel mio " Essai sur l'Orogénie de la Terre, 1895 „.

Ed ora ecco senz'altro la spiegazione sommaria delle singole sezioni naturali :

1. Stratificazione discordante nel *Piacenziano* marnoso-sabbioso. (Parte inferiore del Rio di Montaldo Roero).
2. Locale discordanza stratigrafica tra gli strati marnosi *langhiani* (*L*) e quelli marnoso-sabbiosi *aquitaniani* (*A*); presso Sorli (Ovest di Garbagna nel Tortonese).
3. Sovrapposizione discordante nella serie pliocenica, tra banchi sabbioso-arenacei giallastri (*s.*) e banchi sabbioso-ciottolosi (*s. c.*) giallo-brunicci a tipica struttura deltoide. (Sezione sotto Podere Fabbrica, fianco destro del Fosso delle Bucacce ; 4 Km. e $^1/_2$ ad Ovest di Montepulciano).

3 (Da fot.). Trasgressione stratigrafica nella serie dei banchi sabbioso-arenacei alternati con strati marnosi del *Miopliocene.* (Fianco sinistro di Val Santerno sotto C. Monte Chiavi, ad Ovest di Fontana Elice; Appennino di Romagna).

4. Stratificazione discordante nell'*Elveziano* marnoso-sabbioso; lungo il Torrente Groglio. (S. Michele Mondovì).

4bis. Stratificazione discordante nella serie quaternaria. Sezione presentata da una frana verificatasi nel 1885 sulla sponda orientale del Lago di Trana. (Prov. di Torino) :

c) deposito sabbioso-ghiaioso
b) deposito ghiaioso a stratificazione deltoide } *terrazziano.*
a) marne sabbiose, bleuastre inglobanti ciottoli e blocchi caoticamente sparsi (*morenico*) ;

5. Stratificazione discordante nell'*Elveziano* sabbioso-ciottoloso a disposizione deltoide; Valle Ermena presso S. Luigi. (Sud di Mondovì).
6. Sovrapposizione discordante degli schisti calcariferi (*Sch. c.*) sugli schisti lucidi del *Permocarbonifero* (*P.*), con zona cuprifera (*Cu.*) intermedia. (Sponda destra del T. Merse, sotto Boccheggiano ; Massetano).

7. Irregolarità di stratificazione nei depositi littoranei (sabbie gialle) dell'*Astiano*. Spaccato sulla destra dell'alto Vallone di C. Sucheri (N. E. di Pocapaglia nel Braidese).
8. Giustaposizione della serie *miopliocenica* (*Mi.*), costituita di marne alternate con strati e banchi arenacei con tinta complessiva grigiastra, sulla serie (*m. c. ar.*) costituita di strati marnoso-calcarei, con filaretti spatici, alternati con compatti banchi e strati di arenaria di tinta complessiva giallastra. (Veduta panoramica del fianco sinistro di Valle del Salto, presso Marradi, presa da Ca Val Centinaia; Appennino di Romagna).
9. Sovrapposizione del *Miopliocene* (*Mi.*), a banchi arenacei alternati con marne grigie, sulla serie (*m. c. ar.*) a marne calcaree grigie alternate con strati e straterelli arenacei. (Veduta panoramica presa dal M. Carnevale sopra Marradi; Appennino di Romagna).
10. Sovrapposizione discordante tra i calcari arenacei (*M.*), i calcari marnosi dell'*Eocene* (*E.*) e le argille scagliose bruno-rossigne del *Cretaceo* (*Cr.*). (Rocca di Majoletto, in Val Marecchia, vista dal Sud).
11. Giustaposizione della serie *miopliocenica* (*Mi.*), costituita di marne calcaree grigie alternate con strati e banchi grigio-giallastri arenacei o sabbiosi, contro la serie (*m. c. ar.*) costituita di marne calcaree scagliose grigie, con vene spatiche, alternate con strati arenaceo-calcarei. (Destra di Val Savio, lungo la strada carrozzabile, presso il Cimitero di Valbiano; Appennino di Romagna).
12. Sovrapposizione discordante del *Macigno* di Porretta (*M.*) sugli Argilloschisti (*Arg. sch.*) con lenti e zonule calcaree. (Sbocco Nord del Tunnel ferroviario, a monte dei Bagni di Porretta).
13. Giustaposizione trasgressiva della serie marnoso-arenacea del *Miopliocene* (*Mi.*) sulla serie marnoso-arenacea inferiore (*m. ar.*). (Veduta prospettica del fianco sinistro di M. Lamone, poco a monte di Marradi-Romagna).
14. Sovrapposizione discordante della serie marnoso-arenacea del *Miopliocene* (*Mi.*) su quella marnoso-arenacea inferiore (*m. ar.*). (Sezione sul fianco destro di Val Senio, poco a valle di Palazzolo, quasi di fronte al Km. 2; Appennino di Romagna).

14 *bis*. Sovrapposizione del *Miopliocene* (*Mi.*), costituito di marne grigie alternate con banchi arenacei ed inglobanti lenti calcaree a *Lucina* (*L.*); sulla serie (*m. c. ar.*) costituita di marne calcaree grigie, schistoso-scagliose, alternate con strati e straterelli arenacei e qualche strato o lente calcarea. (Collina tra Palazzolo e Marradi, nell'Appennino di Romagna).

15. Frattura con spostamento nella serie di strati marnosi grigio-chiari (*m.*), alternati con strati arenaceo-sabbiosi grigio-scuri (*ar.*) dell'*Elveziano*, con argilla bruniccia nella zona di frattura. (Destra del Rio Gola, 100 metri circa a monte dei Tetti Miglioretti; Pino Torinese).

16. Fratture con spostamenti nella serie di banchi arenaceo-sabbiosi, alternati con marne, del *Miopliocene*. (Spaccato in un burrone tra Maciolla e Ca Marino, 4 Km. ad Ovest di Urbino).

17 e 18. Fratture con spostamento nell'*Elveziano* sup.; salendo da C. Fidanza a C. Ramelli lungo la strada carrozzabile di S. Stefano Belbo a Ceirole (Langhe).

19. Serie stratigrafica in cui le marne calcaree grigie dell'*Eocene* (*E.*) passano gradualmente ai calcari rosati del *Cretaceo* (*Cr.*) e questi ai calcari grigio-biancastri dell'*Infracretaceo* (*I.*) che sovrappongonsi con *hyatus* ai calcari grigi del *Lias* (*L.*). (Fianco destro di Val Menodre, tra Pale e Vescia, visto dal Colle di Foligno).

20. Serie marnoso-arenacea del *Miopliocene*. (Fianco destro di Val Sintria; veduta panoramica della collina di Torre Calamello da S. Andrea; Appennino di Romagna). Collina a scaglioni o gradinate nella parte settentrionale, cioè di C. Serra.

21 (Da fot.). Sovrapposizione regolare concordante della formazione arenacea del *Miopliocene* (*Mi.*) su quella marnoso-calcarea dell'*Eocene* (*E.*). (Est di Borbona; Appennino aquilano).

22. Rovesciamento della potente serie di banchi marnosi ed arenacei del *Miopliocene*, contro le falde orientali dei Monti Sibillini. (Sprone di Arquata del Tronto (*A.*) e del suo Castello (*C.*) visto da Piedilana).

23. Grande placca arenacea del *Miocene* di Perticara, disposta

in leggiera anticlinale, basante su calcari marnosi dell'*Eocene* ed argille scagliose del *Cretaceo*. (Fianco meridionale del gruppo del M. Perticara, visto dal M. Moscellino ; Appennino di Romagna).

24. Sovrapposizione subconcordante, ma con forte *hyatus*, di una formazione ofiolitica verdastra (*Of.*) del *Cretaceo*, con base schistoso-diasprigna rossiccia (*S.*), sugli strati calcarei bianco-cerei, con interstraterelli schistoso-calcarei grigio-verdicci, del *Lias* (*L.*). (Tra il ponte ed il ponticello di Carrodano ; Appennino della Spezia).

25. Sovrapposizione trasgressiva dell'*Eocene* (Calcare nummulitico, *C. N.*, e Macigno, *M.*) sul Secondario (Argilloschisti bruni o rossigni in alto, con strati calcarei frammentati (*Arg.*) del *Cretaceo* e Calcari grigi (*C. L.*) del *Lias*). Sezione istruttiva dimostrando : 1° la sottoposizione della zona degli Argilloschisti bruno-rossigni all'Eocene (Nummulitico e Macigno) ; 2° come gli Argilloschisti compressi e trasgressivamente coperti dall'Eocene rigido e compatto riescano difficilmente, in generale, ad affiorare attorno alle emersioni Giuraliasiche dell'Appennino. (Fianco sinistro della Valle della Torrite Secca, 2 Km. a monte di Castelnuovo Garfagnana, presso un Molino).

26. Rovesciamento stratigrafico dell'*Infracretaceo* (*I.*) a calcari grigio-biancastri, sul *Cretaceo* (*Cr.*) a calcari rosati, sopportante le marne calcaree grigie dell'*Eocene* (*E.*). (Fianco sinistro della Valle Tenna, visto da sopra Rubbiano ; Ovest di Montefortino).

N.B. — Un rovesciamento consimile, spesso a ginocchio, sovente interessante anche la serie eocenica, è un fatto quasi generale su queste falde orientali dei Monti Sibillini, come si può osservare lungo quasi tutti i fianchi dei torrenti che ne scendono, specialmente sulle pareti scoscese di M. Sasso Tetto (Fig. 26bis), di M. Valvasseto, di Balzo Rosso (presso Amandola), di M. Zampa, ecc.

27 (Da fot.). Piega a ginocchio nella serie del *Miopliocene* (*Mi.*), costituita di banchi arenaceo-sabbiosi alternati con marne grigie, sovrastante alla serie marnoso-calcarea grigia dell'*Eocene* (*E.*). (Fianco sinistro di Val Vomano, poco a monte di Montorio [Teramano]).

28 (Da fot.). Piega a ginocchio nella serie calcareo-marnosa. (Destra del T. Tescio, 100 m. a monte del Ponte Grande; 5 Km. ad E. N. E. di Assisi).

29. Rovesciamento della serie eocenica inferiore costituita, d'alto in basso, di: banchi arenacei o *Macigno* (*M.*), sch. arenacei (*sc. ar.*), schisti argilloso-calcarei bruni (*sc. br.*) alternati con schisti calcarei grigi (*sch. c.*). (Sezione presso mare sotto il Cimitero (†) di Corniglia, vista dalla Stazione ferroviaria di Corniglia; Ovest di Spezia).

30. Anticlinale compressa e raddrizzata nella serie costituita di banchi di *Macigno* (*M.*) e di strati e schisti calcarei grigi (*sch. c.*) con nucleo di Argilloschisti calcarei bruni (*sch. arg. c.*) del *Cretaceo* superiore. (Fianco S. E. della Collina di S. Bernardino presso mare, vista dalla collina di Corniglia; Ovest di Spezia).

31. Rovesciamento del calcare rosato del *Cretaceo* (*Cr.*) sul calcare marnoso grigio dell'*Eocene* (*Eoc.*). (Fianco sinistro di Val Burano, visto dal Ponte sito poco a Sud di Cagli) (dettaglio della fig. 31bis).

31bis. Rovesciamento della serie *cretacea* (*Cr.*) ed *eocenica* (*E.*). (Fianco sinistro di Val Burano sopra Cagli).

N.B. — Questo fenomeno stratigrafico si ripete di frequente in questa regione appenninica.

32. Rovesciamento nella serie marnoso-arenacea del *Miopliocene*. (Fianco destro di Val Montone, quasi di fronte al Km. 51; Appennino romagnolo).

33. Grandi pieghe nei Calcari ad *Helminthoidea labyrinthica* dell'*Eocene*. (Veduta panoramica del fianco destro di Val Pentema, osservata dal M. Moro; Appennino genovese).

34. Sinclinale rovesciata nella serie dei calcari marnosi dell'*Eocene* (*E.*) posante sugli Argilloschisti (*Arg. sch.*). (Fianco meridionale del M. Palazzo, destra di Val D'Arda; Appennino piacentino).

35. Sovrapposizione concordante della potente serie marnoso-arenacea (*Macigno, M.*) sugli argilloschisti bruni calcariferi (*Arg. sch.*). (Sponda destra del F. Reno, presso il Casello ferrov. 60, 4 Km. a monte di Bagni della Porretta).

36. Sinclinale rovesciata e ripiegata nella serie dei calcari marnosi dell'*Eocene*, posante sopra gli Argilloschisti (*Arg. sch.*).

(Fianco meridionale del M. Carameto, visto da Umbria, sinistra di Val Ceno; Appennino piacentino).

37. Rovesciamento stratigrafico dell'Oligocene inferiore, quasi di fronte alla borgata Rostegazzo. (Sud di S. Sebastiano Curone); (*m.* marne grigie; *ar.* strati arenacei).

38 (Da fot.). Letti-borse di *Tufo.* (Placche di Tufo sulla zona pliocenica; strada di Morrano; Nord di Orvieto).

39. Ondulazioni nella serie argilloschistosa calcarea ed arenacea dell'*Eocene.* (Fianco S. E. del M. Piernaut, visto dalla Cima del Tavan; Colle di Tenda).

40. Ondulazioni nella serie schistoso-calcarea ed arenacea dell'*Eocene.* (Cresta principale della Cima dei Gherra, vista dalla Cima del Cuni; Est del Colle di Tenda).

41. Rovesciamento nella serie dell'*Oligocene* inferiore costituito di strati arenacei (*ar.*) sovrastanti alle marne grigiastre (*m.*). (Destra di Val Tidone, presso Molino Paolazzo, sotto Ruino; Appennino pavese).

42 (Da fot.). Sinclinale nella serie marnoso-calcarea grigia dell'*Eocene.* (Fianco sinistro di Val Tronto, a monte di Acqualagna).

43. Ondulazioni negli strati calcarei grigio-rosei e verdicci dell'*Eocene.* (Sezione sotto borgata Colle sul Lago Trasimeno, 2 Km. ad Est di Passignano).

44. Pieghettature ed ondulazioni nella serie *cretacea* (*Cr.*) di passaggio dall'Infracretaceo (*Infr.*) di M. Pratofiorito al *Macigno* (*M.*) eocenico. Colle Foce al Lago (1103 m. sul l. m.) a Nord dei Bagni di Lucca. (Per dettagli vedi: F. Sacco, *L'Appennino dell'Emilia,* 1893, p. 44 (466).

45. Forte raddrizzamento, con probabile grande piega, nella serie arenacea *eocenica* (*M.*) del M. Prado e negli Argilloschisti bruni (*Arg.*) con Calcare. (Lama della Lite. Fianco N. O. del M. Prado; Alto Appennino modenese verso la Garfagnana).

46. Pieghe nella serie marnoso-arenacea grigiastra. (Lato sinistro di Val Marecchia sotto Pozzale, tra lo sbocco del T. Senatello ed il Molino della Fornace; S. O. di Pennabilli).

47. Pieghe nella serie calcarea *eocenica.* (Fianco meridionale del gruppo del M. Moro, ad Ovest di Torriglia).

48. Piega a ginocchio nella serie marnoso-arenacea del M. Granaglione (lato N. O.), vista da Castelluccio, a S. E. di Bagni della Porretta. (Alto Appennino bolognese).
49. Pieghe della serie arenacea (*Macigno, M.*) compresa tra gli Argilloschisti (*Arg.*) nei monti ad Est di Zignago Sassetta. (N. O. di Calice al Cornoviglio).
50. Piega rovesciata nella serie arenacea (*Macigno, M.*) del M. Cusna (2121 m. s. l. m.) e degli Argilloschisti bruni e rosso-violacei (*Arg.*) della regione Prati di Sara. (Fianco occidentale del M. Cusna visto dal M. Belfiore; Alto Appennino modenese).
51. Piega a sinclinale nella serie arenacea (*Macigno, M.*) sovrastante agli Argilloschisti (*Arg.*). Fianco destro della Valle del Reno sotto Poggio Torraccia. (Sud di Bagni della Porretta).
52. Grandi pieghe nella serie marnoso-arenacea (*Macigno*), sulla faccia S. E. del Colle I Pratacci, di fronte ad Ospitale. (Sud di Fanano, nell'alto Appennino bolognese).
53. Ripiegamenti ad angolo acuto negli Argilloschisti bruni ofiolitiferi del *Cretaceo*. (Tra Grezzo e Pietracervara, ad Ovest di Bardi; Appennino piacentino).
54. Pieghe ripetute e coricate nella serie schistoso-calcareo-arenacea dell'*Eocene*. (Faccia meridionale del M. Bertrand; N. E. di Tenda).
55. Pieghe pigiate e coricate negli schisti arenacei grigio-bruni dell'*Eocene*. (Sezione sul mare, vista dalla Casa di Guidoni a Vernazza; Ovest di Spezia).
56. Ondulazioni nella serie degli strati e banchi marnosi ed arenaceo-sabbiosi del *Miopliocene*. (Sponda destra del T. Apsa, poco più di 1 Km. a monte di Macerata Feltria).
57. Pieghe degli Argilloschisti bruni del *Cretaceo*, racchiudenti un piccolo ammasso (*O.*) ofiolitico di 1 m. e $^1/_2$ di diametro apparente. (Destra di Val Taro, lungo la strada provinciale, $^1/_2$ Km. a monte di C. Boceto, presso Borgotaro).
58. Pieghe ad angolo negli schisti marnoso-arenacei grigio-giallastri. (Lungo la strada carrozzabile sopra Ostia, in Val Taro).
59. Pieghe ad angolo negli strati schistoso-calcarei del M. Chia-

pozzo. (Fianco meridionale del M. Chiapozzo, visto da M. Biscia; Appennino ligure tra Varese e Borzonasca).

60. Pieghe coricate negli schisti calcarei. (Sponda destra del T. Milia, tra Poggio le Querce e Poggio Macupolo; Massetano).

61. Pieghe ad angolo negli strati calcarei del *Giurese*. (Sezione lungo la strada carrozzabile, sulla destra del Serchio, 1 Km. a monte di Diecimo; Nord di Lucca).

62. Piega, probabilmente in sinclinale rovesciata, nella serie schistosa (*sch.*) ed arenacea (*M.*) dell' Eocene. (Regione delle cave di *Macigno* sulla destra di Val Mugnone, di fronte a Fiesole, presso Firenze).

63. Piega in anticlinale locale nella serie dei banchi sabbiosi giallastri del *Miopliocene*. (Lungo la strada sulla sinistra del T. Apsa, poco a monte di Macerata Feltria).

64. Ripiegamenti negli strati marnosi grigi del *Piacenziano*. (Sezione di trincea ferroviaria presso il ponte sul T. Pesio; Nord di Mondovì).

65 (Da fot.). Ripieghettature negli strati marnosi ed arenacei dell'*Eocene*. (Sponda destra del T. Burano, di fronte all'Abbadia, poco a monte del Passo del Furlo; Fossombrone).

66 (Da fot.). Piega ad orecchio nelle marne calcaree. (Destra di Val Botena, presso il Molino di Botena, a N. E. di Vicchio; Mugello orientale.

67 (Da fot.). Anticlinale nella serie marnoso-calcarea grigia dell'*Eocene*. (Fianco sinistro di Val Tronto, 1 Km. circa a monte di Acquasanta).

68. Piega e sollevamento nella serie marnoso-arenacea del *Miopliocene*. (Fianco destro di Val Lamone, di fronte al Cimitero di S. Eufemia; Appennino di Romagna).

69. Anticlinale locale nella formazione schistosa marnoso-calcarea grigia a *Zoophycos* dell'*Eocene*. (Colle Forche; Ovest di Amandola, contro le falde orientali, *secondarie*, dei Monti Sibillini).

70 (Da fot.). Arricciamenti in una piega anticlinale rovesciata nella serie calcareo-marnosa dell' *Eocene*. (Sinistra del T. Vomano, poco a valle e di fronte a Cusciano; a Nord del Gruppo del Gran Sasso d'Italia).

71 (Da fot.). Pieghe negli strati calcarei del *Cretaceo*. (Sinistra del T. Candigliano presso Acqualagna; Appennino marchigiano).

72 (Da fot.). Pieghe nei calcari del *Lias* medio. (Destra del T. Burano, 3 Km. a valle di Cantiano; Appennino marchigiano).

73. Sinclinale nei calcari marnosi dell'*Eocene* inferiore. (Sponda destra del T. Candigliano, 2 Km. a N. E. di Acqualagna).

74 (Da fot.). Anticlinale locale nella serie marnoso-arenacea; presso la Scheggia. (Appennino di Gubbio).

75. Ondulazioni in un banco di Trachite. (Parte inferiore della Valle delle Pilete, 2 Km. ad E. N. E. di S. Vincenzo; Campiglia Marittima).

76. (Da fot.) Pieghe pigiate (da pressione *ab alto*) nelle marne argillose bleuastre, fossilifere, del *Piacenziano*. (Fianco sinistro del Torrente Ghidone, presso l'affluenza del Rio di Cherasco; sulla destra della Stura di Cuneo).

77. Raddrizzamento e pieghe nella serie marnoso-arenacea. (Sezione naturale presso il Ponte di Ca Bassa sulla sinistra del Santerno, quasi di fronte al Km. 13; Appennino di Romagna).

78 (Da fot.). Anticlinale locale nella serie marnoso-arenacea. (1 Km. a valle della Colla di Casaglia in Val D'Elsa; Appennino tosco-romagnolo).

79. Pieghe coricate in una zona marnoso-calcarea, scagliosa, grigia, compresa tra banchi e strati marnoso-arenacei (effetto di compressione *ab alto*). (Sponda destra del T. Biscuvio, sotto Cornioleto, 2 Km. a monte di Apecchio; Appennino tra Urbania e Città di Castello).

80 (Da fot.). Ondulazioni nella serie calcareo-marnosa dell'*Eocene*. (Sinistra del T. Vomano, di fronte alla Fonte di Cusciano).

81 (Da fot.). Locale sinclinale rovesciata nei calcari del *Lias*. (Spaccato lungo la strada carrozzabile presso C. S. Orso, a Sud di Spoleto).

82 (Da fot.). Pieghe nella serie calcareo-marnosa grigio-bianca. (Sponda destra del F. Metauro, al Ponte delle Piangole; Sud di Urbino).

83 (Da fot.). Ondulazioni nella serie marnoso-sabbioso-arenacea del *Miopliocene*. (Presso Linaro, Mercato Saraceno; Appennino di Romagna).

84 (Da fot.). Pieghe coricate dei banchi calcarei biancastri inglobati fra gli schisti bruni. (Lungo la strada carrozzabile a S. O. di Collagna, sinistra della Secchia; Alto Appennino modenese).

85. Ripiegamenti e rovesciamento nella serie marnoso-arenacea (*M.*) posante sugli Argilloschisti (*Arg. sc. ofiolitiferi*). (Fianco N. E. del M. Cervarola, sopra Roncoscaglia, come vedesi da poco sopra Sestola; Appennino modenese).

87. Ripiegamenti negli straterelli marnoso-arenacei del *Tongriano*. (Presso La Costa, salendo a Musigliano; Nord di S. Sebastiano Curone).

88. Ripiegamenti con rovesciamenti opposti negli schisti di passaggio dal Cretaceo all'Eocene. (Lungo la strada a Sud di Lupazzano; Appennino parmense).

89. Pieghe nel *Flysch* eocenico. (Di fronte a Maisonmeane; Valle dell'Ubayette).

90. Pieghe (che si estendono per 20 metri di lunghezza) nelle marne sabbiose del *Piacenziano*. (Lungo il T. Mondalavia (Bene-Vagienna), poco a monte del Ponte di Madonna delle Grazie). Effetto di pressione *ab alto*.

91. Pieghe nelle marne sabbiose del *Piacenziano*. (Sotto Breolungi (Mondovì), sulla destra del T. Pesio). Effetto di pressione *ab alto*.

92. Pieghe pigiate negli Argilloschisti. (Lungo la strada provinciale poco a monte della Cantoniera di Colle Cento Croci, Nord di Varese Ligure).

93 (Da fot.). Ondulazioni ripetute nella serie marnoso-arenacea dell'*Eocene*. (Lungo la strada carrozzabile ad Ovest di Anghiari, presso la Fattoria La Speranza; Monti di Arezzo).

94 (Da fot.). Piega in anticlinale composta, nella serie marnoso-calcarea eocenica. (Ovest della Stazione ferroviaria di Cagli).

95. Piega a ginocchio negli Argilloschisti ofiolitiferi. (Destra della Trebbia presso la strada nazionale, 1 Km. a valle di Ottone).

96. Corrugamenti stipati e coricati della serie calcarea del-

l'*Eocene*. (Falde orientali del Monte Lesima osservate dalla strada nazionale di Val Trebbia, poco a monte di Ponte Organasco).

97. Contorsioni negli Argilloschisti grigio-violacei. Carmine presso Ruino (tra Montalto pavese e Zavattarello).

98. Pieghe stipate e rovesciate negli Argilloschisti. Di fronte al *Macigno* della Porretta. (Fianco destro di Val del Reno bolognese).

99. Ripiegature negli strati calcarei dell'*Eocene*. (Fianco meridionale del M. Colletto, visto dal Monte delle tre Croci; Nord di Torriglia nell'Appennino genovese).

100. Grandi ripiegature nella serie del *Macigno*. Fianco orientale del M. Grande, visto da Montacuto dell'Alpi. (Sud di Lizzano in Belvedere; Alto Appennino bolognese).

101. Pieghe coricate nella serie degli strati calcarei ad *Helminthoidea labyrinthica* dell'*Eocene*. Gruppo del M. Alfeo (Est di Ottone), visto nel suo fianco meridionale da Fontanigorda.

102. Ondulazioni negli strati gessosi del *Trias* di Sassalbo, tra Fivizzano e Collagna.

103. Piega locale in anticlinale sdoppiata nella serie calcarea ed arenacea. (Sezione presso la strada nazionale, poco sopra Madonna della Pergola, a Nord di Gubbio).

104. Contorsioni (accompagnate da piccole fratture con scorrimenti, tralasciati nel disegno) negli Argilloschisti bruni alternati con straterelli arenacei. (Fianco sinistro di Val Cedra sotto Borgata Canova; Appennino parmense).

Fig. 4

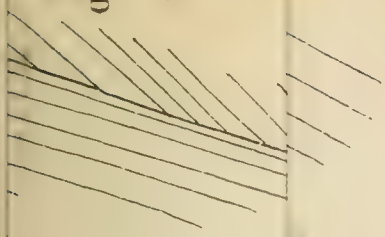
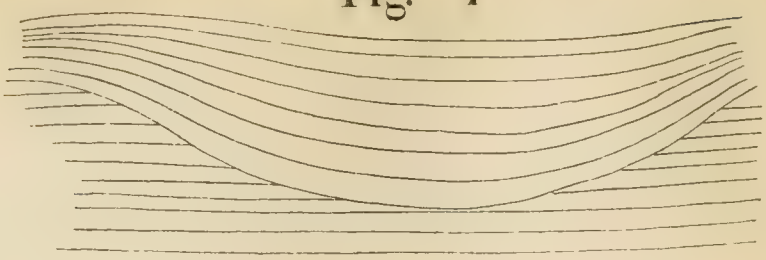


Fig. 7



3

Fig. 14

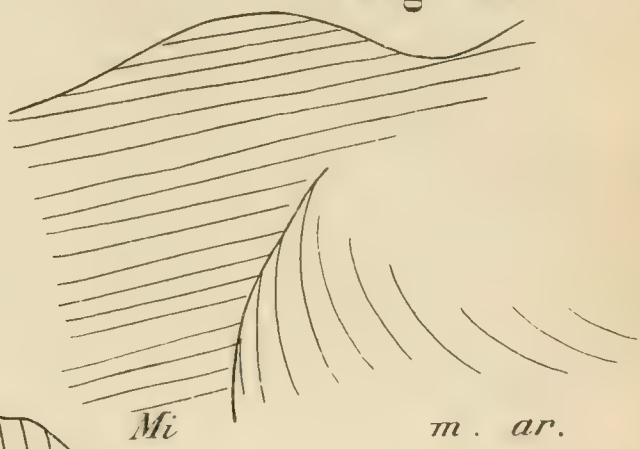
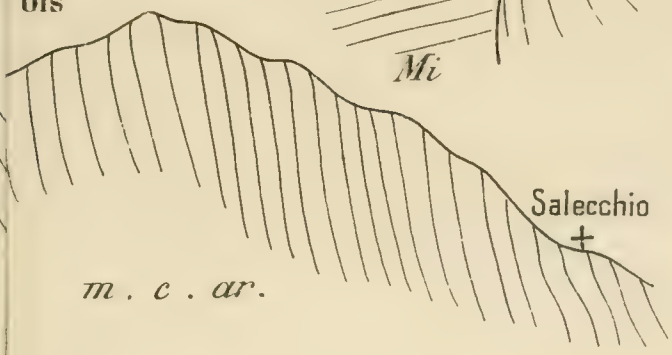


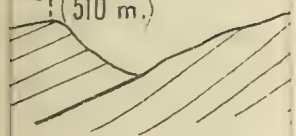
Fig. 10

bis



n . c . ar.

.Egidio
(510 m.)



Cr.

M. Pincio

Val Marecchia

erra

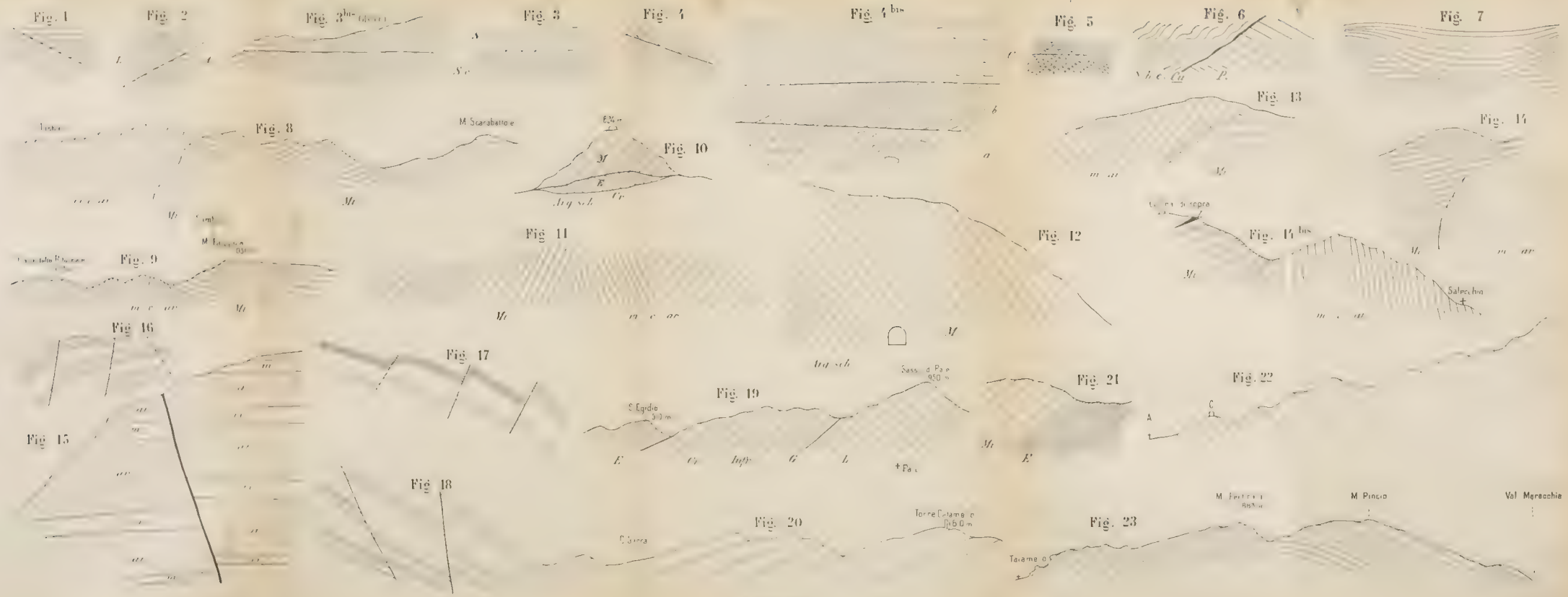
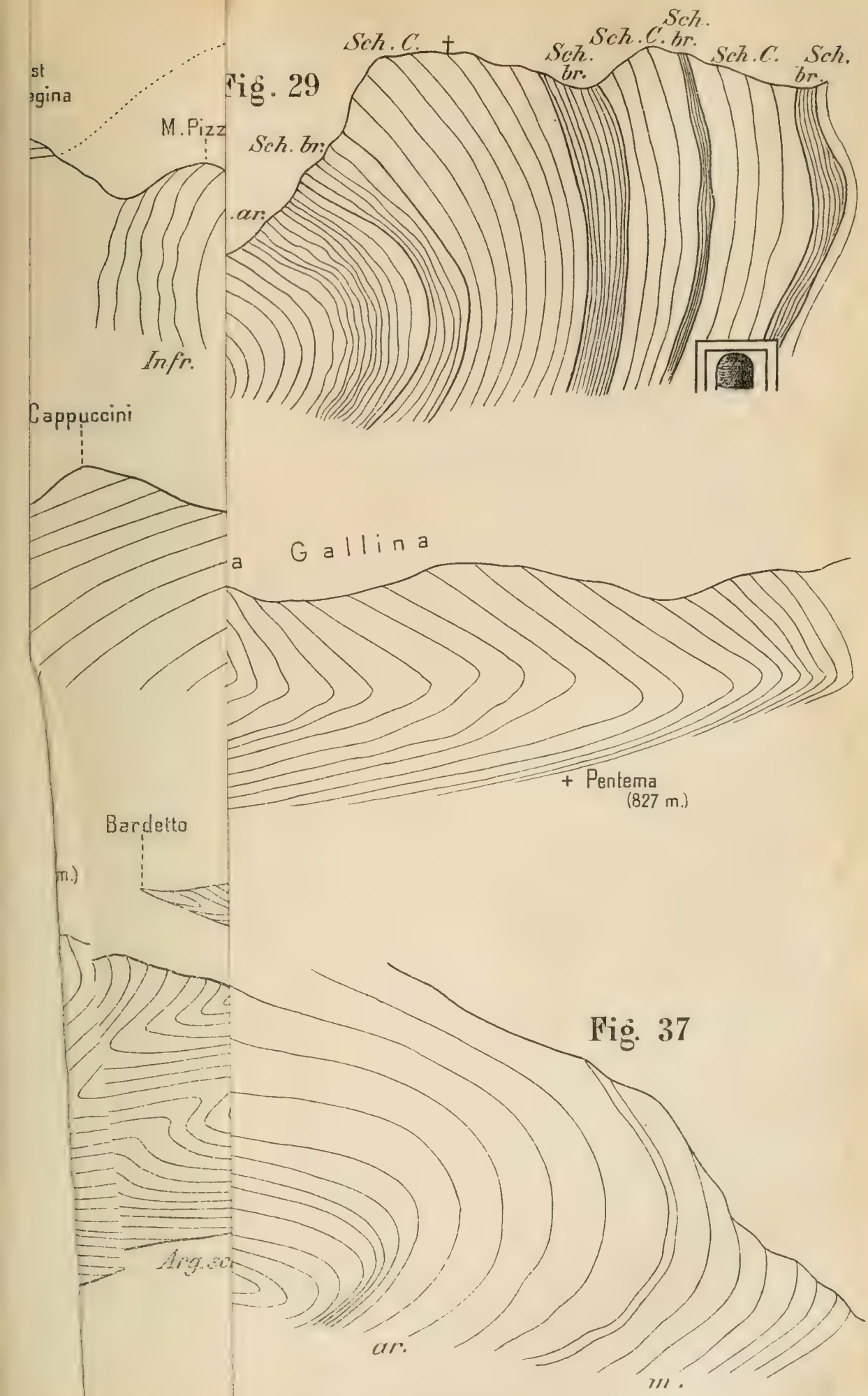


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3bis
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 4bis
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
M. Scarabattole
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 14bis
Salecchio
Fig. 9
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 15
Fig. 18
Fig. 19
S. Egidio
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 20
Fig. 23
M. Pincio
Val Maracchia


st
egina
M. Pizz
Infr.
Cappuccini
Fig. 29
Sch. C.
Sch. br.
Sch. C. br.
Sch. br.
Sch. C.
Sch. br.
Sch. br.
.ar.
a Gallina
+ Pentema
(827 m.)
Bardetto
m.)
Fig. 37
Arg. sc
ar.
m.

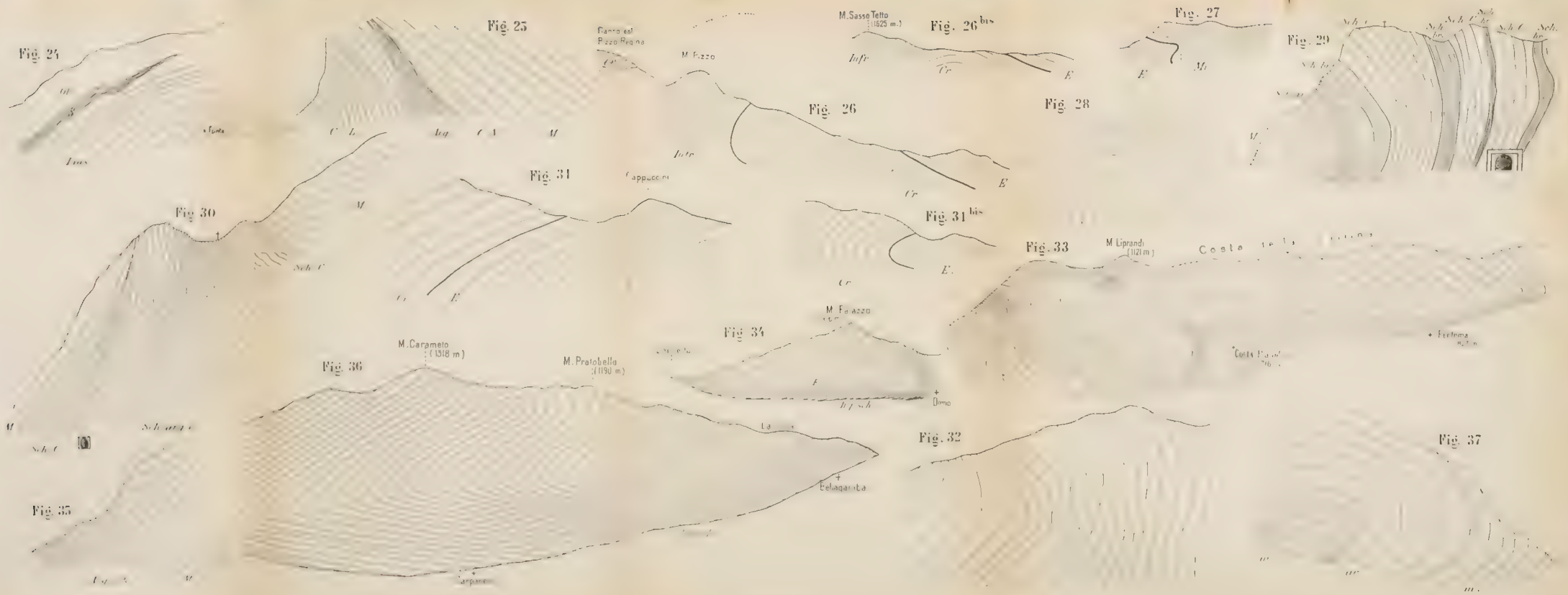
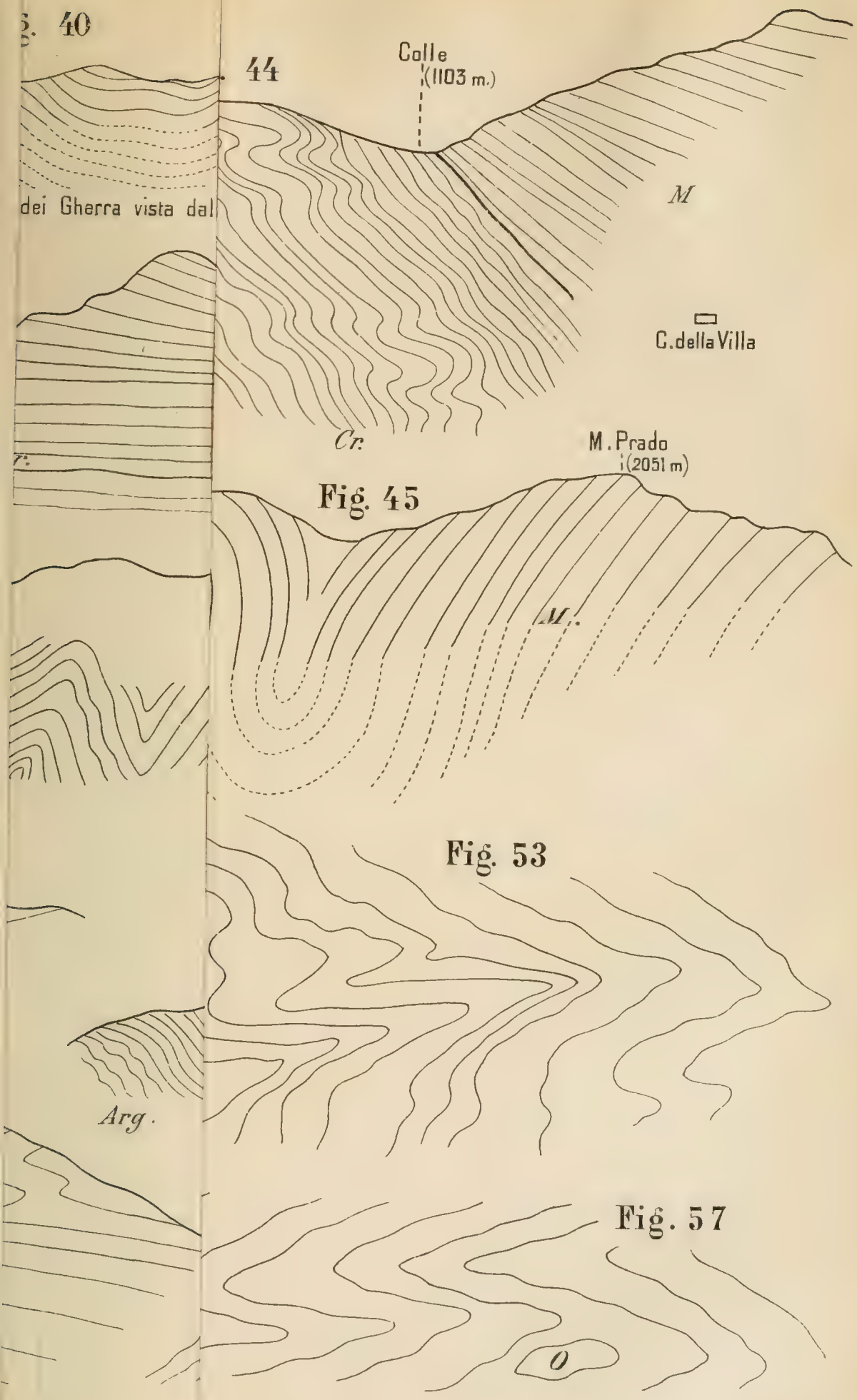


Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 26 bis
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 31 bis
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
M. Sasso Tetto (1625 m.)
M. Pizzo
M. Liprandi (1121 m)
M. Carameto (1318 m)
M. Pratobello (1190 m)
Costa
Domo
Belagarita


. 40
44
Colle
(1103 m.)
dei Gherra vista dal
M
C. della Villa
Cr.
M. Prado
(2051 m)
Fig. 45
M.
Fig. 53
Arg.
Fig. 57
O

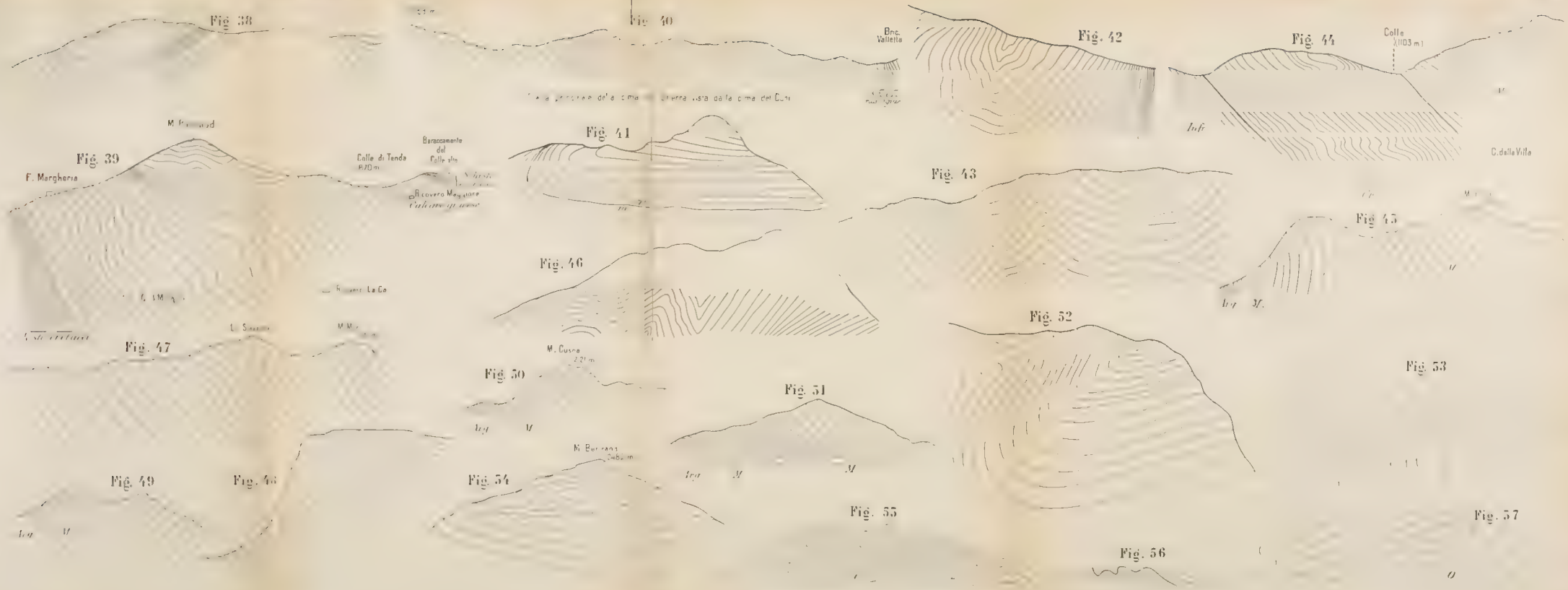


Fig. 38
Fig. 40
Bric. Valletta
Fig. 42
Fig. 44
Colle (1103 m)
C. della Villa
Fig. 39
F. Margheria
Colle di Tenda 870 m
Baraccamento del Colle alto
Ricovero Maggiore
Fig. 41
Fig. 43
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47
M. Cusna
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 49
Fig. 48
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57

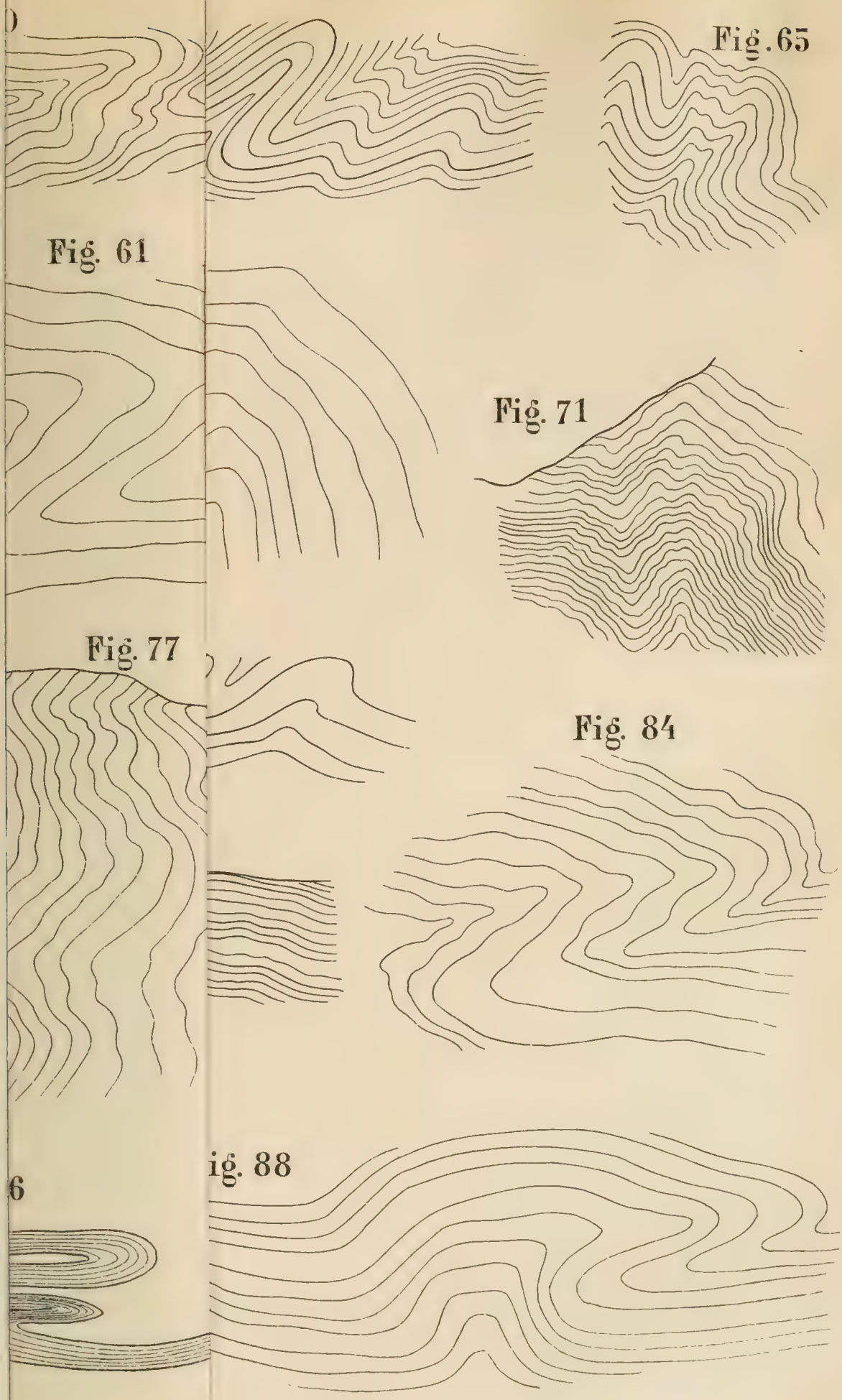
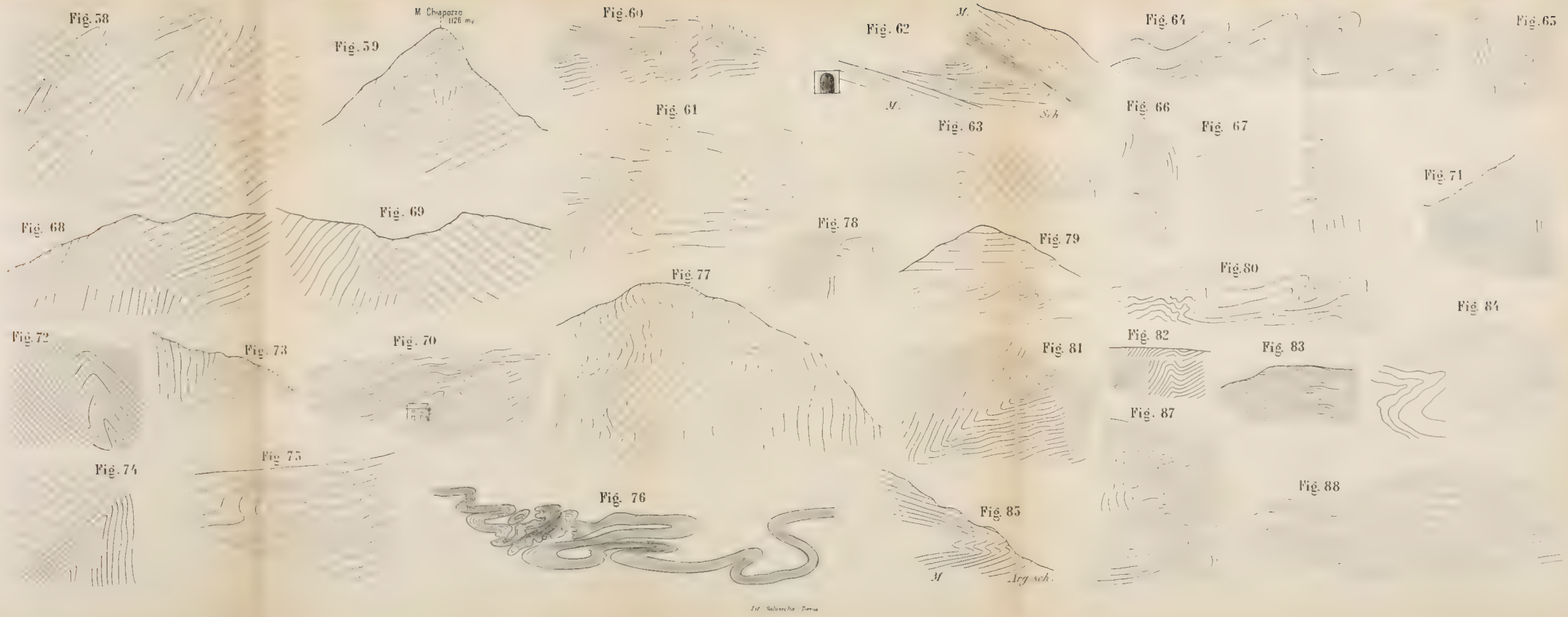


Fig. 65
Fig. 61
Fig. 71
Fig. 77
Fig. 84
ig. 88



Lit. Salussolia Torino

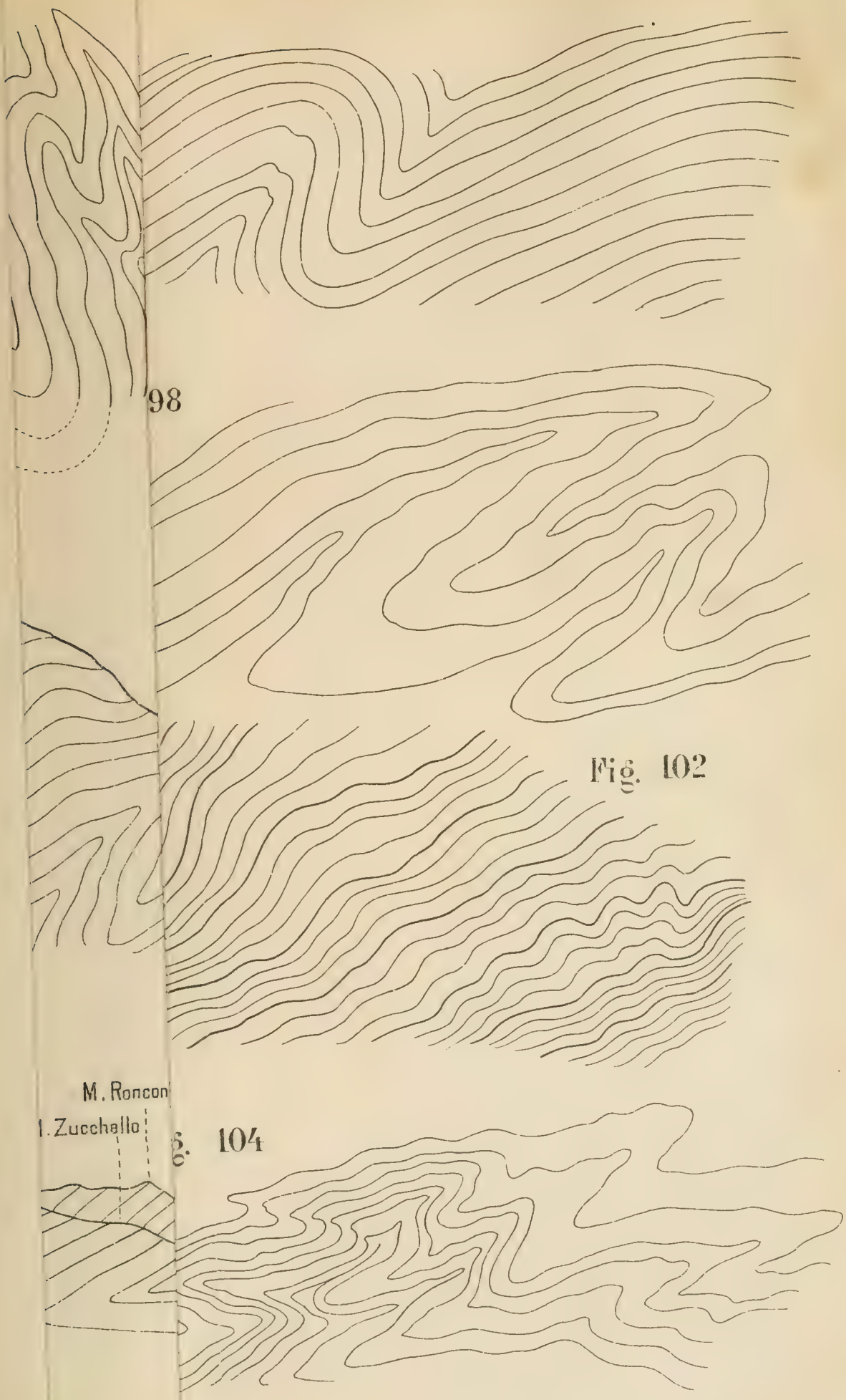

98
Fig. 102
M. Roncon
1. Zucchello
g. 104

Fig. 89

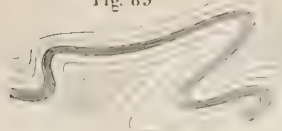


Fig. 90

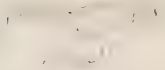


Fig. 91

Fig. 92

Fig. 93

Fig. 94

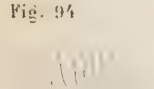


Fig. 95

Fig. 96

Fig. 97

Fig. 98

Fig. 102

Fig. 99

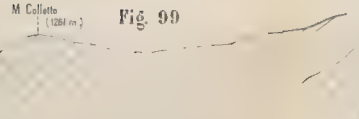


Fig. 100

Fig. 101

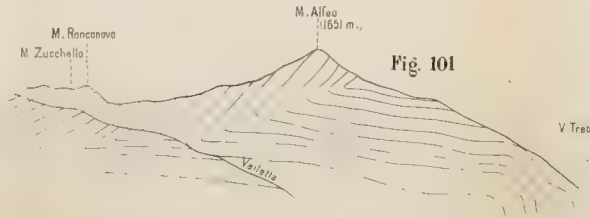


Fig. 103

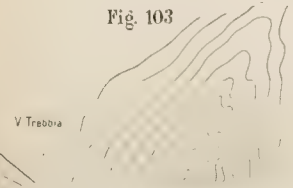


Fig. 104

Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche.

Nota di BEPPO LEVI.

1. — Il problema generale, a cui principal scopo del presente lavoro è di portare un contributo, può delinearsi semplicemente così:

Sia A un punto multiplo di una superficie F, e γ un ramo di curva tracciato su F, con origine A. La superficie F ha nei successivi punti di γ punti di multiplicità assegnata (non mai crescente col progredire del punto sul ramo, e che finisce per ridursi ad 1); l'insieme di tali multiplicità si dice la *composizione della superficie lungo il ramo.* Col variare del ramo γ varia generalmente anche la composizione: esiste cioè bensì una composizione relativa al ramo generico, ma, nell'infinità dei rami passanti per A su F, esistono generalmente infinità minori di rami lungo i quali la composizione differisce più o meno dalla generica. Ora la natura algebrica fa necessariamente pensare che tra le composizioni generiche e le speciali intercedano relazioni, la cui conoscenza sarebbe certamente giovevole alle applicazioni medesime della nozione della composizione. — Tali relazioni esistono di fatto e per particolari casi di punti doppi furono trovate, per via analitica, dal prof. Segre [1]; ma del problema generale non si ha nozione alcuna.

La questione è qui trattata in modo esauriente pei punti

---

[1] *Sulla composizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (" Annali di Matematica ", Serie II, vol. 25). Cfr. per altre determinazioni di tali legami: Levi, *Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche* (" Ann. di Mat. ", Serie III, vol. 2°).

doppi uniplanari [1]; si dimostra che i rami di composizioni singolari si distinguono in due specie diverse: rami che contengono più punti multipli di F appartenenti ad un intorno dello stesso ordine di A e rami che hanno un contatto più o meno elevato colla curva doppia di F o colla curva di contatto di F col cono circoscritto da un punto non appartenente al piano tangente ad F, in A; e si stabilisce una formola generale che permette di determinare la composizione della superficie lungo un ramo assegnato, quando sia nota la composizione nel punto A della detta curva di contatto e della curva doppia (n. 8). E qui si impongono due osservazioni: l'una, necessaria perchè abbia senso il precedente enunciato, è che le curve contorni apparenti di F rispetto ai punti dello spazio esterni al piano tangente in A hanno tutte in A le stesse tangenti, anzi hanno tutte comune un certo sistema di punti successivi ad A (n. 4, 9, 10); l'altra, meno evidente, ma più essenziale per la questione principale, è l'inversione del risultato espresso nella nominata formola generale, dimostrandosi che la composizione della curva contorno apparente e della curva doppia è completamente arbitraria, poichè, assegnata a piacere (in un suo punto almeno triplo) la composizione della curva complessiva formata dalle due curve prese con convenienti multiplicità (anzi assegnata la parte della curva che passa per tal punto), purchè compatibilmente colla condizione che tal curva possa appartenere a una falda lineare, esistono superficie aventi tal punto come doppio e tal comportamento in esso per la curva nominata (n. 14).

La ricerca si conduce per via sintetica, che assai meglio dell'analitica si presta all'uopo. Ma prima ed essenzial difficoltà alla ricerca analitica è la caratterizzazione, nell'equazione, della singolarità del punto. Ad essa sono indirizzate alcune considerazioni finali, ove si determina l'equazione generale dei punti doppi uniplanari di data composizione sul ramo generico, esten-

---

[1] I punti doppi conici e biplanari non offrono argomento a studio, da questo punto di vista: ai primi è successiva una conica, tutta di punti semplici; ai secondi due rette di punti semplici; solo il punto comune a queste può essere doppio, ed allora è biplanare o conico, e si ripeteranno per esso i fatti enunciati.

dendo anzi tal determinazione all'analoga singolarità per la ipersuperficie ad un numero qualunque di dimensioni, ed applicandola ad alcune ulteriori deduzioni (n. 15 a 18).

Si indica in appendice la forma dei punti considerati.

2. — Considerazioni preliminari. — Si è definito nel n° prec. la composizione della superficie lungo un ramo assegnato γ: ma nella definizione di tal composizione non è già il ramo che ha ufficio essenziale, bensì quella successione di primi suoi punti in cui la superficie ha punti multipli: sarà perciò più proprio sostituire alla considerazione del ramo quella dell'*itinerario,* definito come una qualsiasi successione (finita) di punti di un ramo; ogni itinerario è comune ad infiniti rami e si può prolungare coll'aggiunzione di punti successivi all'ultimo suo punto.

Se A' è un punto di F *successivo ad* A, esso diviene *punto effettivo* sopra una superficie F' trasformata di F per una trasformazione birazionale dello spazio avente A come punto fondamentale isolato: esso appartiene ad una linea a' di F, *successiva ad* A, cui tale trasformazione fa corrispondere una *linea effettiva* di F'. Se A'' è un nuovo punto, successivo ad A', esso non diverrà ancora effettivo su F', ma se ancora si assoggetta F' ad una trasformazione birazionale dello spazio avente A' come punto fondamentale isolato, si otterrà una superficie trasformata F'' su cui A'' è punto effettivo. E così via.

Le trasformazioni birazionali nominate saranno sempre, in quanto segue, trasformazioni quadratiche a conica fondamentale degenere. È noto che se il sistema omaloidico di una trasformazione birazionale quadratica ha conica fondamentale degenere, ugual degenerazione ha pure la conica fondamentale del sistema omaloidico dello spazio trasformato; e i punti doppi delle coniche si corrispondono per la trasformazione. — Nello spazio di F si dirà V il punto doppio della conica fondamentale, V' sarà il punto analogo nello spazio di F'. Dovendo trasformare F' in una nuova superficie F'' si prenderà V' come punto doppio della conica fondamentale della nuova trasformazione e si chiamerà V'' il punto analogo nello spazio di F''. Così ancora, dovendo assoggettare F'' ad una ulteriore trasformazione si prenderà V''

come punto doppio della conica fondamentale della nuova trasformazione e così via.

Nel seguito, punti successivi ad A si indicheranno colla lettera A con apici ed indici; gli stessi apici ed indici si attribuiranno ad F e a V per rappresentare le trasformate di F su cui tali punti sono effettivi, ed i corrispondenti punti V. La superficie polare (1ª) di un punto V rapporto alla corrispondente F si rappresenterà colla lettera Φ affetta dai medesimi apici ed indici. Se F e $F^{(\lambda)}$ sono due superficie, trasformate l'una dell'altra per una delle nominate successioni di trasformazioni quadratiche, anche le loro polari Φ, $\Phi^{(\lambda)}$ sono trasformate l'una dell'altra per la stessa successione di trasformazioni [1]. Se ora $A^{(\lambda)}$ è un punto doppio (effettivo) di $F^{\lambda)}$, $\Phi^{(\lambda)}$ passa per esso. Si conclude che *la superficie* Φ, *polare di un punto generico* V *rapporto ad* F, *passa (semplicemente) per tutti i punti doppi di* F, *siano essi effettivi, o successivi a punti doppi effettivi.*

Se V non appartiene al piano tangente ad F in A, supposto punto doppio uniplanare, e se A' è un punto doppio successivo ad A, la retta $V'A'$ non sarà tangente ad F' in A' [2] e così se una successione di punti $A\,A'A''\ldots$ son tutti doppi per F, le rette $V'A'$, $V''A''$, ... non saranno tangenti in essi punti rispettivamente ad F', F'', ... Le superficie Φ', Φ'', ... passano per questi punti avendovi come piani tangenti i polari di V', V'', ... rispetto ai coni tangenti a F', F'', ... in essi: se dunque questi coni si riducono a piani doppi, Φ', Φ'', ... saranno esse stesse tangenti a questi piani; al contrario il loro piano tangente segherà questi coni in due generatrici distinte se essi non son degeneri, e se essi si spezzano in una coppia di piani li segherà nell'asse della coppia.

Se dunque $A^{(\lambda)}$ *è un punto doppio uniplanare, non solo* Φ *passa per esso, ma ancora passa per la retta* $a^{(\lambda+1)}$ *ad esso successiva* e viceversa *se* Φ *contiene tutta una linea di* F *successiva ad* $A^{(\lambda)}$, $A^{(\lambda)}$ *è uniplanare e tal linea è una retta.* Potrà poi essere linea di punti doppi, ovvero di punti semplici: in questo caso suc-

---

[1] Cfr. Segre, l. c., p. 34. Levi, *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche ecc.* („ Annali di Mat. „, Serie II, vol. 26), n. 8. Richiamerò questo lavoro col segno $\mathfrak{A}$.

[2] Poichè $V'A'$ deve tagliare F' in A' non più di due volte.

cessivamente ad ogni punto di questa retta, semplice per F. Φ non conterrà altri punti comuni ad F che punti della retta medesima. Difatti il piano $V^{(\lambda+1)} a^{(\lambda+1)}$ è tangente in questi punti ad F, mentre non può in essi esser tangente a Φ (che passa semplicemente per $A^{(\lambda)}$). — E *se* invece $A^{(\lambda)}$ *è punto doppio conico, la curva* $C^{(\lambda)}$ *intersezione di* $F^{(\lambda)}$ *e* $\Phi^{(\lambda)}$ *vi passa con due rami a tangenti distinte; se è doppio biplanare con due rami* (totali o parziali) *a tangenti coincidenti nell'asse della coppia di piani tangenti.*

3. — Potenza di un itinerario. — Itinerari generici ed itinerari speciali. — Il punto A essendo doppio su F, i punti di F successivi ad A sono tutti doppi o semplici. Se k è il numero dei punti doppi di un itinerario, chiameremo *potenza dell'itinerario* il numero $2k$, o il numero $2k+1$, secondochè l'ultimo punto doppio dell'itinerario è biplanare o conico, o è uniplanare. Così la potenza determina il numero dei punti doppi dell'itinerario e la natura dell'ultimo di essi. — *La potenza di un itinerario che segua una sezione piana della superficie è uguale all'abbassamento che il punto doppio* A *produce nella classe della sezione.*

Richiamando un risultato ottenuto in $\mathfrak{A}$ n° 13, si può affermare che *la potenza di un itinerario generico uscente da un punto* A *doppio uniplanare di* F, *è uguale alla potenza dell'itinerario che segue la sezione piana generica di* F *per* A; *per itinerari speciali la potenza può crescere (mai diminuire).*

Un punto doppio uniplanare si dice *nodo* o *regresso* (cuspide) *di* k-*ma specie* secondochè la potenza degli itinerari generici uscenti da esso è $2k$ o $2k+1$: le sezioni piane generiche vi hanno rispettivamente nei due casi nodo o cuspide di k-ma specie.

I n^{i} 12 e 13 di $\mathfrak{A}$ forniscono ancora una proposizione più generale della precedente. Sia $A, A', \ldots, A^{(r)}$ una successione di punti tutti doppi per F; su $F^{(r)}$ si consideri poi una successione di punti di cui primo sia $A^{(r)}$ e che appartengano ad una sezione piana di $F^{(r)}$: si dirà per brevità che i punti medesimi (o i loro corrispondenti su F) si succedono sopra una sezione piana di F per $A^{(r)}$. Si può allora enunciare che: *l'itinerario generico su* F *che contiene i punti* A, A$'$, ..., A$^{(r)}$ *ha potenza uguale all'itinerario costituito da* A, A$'$, ..., A$^{(r)}$ *e da una successione di*

altri punti di F *sopra una sezione piana generica per* $A^{(r)}$; *ogni itinerario su* F, *contenente* A, A′, . . . , $A^{(r)}$ *ed avente potenza diversa, avrà potenza maggiore e, se successivamente ad* $A^{(r)}$ *non possiede mai un punto appartenente con un altro punto dell'itinerario ad una stessa retta doppia successiva ad* A *(immediatamente o non), e se* $A^{(r+1)}$ *è il primo suo punto successivo ad* $A^{(r)}$, *la curva* C *intersezione di* F *e* Φ *passa pei punti* A, A′, . . . , $A^{(r)}$, $A^{(r+1)}$ (1).

Conseguenza immediata di questa proposizione è la seguente, che appare come una generalizzazione della prima parte:

L'itinerario generico su F *che contiene i punti* A, A′, . . . , $A^{(r)}$ *ha potenza uguale all'itinerario generico di ogni infinità (anche semplice infinità) d'itinerari contenenti i punti* A, A′, ... , $A^{(r)}$ *e non aventi altri punti comuni successivi, purchè non si verifichi che, sull'itinerario generico di detta infinità un punto successivo ad* $A^{(r)}$ *stia con un altro punto dell'itinerario su una stessa retta doppia successiva ad* A. Infatti l'itinerario generico della infinità considerata deve avere potenza uguale e non maggiore dell'itinerario costituito da $A, A', \ldots, A^{(r)}$ e da punti di una sezione piana generica di F per $A^{(r)}$; altrimenti, per la seconda parte della proposizione precedente, la curva C dovrebbe passare per $A, A', \ldots, A^{(r)}$ e pel punto successivo ad $A^{(r)}$ sull'itinerario considerato, e ciò è assurdo perchè, col variare di questo itinerario, questo punto successivo ad $A^{(r)}$ prende una infinità di posizioni.

4. — La curva C intersezione di F e Φ si comporrà generalmente di due parti: l'una Δ costituita dalle curve multiple di F, l'altra Γ, contorno apparente di F rispetto a V. Ciascuna di queste parti potrà a sua volta essere algebricamente riduttibile ed a ciascuna delle curve algebricamente irreduttibili che la compongono apparterrà, come parte di C, una multiplicità

(1) Nei citati n.i di $\mathfrak{A}$ si parla di due diverse polari F_p e F_{s-1} di V rapporto a F; la seconda è evidentemente Φ essendo qui $s=2$; quanto alla prima si osservi la condizione $0 \leq p < s-1$; risulterà $p=0$ onde $F_p \equiv F$. Il n. 12 e l'osservazione iniziale del n. 13 dimostrano la seconda parte della proposizione; la prima parte risulta dalle conclusioni del n. 13, unitamente all'osservazione iniziale del n° medesimo e alla solita osservazione che una proposizione dimostrata per la F, può applicarsi ad una qualunque trasformata di F.

determinata: questa multiplicità sarà 1 per le componenti di Γ [1] e sempre >1 per le componenti di Δ.

Un piano qualunque per AV taglia Γ, fuori di A, nei punti di contatto delle tangenti da V alla sezione che esso fa in F e taglia Δ in punti multipli per tal sezione; e la multiplicità di ciascuno di questi ultimi punti (non escluso A) nella intersezione di C col piano è uguale all'abbassamento che il punto produce nella classe della sezione. Applicando questa osservazione alle varie sezioni di F con piani per VA si ha che:

La multiplicità complessiva di A *in* C (multiplicità di A nell'intersezione di C con un piano generico per VA) *è uguale alla potenza dell'itinerario generico uscente da* A (abbassamento di A nella classe della sezione piana generica; cfr. n. 3).

Gli itinerari che seguono le sezioni di F *con piani passanti per* VA *e per le tangenti a* C *in* A *hanno potenza superiore agli itinerari generici*, perchè A produce su tali sezioni un abbassamento della classe maggiore che sulle sezioni piane generiche. Fissati così degli itinerari di maggior potenza, si pensi di spostare V arbitrariamente nello spazio (sempre mantenendolo fuori del piano tangente a F in A); la curva C varierà, ma applicando la proposizione generale del n° prec. al caso di $r = 0$ si concluderà che essa conterrà sempre, oltre il punto A, i punti immediatamente successivi ad A su quegli itinerari speciali. *Le curve di diramazione* [2] *di* F *rispetto a tutti i punti dello spazio esterni al piano tangente in* A *hanno adunque in* A *le stesse tangenti.*

5. — Si fissi ora una di queste tangenti e si faccia variare arbitrariamente un piano per essa: muovendo contemporaneamente il punto V, pur mantenendolo fuori del piano tangente in A, si può supporre che esso resti sempre su questo piano: si conclude che l'itinerario appartenente alla sezione fatta

---

[1] Almeno se V è scelto fuori dei vertici degli eventuali coni di tangenti d'inflessione di F. Dal seguito risulta però che questa condizione è inutile (v. n. 10).

[2] Le curve C si compongono delle curve di diramazione e delle curve Δ; queste restano fisse al variare di C, onde l'enunciato sarebbe per esse illusorio.

con questo piano nella F ha, in ogni posizione di esso, potenza maggiore dell'itinerario generico.

Si aggiunga l'osservazione che *può sempre supporsi che la tangente considerata abbia comune con* F *un solo punto successivo ad* A [1]; gli itinerari determinati da tutte quelle sezioni piane hanno allora comune un solo punto successivo ad A, onde, applicando l'ultima proposizione del n° 13 si potrà affermare che *tutti gli itinerari tracciati su* F, *con origine* A, *e contenenti un punto successivo ad* A *nella direzione di una delle tangenti alle curve doppie di* F *o alla sua curva di diramazione rapporto ad un punto qualunque esterno al piano tangente in* A (supposti sufficentemente prolungati) *hanno potenza superiore agli itinerari generici uscenti da* A. Chiameremo *direzioni singolari* le direzioni di quelle tangenti.

Le proposizioni del n° 3 ci permettono ancora di determinare l'incremento della potenza, per l'itinerario generico fra questi singolari: esse ci dicono infatti ch'esso è uguale all'incremento che si verifica per l'itinerario contenuto nella sezione piana generica che ha la stessa direzione; applicando allora le osservazioni del n° precedente si verifica che tale incremento è uguale all'incremento che il numero delle intersezioni in A di quel piano generico con una curva C arbitrariamente fissata presenta rapporto al numero delle intersezioni di un piano non tangente ad essa (multiplicità di A per C). Se della curva C sono dati i caratteri di composizione, si può quindi ancora dire che *l'incremento della potenza per quegli itinerari è uguale alla multiplicità per* C *del punto successivo ad* A *nella corrispondente direzione singolare.*

---

[1] Se infatti questa ipotesi non fosse verificata, mediante una *conveniente* trasformazione cremoniana non avente in A punto fondamentale (p. es. mediante una trasf. quadratica di cui non stiano su quella tangente punti fondamentali, isolati o non), si potrebbe trasformare F in una superficie F^* con cui la tangente corrispondente non avrebbe più che due punti consecutivi comuni: e nei riguardi della composizione lungo rami corrispondenti uscenti da A e dal punto omologo A^*, F ed F^* sono l'una l'altra costituibili (Cfr. Levi, *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una trasf. birazionale fra due spazi*, questi " Atti „, 1899. V. pure il n. 1 di *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superf. algebr.*: questi " Atti „, 1898).

6. — Sia $A, A', \ldots, A^{(r)}$ una successione di punti doppi uniplanari di F: indicheremo con $P^{(r)}$ la potenza dell'itinerario generico di $F^{(r)}$ uscente da $A^{(r)}$ [1]; la potenza dell'itinerario generico di F contenente $A, A', \ldots, A^{(r)}$ sarà allora $P^{(r)} + 2r$. Sia $C^{(r-1)}$ la curva d'intersezione di $F^{(r-1)}$ con $\Phi^{(r-1)}$: essa si comporrà di una parte $C_1^{(r-1)}$ trasformata di C per la successione di trasformazioni che porta da F a $F^{(r-1)}$ e di una parte $C_2^{(r-1)}$ costituita dalle linee successive ad A che le trasformazioni hanno condotte a divenire effettive: queste linee saranno tutte rette [2] (essendosi supposti $A, A', \ldots$ uniplanari), e di esse al più una passerà quindi per $A^{(r-1)}$ e per $A^{(r)}$: si indichi con $q^{(r)} \geq 0$ la multiplicità di tal linea come parte di $C^{(r-1)}$; si indichi inoltre con $\mu^{(r)}$ la multiplicità di $A^{(r)}$ per C; la proposizione del n° preced., applicata alla $F^{(r-1)}$ e al suo punto $A^{(r-1)}$, ci dà che

$$P^{(r)} + 2 = P^{(r-1)} + \mu^{(r)} + q^{(r)}. \tag{1}$$

La relazione si mantiene esatta anche qualora si sopprima la restrizione che i punti $A, A', \ldots, A^{(r)}$ siano tutti doppi uniplanari, purchè *si convenga che* $\mathrm{P}^{(i)} = 2$ *quando* $\mathrm{A}^{(i)}$ *è doppio non uniplanare e* $\mathrm{P}^{(i)}$ *è un numero da determinarsi convenientemente, ma* ≤ 1 (anche negativo, al caso) *quando* $\mathrm{A}^{(i)}$ *è semplice.* Dalle considerazioni preliminari del n° 2 risulta infatti che se $A^{(r)}$ è doppio, non uniplanare, $C^{(r)}$ passa per esso e vi ha punto doppio: $C^{(r-1)}$ vi ha quindi punto doppio al più, onde $\mu^{(r)} + q^{(r)} \leq 2$; con maggior precisione si deve osservare che poichè $A^{(r)}$ è doppio, $A^{(r-1)}$ è doppio uniplanare o biplanare; nel primo caso $P^{(r-1)} = 3$ o $= 4$, ma ad $A^{(r-1)}$ è successiva una retta che fa parte rispettivamente, come retta semplice o doppia, di $C^{(r)}$; perchè $A^{(r)}$ sia

---

[1] Avvenendo nel seguito di dover considerare punti designati con simboli più complessi, costituiti da apici ed indici, gli stessi apici ed indici si attribuiranno al simbolo P della potenza; del pari gli stessi apici ed indici si attribuiranno al simbolo μ che tosto s'introdurrà per indicare la multiplicità dei punti considerati per C.

[2] Più propriamente curve razionali: la linea trasformata di un punto doppio uniplanare A, per una trasformazione quadratica di punto fondamentale A è una retta; trasformazioni cremoniane successive le fanno perdere la caratteristica projettiva di linea retta, ma questo particolare è privo d'interesse.

doppio per $C^{(r)}$ occorre che $\mu^{(r)}+q^{(r)}=1$ o $=0$ rispettivamente, e la formola si verifica; nel secondo caso $P^{(r-1)}=2$ e i due rami (parziali o totali) di $C^{(r-1)}$ sono entrambi tangenti alla direzione che contiene $A^{(r)}$ (n. 2) onde $\mu^{(r)}+q^{(r)}=2$, e si verifica ancora la formola. Se poi $A^{(r)}$ è semplice, $A^{(r-1)}$ è semplice o doppio conico o biplanare o è regresso di 1ª specie, onde $P^{(r-1)}\leq 3$; e se $P^{(r-1)}<3$, $C^{(r-1)}$ passa al più semplicemente per $A^{(r)}$, onde $\mu^{(r)}+q^{(r)}\leq 1$ e la formola (1) si verifica qualora si attribuisca a $P^{(r)}$ un valore ≤ 1; se invece $P^{(r-1)}=3$, $A^{(r-1)}$ è regresso di prima specie, gli itinerari generici uscenti da $A^{(r-1)}$ nelle direzioni tangenti a $C^{(r-1)}$ hanno potenza ≥ 4 (n. 5), onde $A^{(r)}$ non potrà essere semplice se non quando $C^{(r-1)}$ non passi per esso: allora $\mu^{(r)}+q^{(r)}=0$ e la formola (1) si verifica ancora per $P^{(r)}=1$.

La formola (1) fornisce una relazione ricorrente, la quale permetterà di calcolare $P^{(r)}$ tosto che siano noti i numeri $\mu^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots,r)$ e sia data una regola per determinare il valore di $q^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots)$, ricordando che $P^{(0)}=P$ è la potenza dell'itinerario generico uscente da A e la multiplicità μ di A per C (nº 4). La validità che le precedenti convenzioni le dànno per ogni itinerario, fa riconoscere in essa la completa risoluzione del problema della composizione: *saranno doppi per* F *tutti e soli quei punti* $A^{(r)}$ *per cui* $P^{(r)}\geq 2$.

7. — Il numero $q^{(r)}$ è >0 sempre e solo quando $A^{(r-1)}$ ed $A^{(r)}$ appartengano ad una stessa linea, successiva ad A, la quale faccia parte di $C^{(r-1)}$. Sia $A^{(p)}$ il punto precedente ad $A^{(r-1)}$ a cui tal linea è immediatamente successiva, $a^{(p+1)}$ la linea; su di essa staranno $A^{(p+1)}$ e tutti i punti dell'itinerario compresi fra $A^{(p+1)}$ e $A^{(r-1)}$ (1) e $q^{(r)}$ sarà uguale alla comune sua multiplicità per tutte le linee $C^{(p+1)}, \ldots, C^{(r-1)}, C^{(r)}$; il punto $A^{(p)}$ dovrà essere doppio uniplanare (2) e sarà $q^{(r)}=P^{(p)}-2$ (3). Quando $A^{(p)}$

(1) Perchè, quando un itinerario abbia abbandonato un ramo, non può più ritornarvi con punti successivi.

(2) Altrimenti $a^{(p+1)}$ non apparterrebbe a $C^{(p+1)}$ (n. 2).

(3) Per persuadersene si osservi che $q^{(r)}$ è la multiplicità di $a^{(p+1)}$ in $C^{(p+1)}$ e si ricordi che $P^{(p)}$ è la multiplicità in $A^{(p)}$ della curva $C^{(p)}$, intersezione di $F^{(p)}$ e $\Phi^{(p)}$, cioè la multiplicità d'intersezione in A delle sezioni fatte da un piano generico in $F^{(p)}$ e $\Phi^{(p)}$ (cfr. $\mathfrak{A}$, n. 4).

non è doppio uniplanare, se anche $A^{(r-1)}$ e $A^{(r)}$ appartenessero ad $a^{(p+1)}$, $a^{(p+1)}$ non è parte di $C^{(r-1)}$ (nè di $C^{(p+1)}$, ...) e dovrebbe assumersi $q^{(r)} = 0$: ora si osservi che la formola $q^{(r)} = P^{(p)} - 2$ dà appunto $q^{(r)} = 0$ se $P^{(p)} = 2$, dà invece $q^{(r)} < 0$ se $P^{(p)} \leq 1$; in quest'ultimo caso però $A^{(p)}$ è semplice, onde *a fortiori* è semplice $A^{(r)}$ e se a $q^{(r)}$ si attribuisce un valore virtuale < 0, ciò non farà che diminuire il valore che dalla formola (1) risulta per $P^{(r)}$; il che sarà sempre concesso dacchè, essendo $A^{(r)}$ semplice, dovrà essere $P^{(r)} \leq 1$, ma qualunque valore si può attribuire a $P^{(r)}$ purchè soddisfi a questa condizione. Può dunque assumersi, senza eccezione [1]

$$q^{(r)} = P^{(p)} - 2. \tag{2}$$

8. — Dopo ciò definiremo con maggior esattezza la costituzione dell'itinerario $A, A', \ldots, A^{(r)}$ nel modo seguente: Sia a' la linea successiva ad A; ad essa potranno appartenere uno o più punti dell'itinerario; li chiameremo A_1', A_2', ...; potrà avvenire che l'ultimo di questi punti appartenga col successivo ad una stessa linea di F successiva ad A (necessariamente diversa da a') ovvero che non si verifichi tal fatto. Nel primo caso rappresenteremo tal punto con $A'_{j'+1} = A_1''$ e chiameremo A_2'' il punto successivo, a'' la linea cui appartengono; a'' sarà la linea successiva (immediatamente) ad $A'_{j'}$, precedente di $A'_{j'+1}$. Nel secondo caso rappresenteremo con $A_{j'}'$, l'ultimo punto dell'itinerario, sopra a' e chiameremo ancora a'' la retta successiva ad esso, A_1'' il punto dell'itinerario successivo ad $A'_{j'}$. Di nuovo chiameremo A_1'' A_2'' ... i punti dell'itinerario che appartengono ad a'' e l'ultimo di essi $A''_{j''}$ ovvero $A''_{j''+1} = A_1'''$ secondochè esso non appartiene col punto successivo ad una linea successiva ad A, ovvero sì; chiameremo in ogni caso a''' la linea di F successiva ad $A''_{j''}$ ed A_1''', A_2''', ... i punti dell'itinerario su di essa e così via [2]. Le formole (1) e (2) dànno allora

---

[1] È però necessario notare che, per tal modo, il numero $q^{(r)}$ potendo divenir negativo, cessa d'esser vero che la potenza dell'itinerario generico contenente $AA' \ldots A^{(r)}$ è $P^{(r)} + 2r$. Tal fatto potrà ritenersi per certo solo quando si limiti il gruppo $AA' \ldots A^{(r)}$ a punti per cui $P^{(r)} \geq 0$.

[2] Non è escluso che una retta $a^{(\lambda)}$ possa contenere un punto solo: sarà allora $j^{(\lambda)} = 1$.

(3) per $s>1$, $\qquad P_s^{(\lambda)}=P_{s-1}^{(\lambda)}+\mu_s^{(\lambda)}+P_{j(\lambda-1)}^{(\lambda-1)}-4$

(4) per $s=1$ e $A_1^{(\lambda)}\neq A_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}$ [1], $\quad P_1^{(\lambda)}=P_{j(\lambda-1)}^{(\lambda-1)}+\mu_1^{(\lambda)}-2$

(5) per $s=1$ e $A_1^{(\lambda)}=A_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}$, $\qquad P_1^{(\lambda)}=P_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}=P_{j(\lambda-1)}^{(\lambda-1)}+$
$$+\mu_1^{(\lambda)}+P_{j(\lambda-2)}^{(\lambda-2)}-4.$$

Così sviluppate le nostre formole ricorrenti si prestano ad ulteriori trasformazioni che ci porteranno ad una formola esplicita, liberata dalla forma ricorrente. Si scriva infatti la (3) per tutti i valori di s fra $s=2$ e $s=j^{(\lambda)}$ e si sommino le equazioni risultanti colla (4) ovvero colla (5); si otterrà

(6) per $A_1^{(\lambda)}\neq A_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}$, $\quad P_{j(\lambda)}^{(\lambda)}=j^{(\lambda)}P_{j(\lambda-1)}^{(\lambda-1)}+\sum_{s=1,\ldots,j^{(\lambda)}}(\mu_s^{(\lambda)}-2)-2(j^{(\lambda)}-1)$

(7) per $A_1^{(\lambda)}=A_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}$, $\quad P_{j(\lambda)}^{(\lambda)}=j^{(\lambda)}P_{j(\lambda-1)}^{(\lambda-1)}+\sum_{s=1,\ldots,j^{(\lambda)}}(\mu_s^{(\lambda)}-2)-2j^{(\lambda)}+P_{j(\lambda-2)}^{(\lambda-2)}$.

Sia $AA_1'A_2'\ldots A_{j'}'\ A_1''\ldots A_{j(l)}^{(l)}$ l'itinerario considerato e sia γ un ramo che lo contenga e su cui $A_{j(l)}^{(l)}$ sia punto semplice e sia precisamente l'ultimo punto comune a γ e ad $a^{(l)}$.

Sia ν l'ordine di γ (multiplicità di A per γ), ν_1 la multiplicità di A_1' per γ; è noto che tutti i punti $A_1'A_2'\ldots A_{j'}'$ avranno per γ la stessa multiplicità e $A'_{j'+1}$, se esiste, multiplicità minore e che la somma delle multiplicità dei punti A' deve essere uguale a ν. Cosicchè, rappresentando con $\left[\frac{a}{b}\right]$ il quoziente intero della divisione $a:b$, sarà $j'=\left[\frac{\nu}{\nu_1}\right]$, e, più precisamente,

se $A_1''\neq A'_{j'+1}$ $\qquad j'=\frac{\nu}{\nu_1}$

se $A_1''=A'_{j'+1}$ $\qquad j'=\frac{\nu-\nu_2}{\nu_1}$

ove ν_2 rappresenta la multiplicità di A_1'' per γ. Con tutta generalità, detta ν_λ la multiplicità di $A_1^{(\lambda)}$ su γ, sarà

se $A_1^{(\lambda+1)}\neq A_{j(\lambda)+1}^{(\lambda)}$ $\qquad j^{(\lambda)}=\left[\frac{\nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda}\right]=\frac{\nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda}$

se $A_1^{(\lambda+1)}=A_{j(\lambda)+1}^{(\lambda)}$ $\qquad j^{(\lambda)}=\left[\frac{\nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda}\right]=\frac{\nu_{\lambda-1}-\nu_{\lambda+1}}{\nu_\lambda}$;

---

[1] Col segno $A_1^{(\lambda)}\neq A_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}$ rappresenteremo simbolicamente la non esistenza del punto $A_{j(\lambda-1)+1}^{(\lambda-1)}$.

sarà inoltre, per ipotesi,

$$\nu_l = 1 \qquad j^{(l)} = \nu_{l-1}.$$

Sostituendo a $j^{(\lambda)}$ questi valori nelle (6) e (7)', esse divengono:

per $\underline{A^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)+1} \neq A^{(\lambda)}_1,\ A^{(\lambda)}_{j(\lambda)+1} \neq A^{(\lambda+1)}_1}$,

$$(6') \qquad P^{(\lambda)}_{j(\lambda)} = \frac{\nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda} P^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)} + \sum_{s=1,\dots,j(\lambda)} (\mu^{(\lambda)}_s - 2) - 2\,\frac{\nu_{\lambda-1}-\nu_\lambda}{\nu_\lambda}$$

per $\underline{A^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)+1} \neq A^{(\lambda)}_1,\ A^{(\lambda)}_{j(\lambda)+1} = A^{(\lambda+1)}_1}$,

$$(6'') \quad P^{(\lambda)}_{j(\lambda)} = \frac{\nu_{\lambda-1}-\nu_{\lambda+1}}{\nu_\lambda} P^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)} + \sum_{s=1,\dots,j(\lambda)} (\mu^{(\lambda)}_s - 2) - 2\,\frac{\nu_{\lambda-1}-\nu_{\lambda+1}-\nu_\lambda}{\nu_\lambda}$$

per $\underline{A^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)+1} = A^{(\lambda)}_1,\ A^{(\lambda)}_{j(\lambda)+1} \neq A^{(\lambda+1)}_1}$,

$$(7') \qquad P^{(\lambda)}_{j(\lambda)} = \frac{\nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda} P^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)} + \sum_{s=1,\dots,j(\lambda)} (\mu^{(\lambda)}_s - 2) - 2\,\frac{\nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda} + P^{(\lambda-2)}_{j(\lambda-2)}$$

per $\underline{A^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)+1} = A^{(\lambda)}_1,\ A^{(\lambda)}_{j(\lambda)+1} = A^{(\lambda+1)}_1}$,

$$(7'') \quad P^{(\lambda)}_{j(\lambda)} = \frac{\nu_{\lambda-1}-\nu_{\lambda+1}}{\nu_\lambda} P^{(\lambda-1)}_{j(\lambda-1)} + \sum_{s=1,\dots,j(\lambda)} (\mu^{(\lambda)}_s - 2) - 2\,\frac{\nu_{\lambda-1}-\nu_{\lambda+1}}{\nu_\lambda} + P^{(\lambda-2)}_{j(\lambda-2)}.$$

Si divida allora l'itinerario $AA_1'\dots A^{(l)}_{j(l)}$ in *segmenti* tali che, se $A_1^{(f)} \dots A^{(f)}_{j(f)} A_1^{(f+1)} \dots A^{(g)}_{j(g)}$ è uno di essi, sia $A_1^{(f)} \neq A^{(f-1)}_{j(f-1)+1}$, $A_1^{(f+1)} = A^{(f)}_{j(f)+1}$, ..., $A_1^{(g)} = A^{(g-1)}_{j(g-1)+1}$, $A_1^{(g+1)} \neq A^{(g)}_{j(g)+1}$ (potendo un segmento ridursi ad un sol gruppo $A_1^{(f)} \dots A^{(f)}_{j(f)}$ qualora $A_1^{(f)} \neq A^{(f-1)}_{j(f-1)+1}$ e $A_1^{(f+1)} \neq A^{(f)}_{j(f)+1}$). Si pensino allora moltiplicati i due membri delle (6''), (7'), (7'') per ν_λ e scritta la prima per $\lambda = f$, la terza per $\lambda = f+1, f+2, \dots, g-1$ e la seconda per $\lambda = g$; si sommino le equazioni risultanti; si otterrà

$$(8) \qquad \nu_g P^{(g)}_{j(g)} = \nu_{f-1} P^{(f-1)}_{j(f-1)} + \sum_{\substack{s=1,\dots,j(\lambda)\\ \lambda=f,\dots,g}} \nu_\lambda(\mu^{(\lambda)}_s - 2) - 2(\nu_{f-1} - \nu_g).$$

La formola (6') rientra come caso particolare nella (8), nell'ipotesi che il segmento considerato si riduca al solo gruppo $A_1^{(f)} \dots A^{(f)}_{j(f)}$.

Si scrivano infine le equazioni (8) per tutti i segmenti in cui si scompone l'itinerario $A, A_1', \ldots, A_{j(l)}^{(l)}$ e si sommino; si otterrà (ricordando che $\nu_l = 1$):

$$
\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} P_{j(l)}^{(l)} &= \nu P + \sum_{\substack{s=1,\ldots,j^{(\lambda)} \\ \lambda=1,\ldots,l}} \nu_\lambda (\mu_s^{(\lambda)} - 2) - 2(\nu - 1) \\ &= \sum_{\substack{s=1,\ldots,j^{(\lambda)} \\ \lambda=0,1,\ldots,l}} \nu_\lambda (\mu_s^{(\lambda)} - 2) + 2 \end{aligned} \right.
$$

ove si conviene che $\nu_0 = \nu$, $j^{(0)} = 1$, $\mu_1^{(0)} = \mu$ multiplicità di C in A.

9. — Conseguenze. — *Il punto* $A_{j(l)}^{(l)}$ *sarà doppio per* F sempre e solo quando $P_{j(l)}^{(l)} \geq 2$, cioè *quando* $\Sigma\nu\,(\mu_s^{(\lambda)} - 2) \geq 0$. Tal relazione si verificherà in particolare quando $A_{j(l)}^{(l)}$ è multiplo per la curva C, poichè allora tutti i $\mu_s^{(\lambda)}$ sono ≥ 2; adunque *tutti i punti successivi ad* A, *multipli per* C, *sono punti doppi per* F. V'ha di più: dalla definizione di P (n. 3) risulta che $P = \mu = \mu_1^{(0)} \geq 3$: quindi finchè si considerano punti $A_s^{(\lambda)}$ per cui $\mu_s^{(\lambda)} \geq 2$ sarà sempre $\Sigma\nu_\lambda(\mu_s^{(\lambda)} - 2) \geq \mu - 2 > 1$ e sarà perciò ancora $\Sigma\nu_\lambda(\mu_s^{(\lambda)} - 2) > 0$ se, nell'itinerario considerato, soltanto i $\mu - 2$ ultimi punti sono semplici per C (è per essi $\mu_s^{(\lambda)} = 1$) [1]. Adunque ancora, *su ciascun ramo di* C *sono certamente ancora doppi per* F *i primi* $\mu - 2$ *punti semplici per* C. Ma il numero di questi punti doppi potrà ancora accrescersi arbitrariamente sia per l'esistenza di punti precedenti per cui $\mu_s^{(\lambda)} > 2$, sia per l'accrescersi del valore delle ν_λ per cui $\mu_s^{(\lambda)} - 2 > 0$. Per esemplificare queste evenienze tratteremo tosto alcuni casi particolari. È però utile ancora che dalla formola (I) rileviamo alcune altre conseguenze generali.

10. — Il calcolo del numero $P_{j(l)}^{(l)}$ mediante la formola (I) si fa immaginando fissata una curva C, intersezione di F con una Φ, e definiendo mediante essa i numeri $\mu_s^{(\lambda)}$: si sostituisca ora alla C un'altra curva analoga C_1; il nuovo numero $P_{j(l)}^{(l)}$ dovrà risultare uguale al primo, almeno finchè esso è ≥ 2; d'altra parte, se per tutti i punti di un dato itinerario sono noti i

[1] Si osservi che per tutti questi punti sarà $\nu_\lambda = 1$, potendosi prendere come ramo γ il ramo medesimo di C che li contiene.

numeri $P_s^{(\lambda)}$, si può dedurne i valori dei numeri $\mu_s^{(\lambda)}$ relativi a tali punti; ne risulta che questi valori debbono essere uguali per le due curve C e C_1: eliminando dalle curve C e C_1 la parte comune Δ si potrà quindi affermare che *i punti doppi di* F *successivi ad* A *per cui passa la curva contorno apparente di* F *rispetto ad un punto non appartenente al piano tangente in* A *appartengono pure ad ogni altra curva contorno apparente di* F *rispetto ad un punto analogo e le due curve vi hanno le medesime multiplicità* [1].

11. — Dalla formola (1) del n° 6 possiamo ancora dedurre che *l'ultimo punto doppio di* F *su ogni ramo dei contorni apparenti di* F *rispetto ai punti generici nominati è sempre conico.* Basti osservare che se $A^{(r-1)}$ appartiene alla C, esisterà certo un punto successivo appartenente alla C medesima: sia $A^{(r)}$; sarà $\mu^{(r)} \geq 1$; se $A^{(r-1)}$ è uniplanare, onde $P^{(r-1)} \geq 3$, segue allora dalla (1) nominata $P^{(r)} \geq 2$; se $A^{(r-1)}$ è biplanare, si ricordi (n° 2) che i due rami (totali o parziali) di $C^{(r-1)}$ sono tangenti all'asse della coppia di piani tangenti; si dedurrà $\mu^{(r)} + q^{(r)} = 2$ che, insieme con $P^{(r-1)} = 2$, dà ancora $P^{(r)} = 2$. In ogni caso adunque, se $A^{(r-1)}$ non è punto conico, il punto successivo ad esso su un ramo della curva C è ancora doppio. Poichè a un punto doppio conico non possono seguire altri punti doppi, si deduce ancora che *il più ampio itinerario di punti doppi che segue un ramo della curva di diramazione non può essere prolungato coll'aggiunta di nuovi punti doppi:* l'ultimo dei suoi punti doppi non appartiene quindi ad una curva doppia successiva ad A.

Lo stesso ragionamento permette di invertire parzialmente la proposizione: *ogni itinerario di punti doppi che non possa essere prolungato coll'aggiunta di nuovi punti doppi termina con un punto doppio conico;* esistono però di tali itinerari che non appartengono alla curva di diramazione.

12. — Un punto $A_1^{(m)}$, successivo ad $A_{j(l)}^{(l)}$, appartiene all'itinerario generico contenente $AA_1'...A_{j(l)}^{(l)}$ quando nell'itinerario costi-

---

[1] Dal fatto che fra questi punti ne esistono di quelli semplici per qualche curva Γ, risulta che essi saranno semplici per le Γ relative a tutti i punti dello spazio (esterni al piano tangente in A) e che queste curve sono quindi tutte semplici (cfr. n. 4).

tuito da questi punti e dai successivi fino ad $A_1^{(m)}$ nessun punto successivo ad $A_{j(l)}^{(l)}$ sta con un altro punto dell' itinerario sulla stessa linea di F successiva ad A, nè appartiene alla curva C. Siano $A_1^{(m)}A_2^{(m)}\ldots A_j^{(m)}$ $(j \geq 1)$ punti successivi della linea di F successiva ad A cui appartiene $A_1^{(m)}$: si chiamino ν_λ i valori che si attribuiscono alle ν corrispondentemente all'itinerario $AA_1'\ldots A_{j(l)}^{(l)}$, $\bar{\nu}_\lambda$ quelli relativi all'itinerario $AA_1'\ldots A_{j(l)}^{(l)}\ldots A_1^{(m)}A_2^{(m)}\ldots A_j^{(m)}$; si avrà

$$\bar{\nu}_h = j\nu_h (h \leq l),\ \bar{\nu}_k = j\,(l < k \leq m-1),\ \bar{\nu}_m = 1;\ \mu_s^{(\lambda)} = 0,\ (\lambda > l)$$

$$P_j^{(m)} = j \sum_{\lambda=0,\ldots,l} \nu_\lambda (\mu_s^{(\lambda)} - 2) - 2j(m-l) + 2.$$

Facendo $j = 1$ si vede che $A_1^{(m)}$ sarà doppio quando

$$m - l \leq \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0,\ldots,l} \nu_\lambda (\mu_s^{(\lambda)} - 2)$$

e, restituendo a j il suo valore indeterminato, si vede che, soddisfatta questa condizione, saranno pur doppi i punti $A_2^{(m)}\ldots A_j^{(m)}$. Vale a dire: *i punti che seguono un punto doppio di un itinerario generico* (contenente un itinerario dato) *sulla linea di* F *cui questo punto appartiene sono ancora essi tutti doppi;* od anche *ogni punto doppio di un itinerario generico appartiene ad una linea doppia successiva ad* A; ed infine *ogni punto doppio di un itinerario generico è uniplanare o biplanare,* mai conico, chè non potrebbe appartenere a una linea doppia.

13. — Applicazione della formola (I) allo studio di alcuni casi particolari. — *a)* Punto doppio uniplanare generico. — *Il punto doppio non appartiene ad una linea doppia; la curva di diramazione relativa ad un punto generico dello spazio vi ha punto* μ*-plo con* μ *tangenti distinte.*

a, 1) Nodo di k-ma specie. — *Composizione secondo l'itinerario generico:* k caratteri 2; immediatamente successive all'ultimo punto doppio dell'itinerario 2 rette semplici; la potenza dell'itinerario è $P = \mu = 2k$. Una superficie passante semplicemente pel punto doppio A, con piano tangente generico, taglia F secondo una curva avente A come origine di due rami lineari con intersezione k-punta fra loro.

Composizione secondo l'itinerario generico fra quelli tangenti ad una delle μ *direzioni singolari.* Tutti questi itinerari hanno comuni due punti A, A'_1; nella formola (I) si dovrà porre $l=1$, $j^{(l)}=1$, $\nu=\nu_1=1$, e, poichè si suppongono distinte le μ tangenti della curva di diramazione, $\mu'_1=1$; si otterrà $P'_1=P-1=$ $=2k-1$. Siccome $2k>2$, per ipotesi, A'_1 è ancora doppio, la potenza dell'itinerario generico che lo contiene è $P'_1+2=$ $=2k+1$; ciascuno di questi itinerari contiene k punti doppi, l'ultimo dei quali è uniplanare. Una superficie passante semplicemente per A, tangente ad una delle μ direzioni singolari, e del resto generica, sega F secondo una curva per cui A è origine di un solo ramo di 2° ordine e precisamente è cuspide di k-ma specie.

Itinerari di maggior particolarità. — Sono: 1° Gli itinerari che hanno più punti doppi per F, su una stessa retta doppia successiva ad A; la loro potenza, data dalla formola (I), si eleva per l'elevarsi del valore di ν. Così, si considerino gli itinerari generici contenenti A, A'_1, A'_2, dove A'_2 appartiene ad a': sarà $\nu=2$, $\nu_1=1$, $\mu'_1=1$ o $=0$ secondochè A'_1 appartiene o non a una direzione singolare, $\mu'_2=0$; nei due casi quindi $P'_2=2P-1-2-2=4k-5$ o $P'_2=2P-2-2-2=$ $=4k-6$; risulta ancora che A'_2 è doppio e che la potenza dell'itinerario generico contenente $A\,A'_1\,A'_2$ è $P'_2+2\,.\,2$, cioè, nei due casi, $4k-1$ o $4k-2$. Questi itinerari contengono quindi $2k-1$ punti doppi, l'ultimo dei quali è uniplanare o biplanare (n° 12) secondochè A'_1 appartiene o non a una direzione singolare.

2° Gli itinerari che contengono altri punti della curva di diramazione C. Se $A\,A'\,A''\ldots A^{(l)}$ appartengono tutti ad un ramo di C si ha $P^{(l)}=P-l=2k-l$ e sarà $P^{(l)}\geq 2$ finchè $l\leq 2k-2$: si ritrova un fatto già enunciato in generale al n° 9, che cioè su ogni ramo di C $2k-2$ punti, semplici per C, successivi ad A sono doppi per F e comuni quindi a tutte le curve di diramazione [1].

a, 2) Cuspide di k-ma specie. — *Composizione secondo l'itinerario generico:* k caratteri 2; immediatamente successiva al-

---

[1] Cfr. per $k=2$ e $k=3$ i casi del tacnodo e dell'oscnodo in Segre, l. c., n^i 16 e 19.

l'ultimo punto doppio una sola retta semplice. Una superficie generica passante semplicemente per A sega F secondo una curva per cui A è cuspide di k-ma specie. La potenza dell'itinerario generico è $P = \mu = 2k + 1$.

Ripetendo passo passo i calcoli precedenti si ritrovano analoghe conclusioni: Una superficie che passi semplicemente per A, non avendovi altra particolarità che un contatto d'ordine l con un ramo della curva di diramazione C, sega F secondo una curva che, finchè $l \leq 2k - 1$ possiede $k + \left[\frac{l+1}{2}\right]$ punti doppi consecutivi [1] e passa per A con due rami o con uno solo a seconda che l è dispari o pari.

b) Più rami della curva C si toccano. — *La curva* C *continui a passare per* A *con* μ *rami lineari, ma* $\pi \geq 2$ *di essi abbiano la stessa tangente; più precisamente abbiano a comune (essi e non altri rami di* C*) i punti successivi* $A\,A'\,A'' \ldots A^{(\tau)}$. Nulla differenzia i casi speciali da quello generico dianzi trattato. per quanto riguarda gli itinerari generici. Si considerino invece gli itinerari che contengono $A\,A' \ldots A^{(t)}$ $t \leq \tau$; si avrà ancora tutte le $\nu = 1$; invece $\mu' = \mu'' = \ldots = \mu^{(t)} = \pi$; quindi, dalla (I), $P^{(t)} = P + t(\pi - 2) \geq P$. Si ritrova intanto $P^{(t)} > 2$, e cioè i punti $A\,A'A'' \ldots A^{(\tau)}$ son tutti doppi per F (n° 9); sull'itinerario generico contenente questi punti stanno anzi $\left[\frac{P + t\pi}{2}\right]$ punti doppi, la sua potenza essendo $P^{(t)} + 2t = P + t\pi$. Se poi si suppone di prolungare l'itinerario $A\,A' \ldots A^{(\tau)}$ coll'aggiunta di nuovi punti di un ramo di C che dopo $A^{(\tau)}$ non abbia più punti comuni con altri rami e si chiama $A\,A' \ldots A^{(\tau)} \ldots A^{(u)}$ il nuovo itinerario, si ha $P^{(u)} = P + \tau(\pi - 2) - (u - \tau) = P + \tau(\pi - 1) - u$. $A^{(u)}$ sarà dunque doppio finchè $u \leq P + \tau(\pi - 1) - 2$. Sul ramo considerato succedono cioè ad A altri $P + \tau(\pi - 1) - 2$ punti doppi, comuni quindi a tutte le curve di diramazione.

Si supponga ancora di considerare un itinerario contenente i punti $A\,A' \ldots A_1^{(t)} A_2^{(t)} \ldots A_j^{(t)}$ restando $t \leq \tau$ ($A_1^{(t)} \ldots A_j^{(t)}$ si seguano cioè sulla retta $a^{(t)}$); si avrà $\nu = \nu_1 = \ldots = \nu_{t-1} = j$, $\nu_t = 1$, $\mu' = \mu'' = \ldots \mu_1^{(t)} = \pi$, $\mu_2^{(t)} = \ldots = \mu_j^{(t)} = 0$, onde la (I) darà $P_j^{(t)} = j[P - 4 + (t-1)(\pi - 2)] +$

[1] Cfr. pei casi di $k = 1$ e $k = 2$ il regresso di 1ª e di 2ª specie in Segre, l. c., n^i 8 e 18.

$+\pi+2$. Questo numero sarà sempre >2 se $P-4+(t-1)(\pi-2)\geq 0$; vale a dire che *se* $P\geq 4$ *ovvero* $P=3$ $\pi=3$ $t>1$ *le rette* $a^{(t)}(t\leq\tau)$ *son tutte doppie per* F; invece *per* $P=3$, $\pi=3$ *(cuspide di 1ª specie colle tre tangenti singolari riunite) la retta* a' *sarà semplice per* F, *ma successivi al punto* A' *contiene altri due punti doppi* (²), perchè, essendo $P-4=-1$, sarà ancora $P_j'\geq 2$ per $j=2$ e $j=3$; infine *per* $P=3$, $\pi=2$ *(cuspide di prima specie con due tangenti singolari coincidenti)* sarà, per ogni valor di t, $P_j^{(t)}=\pi+2-j=4-j$, e sarà quindi $P_j^{(t)}\geq 2$ solo per $j\leq 2$: *ciascuna delle rette* $a^{(t)}$ *è dunque semplice, ma su ciascuna di esse al punto* $A^{(t)}$ *di* C *segue ancora uno e un sol punto doppio necessariamente conico (n. 11).* Un punto cuspidale di una linea doppia nodale si trova nelle condizioni ora considerate; ad esso sono evidentemente successivi lungo la linea quanti si vogliano punti doppi, ciascuno dei quali è ancora cuspidale ed ha successivo ad esso, fuori della linea doppia, ancora un punto doppio conico. Il punto A_2' nel caso $P=\pi=3$ presenta un caso particolare di questa evenienza.

Si supponga infine di considerare un itinerario contenente $AA'\ldots A^{(\tau)}A^{(\tau+1)}\ldots A_1^{(u)}A_2^{(u)}\ldots A_j^{(u)}$, i punti $A^{(\tau+1)}\ldots A_1^{(u)}$ succedendosi su un ramo semplice di C e non appartenendo ad altri rami di C che a questo, $A_1^{(u)}\ldots A_j^{(u)}$ appartenendo alla linea $a^{(u)}$ successiva ad $A^{(u-1)}$. Si avrà $\nu=\nu_1=\ldots\nu_{u-1}=j$, $\nu_u=1$, $\mu'=\mu''=\ldots$ $\ldots=\mu^{(\tau)}=\pi$, $\mu^{(\tau+1)}=\ldots=\mu_1^{(u)}=1$, $\mu_2^{(u)}=\ldots=\mu_j^{(u)}=0$, onde la (I) darà $P_j^{(u)}=j[P-3+\tau(\pi-1)-u]+3$. Questo numero sarà sempre >2 finchè $P-3+\tau(\pi-1)\geq u$ (siccome si suppone $u>\tau$, questa disuguaglianza potrà verificarsi solo se $P>3$ ovvero $\pi>2$); la linea $a^{(u)}$ è allora doppia per F; ma se $u=P+\tau(\pi-1)-2$, $P_j^{(u)}<2$ per ogni $j\geq 2$; onde segue, confrontando con un risultato precedente, che tutti i punti doppi di F su un ramo semplice di C, successivi ad $A^{(\tau)}$, stanno su linee doppie di F, ad eccezione dell'ultimo, conformemente al fatto noto (n. 11) che quest'ultimo punto è conico.

c) La curva C possiede un ramo superlineare. — *Si supponga ancora che la curva* C *possegga un ramo d'ordine* π (≥ 2): precisamente si supponga che *nessun altro ramo di* C *abbia la stessa tangente e che su questo siano* π*-pli i punti* $AA'\ldots A^{(\tau)}$ *e che*

(²) Cfr. Segre, l. c., n. 14.

il punto successivo $A_1^{(\tau+1)}$ *sia semplice.* Alla linea $a^{(\tau+1)}$ apparterranno i punti $A_1^{(\tau+1)}A_2^{(\tau+1)}\ldots A_\pi^{(\tau+1)}$ tutti semplici pel ramo considerato.

Se si considerano itinerari legati a contenere solo $t \leq \tau$ dei punti $AA'\ldots A^{(\tau)}$ nulla vi è da mutare alle cose dette in *b)*. Si considerino invece gli itinerari contenenti $AA'\ldots A^{(\tau)}A_1^{(\tau+1)}\ldots$ $\ldots A_\pi^{(\tau+1)}A^{(\tau+2)}\ldots A^{(u)}$, tutti punti del ramo di C considerato; si avrà $\nu = \nu_1 = \ldots = \nu_\tau = \pi$, $\nu_{\tau+1} = \ldots = \nu_u = 1$, $\mu' = \ldots = \mu^{(\tau)} = \pi$, $\mu_1^{(\tau+1)} = \mu_2^{(\tau+1)} = \ldots = \mu_\pi^{(\tau+1)} = \ldots = \mu^{(u)} = 1$, onde, per la (I), $P^{(u)} = \pi(P-3) + \tau\pi(\pi-2) + \tau + 3 - u$, onde si vede che $A^{(u)}$ sarà doppio finchè $u \leq \pi(P-3) + \tau\pi(\pi-2) + \tau + 1$. Particolarmente notevoli i casi di $P=3$, $\pi=2$ e $P=3$, $\pi=3$, $\tau=0$ in cui, e in essi soli, al punto $A_\pi^{(\tau+1)}$ non succedono altri punti doppi del ramo.

14. — Arbitrarietà della curva C. — La formola (I) determina la composizione della superficie lungo ogni itinerario uscente da A quando sia nota la composizione in A della curva C, intersezione di F colla superficie Φ, polare rispetto ad F di un punto non appartenente al piano tangente in A. È importante mostrare che *tal composizione in* A *della curva* C *è completamente arbitraria, purchè compatibile colla condizione che* C *possa appartenere ad una superficie per cui* A *sia punto semplice* (la superficie Φ). Con maggior precisione, *assegnate arbitrariamente delle curve* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Gamma$ *tali che la curva complessiva da esse costituita appartenga ad una superficie avente in* A *punto semplice ed assegnata per ciascuna curva* Δ_i *una multiplicità* $m_i \geq 2$, supposto inoltre che la curva costituita da queste linee, contate ciascuna colla sua multiplicità (attribuita a Γ la multiplicità 1) abbia in A punto almeno triplo, *esiste una superficie* F *avente in* A *punto doppio uniplanare e di cui la curva* C, *relativa ad un certo punto dello spazio, si compone, per la sua parte passante per* A, *di* Γ *e delle curve* Δ_i (*ciascuna doppia per* F) *colle rispettive multiplicità* m_i.

Sia difatti $Z = 0$ l'equazione della superficie che si suppone passare semplicemente per A e contenere le curve Δ_i, Γ, e si supponga che il suo piano tangente in A non passi pel punto $x = y = 0$, $z = \infty$; siano inoltre $\delta_i = 0$, $\gamma = 0$ le equazioni dei coni projettanti da questo punto le curve Δ_i, Γ, rispettivamente;

essi segano $Z = 0$ secondo queste curve, e non secondo altre curve passanti per A, se si ammette che la loro generatrice per A non sia corda delle curve medesime. Si consideri la superficie

$$F \equiv Z^2 - \gamma \prod_i \delta_i^{m_i} = 0.$$

Per essa il punto A e le curve Δ_i saranno effettivamente doppi, e poichè il cono $\gamma \prod \delta_i^{m_i} = 0$ ha in A punto almeno triplo, A vi sarà uniplanare con piano tangente il piano tangente a Z. La superficie polare di $x = y = 0$, $z = \infty$ rapporto ad F sarà

$$\Phi \equiv Z \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

e la sua intersezione con F si comporrà delle curve

$$Z = 0\,, \qquad \gamma \prod_i \delta_i^{m_i} = 0$$

e

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0\,, \qquad Z^2 - \gamma \prod_i \delta_i^{m_i} = 0\,.$$

La superficie $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ non passa per A; della totale intersezione, solo la prima curva dunque passa per A, e vi passa precisamente colle curve Γ, Δ_i, queste colle multiplicità m_i.

15. — Equazione generale dei punti doppi uniplanari. — Chiuderemo la presente ricerca colla determinazione della forma caratteristica che assume l'equazione di una superficie (varietà) quando l'origine delle coordinate sia per essa punto doppio uniplanare.

In un piano $(x\,y)$ si consideri la curva $F(x\,y) = 0$, d'ordine n; la retta $y = 0$ la seghi in n punti (distinti o non) che, per fissare le idee, si suppongono tutti al finito, origini di n rami parziali rappresentati, per y interno ad un certo cerchio di centro $y = 0$, dalle n equazioni

$$x = x_s(y) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

dove le x_s sono serie di potenze positive, intere o fratte di y. È noto che si ha identicamente

$$F(xy) = \alpha \prod_{s=1,\dots,n} (x - x_s),$$

dove α è un coefficiente numerico.

Supponiamo ora che la curva abbia nell'origine un nodo di k-ma specie, coll'unica tangente $x = 0$ e non vi abbia maggior singolarità; se i due rami passanti per l'origine si fanno corrispondere agli indici 1 e 2, si avrà, per convenienti valori dei coefficienti,

$$\begin{aligned}
-x_1(y) &= a_2y^2 + a_3y^3 + \dots + a_{k-1}y^{k-1} + a_k'y^k + a'_{k+1}y^{k+1} + \dots \\
-x_2(y) &= a_2y^2 + a_3y^3 + \dots + a_{k-1}y^{k-1} + a_k''y^k + a''_{k+1}y^{k+1} + \dots \\
-x_t(y) &= m_t + \mathfrak{p}_t(y) \qquad (m_t \neq 0) \qquad (t = 3, \dots, n)
\end{aligned}$$

dove le $\mathfrak{p}_t$ sono serie di potenze di y, annullantisi per $y = 0$. Alle prime due equazioni si dà forma più utile pel nostro calcolo ponendo

$$a_{k+s} = \frac{1}{2}(a'_{k+s} + a''_{k+s}) \qquad b_s = \frac{1}{2}(a'_{k+s} - a''_{k+s}) \qquad (s=0,1\dots)$$

Esse si scrivono allora:

$$\begin{aligned}
-x_1(y) &= a_2y^2 + a_3y^3 + \dots + a_{k-1}y^{k-1} + a_ky^k + \dots + y^k(b_0 + b_1y + \dots) \\
-x_2(y) &= a_2y^2 + a_3y^3 + \dots + a_{k-1}y^{k-1} + a_ky^k + \dots - y^k(b_0 + b_1y + \dots)
\end{aligned}$$

Se invece l'origine è per la curva cuspide di k-ma specie colla tangente $x = 0$, si avrà parimenti

$$\begin{aligned}
-x_1(y) &= a_2y^2 + a_3y^3 + \dots + a_ky^k + a_{k+1}y^{k+1} + \dots + y^{k+\frac{1}{2}}(b_0 + b_1y + \dots) \\
-x_2(y) &= a_2y^2 + a_3y^3 + \dots + a_ky^k + a_{k+1}y^{k+1} + \dots - y^{k+\frac{1}{2}}(b_0 + b_1y + \dots) \\
-x_t &= m_t + \mathfrak{p}_t(y) \qquad (m_t \neq 0) \qquad (t = 3, \dots, n).
\end{aligned}$$

Si noti che $b_0 \neq 0$, che cioè i termini b_0y^k, $b_0y^{k+\frac{1}{2}}$ sono caratteristici per le singolarità considerate. Si ponga, come nelle

pagine precedenti, $2k = \mu$ nel caso del nodo, $2k + 1 = \mu$ nel caso della cuspide; si avrà allora immediatamente dai precedenti sviluppi:

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x + a_2y^2 + a_3y^3 + \ldots)^2 - y^\mu(b_0 + b_1y + \ldots)^2.$$

Consideriamo ora il prodotto $\Pi(x - x_l) = \Pi(m_l + x + \mathfrak{p}_l(y))$. Sviluppato il prodotto e ordinati i termini secondo l'ordine complessivo in x ed y, e posto inoltre $\Pi m_l = m$, osservando che sarà $m \neq 0$, esso prende la forma

$$\Pi(x - x_l) = m(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)$$

dove φ_r rappresenta una forma in x ed y, d'ordine r. Si ponga allora

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\varphi_1 \quad \psi_r = \frac{1}{2}(\varphi_r - \Sigma\psi_j\psi_{r-j}) \qquad (1 \leq j < r \leq l)$$

$$\psi_r = \varphi_r - \Sigma\psi_j\psi_{r-j} \qquad (r > l \geq j \geq r - l)$$

$$\psi_r = \varphi_r \qquad (r > 2l)$$

lasciando per ora indeterminato l'intero l; si otterrà ancora

$$\Pi(x - x_l) = m[(1 + \psi_1 + \ldots + \psi_l)^2 + \psi_{l+1} + \psi_{l+2} + \ldots].$$

Quindi

$$\frac{1}{am} F(xy) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \frac{1}{m} \Pi(x - x_l) =$$

$$= (1 + \psi_1 + \ldots + \psi_l)^2(x + a_2y^2 + a_3y^3 + \ldots)^2 +$$

$$+ (\psi_{l+1} + \psi_{l+2} + \ldots)(x + a_2y^2 + \ldots)^2 - y^\mu(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)(b_0 + b_1y + \ldots)^2,$$

ossia, indicando con χ_r, ζ_r, ω_r forme algebriche in x e y d'ordine r,

$$\frac{1}{am} F(xy) = (x + \chi_2 + \chi_3 + \ldots)^2 + (\zeta_{l+3} + \zeta_{l+4} + \ldots) - (b_0^2y^\mu + \omega_{\mu+1} + \ldots).$$

Nella serie del primo addendo si raggruppino i primi $l+1$ termini e si svolga quindi il quadrato; si otterrà come primo termine $(x + \chi_2 + \ldots + \chi_{l+1})^2$ e in seguito termini d'ordine $\geq l + 3$;

si ponga allora $l=\mu-3$, e si indichino con π_r nuove forme d'ordine r in x ed y; si avrà infine

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\alpha m} F(xy) = (x + \chi_2 + \dots \chi_{\mu-2})^2 + \pi_\mu + \pi_{\mu+1} + \dots$$

L'equazione di ogni curva per cui l'origine sia nodo o cuspide di k-*ma specie può dunque sempre portarsi nella forma* (II) *dove* $\mu = 2k$ *o* $\mu = 2k+1$ *rispettivamente per le due singolarità.* (Qualora il numero $2\mu - 4$ fosse maggiore dell'ordine n della curva, questa equazione conterrebbe formalmente termini d'ordine $> n$).

16. — Supponiamo inversamente che l'equazione d'una curva possa portarsi nella forma (II) (con $\mu > 2$); la curva avrà nell'origine punto doppio coll'unica tangente la retta $x=0$; dunque un nodo di specie > 1 o una cuspide; immaginati dedotti dalla $F=0$ gli sviluppi in serie rappresentanti i rami della curva aventi le origini sulla $y=0$, si potrà ancora scrivere, mediante trasformazioni analoghe alle precedenti,

$$\frac{1}{\alpha m} F(xy) = (x-x_1)(x-x_2)[(1+\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_{\mu-3})^2+\psi_{\mu-2}+\dots]$$

onde

$$\frac{\frac{1}{\alpha m} F(xy)}{(1+\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_{\mu-3})^2} = (x-x_1)(x-x_2)\left[1+\frac{\psi_{\mu-2}+\dots}{(1+\psi_1+\dots+\psi_{\mu-3})^2}\right].$$

Ma la $F(xy)$ si rappresenta, per ipotesi, nella forma (II); si ha dunque

$$\left(\frac{x+\chi_2+\dots+\chi_{\mu-2}}{1+\psi_1+\dots+\psi_{\mu-3}}\right)^2 + \frac{\pi_\mu+\pi_{\mu+1}+\dots}{(1+\psi_1+\dots+\psi_{\mu-3})^2} =$$

$$= (x-x_1)(x-x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(\psi_{\mu-2}+\dots)}{(1+\psi_1+\dots+\psi_{\mu-3})^2}.$$

Si ricordi ora che $\frac{1}{1+\psi_2+\dots+\psi_{\mu-3}} = 1-\psi_1+(\psi_1^2-\psi_2)+\dots$; portando nel primo membro il 2° termine del secondo si conclude che $(x-x_1)(x-x_2)$ differisce solo per termini d'ordine $\geq \mu$ da

$$\left(\frac{x+\chi_2+\chi_3+\dots+\chi_{\mu-2}}{1+\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_{\mu-3}}\right)^2 = (x+\lambda_2+\lambda_3+\dots)^2$$

le λ_r essendo forme in x ed y, d'ordine r. Ma il prodotto $(x-x_1)(x-x_2)$ deve assumere la forma

$$(x-x_1)(x-x_2)=(x+a_2y^2+a_3y^3+\ldots)^2-y^{\bar{\mu}}(b_0^2+c_1y+\ldots),$$

dove $\bar{\mu}$ è un certo intero; e, a causa dell'osservazione già fatta che $b_0 \neq 0$, qualunque alterazione si porti a questa forma per aggiunzione di termini nella prima parentesi, e successive sottrazioni fuori, si otterranno sempre fuori del quadrato, termini d'ordine $\leq \bar{\mu}$; la precedente conclusione circa l'espressione di $(x-x_1)(x-x_2)$ mostra quindi che deve essere $\bar{\mu} \geq \mu$. Vale a dire: *Se una curva può rappresentarsi coll'equazione* F(xy)=0 *ove* F(xy) *ha la forma* (II), *ha nell'origine un nodo o una cuspide di specie* $\geq \left[\frac{\mu}{2}\right]$. E precisamente, a causa della precedente proposizione, *non avrà punto doppio superiore* [1] *sempre e solo quando la forma* (II) *non possa trasformarsi in altra analoga in cui* μ *abbia valore maggiore. Condizione necessaria e sufficiente perchè questa trasformazione non sia possibile è che* π_μ *non sia divisibile per* x. Se infatti π_μ contenesse tal fattore, si ponga

$$\chi_{\mu-1}=\frac{\pi_\mu}{2x}, \quad \pi'_{\mu+1}=\pi_{\mu+1}-2\chi_2\chi_{\mu-1}, \quad \pi'_{\mu+2}=\pi_{\mu+2}-2\chi_3\chi_{\mu-1}, \ldots,$$
$$\pi'_{2\mu-2}=\pi_{2\mu-2}-\chi^2_{\mu-1};$$

la (II) prenderà allora la forma:

$$\frac{1}{am}F(xy)=(x+\chi_2+\chi_3+\ldots+\chi_{\mu-2}+\chi_{\mu-1})^2+\pi'_{\mu+1}+\ldots$$
$$\ldots+\pi'_{2\mu-2}+\pi_{2\mu-1}+\ldots$$

analoga alla precedente, ma in cui μ ha preso il valore $\mu+1$. Reciprocamente si supponga che, con una conveniente scelta delle χ_r' e delle π_r' la (II) possa pur scriversi

$$\frac{1}{am}F(xy)=(x+\chi_2'+\chi_3'+\ldots+\chi'_{\mu-1})^2+\pi'_{\mu+1}+\ldots;$$

[1] Chiamando la cuspide di k-ma specie singolarità superiore al nodo, il nodo di $k+1$-ma specie superiore alla cuspide di k-ma specie.

sottraendo l'una dall'altra le due espressioni si ha:

$$0=(x+\chi_2'+\ldots+\chi'_{\mu-1})^2-(x+\chi_2+\ldots+\chi_{\mu-2})^2-\pi_\mu+(\pi'_{\mu+1}-\pi_{\mu+1})+\ldots$$

ovvero

$$0=[2x+(\chi_2+\chi_2')+\ldots+(\chi_{\mu-2}+\chi'_{\mu-2})+\chi'_{\mu-1}][(\chi_2'-\chi_2)+\ldots$$
$$\ldots+(\chi'_{\mu-2}-\chi_{\mu-2})+\chi'_{\mu-1}]-\pi_\mu+(\pi'_{\mu+1}-\pi_{\mu+1})+\ldots$$

Se ora, nel primo addendo, si suppone che delle differenze $\chi_2'-\chi_2$, $\chi_3'-\chi_3$, ... la prima non nulla identicamente sia $\chi_r'-\chi_r$, lo sviluppo del prodotto darà luogo al termine $2x(\chi_r'-\chi_r)$ irreduttibile con altri se $r<\mu-1$, il che contraddice all'annullarsi identico dell'espressione. Si ha dunque $\chi_r'=\chi_r$ per $r=2,\ldots,\mu-2$ e i termini di grado minimo del secondo membro nella precedente uguaglianza sono $2x\chi'_{\mu-1}-\pi_\mu$; per l'annullarsi identico deve essere $\pi_\mu=2x\chi'_{\mu-1}$, cioè π_μ divisibile per x.

17. — Una varietà a $d-1$ dimensioni, immersa in uno spazio lineare a d dimensioni, si dica avere in un punto A nodo o regresso di k-ma specie quando tal singolarità ha la sua sezione piana generica passante per A; come per le superficie, si vede in generale che il cono tangente in A alla varietà si riduce ad un iperpiano doppio per ogni regresso e pei nodi tosto che $k>1$. Si assuma allora A come origine delle coordinate e l'iperpiano tangente come $x=0$; si ponga ancora $\mu=2k$ o $\mu=2k+1$ secondochè si tratta di nodo o di regresso: *condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà* $F(xyz\ldots)=0$ *abbia nell'origine la nominata singolarità è allora che possa scriversi, a meno di un fattor costante,*

$$\text{(III)}\qquad F(xyz\ldots)\equiv(x+\chi_2+\chi_3+\ldots+\chi_{\mu-2})^2+\pi_\mu+\pi_{\mu+1}+\ldots$$

dove χ_r *e* π_r *rappresentano forme algebriche di grado* r *in* xyz... *e* π_μ *non è divisibile per* x. Poichè infatti si ottiene una sezione piana ponendo per le coordinate z, ... combinazioni lineari arbitrarie di x e di y, è evidente che tal posizione conduce la forma (III) alla forma (II) e quindi la condizione esposta è suf-

ficiente. Per dimostrarne la necessità si osservi che, poichè il cono tangente a F è $x^2 = 0$, si avrà

$$F(xyz...) \equiv x^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + ...$$

dove le φ_r sono forme d'ordine r in $x, y, z, ...$; si supponga allora, per generalità, che tale espressione possa portarsi nella forma

$$F(xyz...) \equiv (x + \chi_2 + \chi_3 + ... + \chi_{j-2})^2 + \varphi_j + \varphi_{j+1} + ...$$

per un certo valore di j e non alla forma analoga per un valor superiore di j (per $j = 3$ si ha l'espressione precedente); il ragionamento del n° prec. mostra che ciò equivale a dire che φ_j non è divisibile per x; si possono allora determinare per $z, ...$ tali combinazioni lineari di x e y che, anche dopo la sostituzione, φ_j non contenga il fattore x, e si determina con ciò una sezione piana per cui A è un nodo o una cuspide di specie $\left[\frac{j}{2}\right]$ e non superiore (n° 15). Affinchè tal punto non abbia singolarità inferiore alla voluta deve dunque essere $j \geq \mu$. (Per $j > \mu$ la singolarità si eleverebbe su tutte le sezioni piane; si eleverebbe cioè la singolarità del punto).

18. — La rappresentazione analitica ora trovata ci permette di riottenere sotto nuovo aspetto qualcuno dei risultati già esposti per via geometrica e di darne qualche generalizzazione. Si consideri la varietà rappresentata dall'equazione (III); ordinando π_μ secondo le potenze di x, sia π^*_μ il gruppo dei termini indipendenti da x: sarà una forma di grado μ in $y, z, t, ...$ e non sarà nullo, perchè π_μ si suppone non divisibile per x. La condizione perchè una certa posizione: $z = \alpha_1 x + \beta_1 y$, $t = \alpha_2 x + \beta_2 y, ...$ renda π_μ divisibile per x è che π^*_μ si annulli per $z = \beta_1 y$, $t = \beta_2 y, ...$ cioè per la retta d'intersezione del piano $z = \alpha_1 x + \beta_1 y, ...$ con $x = 0$. *L'equazione* $\pi^*_\mu(y, z, ...) = 0$ *rappresenta quindi nell'iperpiano* $x = 0$ *un cono di tangenti singolari ad* F, *tale che ogni piano passante per una di esse (e soltanto un tal piano) sega* F *secondo una curva che ha in* A *punto doppio superiore a quello della sezione piana generica.* Nel caso di tre sole variabili (superficie ordinaria) questo cono si riduce alle μ tangenti singolari.

Supposta soddisfatta la condizione $\pi^*_\mu(1, \beta_1, \beta_2, \ldots) = 0$, l'equazione della sezione piana potrà portarsi nella forma

$$(x + \chi_2 + \chi_3 + \ldots + \chi_{\mu-2} + \chi'_{\mu-1})^2 + \pi'_{\mu+1} + \ldots = 0$$

e sarà $\pi'_{\mu+1} = \pi_{\mu+1} - \chi_2 \frac{\pi_\mu}{x}$ (n. 15); si può chiedere se possano ancora scegliersi le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in modo che si abbia una ulteriore elevazione della singolarità della sezione; dovrà perciò annullarsi in $\pi'_{\mu+1}$ (che è ora una forma in x ed y) il coefficiente di $y^{\mu+1}$: tal coefficiente è generalmente una espressione lineare in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; per ogni generatrice singolare esiste dunque un sistema lineare di piani (di dimensione $d - 3$) che segano la varietà secondo una curva che ha nel punto doppio singolarità maggiore (Nel caso delle superficie ordinarie si avrà un piano per ciascuna tangente singolare). Fa eccezione il caso di $\mu = 3$ in cui $\pi'_{\mu+1} = \pi_4' = \pi_4 - \left(\frac{\pi_3}{2x}\right)^2$ e quindi il coefficiente di y^4 in questa espressione diviene quadratico in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Altri casi di simile eccezione si presentano d'altronde in corrispondenza a generatrici multiple di $\pi^*_\mu = 0$.

La ricerca può spingersi innanzi nella determinazione di sezioni di maggior singolarità e di generatrici di $\pi^*_\mu = 0$ tali che la singolarità si elevi per tutte le sezioni fatte con piani per esse, ma essa perderebbe oramai il suo principal interesse.

19. — Appendice: Forma dei punti doppi uniplanari. — Si può avvicinare le proprietà trovate per il contorno apparente della superficie in prossimità di un punto uniplanare alla nozione che possiamo formarci delle forme dei punti doppi uniplanari [1]. Considereremo, per semplicità, il caso in cui pel punto doppio non passi la linea doppia della superficie: chiameremo, come al solito, A il punto doppio, V un punto non appartenente al suo piano tangente. Una retta per V, sufficientemente prossima alla VA, taglierà la superficie, in prossimità di A, in due punti reali o immaginari; e se si considera, in-

[1] La forma dei punti doppi biplanari fu determinata dal Klein (*Ueber Flächen dritter Ordnung,* " Math. Ann. „, 6) e dal Rohn (*Ein Beitrag zur Th. d. biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte,* " Math. Ann. „, 22).

torno alla VA, un cono di apertura sufficientemente piccola, le generatrici passanti pei punti d'intersezione della falda conica col contorno apparente C, relativo a V, divideranno la falda in angoli costituiti alternativamente da generatrici che segano la F in due punti reali prossimi ad A, e da generatrici che non la segano in punti reali prossimi ad A. Ogni ramo reale di C taglia la falda in due punti; quindi *la superficie* F *si compone, per la sua parte reale, in prossimità di* A, *di tanti pezzi convergenti in* A *quanti sono i rami reali di* C, e seganti su una piccola falda conica intorno a VA altrettante curve con cui le generatrici che le incontrano hanno due punti comuni. Se il punto V si sposta, le tracce dei singoli pezzi di F sui coni analoghi al precedente debbono conservare le stesse proprietà: *ciascuno di questi pezzi è dunque a sezione ovale; e queste ovali dovranno esser tali che, mentre il piano segante si avvicina ad* A *le dimensioni della sezione parallele al piano tangente in* A *decrescono meno rapidamente che le dimensioni in direzioni formanti angolo finito col piano tangente medesimo*, condizione questa perchè i contorni apparenti relativi ai diversi punti dello spazio abbiano le stesse tangenti.

Sul calcolo approssimato degli integrali doppi a limiti costanti.

Nota del Dr. FILIPPO RIMONDINI.

1. — Il calcolo delle lunghezze, delle aree e dei volumi può sempre ricondursi, come è noto, alla determinazione di uno o più integrali definiti relativi a una funzione di una sola variabile. Ma spesso riesce impossibile eseguire detta integrazione, e allora è necessario ricorrere alle formole di approssimazione. Se, ad esempio, si tratta di calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, o, come suol dirsi, l'area definita dalla curva $y = f(x)$, si possono scegliere $n + 1$ punti sulla curva $f(x)$ e far passare per essi un'altra curva $y = \varphi(x)$. Questa, avendo comuni con la proposta $n + 1$ punti nell'intervallo $a\,b$, se ne scosterà abbastanza poco se n è sufficientemente grande e potrà essere sostituita alla $f(x)$ nel calcolo approssimato dell'area. Tale calcolo si potrà allora eseguire senza difficoltà se si ha cura di scegliere la $\varphi(x)$ in modo che se ne possa trovare facilmente l'integrale indefinito. Si può prendere per $\varphi(x)$ una funzione razionale intera di grado n (*polinomio di interpolazione*), la quale è senz'altro individuata dalla condizione di dover prendere valori assegnati (le ordinate degli $n + 1$ punti scelti) per $n + 1$ valori della variabile. Detto polinomio è dato dalla formola di Newton, nella quale i coefficienti sono le così dette *funzioni interpolari*, le cui notevoli proprietà sono state oggetto di studio per opera di Ampère, Cauchy, Bellavitis, Genocchi, Peano, ecc. Il Lagrange ha dato alla formola di interpolazione un'altra forma che in casi speciali può essere più opportuna e che può ricavarsi o di-

rettamente, o da quella di Newton. La differenza tra la funzione $f(x)$ e il polinomio di interpolazione si dice *resto,* ed esprime l'errore che si commette prendendo il polinomio di interpolazione in luogo di $f(x)$. È di capitale importanza la considerazione di tale resto e l'esame dei diversi modi di esprimerlo, proprio nella stessa guisa che nel problema del Taylor (del quale quello dell'interpolazione è una estensione) dallo studio del resto si deduce la possibilità o meno dello sviluppo della funzione in serie del Taylor. Si ha dunque, detto R il resto:

$$f(x) = \varphi(x) + R$$

e prendendo la formola d'interpolazione di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{r=n} f(x_r) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)} + R$$

dove:

$$R = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

essendo ξ compreso fra $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

Integrando termine a termine risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{r=0}^{r=n} f(x_r) I_r + \int_a^b R dx$$

dove le quantità I_r sono integrali indipendenti dalla natura della curva $f(x)$, il calcolo dei quali può anche semplificarsi cambiando variabile in modo che i limiti diventino 0 e 1, per il che basta fare la posizione $x = a + (b - a)t$.

Il Cotes, che ha indicato questo metodo, suppone le ordinate equidistanti, e costruisce una tabella contenente i valori dei coefficienti per un certo numero di valori di n, con che si ha il valore approssimato dell'area quando si sian misurate le ordinate $f(x_r)$.

Il Gauss, invece di attribuire alla variabile valori in progressione aritmetica, li sceglie in guisa da ottenere la massima approssimazione. Il metodo di Gauss è certo quello da preferire per il calcolo approssimato delle aree per un numero determi-

nato di ordinate; ma se si tratta di una curva nella quale le ordinate possano misurarsi immediatamente, si può avere l'area con abbastanza approssimazione ricorrendo al metodo più semplice di Simpson.

Il metodo del Cotes, accennato prima, fondato sull'uso di una formola di interpolazione, equivale a sostituire alla curva $f(x)$ una parabola di ordine n che ha comuni $n+1$ punti con $f(x)$. Il Simpson divide ancora l'intervallo ab in n parti eguali, ma in ciascuno dei trapezi curvilinei risultanti egli misura l'ordinata media, per sostituire alla curva una parabola del 2° ordine. Egli trova così, chiamando $y_0, y_1, \ldots y_n$ le ordinate, come valore approssimato dell'area l'espressione:

$$\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4)+\ldots+y_{2n-2}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$$

L'espressione del resto è stata tentata da Legendre con sviluppi in serie; ma più semplicemente si può dedurla con facili considerazioni integrando il resto nella formola di interpolazione, con che si giunge alla formola:

$$\int_a^b R dx = \frac{-(b-a)^5}{n^4\, 4!\, 5!} f^{\text{IV}}(\xi)$$

essendo ξ un valore di x compreso fra a e b, formola che si trova nell'opera di Peano: *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino 1887, pag. 211; e *Formulaire de mathématique*, t. IV, pag. 187.

In particolare per $n=1$ si ha:

$$(1)\quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+\frac{-(b-a)^5}{4!\,5!}f^{\text{IV}}(\xi).$$

2. — Passiamo ora alla ricerca di una formola per il calcolo approssimato del volume definito da una funzione di due variabili data in un campo rettangolare.

Sia dunque $f(xy)$ una funzione di due variabili data nel campo rettangolare $(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)$. Applicando ad essa due volte la formola di Simpson ultimamente considerata, si ha:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(xy)dx = \int_c^d \frac{b-a}{6}\left[f(a,y) + f(b,y) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)\right]dy +$$

$$+ \int_c^d \frac{-(b-a)^5}{4!\,5!} f_x^{\text{IV}}(\xi,y)dy =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[\int_c^d f(a,y)dy + \int_c^d f(b,y)dy + 4\int_c^d \left(\frac{a+b}{2}, y\right)dy\right] +$$

$$+ \frac{-(b-a)^5}{4!\,5!}\int_c^d f_x^{\text{IV}}(\xi,y)dy =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[\frac{d-c}{6}\left\{f(a,c) + f(a,d) + 4f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)\right\} +\right.$$

$$+ R' + \frac{d-c}{6}\left\{f(b,c) + f(b,d) + 4f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)\right\} +$$

$$\left. + R'' + 4\frac{d-c}{6}\left\{f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right\} + R'''\right] +$$

$$+ \frac{-(b-a)^5}{4!\,5!}\int_c^d f_x^{\text{IV}}(\xi,y)dy$$

dove:

$$R' = \frac{-(d-c)^5}{4!\,5!} f_y^{\text{IV}}(a,\eta_1), \quad R'' = \frac{-(d-c)^5}{4!\,5!} f_y^{\text{IV}}(b,\eta_2),$$

$$R''' = \frac{-(d-c)^5}{4!\,5!} f_y^{\text{IV}}\left(\frac{a+b}{2}, \eta_3\right).$$

Sostituendo, ed applicando ancora la (1) all'ultimo integrale, si ottiene:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(xy)dx = \frac{(b-a)(d-c)}{36}\left[f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d) +\right.$$

$$+ 4\left\{f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right\} +$$

$$\left. + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right] + R$$

essendo:

$$R = \frac{-(b-a)(d-c)^5}{6.\,4!\,5!}\left[f_y^{\text{IV}}(a,\eta_1) + f_y^{\text{IV}}(b,\eta_2) + 4f_y^{\text{IV}}\left(\frac{a+b}{2}, \eta_3\right)\right] +$$

$$+ \frac{-(b-a)^5(d-c)}{6.\,4!\,5!}\left[f_x^{\text{IV}}(\xi,c) + f_x^{\text{IV}}(\xi,d) + 4f_x^{\text{IV}}\left(\xi, \frac{c+d}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{4!\,4!\,5!\,5!} D_x^4 D_y^4 f(\xi,\eta)$$

Ma la somma:

$$f_y^{\text{IV}}(a, \eta_1) + f_y^{\text{IV}}(b, \eta_2) + 4f_y^{\text{IV}}\left(\frac{a+b}{2}, \eta_3\right)$$

si può scrivere:

$$6f_y^{\text{IV}}(\xi'\eta')$$

essendo:

$$a \leq \xi' \leq b, \qquad c \leq \eta' \leq d;$$

e similmente:

$$f_x^{\text{IV}}(\xi, c) + f_x^{\text{IV}}(\xi, d) + 4f_x^{\text{IV}}\left(\xi, \frac{c+d}{2}\right) = 6f_x^{\text{IV}}(\xi'', \eta'');$$

sicchè sarà:

$$R = \frac{-(b-a)(d-c)^5}{4!\,5!} f_y^{\text{IV}}(\xi'\eta') + \frac{-(b-a)^5(d-c)}{4!\,5!} f_x^{\text{IV}}(\xi''\eta'') +$$
$$+ \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{4!\,4!\,5!\,5!} D_x^4 D_y^4 f(\xi\eta).$$

3. — Dividendo il campo rettangolare in cui è data la funzione in n^2 rettangoli con parallele agli assi, e indicando per brevità con:

$$\begin{matrix} z_{00} & z_{02} & z_{04} & \cdots\cdots & z_{02n} \\ z_{20} & z_{22} & z_{24} & \cdots\cdots & z_{22n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ z_{2n0} & z_{2n2} & z_{2n4} & \cdots\cdots & z_{2n2n} \end{matrix}$$

i valori della funzione nei vertici di tali rettangoli, si avrà, applicando a ciascuno la formola trovata:

$$(2) \quad \int_c^d dy \int_a^b f(xy)dx = \frac{(b-a)(d-c)}{36n^2} \sum_{i=1}^{i=n} \Big[z_{2i-2\,0} + z_{2i-2\,2n} + z_{2i\,0} + z_{2i\,2n} +$$
$$+ 2(z_{2i-2\,2} + z_{2i-2\,4} + \ldots + z_{2i-2\,2n-2} + z_{2i\,2} + z_{2i\,4} + \ldots + z_{2i\,2n-2}) +$$
$$+ 4(z_{2i-2\,1} + z_{2i-2\,3} + \ldots + z_{2i-2\,2n-1} + z_{2i\,1} + z_{2i\,3} + \ldots + z_{2i\,2n-1}) +$$
$$+ 4z_{2i-1\,0} + 8(z_{2i-1\,2} + z_{2i-1\,4} + \ldots + z_{2i-1\,2n-2}) + 4z_{2i-1\,2n} +$$
$$+ 16(z_{2i-1\,1} + z_{2i-1\,3} + \ldots + z_{2i-1\,2n-1}) \Big] + R.$$

L'errore R che si commette è la somma degli errori commessi in ognuno degli n^2 rettangoli parziali di lati $\frac{b-a}{n}$ e $\frac{d-c}{n}$. errori che valgono rispettivamente:

$$\frac{-(b-a)(d-c)^5}{4!\,5!\,n^6} f_y^{\text{IV}}(\xi_1\eta_1) + \frac{-(b-a)^5(d-c)}{4!\,5!\,n^6} f_x^{\text{IV}}(\xi_2\eta_2) + \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{4!\,4!\,5!\,5!\,n^{10}} D_x^4 D_y^4 f(\xi_3\eta_3)$$

$$\frac{-(b-a)(d-c)^5}{4!\,5!\,n^6} f_y^{\text{IV}}(\xi_4\eta_4) + \frac{-(b-a)^5(d-c)}{4!\,5!\,n^6} f_x^{\text{IV}}(\xi_5\eta_5) + \frac{(b-a)^5(d-c)}{4!\,4!\,5!\,5!\,n^{10}} D_x^4 D_y^4 f(\xi_6\eta_6)$$

. . . . . .

. . . . . .

Sommando per colonne, ed osservando che si può scrivere:

$$f_y^{\text{IV}}(\xi_1\eta_1) + f_y^{\text{IV}}(\xi_4\eta_4) + \ldots\ldots = n^2 f_y^{\text{IV}}(\xi'\eta')$$

$$f_x^{\text{IV}}(\xi_2\eta_2) + f_x^{\text{IV}}(\xi_5\eta_5) + \ldots\ldots = n^2 f_x^{\text{IV}}(\xi''\eta'')$$

$$D_x^4 D_y^4 f(\xi_3\eta_3) + D_x^4 D_y^4 f(\xi_6\eta_6) + \ldots\ldots n^2 D_x^4 D_y^4 f(\xi'''\eta''')$$

si avrà:

$$R = \frac{-(b-a)(d-c)^5}{4!\,5!\,n^4} f_y^{\text{IV}}(\xi'\eta') + \frac{-(b-a)^5(d-c)}{4!\,5!\,n^4} f_x^{\text{IV}}(\xi''\eta'') + \frac{(b-a)^5(d-c)}{4!\,4!\,5!\,5!\,n^8} D_x^4 D_y^4 f(\xi'''\eta''')$$

Come si vede dalla (2), la sommatoria del 2° membro contiene: *i valori della funzione nei vertici del campo rettangolare dato, due volte i valori nei punti di divisione del contorno, quattro volte i valori della funzione negli altri vertici dei rettangoli di divisione del campo, quattro volte i valori nei punti di mezzo dei segmenti di divisione del contorno, otto volte i valori nei punti di mezzo dei lati interni dei rettangoli di divisione, sedici volte i valori della funzione nei centri di detti rettangoli.*

4. — Una formola più semplice della (2) e assai notevole, si può trovare col seguente procedimento.

Teorema. — Se $f(xy)$ è una funzione razionale intera di grado non superiore al terzo, si ha:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(xy)\,dy = \frac{(b-a)(d-c)}{12}(z_{00} + z_{01} + z_{10} + z_{11} + 8z_m),$$

avendo posto per brevità:

$$z_{00}=f(a,c),\ z_{01}=f(b,c),\ z_{10}=f(a,d),\ z_{11}=f(b,d),\ z_m=f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right).$$

Sia infatti:

$$f(xy)=ax^3+by^3+cx^2y+dxy^2+ex^2+fy^2+gxy+hx+ky+l.$$

Si faccia la trasformazione:

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u$$

$$y=\frac{c+d}{2}+\frac{d-c}{2}v$$

la quale fa corrispondere alle coppie di valori delle variabili:

$$\begin{aligned} x&=a, & y&=c,\\ x&=b, & y&=d,\\ x&=\frac{a+b}{2}, & y&=\frac{c+d}{2}. \end{aligned}$$

le rispettive coppie:

$$\begin{aligned} u&=-1, & v&=-1\\ u&=1, & v&=1\\ u&=0, & v&=0. \end{aligned}$$

Il determinante funzionale delle x e y rispetto alle u e v è:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b-a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d-c}{2} \end{vmatrix} = \frac{(b-a)(d-c)}{4}.$$

La funzione $f(xy)$ si trasformerà in una funzione di u e v del tipo:

$$F(u,v)=Au^3+Bv^3+Cu^2v+Duv^2+Eu^2+Fv^2+Guv+Hu+Kv+L,$$

e sarà allora:

$$\int_a^b dx\int_c^d f(xy)\,dy=\frac{(b-a)(d-c)}{4}\int_{-1}^{+1}du\int_{-1}^{+1}(Au^3+Bv^3+Cu^2v+$$
$$+Duv^2+Eu^2+Fv^2+Guv+Hu+Kv+L)\,dv.$$

Eseguendo le due integrazioni successive si trova:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(xy)dy = \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\frac{4E}{3} + \frac{4F}{3} + 4L\right).$$

Dalle posizioni fatte si ha poi:

$$L = z_m$$

$$(\alpha) \quad -A - B - C - D + E + F + G - H - K + L = z_{00}$$

$$(\beta) \quad A + B + C + D + E + F + G + H + K + L = z_{11}$$

$$(\gamma) \quad -A + B + C - D + E + F - G - H + K + L = z_{10}$$

$$(\delta) \quad A - B - C + D + E + F - G + H - K + L = z_{01}.$$

Sommando membro a membro le (α) e (β), poi le (γ) e (δ), e tenendo conto della $L = z_m$, risulta:

$$2E + 2F + 2G = z_{00} + z_{11} - 2z_m$$
$$2E + 2F - 2G = z_{10} + z_{01} - 2z_m,$$

da cui sommando:

$$4E + 4F = z_{00} + z_{01} + z_{10} + z_{11} - 4z_m.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(xy)\,dx = \frac{(b-a)(d-c)}{12}(z_{00} + z_{01} + z_{10} + z_{11} + 8z_m)$$

come si voleva.

Si divida ora il campo rettangolare in cui è data la funzione in n^2 rettangoli eguali con rette parallele agli assi. Considerando la r^{esima} fila di tali rettangoletti ed applicando la formola trovata, e indicando con I_{r1}, I_{r2}, ... I_{rn} i rispettivi integrali estesi a tali rettangoletti, si avrà:

$$I_{r1} = \frac{(b-a)(d-c)}{12n^2}(z_{r-10} + z_{r-11} + z_{r0} + z_{r1} + 8z_{m,r1})$$

$$I_{r2} = \frac{(b-a)(d-c)}{12n^2}(z_{r-11} + z_{r-12} + z_{r1} + z_{r2} + 8z_{m,r2})$$

$$I_{r3} = \frac{(b-a)(d-c)}{12n^2}(z_{r-12} + z_{r-13} + z_{r2} + z_{r3} + 8z_{m,r3})$$

. . . . . .

$$I_{rn} = \frac{(b-a)(d-c)}{12n^2}(z_{r-1\,n-1} + z_{r-1\,n} + z_{rn-1} + z_{rn} + 8z_{m,rn}).$$

E sommando:

$$I_r = \frac{(b-a)(d-c)}{12n^2}\Big[z_{r-10} + 2(z_{r-11} + z_{r-12} + \dots + z_{r-1\,n-1}) + z_{r-1n} + \\ + z_{r0} + 2(z_{r1} + z_{r2} + \dots + z_{r\,n-1}) + z_{rn} + \\ + 8(z_{m,r1} + z_{m,r2} + \dots + z_{m,rn})\Big]$$

e quindi:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(xy)\,dy = \sum_{r=1}^{r=n} I_r.$$

Scrivendo per disteso i termini della sommatoria del 2° membro, ed eseguendo le riduzioni, si ha dunque:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(xy)dy = \frac{(b-a)(d-c)}{12n^2}\Big[z_{00} + 2z_{01} + 2z_{02} + \dots + 2z_{02n-1} + z_{0n} + \\ + 8z_{m,11} + 8z_{m,12} \dots\dots + 8z_{m,1n} \\ + 2z_{10} + 4z_{11} + 4z_{12} + \dots + 4z_{1n-1} + 2z_{1n} + \\ + 8z_{m,21} + 8z_{m,22} \dots\dots + 8z_{m,2n} \\ + 2z_{20} + 4z_{21} + 4z_{22} + \dots + 4z_{2n-1} + 2z_{2n} + \\ + 8z_{m,31} + 8z_{m,32} \dots\dots + 8z_{m,3n} \\ + 2z_{30} + 4z_{31} + 4z_{32} + \dots + 4z_{3n-1} + 2z_{3n} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + 2z_{n-10} + 4z_{n-11} + 4z_{n-12} + \dots + 4z_{n-1\,n-1} + 2z_{n-1\,n} + \\ + 8z_{m,n1} + 8z_{m,n2} \dots\dots + 8z_{m,nn} \\ + z_{n0} + 2z_{n1} + 2z_{n2} + \dots + 2z_{nn-1} + z_{nn}\Big].$$

Come si vede, nella parentesi del 2° membro figurano: *le ordinate nei quattro vertici del campo rettangolare dato, due volte i valori che la funzione assume nei punti di divisione del contorno, quattro volte i valori della funzione nei vertici interni al campo dei rettangoletti della scomposizione, e otto volte i valori della funzione nei punti medii di tali rettangoletti.*

La formola trovata è valida per le funzioni razionali intere

di grado non superiore al 3°; per un'altra funzione $f(xy)$, applicandola si commette un errore R che si esprime in una forma analoga a quella trovata al n° 4, cioè per mezzo delle derivate quarte della funzione.

La ricerca di tale resto dà luogo a notevoli osservazioni, perchè richiede la considerazione di formole di interpolazione per le funzioni di due variabili. Tale ricerca, unita a uno studio sulla determinazione di una funzione intera di due variabili che assume valori assegnati per un sufficiente numero di coppie di valori delle variabili, sarà oggetto di un mio prossimo lavoro.

Ferrara, Dicembre 1904.

Sulla variazione del grado di dissociazione elettrolitica colla temperatura.

Nota di A. CAMPETTI e M. NOZARI.

1. — È noto che, mentre la dissociazione ordinaria od in senso chimico (ad esempio la dissociazione dell'ipoazotide ecc.) cresce coll'aumentare della temperatura, una legge analoga non si può stabilire per la dissociazione elettrolitica: anzi in molti casi è probabile che la dissociazione elettrolitica diminuisca col crescere della temperatura. Se, malgrado questo, si constata generalmente che innalzando la temperatura aumenta pure la conducibilità delle soluzioni di elettroliti, ciò si ritiene dovuto alla maggiore mobilità degli ioni a temperatura elevata, dipendente da una diminuzione della resistenza d'attrito nel loro moto attraverso il solvente. Questa ultima causa produce dunque un aumento di conducibilità, mentre la diminuzione nel numero degli ioni produrrebbe invece una diminuzione di conducibilità. Nella maggior parte dei casi la seconda azione prevale; tuttavia vi sono dei casi in cui accade il contrario come (per limitarci alle soluzioni acquose) avviene nelle soluzioni di acido ortofosforico studiate dall'Arrhenius che presentano un massimo di conducibilità a 75° circa.

Il Van't Hoff stabilì anche una formula che lega il calore di dissociazione elettrolitica q, riferito a un grammo molecola di elettrolito disciolto, colla variazione del grado di dissociazione per effetto della temperatura. Se indichiamo con α_1 e α_2 i gradi di dissociazione dell'elettrolito in questione a due temperature abbastanza vicine T_1 e T_2 (e precisamente così prossime che nell'intervallo di temperatura T_1 a T_2 q si possa ritenere costante, vale a dire che il calore di dissociazione elettrolitica misurato alla temperatura T_1 risulti sensibilmente uguale a quello misurato alla temperatura T_2), sussiste la relazione

$$\frac{q}{2}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)=\log\text{nat}\,\frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2}-\log\text{nat}\,\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1}$$

che si può anche scrivere, introducendo per comodità di calcolo i logaritmi volgari al posto dei naturali

$$\frac{q(T_1-T_2)}{T_1T_2}=4{,}6\left\{\log\frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2}-\log\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1}\right\}$$

ove q è espresso in piccole calorie e T misurato nella scala assoluta. Supposto $T_2 > T_1$ il segno di q è contrario a quello del secondo membro: per conseguenza la formula soprascritta ci dice che quando $\alpha_2 > \alpha_1$, cioè il grado di dissociazione elettrolitica cresce col crescere della temperatura, q (cioè il calore di dissociazione) deve essere negativo, mentre naturalmente accade il contrario, cioè q è positivo, quando $\alpha_2 < \alpha_1$, vale a dire quando il grado di dissociazione diminuisce coll'innalzare la temperatura.

2. — Come si sa, il grado di dissociazione elettrolitica di una soluzione può dedursi dalle misure di conducibilità: tali misure sono numerosissime a temperatura ordinaria, molto scarse invece a temperature più elevate: noi abbiamo quindi determinato la conducibilità delle soluzioni di cloruro sodico e cloruro potassico tra 20° e 90° a partire dalle soluzioni binormali, come più concentrate sino alle soluzioni a un millesimo della normale, allo scopo di dedurne poi il valore del grado di dissociazione alla corrispondente temperatura. Le misure delle resistenze delle soluzioni venivano eseguite col solito metodo di Kohlrausch del

ponte e del telefono, usando come recipiente, per la soluzione da esaminarsi, la forma detta di Arrhenius, vale a dire una provetta cilindrica di circa quattro centimetri di diametro con due elettrodi circolari di platino platinato saldati a due corti e robusti fili di platino, saldati alla lor volta in due tubetti di vetro: la distanza degli elettrodi era variabile a volontà.

La difficoltà principale di queste misure consiste nel fatto che, specialmente a temperature un po' elevate, l'acqua discioglie una piccola quantità del vetro del recipiente e per conseguenza la concentrazione e composizione della soluzione vengono alterate: questa alterazione è trascurabile per le soluzioni di forte o media concentrazione, ma non così per quelle più diluite. Sarebbe certamente desiderabile di potere eseguire misure di questo genere in provette di quarzo: ma in mancanza di queste, abbiamo adoperato recipienti del cosidetto *Resistenzglas* di Greiner e Friedrichs, sul quale l'azione chimica dell'acqua e delle sostanze disciolte è notevolmente più debole che sul vetro comune.

Per ogni soluzione si è determinata la resistenza e quindi la conducibilità a 20°; da questa abbiamo sottratta la conducibilità dell'acqua distillata adoperata, alla stessa temperatura. Abbiamo poi, sempre per ogni soluzione, calcolato il coefficiente di temperatura per intervalli di dieci gradi e così da 20° a 30°, da 30° a 40° e così di seguito, operando tanto a temperatura crescente, quanto a temperatura decrescente; mediante il coefficiente di temperatura e partendo dalla conducibilità iniziale a 20° si può calcolare allora la conducibilità a 30°, a 40°, a 50° etc. sino a 90°. L'operare in tal modo corrisponde in fondo ad ammettere (ciò che per le soluzioni da noi esaminate vale con grandissima approssimazione) che il coefficiente di temperatura di una delle nostre soluzioni non sia diverso da quello di una soluzione leggermente alterata per il vetro disciolto. Per questo si richiede evidentemente che l'alterazione subìta dalla soluzione sia piccola; e questo si poteva provare confrontando la conducibilità iniziale della soluzione a 20° colla conducibilità (pure alla stessa temperatura) della soluzione stessa, dopo riscaldata sino a 90°.

Per le ragioni qui accennate le soluzioni più diluite che abbiamo esaminate sono quelle di concentrazione 0,001 della normale.

La provetta contenente le soluzioni veniva riscaldata in un grande bagno di acqua a doppia parete la cui temperatura si manteneva costante mediante un regolatore della fiamma del gas: l'evaporazione delle soluzioni a temperatura elevata veniva ridotta al minimo, versandovi sopra un poco di paraffina pura.

Nelle due tabelle seguenti sono riportate le conducibilità molecolari riferite al mercurio delle soluzioni di cloruro di potassio e di cloruro di sodio dalla concentrazione $m = 2$ sino alla concentrazione $m = 0{,}001$: per il calcolo abbiamo prese come base le conducibilità del KCl e NaCl in soluzione normale quali si ricavano dalle esperienze di Kohlrausch a 18° e dal suo coefficiente di temperatura, per la temperatura di 20°.

Conducibilità molecolari del NaCl.

t	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0{,}5$	$m = 0{,}1$	$m = 0{,}01$	$m = 0{,}005$	$m = 0{,}001$
20°	630,5	728,7	795,2	915,8	1023	1049	[1047]
30°	760,0	875,8	963,8	1119	1254	1287	1300
40°	893,5	1036	1142	1326	1498	1535	1556
50°	1033	1197	1326	1549	1740	1791	1823
60°	1171	1365	1517	1783	2006	2062	2110
70°	1310	1535	1714	2018	2284	2336	2394
80°	1445	1697	1900	2254	2539	2598	2676
90°	1585	1864	2086	2482	2810	2878	2982

Conducibilità molecolari del KCl.

t	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0{,}5$	$m = 0{,}1$	$m = 0{,}01$	$m = 0{,}005$	$m = 0{,}001$
20°	886,7	947,2	997,2	1106	1217	1239	1268
30°	1038	1129	1195	1332	1478	1507	1536
40°	1197	1305	1401	1567	1743	1785	1821
50°	1353	1492	1613	1805	2030	2076	2134
60°	1510	1677	1827	2069	2319	2372	2461
70°	1661	1871	2041	2318	2614	2662	2774
80°	1807	2045	—	2565	2881	2946	3050
90°	1947	2206	2418	2797	3157	3216	3356

Dai valori delle tavole precedenti si calcolarono col solito metodo i valori di λ_∞, conducibilità molecolare limite, ponendo $\lambda = a + bm + cm^2$ (considerando cioè λ come esprimibile mediante una funzione di 2° grado di m), calcolando i valori di $a = \lambda_\infty$ servendosi dei valori di λ corrispondenti alle concentrazioni 0,1, 0,01, 0,005, 0,001 prese tre a tre e infine prendendo la media dei valori di a così trovati. Si ottenne così:

Valori di λ_∞ alle varie temperature.

t	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
NaCl	1064	1314	1569	1840	2122	2400	2676	2977
KCl	1272	1542	1830	2143	2470	2780	3062	3364

Osserviamo a proposito dei valori di questa tabella che l'errore probabile nel loro valore è inferiore all'uno per cento nelle temperature più basse, ma per le più alte (e specialmente per il cloruro potassico) arriva sino al due per cento: questo ci dà un'idea dell'esattezza colla quale si intendono calcolati i valori del grado di dissociazione $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_\infty}$, raccolti nelle tabelle che seguono:

Grado di dissociazione delle soluzioni di KCl.

t	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0{,}5$	$m = 0{,}1$	$m = 0{,}01$	$m = 0{,}005$	$m = 0{,}001$
20°	0,697	0,745	0,783	0,869	0,957	0,974	0,997
30°	0,673	0,732	0,775	0,864	0,959	0,978	0,996
40°	0,654	0,713	0,765	0,856	0,952	0,976	0,995
50°	0,632	0,696	0,753	0,842	0,947	0,969	0,996
60°	0,611	0,679	0,740	0,838	0,939	0,960	0,996
70°	0,597	0,673	0,734	0,834	0,940	0,957	0,998
80°	0,590	0,668	—	0,838	0,941	0,962	0,996
90°	0,579	0,656	0,719	0,831	0,938	0,956	0,998

Grado di dissociazione delle soluzioni di NaCl.

t	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0,5$	$m = 0,1$	$m = 0,01$	$m = 0,005$	$m = 0,001$
20°	0,593	0,685	0,747	0,861	0,961	0,986	0,983
30°	0,578	0,666	0,733	0,852	0,954	0,979	0,989
40°	0,569	0,660	0,728	0,845	0,955	0,978	0,992
50°	0,561	0,651	0,721	0,842	0,946	0,973	0,991
60°	0,552	0,643	0,715	0,840	0,945	0,972	0,994
70°	0,546	0,640	0,714	0,841	0,952	0,973	0,997
80°	0,540	0,634	0,710	0,842	0,949	0,971	1,00
90°	0,532	0,626	0,701	0,834	0,944	0,967	1,00

Dall'esame di queste ultime due tabelle possiamo intanto ricavare questo risultato che cioè, mentre per le soluzioni molto diluite tanto di KCl, quanto di NaCl il grado di dissociazione non varia sensibilmente col variare della temperatura (giacchè le piccole oscillazioni nel suo valore dipendono da errori sperimentali), invece per le soluzioni anche moderatamente concentrate ($m = 0,1$) e in modo più marcato per quelle di concentrazione maggiore ($m = 0,5$, $m = 1$, $m = 2$) il *grado di dissociazione diminuisce col crescere della temperatura*: in particolare poi questa diminuzione è più forte per le soluzioni di cloruro potassico che non per le corrispondenti di cloruro sodico.

Se allora cerchiamo di applicare al nostro caso la formula di Van't Hoff citata in principio, si vede che, poichè il grado di dissociazione delle soluzioni di cloruro sodico e potassico diminuisce coll'aumentare della temperatura, il calore di dissociazione dovrebbe essere positivo: resta dunque a vedere se abbiamo dati sufficienti per stabilire il valore del calore di dissociazione. Molto spesso si ammette che il calore di dissociazione si possa ricavare dal calore di diluizione, vale a dire dal calore che si svolge quando una soluzione dalla concentrazione m_1 passa, per l'aggiunta di acqua, alla concentrazione m_2, minore quindi di m_1. Se infatti in tal caso è α_1 il grado di dissociazione della prima soluzione e supponiamo di considerare di essa un volume tale che vi sia disciolto un grammo-molecola di elettrolito, e se dopo l'aggiunta di acqua sino alla concentrazione

m_2 il grado di dissociazione è divenuto α_2 e contemporaneamente si è svolta la quantità di calore Q, allora, poichè in questa operazione si è dissociata solo la frazione $\alpha_2 - \alpha_1$ di grammo-molecola, il calore q corrispondente alla dissociazione di un grammo-molecola sarà:

$$q = \frac{Q}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Soltanto però sarà veramente q il calore di dissociazione dell'elettrolito esaminato, quando contemporaneamente alla dissociazione elettrolitica non avvengano nelle soluzioni (per effetto della diluizione) altri fenomeni capaci di assorbire o svolgere calore.

Il calore di diluizione per il caso del cloruro di sodio può essere ricavato approssimativamente ed in caso particolare da alcune esperienze del Colson (*) relative al calore di soluzione e al calore di diluizione del detto sale. Egli ha misurato la quantità di calore che si svolge sciogliendo 75 grammi o 25 grammi di NaCl in un litro d'acqua ed eseguendo le esperienze a varie temperature comprese tra 17° e 101°.

Egli ha trovato per i calori di soluzione (riferiti ad un grammo di sale) relativi al primo e secondo caso i valori seguenti:

Temperature	Calori di soluzione 1°	2°
17°,5	—17,7	—21,0
28°,6	—13,9	—15,8
36°,5	—11,4	—12,5
101,0	+6,7	+10,0

Di qui si ricavano i calori di diluizione riferiti a un grammo di sale per il passaggio dalla prima alla seconda concentrazione, facendo la differenza fra i numeri della seconda e quelli della prima colonna e si trova così:

Temperature	Calori di diluizione per grammo
17,5	—3,3
28,6	—1,9
36,5	—1,1
101,0	+3,3

(*) Colson, *Sur le point d'inversion des solutions.* C. R. 1901.

Se di più si tien conto del fatto che a 52° gradi circa il Colson trovò essere nullo il calore di diluizione e se si ha riguardo al grado di dissociazione delle due soluzioni ottenute sciogliendo rispettivamente 75 o 25 grammi di sale in un litro, soluzioni che hanno le concentrazioni $m = 1,25$ e $m = 0,424$, si può calcolare approssimativamente il calore di dissociazione q riferito ad un grammo-molecola (nell'ipotesi assunta provvisoriamente che esso sia dato dal calore di diluizione) per tutte le temperature da 20° a 100°. Si troverebbe così:

Temperature	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
q	—1608	—899	—418	—52	+294	+532	+848	+1182

Ora poichè (almeno per concentrazioni medie) il grado di dissociazione diminuisce col crescere della temperatura, il valore di q ricavato dalla formula di Van't Hoff è positivo: per conseguenza i valori sperimentali del calore di dissociazione riferiti nella precedente tabella non coincidono certamente sino a 50° con quelli teorici, e per le temperature superiori a 50° è difficile fare la verificazione, perchè sarebbe necessaria una maggiore esattezza nella determinazione del grado di dissociazione. D'altra parte la validità della formula di Van't Hoff, che del resto è verificata per il calore di dissociazione di molti acidi, non può essere posta in dubbio, essendo essa dedotta dai principii della termodinamica: conviene quindi concludere che per le soluzioni di cloruro di sodio (e simili conclusioni si potrebbero trarre per quelle di cloruro di potassio) il calore di dissociazione non è dato dal calore di diluizione e che quindi per la diluizione di una di tali soluzioni non ha luogo il solo fenomeno dell'aumento del grado di dissociazione elettrolitica, ma avviene qualche altro processo e precisamente un processo legato con un assorbimento di calore. Si può dunque ammettere (ed è questa la spiegazione più plausibile) che nelle soluzioni non estremamente diluite di cloruro sodico e cloruro potassico esistano legami tra le molecole del sale disciolto ed il solvente, cioè l'acqua: l'innalzamento di temperatura e la diluizione di-

struggerebbero o altererebbero questi legami, in tal modo il calore di diluizione sarebbe la somma algebrica di due altri, del calore cioè di dissociazione elettrolitica e di quello relativo all'altro processo sopra indicato.

Possiamo dunque concludere che:

1° *Per le soluzioni di NaCl e KCl non estremamente diluite il grado di dissociazione elettrolitica diminuisce col crescere della temperatura.*

2° *Il calore di diluizione non rappresenta per queste soluzioni il calore dovuto alla dissociazione elettrolitica e quindi:*

3° *È necessario ammettere in tali soluzioni l'esistenza di complessi molecolari verisimilmente tra le molecole del sale disciolto e il solvente.*

Era nostra intenzione di esaminare l'andamento del grado di dissociazione elettrolitica anche con altro metodo fondato sui principii della pressione osmotica: ma questo sarà soggetto di altro lavoro.

Torino. Istituto di Fisica dell'Università. Dicembre 1904.

Osservazioni intorno agli Orsi dell'Ecuador.

Nota del Dr. ENRICO FESTA
Assistente al R. Museo Zoologico di Torino.

(Con una Tavola).

Le nostre cognizioni intorno agli Orsi, che vivono nell'America meridionale, e più propriamente lungo la catena delle Ande, sono tuttora abbastanza scarse.

Lo Tschudi [1] diceva che la presenza di Orsi nell'America meridionale venne in modo sicuro accertata da Acosta, Garcilazo de La Vega e da Ulloa.

Secondo quest'ultimo Autore gli Orsi erano copiosi nelle provincie di Quixos, Macas, Jaen de Bracamoros, Alausì, ed inoltre nelle foreste orientali di La Paz.

Garcilazo li riteneva rari nel Perù, ed indicava come causa probabile della loro rarità le grosse caccie praticate ogni anno dagli Incas.

Nel 1825 un esemplare di questi Orsi, portato vivente in Europa, venne figurato e descritto sotto il nome di ***Ursus ornatus*** dal Cuvier [2], che lo disse proveniente dal Chile. Il cranio di quest'esemplare venne figurato dal De-Blainville nella sua Classica Opera ((3) pl. VIII).

Lo Tschudi dice di aver ragione di sospettare che l'esemplare descritto dal Cuvier provenisse, anzichè dal Chile, da Trujillo nel Perù, ma non indica quale ragione lo induceva a credere tale cosa.

Lo stesso Tschudi riferisce che Humboldt menziona Quito e Riobamba come località abitate da questi Orsi.

---

[1] (4), p. 90.
[2] (1), pl. 218.

P. L. Sclater descrisse nel 1868 ((10), p. 71) col nome di *Ursus nasutus* un Orso pervenuto vivente alla Società Zoologica di Londra, e che egli dubitava potesse essere del Venezuela. Nel 1871 (P. Z. S., p. 232) egli, seguendo l'opinione di Mr Busk, riferiva il suo *U. nasutus* all'*U. americanus*.

Il Thomas ((19), p. 216), che ha esaminato il cranio dell'esemplare suddetto, dice che l'affermazione del Busk era esatta e che l'*U. nasutus* non appartiene al genere *Tremarctos*.

Lo Sclater menziona poi ((12), p. 700) un esemplare di *U. ornatus*, proveniente dal Chile e vivente nel giardino della Società Zoologica di Londra.

Max Schmidt, pure nel 1871, pubblica nel *Zoolog. Gart.* (13) alcune osservazioni intorno ad un esemplare vivente di *U. ornatus*.

Lo Sclater nel 1898 ((18), p. 2), dimenticando quanto aveva scritto nel 1871, riferisce all'*U. nasutus* un esemplare mandato dalla Colombia da Mr William Crosley, e proveniente dai dintorni del Rio Simitara, uno degli affluenti del Rio Magdalena.

Il Thomas ((19), p. 216) riferisce quest'esemplare al suo *Tremarctos ornatus majori*.

Altri esemplari viventi nel Giardino Zoologico di Colonia vengono menzionati dallo Sclater nel 1893 ((17), p. 614).

Nel 1902 Oldfield Thomas ((19), p. 215) descrive col nome di *Tremarctos ornatus maiori* la forma che trovasi nell'Ecuador.

Questa forma sarebbe distinta, secondo il Thomas, dal *T. ornatus* del Chile e del Perù per la mole maggiore del corpo, e principalmente per la forma del cranio più allungata e sottile e col profilo laterale più alto e convesso.

Durante il viaggio da me compiuto dal 1895 al 1898 nell'Ecuador, io raccolsi 7 esemplari di Orsi: 1 vecchio maschio nelle foreste del Rio Zamora, del quale non ho potuto conservare altro che il cranio; 1 vecchio maschio, 1 femmina e 2 suoi giovani nelle foreste di S. Josè (Provincia dell'Azuay, Ecuador orientale); 1 maschio adulto nei Paramos di Vallevicioso presso le sorgenti del Rio Napo, ed una giovane femmina proveniente da Dudas (Prov. di Azuay).

Io ebbi quest'ultimo esemplare vivente dell'età di pochi giorni nel novembre 1896, e lo allevai in schiavitù fino al luglio 1897. Egli morì durante il viaggio da Quito a Guayaquil.

Data la scarsità dei materiali riferentisi agli Orsi dell'America meridionale, che i Naturalisti hanno fino ad ora potuto esaminare, ho creduto utile studiare minutamente il materiale da me raccolto e pubblicarne i risultamenti.

Ho potuto esaminare anche il cranio di un esemplare raccolto dal Viaggiatore Italiano Gaetano Osculati nel Quixos nel 1853, e che è conservato nel Museo Civico di Storia Naturale di Milano.

Sono lieto di poter qui pubblicamente ringraziare l'Egregio Professore Sordelli, che mi concesse gentilmente di studiare l'esemplare suddetto.

Ho seguito, per quanto si riferisce alle misure comparative, il metodo proposto dal Prof. Camerano per lo studio comparativo degli organismi coll'uso del *coefficiente somatico* (1).

Come *lunghezza base* ho scelto il *diametro minimo del frontale* ossia la lunghezza minima dello spazio interorbitale.

* * *

Il cranio dell'esemplare ♂ di Vallevicioso presenta una notevolissima anomalìa, cioè la mancanza, perfettamente simmetrica da ambi i lati, del *canale alisfenoidale* (vedi tavola, fig. 1).

Questa anomalìa è molto notevole, perchè la presenza o la mancanza del canale alisfenoidale è considerata da parecchi Autori (2) come uno dei caratteri differenziali più importanti fra la sotto-famiglia *Ursinae* e la sotto-famiglia *Procyoninae*.

Paragonando fra loro i cranii degli esemplari maschi adulti, noi vediamo che il cranio dell'esemplare di Vallevicioso differisce dai cranii degli altri esemplari, specialmente perchè in esso varii diametri trasversali sono maggiori che non negli altri esemplari; inoltre in esso alcune delle misure che esprimono l'altezza del cranio sono minori.

Per questi caratteri, questo mio esemplare apparirebbe avvicinarsi maggiormente alla forma, che il Thomas riferisce al

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXV, 1900.

(2) H. N. Turner, (6), p. 63. — W. H. Flower, (11), p. 4. — S. G. Mivart, (16), p. 343.

Diametro minimo trasversale del frontale (lunghezza base, espressa in millimetri)	*c)* 56	*b)* 59	*f)* 60	*d)* 61	*a)* 63	*e)* 65
Lunghezza del palato dall'*henselion*	*f)* 582	*a)* 625	*c)* 642	*d)* 649	*e)* 652	*b)* 689
Id. inferiore del cranio	*f)* 1140	*a)* 1180	*e)* 1239	*c)* 1292	*b)* 1318	
Diametro trasversale della parte inferiore del cranio misurato a livello dell'apice posteriore della sutura mediana dei palatini	*a)* 195	*b)* 201	*d)* 201	*c)* 206		
Id. trasversale al margine posteriore dell'ultimo molare	*a)* 292	*f)* 295	*b)* 311	*c)* 336		
Id. trasversale al margine anteriore del primo molare	*a)* 327	*d)* 336	*b)* 359	*c)* 372		
Id. del palato fra il primo molare	*e)* 221	*a)* 223	*d)* 224	*b)* 238	*f)* 246	*c)* 264
Id. trasversale massimo biparietale	*a)* 493	*d)* 513	*b)* 525	*c)* 534		
Id. id. bifrontale posteriore	*a)* 338	*b)* 342	*d)* 354	*c)* 360		
Id. id. bifrontale (alle apofisi orbitali)	*d)* 478	*a)* 493	*c)* 502	*b)* 512		
Id. id. bimalare (alle apofisi coronali)	*d)* 679	*a)* 688	*c)* 707	*b)* 730		
Id. id. bimalare (all'apice della branca anteriore)	*a)* 413	*c)* 424	*d)* 431	*b)* 445		
Id. id. fra i fori sottorbitali	*c)* 366	*a)* 367	*d)* 378	*b)* 384		
Id. id. massimo del cranio misurato all'apofisi zigomatica del temporale *(zygomatic breadth)*	*e)* 935	*d)* 938	*a)* 951	*f)* 978	*c)* 1010	*b)* 1018
Altezza del cranio dal *basisfenoide* al *bregma*	*d)* 401	*a)* 413	*b)* 421	*c)* 437		
Id. dei palatini al punto nasale	*c)* 367	*a)* 372	*d)* 372	*b)* 390		
Id. del cranio dal mascellare all'apice anteriore della sutura nasale	*c)* 231	*a)* 246	*d)* 248	*b)* 268		
Id. del cranio dai palatini all'origine delle creste parietali *(eight of crown from palate)*	*f)* 456	*c)* 489	*b)* 494	*a)* 504	*e)* 509	
Id. del cranio dal basioccipitale alla protuberanza occipitale	*a)* 378	*c)* 392	*b)* 415			

T. ornatus, anzichè a quella *T. ornatus majori*, Thomas, alla quale egli dice appartenere gli Orsi dell'Ecuador.

Dalla tavola riferita alla pagina precedente appaiono chiaramente le suddette differenze.

In questa tavola oltre i valori ottenuti dalle misure principali (espressi in 360-esimi somatici) dei cranii studiati, sono indicate altresì le misure date dal Thomas ridotte in 360-esimi somatici per gli opportuni confronti.

Nella tabella alla pagina precedente i valori sono disposti in serie. Le iniziali che precedono i valori indicano gli esemplari ai quali appartengono:

a) Esemplare di Zamora
b) „ di S. Josè
c) „ di Vallevicioso
d) „ di Baeza (Quixos)
e) „ di *T. ornatus majori* studiato dal Thomas
f) „ di *T. ornatus* studiato dal Thomas.

* * *

L'esemplare ♂ di Vallevicioso ha inoltre, proporzionatamente alla mole del corpo, il cranio più piccolo che non il mio esemplare ♂ di S. Josè.

Esso ha altresì i piedi notevolmente più piccoli ed il pelame più lungo e più fitto.

Nella tavola seguente sono indicate le misure dei miei esemplari imbalsamati:

(Le misure sono espresse in millimetri)	Esempl. ♂ di S. Josè	♂ di Vallevicioso	♀ di S. Josè	♀ juv. di Dudas
Lunghezza totale dalla punta del muso alla punta della coda (senza peli) . .	1720	1690	1290	1190
Id. della parte nuda plantare dei piedi ant.	122	96	90	85 circa
Id. dei piedi anteriori (senza le unghie)	157	146	130	120
Id. della parte plant. nuda dei piedi post.	167	150	129	130
Id. dei piedi posteriori (senza le unghie)	191	183	160	164
Larghezza massima dei piedi anteriori .	96	79	77	70
Id. „ „ posteriori	92	78	72	68

In quanto al colorito del pelame, nei miei esemplari la estensione e la forma delle macchie bianche del muso, della fronte e del petto sono molto variabili.

Il maschio di S. Josè ha la parte anteriore del muso, la gola ed il petto di color bianchiccio; ai peli bianchicci sono però frammisti molti peli neri. Il colore bianchiccio dal muso si estende sopra la fronte in modo da formare una macchia foggiata a V.

Il maschio di Vallevicioso ha la parte anteriore del muso, la gola ed il petto di color bianco quasi puro. Sul capo ha una striscia bianca, che partendo dalla parte anteriore del muso, si estende a destra sino a circondare la parte superiore dell'occhio, mentre a sinistra finisce a livello dell'occhio.

La femmina di S. Josè ha la parte anteriore del muso, la gola ed il petto di color bianchiccio; una striscia bianchiccia, ma poco ben definita, dal muso si dirige verso la fronte.

La femmina di Dudas ed uno degli esemplari giovanissimi di S. Josè mancano quasi completamente della macchia bianca nella parte superiore del capo.

Gli Indiani dell'Ecuador m'assicurarono che tanto nella regione dei *paramos*, quanto in quella delle foreste si trovano Orsi dal colorito completamente nero, senza nessuna macchia bianca. Anzi essi affermano, non so con quale ragione, che gli Orsi, aventi colorito completamente nero, hanno indole più mansueta che non quelli aventi le macchie bianche sul petto e sul capo, ed ai quali essi danno il nome di *Orso frontìn*. Ed aggiungono che i primi si cibano esclusivamente di vegetali e di frutta, mentre i secondi si cibano preferibilmente di carne ed assaliscono e divorano il bestiame domestico.

Secondo lo Tschudi, il Barone Von Humboldt affermava che a Riobamba incontransi orsi completamente neri, ed altri aventi le macchie bianche.

Lo Tschudi [1] poi dice che l'*Ursus frugilegus* distinguesi

---

[1] (4), p. 92: *Wenn man aber wie es auch bei Nasua geschehen sit, auf die Farbung Keine Rucksicht nehmen will, so kann man freilich die beiden Species in eine vereinigen; dagegen aber sprechen der verhaltnissmassig Kurzere Kopf, die Kurzeren Sohlen und die viel gedrungener Formen bei U. frugilegus.*

dall'*U. ornatus*, Cuv. non soltanto pel colorito completamente nero, ma altresì per la minor lunghezza del capo e delle piante dei piedi, e per le forme molto più raccorciate.

Ora, lasciando da parte il colorito, che si sa essere variabile, i caratteri differenziali indicati dallo Tschudi come proprii del suo *U. frugilegus*, sono appunto quelli che il Thomas attribuisce al *Tremarctos ornatus*, ed i caratteri attribuiti dallo Tschudi all'*U. ornatus* Cuv., sono quelli che il Thomas dice proprii del suo *T. ornatus majori*.

A me pare quindi che se le due forme di *Tremarctos* devonsi ritenere distinte, la forma caratterizzata dalla minor lunghezza del capo e dei piedi e dalle forme in generale più raccorciate, dovrebbe essere attribuita al (Ursus) *Tremarctos frugilegus* (Tschudi), mentre quella caratterizzata dalla maggior lunghezza del capo e dei piedi e dalle forme in generale più allungate, dovrebbe essere attribuita al (*Ursus*) *Tremarctos ornatus* (Cuvier).

Il mio esemplare di Vallevicioso, per i caratteri, che ho sopra indicati, apparirebbe avvicinarsi maggiormente al *Tremarctos frugilegus* (Tschudi), (*T. ornatus* secondo il Thomas), che non al *T. ornatus* (Cuvier), (*T. ornatus majori* secondo il Thomas).

Perciò, a giudicare almeno da quanto osservasi nei miei esemplari, anche nell'Ecuador gli Orsi che vivono nella regione dei *Paramos*, ossia nell'alta montagna, parrebbero appartenere ad una forma un po' diversa da quella, alla quale appartengono gli Orsi che vivono nelle foreste delle regioni calde.

Secondo lo Tschudi però, l'*U. frugilegus* incontrasi nel Perù principalmente nella regione delle foreste, mentre l'*U. ornatus* abita a preferenza la regione *Puna* ossia l'alta montagna (regione corrispondente alla *Region de los Paramos* dell'Ecuador).

Nell'Ecuador accadrebbe precisamente l'opposto, almeno a giudicare da quanto osservasi nei miei esemplari ed anche forse negli esemplari esaminati dal Thomas [1]. Cioè la forma che

[1] Gli esemplari tipici del *T. ornatus majori*, Thomas, raccolti dal Buckley, provengono con tutta probabilità dalle foreste di S. Josè (Ecuador orientale). Uno dei cacciatori che mi accompagnò nelle mie escursioni al Rio Santiago ed a San Josè, era stato al servizio del Buckley, e mi narrava sovente come egli avesse procacciato al *Naturalista ingles*, oltre a molti altri animali, anche parecchi orsi.

	Misure assolute in millimetri.								Misure in 360mi somatici.							
	♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	♀ giovane S. Josè	giovane S. Josè	♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	[illegible]	[illegible]
1. Diametro minimo trasversale del frontale	63	59	56	61	56	42	32	31	—	—	—	—	—	—	—	—
2. Lunghezza del *Basion* al *punto incisivo*	206	216	201	(3)	184	161	124	125	1180	1318	1292	—	1299	1380	1395	1451
3. Diametro massimo *bicondiloideo*	49	52	51	—	46	44	36	36	281	317	328	—	325	377	405	417
4. Diametro massimo trasversale del foro occipitale	25	26	25		24	24	22	22	143	159	161	—	169	206	218	255
5. „ „ antero-posteriore „	19	20	18	—	17	17	17	17	109	122	115	—	120	146	191	197
6. „ „ „ del condilo	25	27	26	—	21	21	16	16	143	164	167	—	148	180	180	186
7. „ „ trasversale del condilo	15	14	13	—	11	10	7	7	86	85	84	—	77	86	79	81
8. „ „ biparaoccipitale (1)	72	69	66	—	62	55	46	46	413	420	424	—	438	471	517	534
9. Altezza massima del processo paraoccipitale (misurato sul margine esterno)	11	12	11	—	9	9	8	7	63	73	71		64	77	90	82
10. Diametro massimo trasversale bimastoideo (sui processi mastoidei)	104	102	93	—	83	71	59	58	596	622	598	—	586	608	664	673
11. Diam. trasvers. fra i fori condiloidei	28	29	27	—	28	25	23	23	160	177	174	—	198	214	259	267
12. „ „ fra i fori glenoidei	72	76	70	—	65	55	51	51	413	464	450	—	459	471	574	592
13. „ „ fra le aperture posteriori dei canali alisfenoidali	35	35	(2)	36	34	29	27	27	201	213		212	240	249	304	313
14. „ „ mass. del cranio misurato sull'apofisi zigom. del temporale	166	167	157	159	131	104	86	84	951	1018	1010	938	925	891	968	975
15. „ „ fra i margini interni della cavità articol. del condilo mandib.	55	58	58	60	55	48	45	46	315	354	373	355	388	411	506	534
16. „ „ della parte inferiore del cranio misurato a livello dell'apice posteriore della sutura mediana dei palatini	34	33	32	34	32	29	23	23	195	201	206	201	226	249	259	267
17. „ „ al margine posteriore dell'ultimo molare	51	51	52	50	49	41	37	37	292	311	334	295	346	343	416	430
18. „ „ al margine anteriore del primo molare	57	59	58	57	53	46	43	44	327	359	372	336	374	394	483	501
19. „ „ massimo nella regione occupata dai canini	61	62	59	62	51	—	—	—	350	378	379	365	360			
20. Lunghezza massima dello spazio occupato dagli incisivi	38	38	32	36	32	27		—	218	232	206	212	226	232	—	
21. Distanza (alla base) fra l'incisivo esterno ed il canino	3	3	4	—	3	2	—	—	23	18	26	—	21	17	—	—
22. Diametro trasversale massimo biparietale	86	86	83	87	82	77	75	74	493	525	534	513	579	660	843	859
23. „ „ „ bifrontale posteriore	59	56	56	60	54	51	—	—	338	342	360	354	381	437	—	—
24. „ „ bifrontale (agli apici delle apofisi orbitali)	86	84	78	81	66	55	38	35	493	512	502	478	466	471	428	406
25. „ trasverso bimalare (agli apici delle apofisi coronali)	120	119	110	115	100	82	62	62	688	730	707	679	706	703	698	720
26. „ „ „ (all'apice della branca anteriore)	72	73	66	73	65	54	42	42	413	445	424	431	459	463	473	488
27. „ „ binasale (agli apici anteriori)	30	30	27	28	28	18	15	14	172	183	174	165	198	154	169	163
28. „ „ fra i fori sottorbitali	64	63	57	64	57	48	37	38	367	384	366	378	402	411	416	441
29. Distanza dell'apice anteriore della sutura nasale al punto incisivo	51	58	48	52	47	37	31	31	292	354	309	307	332	317	349	360
30. Lunghezza della sutura mediana longitudinale dei nasali	38	37	36	41	32	28	22	25	218	226	231	242	226	240	248	290
31. „ massima della cresta parieto-occipitale	105	109	95	—		—	—	—	601	665	702	—	—		—	
32. Diametro massimo trasversale dell'orbita	43	42	38	39	34	32	26	26	246	256	244	230	240	278	293	302
33. „ „ antero-posteriore dell'orbita (supponendo completo il margine posteriore)	34	34	32	33	29	24	21	21	195	207	206	195	205	206	236	244
34. Distanza dal foro sottorbitario alla base del canino (margine interno)	41	41	35	40	38	30	—	—	235	250	225	236	268	257		—
35. Lunghezza della porzione del mascellare superiore occupato dai denti	85	90	85	85	78	68	—	—	487	549	546	501	551	583	—	—
36. Diametro antero-posteriore massimo del zigomatico	91	93	93	94	76	66	52	52	521	533	597	555	537	466	585	604
37. „ trasversale massimo del zigomatico (sulla sua faccia esterna)	40	38	32	31	30	23	18	16	229	226	206	183	212	197	203	186

(1) Misurato agli apici dei processi paraoccipitali. (2) Manca di queste aperture. (3) Questo esemplare manca della parte posteriore del cranio.

	Misure assolute in millimetri.								Misure in 360mi somatici.							
	♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	♀ giovane S. Josè	giovane S. Josè	♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	♀ giovane S. Josè	giovane S. Josè
38. Lunghezza della sutura mediana longitudinale dei mascellari superiori	26	26	25	24	24	20	17	17	149	159	206	242	169	171	194	197
39. " " incisiva mediana longitudinale	24	26	22	24	21	17	14	14	138	159	141	142	148	146	157	163
40. " " mediana longitudinale dei palatini	48	50	43	46	42	40	29	29	275	305	276	271	297	343	326	[illegible]
Mandibola.																
41. Lunghezza massima del condilo al punto incisivo	165	173	157	165	148	126	104	105	945	1055	1010	973	1045	1080	1170	1229
42. Altezza massima (fino all'apice dell'apofisi coronoide)	98	97	81	90	75	57	47	47	562	592	521	531	530	488	529	546
43. " della parte interiore dell'apofisi sotto-condiloidea alla parte superiore del condilo	36	33	28	—	27	26	19	18	206	201	180	—	191	223	214	210
44. " a metà della regione dentale	35	35	33	36	31	25	20	20	201	214	212	212	219	214	225	232
45. Lunghezza della sinfisi	42	46	43	43	37	32	27	27	241	281	276	254	261	274	304	313
46. Spessore massimo del mascellare inferiore a metà della regione dentale	11	14	15	11	10	10	9	9	63	85	96	65	71	86	101	104
47. Distanza dal foro mentoniero al punto incisivo	37	39	37	37	35	32	25	25	212	238	238	218	247	274	281	296
48. " del foro mentoniero dall'apice del condilo	130	135	125	129	117	98	84	84	745	824	804	761	826	840	945	975
49. Diametro massimo della fossa masseterica (fino all'apice del condilo)	60	64	58	60	50	38	25	25	344	390	373	354	353	326	281	290
50. Altezza massima dell'apofisi coronoide	45	46	41	45	37	31	25	25	258	281	264	266	261	266	281	290
51. Lunghezza massima dell'apofisi coronoide alla sua base	48	52	43	50	40	30	21	20	275	317	276	295	282	257	236	232
52. " " del condilo	46	44	37	39	31	25	13	13	264	268	237	230	219	214	146	151
53. Larghezza massima del condilo	14	15	14	13	11	10	8	8	80	91	90	76	78	86	90	92
54. Lunghezza massima dell'apofisi sotto-condiloidea	22	22	20	—	16	14	10	10	126	134	129	—	113	120	113	116
55. Diametro trasversale massimo interno fra le apofisi sotto-condiloidee	80	89	85	85	75	64	51	48	458	543	547	501	530	548	574	557
56. " " " fra i condili	50	61	—	56	54	44	—	—	287	372	—	330	381	377	—	—
57. " " " fra i molari posteriori	50	56	54	53	49	40	—	—	286	342	347	313	346	343	—	—
58. " " " biincisivo	23	26	21	—	21	—	—	—	131	158	135	—	148	—	—	—
59. Distanza dall'ultimo molare all'apice interno superiore del condilo	49	52	49		44	—			281	317	315	—	311			
60. Altezza del cranio dal basisfenoide al bregma	72	69	68	68	62	59	53	52	413	421	437	401	437	506	596	604
61. " " dal basioccipitale alla protuberanza occipitale	66	68	61		56		—	—	378	415	392	—	395	—	—	—
62. " " dai palatini al punto nasale	65	64	57	63	53	46	39	39	372	390	367	372	374	394	439	453
63. " " dai mascellari all'apice anteriore della sutura nasale longitudinale	42	44	36	42	35	32	25	25	246	268	231	248	247	274	281	290
Denti della mascella superiore.																
64. 3° incisivo larghezza massima della corona	8	8	8	8	8	8	—	—	46	49	51	47	56	69	—	—
65. 2° " altezza "	8	6	5 (1)	7	7	8	9	—	46	37	32	41	49	69	101	—
66. " " larghezza massima "	7	7	6	7	6	6	7	—	40	43	40	41	42	51	79	—
67. 1° " altezza "	6	5	4 (1)	—	6	7	8	—	34	30	26	—	42	60	90	—
68. " " larghezza massima "	6	6	5	—	6	5	6	—	34	36	32	42	43	67	—	—

(1) Logoro.

Misure in 360mi somatici.

♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	♀ giovane S. Josè	giovane S. Josè
—	128	166	129	162	—	—	—
92	104	103	86	98	—	—	—
57	67	71	59	64	—	—	—
17	24	26	24	28	26	—	—
17	18	19	18	—	17	—	—
17	18	19	18	21	26	—	—
23	24	26	18	21	26	—	—
46	49	45	41	56	60	90	93
74	79	84	71	85	94	135	151
52	55	58	53	56	60	90	104
97	104	109	94	113	129	180	197
74	79	84	71	85	103	135	151
143	152	154	142	162	189	248	279
80	85	90	77	85	103	158	163
23	30	26	—	42	60	79	81
23	30	32	—	28	34	45	46
29	36	32	30	49	69	90	81
46	49	45	41	49	60	79	93
46	55	45	—	63	86	124	128
34	43	45	—	49	51	68	70
—	128	148	118	148	180	—	—
—	104	96	83	106	129	—	—
52	61	64	59	64	—	—	—
17	18	19	18	21	26	—	—
17	18	19	18	21	26	—	—
17	24	19	18	21	26	—	—
29	37	32	30	35	43	56	58
52	55	58	53	56	60	90	93
34	37	39	35	35	43	56	58
109	122	122	106	134	146	213	221
57	61	64	53	64	77	101	105
109	116	122	106	127	137	202	209
69	73	77	71	71	86	112	116
80	85	84	77	92	103	135	—
63	67	71	65	71	77	101	—

	Misure assolute in millimetri.								Misure in 360mi somatici.							
	♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	♀ giovane S. Josè	giovane S. Josè	♂ vecchio Foreste Zamora	♂ adulto S. Josè	♂ adulto Vallevicioso	♂ adulto Baeza (Quixos)	♀ adulta S. Josè	♀ giovane Dudas	♀ giovane S. Josè	giovane S. Josè
69. Canino altezza della corona	(1)	21(2)	26	22(2)	23(2)	(3)	—	—	—	128	166	129	162	—	—	—
70. „ diametro antero-posteriore massimo della corona	16	17	16	15	14	—	—	—	92	104	103	86	98	—	—	—
71. „ „ trasversale massimo della corona	10	11	11	10	9	—	—	—	57	67	71	59	64	—	—	—
72. 1° premolare altezza massima della corona	3	4	4	4	4	3	—	—	17	24	26	24	28	26	—	—
73. 2° „ „ „ „	3	3	3	3	—	2	—	—	17	18	19	18	—	17	—	—
74. 3° „ „ „ „	3	3	3	3	3	3	—	—	17	18	19	18	21	26	—	—
75. 3° „ larghezza „ „	4	4	4	3	3	3	—	—	23	24	26	18	21	26	—	—
76. 4° „ altezza „ „	8	8	7	7	8	7	8	8	46	49	45	41	56	60	90	93
77. „ „ lunghezza „ „	13	13	13	12	12	11	12	13	74	79	84	71	85	94	135	151
78. „ „ larghezza „ „	9	9	9	9	8	7	8	9	52	55	58	53	56	60	90	104
79. 1° molare lunghezza „ „	17	17	17	16	16	15	16	17	97	104	109	94	113	129	180	197
80. „ „ larghezza „ „	13	13	13	12	12	12	12	13	74	79	84	71	85	103	135	151
81. 2° „ lunghezza „ „	25	25	24	24	23	22	22	24	143	152	154	142	162	189	248	279
82. „ „ larghezza „ „	14	14	14	13	12	12	14	14	80	85	90	77	85	103	158	163
Denti della mascella inferiore.																
83. 1° incisivo altezza della corona	4	5	4	—	6	7	7	7	23	30	26	—	42	60	79	81
84. „ „ larghezza „	4	5	5	—	4	4	4	4	23	30	32	—	28	34	45	46
85. 2° „ altezza „	5	6	5	5	7	8	8	7	29	36	32	30	49	69	90	81
86. „ „ larghezza „	8	8	7	7	7	7	7	8	46	49	45	41	49	60	79	93
87. 3° „ altezza „	8	9	7	—	9	10	11	11	46	55	45	—	63	86	124	128
88. „ „ larghezza „	6	7	7	—	7	6	6	6	34	43	45	—	49	51	68	70
89. Canino altezza „	—(5)	21(2)	23	20(2)	21	21	(4)	(4)	—	128	148	118	148	180	—	—
90. „ diametro antero-posteriore	—	17	15	14	15	15	—	—	—	104	96	83	106	129	—	—
91. „ larghezza massima	9	10	10	10	9	(3)	—	—	52	61	64	59	64	—	—	—
92. 1° premolare altezza della corona	3	3	3	3	3	3	—	—	17	18	19	18	21	26	—	—
93. 2° „ „ „	3	3	3	3	3	3	—	—	17	18	19	18	21	26	—	—
94. 3° „ „ „	3	4	3	3	3	3	—	—	17	24	19	18	21	26	—	—
95. 4° „ „ „	5	6	5	5	5	5	5	5	29	37	32	30	35	43	56	58
96. „ „ lunghezza „	9	9	9	9	8	7	8	8	52	55	58	53	56	60	90	93
97. „ „ larghezza „	6	6	6	6	5	5	5	5	34	37	39	35	35	43	56	58
98. 1° molare lunghezza „	19	20	19	18	19	17	19	19	109	122	122	106	134	146	213	221
99. „ „ larghezza „	10	10	10	9	9	9	9	19	57	61	64	53	64	77	101	105
100. 2° „ lunghezza „	19	19	19	18	18	16	18	18	109	116	122	106	127	137	202	209
101. „ „ larghezza „	12	12	12	12	10	10	10	10	69	73	77	71	71	86	112	116
102. 3° „ lunghezza „	14	14	13	13	13	12	12	—	80	85	84	77	92	103	135	—
103. „ „ larghezza „	11	11	11	11	10	9	9	—	63	67	71	65	71	77	101	—

(1) Logoro. (2) Un po' logoro. (3) Non ancora sviluppato. (4) Nascente. (5) Rotto.

nell'Ecuador abita nella regione delle foreste corrisponde abbastanza bene all'*U. ornatus* Cuvier (*Tremarctos ornatus majori*, Thomas), mentre quella che abita la regione dei *Paramos* sarebbe molto affine, se non identica all'*U. frugilegus*, Tschudi (*T. ornatus* secondo il Thomas).

Considerando inoltre che i caratteri differenziali tra il *T. ornatus* e il *T. frugilegus* appaiono essere non del tutto costanti, io credo che tutti gli Orsi attualmente viventi lungo la catena delle Ande nell'America meridionale debbansi ritenere come appartenenti ad una sola specie, cioè al *Tremarctos ornatus* (Cuvier).

* * *

Io incontrai il *T. ornatus* abbastanza numeroso nell'Ecuador nelle foreste della regione orientale e nella regione dei *Paramos*, e cioè da 600 a 4000 m. circa di altitudine.

Gli Indigeni mi assicurarono che si incontrano Orsi anche nelle foreste della regione occidentale, ma io non ho potuto accertare tale cosa.

Quest'orso si ciba talora di carne, ma a preferenza di vegetali, e sovratutto di frutta: nella regione dei *Paramos* ricerca avidamente le gemme dell'*Achupalla* (*Pouretia pyramidata*). L'individuo da me ucciso a Vallevicioso aveva lo stomaco ripieno di tali gemme.

Quest'Orso sta molto sugli alberi, sui quali sovente dorme, preparandosi con ramoscelli e foglie un comodo giaciglio, per lo più alla biforcazione di un grosso ramo. Si arrampica con grande facilità e si aggira fra i rami con notevole sveltezza.

Ciascun individuo abita una vastissima zona, e nella foresta pratica sentieri, che tiene ripuliti dai rami e dagli sterpi, tanto che sembrano siano opera dell'uomo. Si riconosce facilmente la sua presenza dalle traccie di graffiature che i suoi unghioni lasciano sulla corteccia degli alberi, sui quali si arrampica.

Se non è ferito, non aggredisce mai l'uomo, e persino ferito, raramente si avventa contro il cacciatore.

È già attualmente divenuto piuttosto raro nella regione dei *paramos*, dove è molto perseguitato dai pastori pei danni che loro arreca assalendo il bestiame domestico, e principalmente i giovani animali.

Nella regione delle foreste è più abbondante. Anche quivi selvaggi e coloni lo cacciano attivamente per averne la carne, assai gustosa, ed il grasso, che viene adoperato per usi medicinali.

Nelle foreste si dà la caccia a quest'Orso coll'aiuto di cani, i quali lo scovano e lo inseguono. L'Orso dopo una corsa più o meno lunga si arrampica su di un albero, dove viene ucciso con tutta facilità dai cacciatori.

I selvaggi *Jivaros* lo uccidono lanciandogli contro colla *bodoquera* (cerbottana) molte piccole freccie di legno avvelenate col veleno *ticuña*. Quando la belva, intorpidita dal veleno, cade al suolo, la finiscono a colpi di lancia.

Preso giovane, quest'orso si addomestica bene, e dimostra molta affezione al suo custode: la mia giovane femmina di Dudas era docile e sollazzevole al pari di un cane.

***

Credo utile dare la serie completa delle misure fatte, sia assolute, che ridotte in 360-esimi somatici, affinchè possano servire di materiale anche per chi volesse seguire metodi di calcolo e di comparazione diversi da quello da me usato.

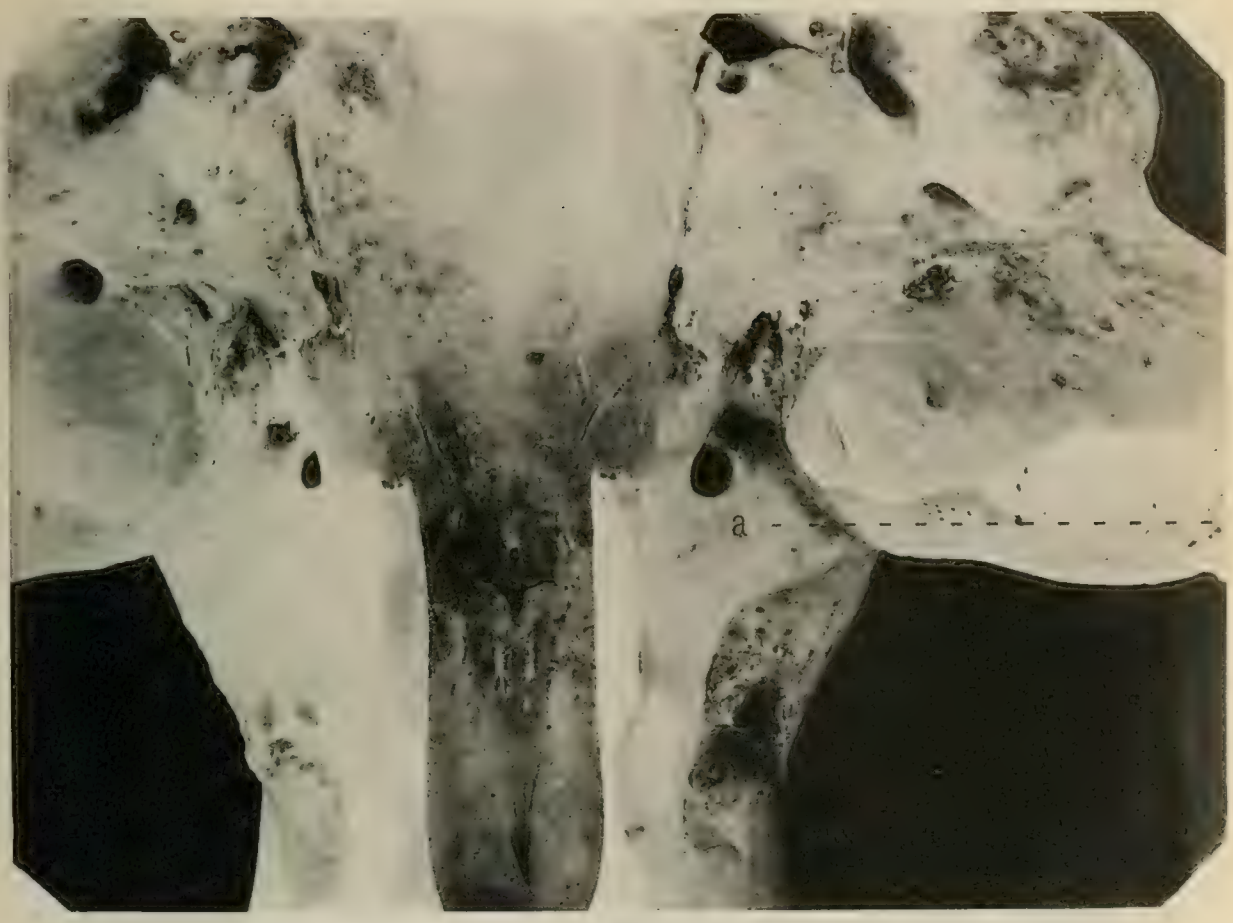
1

3

4

8

Dott. L. Cognetti de Martiis Fotografò



2

7 9

6

5

STAB. ELIOT. ING. MOLFESE — TORINO

INDICE BIBLIOGRAFICO

1. M. Geoffroy-Saint-Hilaire et F. Cuvier, *Histoire naturelle des Mammifères*, pl. 218.
2. R. Ker Porter, Proceedings of the Zoological Society of London, 1833, p. 114.
3. M. Ducrotay de Blainville, *Ostéographie*, planches, Gen. *Ursus*, pl. VIII (1841).
4. J. J. von Tschudi, *Untersuchungen über die Fauna Peruana*, p. 90 (1844).
5. Id., *Reiseskizzen, Perù*, II, p. 209 (1846).
6. H. N. Turner, *Observations relating to some of the Foramina in the base of the Skull in Mammalia, and on the Classification of the Order Carnivora*, P. Z. S., 1848, p. 63.
7. Gervais, *Castelnau Expédition dans l'Amérique du Sud*, Anat., p. 7, pl. IV, fig. 1 (1850). (Trouessart, *Cat. Mamm.*, I, p. 245).
8. Paul Gervais, *Histoire naturelle des Mammifères*, p. 20 (1855).
9. J. E. Gray, *Revision of the Genera and Species of Ursine Animals (Ursidae)*, P. Z. S., 1864, p 698.
10. P. L. Sclater, *Ursus nasutus*, P. Z. S., 1868, p. 71, pl. VIII.
11. W. H. Flower, *On the value of the Characters of the base of the Cranium in the Classification of the Order Carnivora* ecc., P. Z. S., 1869, p. 4.
12. P. L. Sclater, *Notes on rare or little known Animals living in the Society's Gardens*, P. Z. S., 1871, p. 221; id. id., p. 700.
13. Max Schmidt, *Osservazioni intorno ad un esemplare di* U. ornatus *vivente*, Zoolog. Garten, 1871, p. 304-306 (non vidi).
14. J. E. Gray, *On the Skull of the Spectacled Bear of Peru and of the Helarctos from Malacca and Java*, Annals and Magazine of Natural History, ser. 4ª, vol. XII, p. 182.
15. Th. Gill, *On the Genera* Tremarctos, Gervais (*Nearctos*, Gray) *and* Aelurina, Gervais (*Ailorugale*, Fitz.), Annals and Magaz. of Nat. History, ser. 4ª, vol. XIII, p. 15.
16. St. George Mivart, *On the Anatomy, Classification, and Distribution of the Arctoidea*, P Z. S., 1885, p. 340.
17. P. L. Sclater, P. Z. S., 1893, p. 614.
18. Id., P. Z. S., 1898, p. 2.
19. Oldfield Thomas, *On the Bear of Ecuador*, Annals and Mag. of Nat. Hist., ser. 7ª, vol. IX, p. 215.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Porzione della faccia inferiore del cranio dell'esemplare ♂ di Vallevicioso.
Fig. 2. — Porzione della faccia inferiore del cranio dell'esemplare ♂ di S. Josè: α, apertura posteriore del canale alisfenoidale.
Fig. 3. — Cranio dell'esemplare ♂ di S. Josè.
Fig. 4. — Cranio dell'esemplare ♂ di Vallevicioso.
Fig. 5. — Cranio dell'esemplare ♂ delle foreste del Rio Zamora.
Fig. 6. — Cranio dell'esemplare ♀ di S. Josè.
Fig. 7. — Cranio dell'esemplare ♀ giovane di Dudas.
Fig. 8 e 9. — Cranii dei due esemplari giovanissimi di S. Josè.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Manno, Cipolla, Brusa, Allievo, Chironi, Savio, Ruffini e Renier Segretario.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 11 dicembre 1904.

Dal Socio corrispondente Giuseppe Biàdego è giunto in omaggio un opuscolo: *Per Scipione Maffei*, Verona, 1904.

Il Socio Cipolla offre in nome dell'autore le numerose pubblicazioni storiche e geografiche, quasi tutte scolastiche, del prof. Costanzo Rinaudo, segnalando i due volumi d'indici della *Rivista storica italiana*, periodico di bibliografia storica dal Rinaudo stesso diretto. Il Socio Chironi rileva gli utili servigi che può rendere quell'indice anche ai cultori delle discipline giuridiche.

Il Socio Allievo presenta per le *Memorie* un manoscritto del Dr. Augusto Bellotti, intitolato: *Empedocle*. Il Presidente designa a riferirne in una prossima tornata il Socio Allievo e il Socio De Sanctis.

Il Segretario presenta una dissertazione di metrica greca inviata all'Ufficio per l'inserzione nelle *Memorie* dal Dr. Angelo Taccone. Sono dal Presidente invitati ad esaminarla i Soci Pezzi e De Sanctis.

Il Presidente augura alla Classe un felice anno e scioglie l'adunanza.

PROGRAMMA

PER IL

XV PREMIO BRESSA

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, uniformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottore Cesare Alessandro Bressa, ed al Programma relativo pubblicatosi in data 7 Dicembre 1876, annunzia che col 31 Dicembre 1904 si chiuse il Concorso per le scoperte e le opere scientifiche fatte nel quadriennio 1901-1904, al quale concorso erano solamente chiamati Scienziati ed Inventori Italiani.

Contemporaneamente essa Accademia ricorda che, a cominciare dal 1° Gennaio 1903, è aperto il Concorso per il quindicesimo premio Bressa, a cui, a mente del Testatore, saranno ammessi **Scienziati ed Inventori di tutte le Nazioni.**

Questo Concorso ha per iscopo di premiare quello Scienziato, di qualunque nazione egli sia, che durante il quadriennio 1903-1906, " a giudizio dell'Accademia delle Scienze di Torino, " avrà fatto la più insigne ed utile scoperta, o prodotto l'opera " più celebre in fatto di scienze fisiche e sperimentali, storia " naturale, matematiche pure ed applicate, chimica, fisiologia e " patologia, non escluse la geologia, la storia, la geografia e " la statistica ".

Questo Concorso verrà chiuso col 31 Dicembre 1906.

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di lire **9600** (novemila seicento).

Chi intende presentarsi al Concorso dovrà dichiararlo, entro il termine sopra indicato, con lettera diretta al Presidente dell'Accademia, ed inviare l'opera con la quale concorre. L'opera

dovrà essere stampata; **non si terrà alcun conto dei manoscritti.** Le opere presentate dai Concorrenti, che non venissero premiati, non saranno restituite.

Nessuno dei Soci nazionali, residenti o non residenti, dell'Accademia Torinese potrà conseguire il premio.

L'Accademia dà il premio allo Scienziato che essa ne giudica più degno, ancorchè non si sia presentato al Concorso.

Torino, 1° gennaio 1905.

Il Presidente dell'Accademia
E. D'Ovidio.

Il Segretario della Giunta
A. Naccari.

PREMIO DI FONDAZIONE POLLINI

Alla fine dell'anno 1915, l'Accademia Reale delle scienze di Torino conferirà un premio di fondazione del cav. Dr. Giacomo Pollini. Esso sarà di Lire 1000, dedotte le tasse e le spese di amministrazione, e sarà conferito alla migliore monografia storica degli attuali Comuni delle antiche provincie piemontesi, manoscritta ovvero stampata nel decennio 1904-1914, sul genere di quella dello stesso Dr. Pollini pubblicata in Torino nel 1896 sul comune di Malesco. Sono esclusi i Comuni capoluogo di provincia e circondario, ad eccezione di quelli di Domodossola e di Pallanza.

A tale premio potranno concorrere solamente scrittori di dette provincie.

I concorrenti dovranno consegnare i loro lavori stampati o manoscritti prima della fine del decennio.

L'Accademia non restituirà agli autori nè le opere a stampa, nè quelle manoscritte presentate al concorso.

REGOLAMENTO INTERNO
per il conferimento del premio Pollini.

Art. 1°.

Il premio istituito dal dott. cav. Giacomo Pollini sarà conferito ogni dieci anni dalla R. Accademia delle Scienze di Torino, contando il primo decennio dal 1° gennaio 1904, in conformità delle disposizioni del testatore, che qui si riportano:

Lascio alla R. Accademia delle Scienze di Torino una rendita annua di L. 250, Consolidato 5 %, i cui redditi annuali capitalizzati dovranno servire per dare ogni tanti anni, nella cifra che essa crederà, un premio alla migliore monografia storica, sul genere della mia di Malesco, pubblicata a Torino nel 1896, manoscritta od anche stampata, degli attuali Comuni italiani delle antiche provincie piemontesi; da cui però ne escludo quelli delle città capoluogo di provincia e circondario, ad eccezione di quelli di Domodossola e Pallanza. A tale premio potranno concorrere solamente scrittori di dette provincie.

Art. 2°.

L'ammontare del premio sarà fissato dal Consiglio di amministrazione dell'Accademia nel darne l'annunzio al principio d'ogni decennio.

Art. 3°.

Non potranno concorrere al premio i socî nazionali residenti e non residenti dell'Accademia.

Art. 4°.

I concorrenti dovranno consegnare i loro lavori stampati o manoscritti prima della fine del decennio.

I lavori stampati non potranno avere una data anteriore al decennio medesimo.

Art. 5°.

Alla fine del penultimo anno del decennio la Classe di scienze morali, storiche e filologiche nomina una Commissione di tre membri, con l'incarico di esaminare i lavori stampati e manoscritti dei concorrenti.

Alla Commissione presiede il socio anziano di nomina.

Essa elegge nel suo seno un segretario relatore.

Art. 6°.

La Commissione deve presentare all'Accademia la sua relazione su tutti i lavori dei concorrenti in tempo che questa possa, in adunanza plenaria, assegnare il premio non più tardi della fine dell'anno seguente all'ultimo del decennio.

Art. 7°.

Il premio è indivisibile.

Art. 8°.

La relazione potrà contenere la proposta di una sola pubblicazione da premiarsi, ovvero presentare la proposta di più pubblicazioni, fra le quali l'Accademia dovrà scegliere quella a cui assegnare il premio.

Art. 9°.

Ove la Commissione non riconosca alcun lavoro meritevole del premio, l'Accademia disporrà della corrispondente somma, sia accrescendo il premio successivo, sia istituendone altri, sempre conforme all'intenzione del testatore.

Il Presidente dell'Accademia
E. D'Ovidio.

Il Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
L. Camerano.

Il Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
R. Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, JADANZA, SPEZIA, GUIDI, GRASSI, FOÀ, FILETI, MORERA, SEGRE, PEANO, GUARESCHI, PARONA, MATTIROLO e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio FOÀ presenta i lavori dell'Istituto di Anatomia patologica fatti durante l'anno 1904. Il Presidente ringrazia il Socio FOÀ.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1° J. L. COOLIDGE, *Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe,* II° Note, dal Socio SEGRE;

2° T. BOGGIO, *Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore,* dal Socio MORERA;

3° V. NOVARESE, *La grafite delle Alpi piemontesi,* dal Socio PARONA;

4° dal Socio SPEZIA la sua nota intitolata: *Contribuzioni di Geologia chimica. La pressione è chimicamente inattiva nella solubilità e ricostituzione del quarzo;*

5° G. PONZIO, *Su alcuni nuovi acidi della serie oleica.* Nota II: *Acido 2,3 ipogeico,* dal Socio FILETI.

Per ultimo il Socio PEANO presenta per l'inserzione nelle *Memorie* accademiche la memoria seguente del Dr. Mario PIERI, *Nuovi principii di Geometria projettiva complessa.*

Il Presidente delega i Soci PEANO e SEGRE a riferire intorno a detta memoria in una prossima seduta.

LETTURE

Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe.

IIe Note de J. L. COOLIDGE.

Le 20 Décembre 1903 M. le professeur Corrado Segre me fit l'honneur de présenter à l'Académie Royale des Sciences à Turin quelques théorèmes que j'avais découverts dans la géométrie réglée non-euclidienne. Mon mémoire a été publié ensuite dans les " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXXIX, sous le titre susécrit (*). Peu de temps après, M. le professeur Bianchi, qui avait eu la délicatesse de retenir la publication de ses propres recherches, jusqu'à ce que les résultats des miennes fussent imprimés, a publié un mémoire dans les mêmes *Atti*, intitulé: " Sulla rappresentazione di Clifford delle congruenze rettilinee nello spazio ellittico ". M. Bianchi, tout en abordant le sujet à un point de vue un peu différent, a donné une seconde démonstration de mon théorème principal, en signalant en même temps ce qu'il a appelé un cas d'exception. C'est sur ce point que j'ose insister sur mon opinion contre celle de l'illustre professeur de Pise. Tout revient à une question de définition, et ni M. Bianchi, ni moi, nous n'avons, nulle part, exprimé d'une façon précise ce que nous entendions par " congruence isotrope " de l'espace elliptique (ou sphérique). Je me hâte de combler cette lacune. J'entends par " congruence isotrope " dans cet espace, " une congruence où le lieu des positions limites de toutes les perpendiculaires communes entre une droite non singulière et toutes les droites infiniment voisines de la congruence, sans exception, consiste en deux faisceaux de droites polaires l'un à l'autre par rapport à l'Absolu ". Dans ces circonstances, la surface focale de la congruence est une

(*) Indiqué ci-après par C. I.

développable circonscrite à l'Absolu (*), propriété fondamentale, qui pourrait bien servir de définition à la congruence. Les cas d'exception de M. Bianchi sont ceux des congruences de normales à des surfaces de courbure totale nulle. Il y a pourtant ici des droites infiniment voisines, qui sont parallèles dans le sens de Clifford et qui ont, par conséquent, un nombre infini de perpendiculaires communes. En outre, les surfaces focales sont loin d'être des développables circonscrites à l'Absolu. Il me semble donc, que, puisqu'il manque à ces congruences les deux propriétés caractéristiques des congruences isotropes, comme je les ai définies, on n'est pas très-bien avisé de les classer avec les autres. On fait mieux de se servir du mot " isotrope „ seulement dans le sens restreint, et de signaler les congruences de M. Bianchi par leur propriété normale. Hormis cette question de définition, nous sommes parfaitement d'accord (**).

En réfléchissant sur ces matières, il m'a semblé que l'intérêt du sujet n'était pas entièrement épuisé, ni par le mémoire de M. Bianchi, ni par le mien. D'abord, nous avons, jusqu'à présent, laissé complètement de côté la question de la représentation sphérique des droites imaginaires, question d'une importance fondamentale dans l'étude des congruences isotropes algébriques. Ensuite il ne suffit pas de démontrer, comme je l'ai déjà fait, qu'une fonction monogène de la variable complexe peut toujours se représenter par une congruence isotrope: il faut donner des exemples, et discuter un peu la représentation de certaines classes de fonctions bien connues. C'est la discussion de ces deux points qui fournit le but du présent mémoire. Je commence par écrire, sans démonstration, quelques formules, et quelques théorèmes extraits du mémoire précédent. J'ai conservé, tant qu'il me fut possible, les notations déjà employées.

(*) C. I., p. 11.

(**) M. Bianchi me fait observer qu'en restreignant ainsi la définition, l'un des théorèmes que j'avais annoncés dans C. I., p. 11, devient faux. En effet, le théorème en question devrait être: " Si les segments de droites qui joignent les points correspondants de deux surfaces applicables l'un sur l'autre ont une longueur constante, ces droites appartiennent, ou bien à une congruence isotrope, ou bien à une congruence de normales à une surface de courbure totale nulle. Les surfaces centrales d'une telle congruence seront les lieux des centres des segments „.

Pourtant il y a une différence capitale à noter. Autrefois je me suis servi de coordonnées liées par des équations quadratiques: il faut maintenant faire usage de coordonnées homogènes, afin d'être à même de considérer certaines figures imaginaires, autrefois exclues. Dans le second § j'aborde la question des rayons imaginaires, et de l'existence de la correspondance fondamentale dans le domaine complexe. Le § 3 contient des remarques générales sur les congruences qui représentent les fonctions monogènes, dont l'application à la fonction linéaire se trouve en § 4 et à d'autres fonctions connues en § 5.

§ 1. — **Formules préliminaires.**

Je prends comme coordonnées d'un point de l'espace elliptique (ou sphérique):

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 ;$$

celles d'un plan seront:

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 ;$$

celles enfin d'une droite:

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_{0i} &= \begin{vmatrix} x_0 & x_i \\ \xi_0 & \xi_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{vmatrix} \\ \lambda p_{jk} &= \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ \xi_j & \xi_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & u_i \\ v_0 & v_i \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3.$$

Écrivons maintenant pour le domaine réel:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \rho(p_{01} - p_{23}) &= X & \sigma(p_{01} + p_{23}) &= X' \\ \rho(p_{02} - p_{31}) &= Y & \sigma(p_{02} + p_{31}) &= Y' \\ \rho(p_{03} - p_{12}) &= Z & \sigma(p_{03} + p_{12}) &= Z' \\ \rho\sqrt{\Sigma p^2} &= T & \sigma\sqrt{\Sigma p^2} &= T' \\ X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 &= 0 & X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - T'^2 &= 0 \end{aligned}$$

Inversement:

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\tau p_{01} &= X'T + T'X & \tau p_{23} &= X'T - T'X \\
\tau p_{02} &= Y'T + T'Y & \tau p_{31} &= Y'T - T'Y \\
\tau p_{03} &= Z'T + T'Z & \tau p_{12} &= Z'T - T'Z.
\end{aligned}
$$

Nous voyons que nous pouvons prendre $X \ldots T$ et $X' \ldots T'$ comme coordonnées cartésiennes de deux points de deux sphères euclidiennes de diamètre deux: $T = 0$ et $T' = 0$ nous donnant les plans à l'infini. En outre il est bien connu que XYZ et $X'Y'Z'$ sont les trois premières coordonnées plueckeriennes (les trois autres étant égales à zéro) de deux droites issues du point $(1, 0, 0, 0)$ et parallèles respectivement à gauche et à droite à la droite p (*). Si nous entendons par " rayon ", " droite orientée ", nous aurons:

Les rayons réels de l'espace elliptique ou sphérique peuvent être représentés par les couples de points réels de deux sphères euclidiennes de diamètre deux. Deux rayons de sens opposé situés sur une même droite seront en correspondance avec deux couples de points opposés diamétralement (**).

J'entends par deux rayons " polaires " l'un à l'autre, deux rayons situés sur deux droites polaires par rapport à l'Absolu:

Deux rayons polaires l'un à l'autre seront représentés par deux points identiques de l'une sphère, et deux points opposés diamétralement de l'autre (***).

Pour fixer les idées, je nomme la sphère $X \ldots T$ qui correspond aux parallèles à gauche issues du point $(1, 0, 0, 0)$ la sphère " gauche ". L'autre sera, naturellement, la sphère " droite ". En outre, si deux rayons sont situés sur deux droites parallèles, les rayons eux-mêmes seront nommés parallèles.

(*) M. Study, dans le " Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ", t. XI, a proposé le nom " paratactique " au lieu de parallèle. Ce changement serait louable; pourtant je préfère ici de ne pas introduire une terminologie différente de celle que j'ai déjà employée dans l'autre mémoire.

(**) C. I., p. 6.

(***) Id. id.

Deux rayons parallèles à gauche (à droite) auront pour représentants sur la sphère gauche (droite), ou deux points identiques, ou bien deux points opposés diamétralement.

Supposons que les coordonnées du point représentant sur la sphère droite, conservent des valeurs fixes $X_1'\ Y_1'\ Z_1'\ T_1'$: tandis que celles du point représentant à gauche satisfassent à une équation linéaire:

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 = 0.$$

Nous aurons un système de ∞^1 rayons parallèles à droite. Prenons ensuite pour $A'\ B'\ C'$ trois valeurs réelles quelconques, assujetties à la condition:

$$A'X_1' + B'Y_1' + C'Z_1' = 0.$$

Nous voyons que chacun des rayons donnés coupe en angle droit chacun des ∞^1 rayons, parallèles à gauche (*):

$$X : Y : Z = A : B : C \qquad X' : Y' : Z' = A' : B' : C'.$$

Les rayons qui correspondent à un point fixe de la sphère droite (gauche) et aux points d'un grand cercle de la sphère gauche (droite) seront situés sur une série de génératrices d'un hyperboloïde minimum. L'autre série de génératrices portera les rayons représentés par les pôles du grand cercle et les points du grand cercle polaire du point fixe.

Il faut maintenant chercher une description paramétrique des deux sphères. Posons:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \rho X &= z_1 + z_2 & \rho' X' &= u_1 + u_2 \\ \rho Y &= i(z_1 - z_2) & \rho' Y' &= i(u_1 - u_2) \\ \rho Z &= z_1 z_2 - 1 & \rho' Z' &= u_1 u_2 - 1 \\ \rho T &= z_1 z_2 + 1 & \rho' T' &= u_1 u_2 + 1 \end{aligned}$$

(*) C. I., pag. 6.

$$(4)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \frac{X-iY}{T-Z} & u_1 &= \frac{X'-iY'}{T'-Z'} \\ z_2 &= \frac{X+iY}{T+Z} & u_2 &= \frac{X'+iY'}{T'-Z'}\,. \end{aligned}$$

On voit que z_1 et z_2 sont les paramètres des deux systèmes de génératrices de la sphère gauche, et de même u_1 et u_2 donnent les génératrices de la sphère droite. Il faut, pour avoir un rayon réel, attribuer aux deux z et aux deux u des couples de valeurs imaginaires conjuguées. On remplace un rayon par le rayon opposé de la même droite en substituant:

$$\begin{aligned} z_1' &= -\frac{1}{z_2} & u_1' &= -\frac{1}{u_2} \\ z_2' &= -\frac{1}{z_1} & u_2' &= -\frac{1}{u_1}\,. \end{aligned}$$

Veut-on avoir un rayon polaire au rayon donné, on n'a qu'à se servir de l'un seulement de ces deux couples de substitutions.

§ 2. — Les rayons imaginaires.

Jusqu'à-présent nous n'avons considéré que les rayons réels, représentés par des couples de points réels. Quand nous adjoignons le domaine imaginaire de l'un et de l'autre côté, notre correspondance perd sa qualité univoque. En effet, si nous prenons une droite génératrice de l'Absolu, dans notre espace riemannien, un des parallèles, passant par un point fixe, cesse d'être déterminé, de sorte que nous aurions comme représentants, l'ensemble de tous les points de l'une de nos sphères. En revanche, toutes les droites touchant à l'Absolu à un même point ne déterminent qu'un seul couple de parallèles au point fixe, un seul couple de points sur les deux sphères. Nous pourrons rétablir notre correspondance seulement à la dépense de nouvelles définitions. Nous allons étendre analytiquement nos deux sphères jusqu'à ce qu'elles soient des continus parfait, en étendant *pari passu* notre définition du mot " rayon „. Dans le cas où $z_1z_2 + 1 + 0$, $u_1u_2 + 1 \neq 0$ il n'y a point de difficulté, les pa-

rallèles passant par un point fixe sont bien déterminés, et nous pourrons définir un rayon comme une droite orientée, c'est-à-dire, telle que chacune de ses chaînes de points ait un sens déterminé de description. Il y a un élément d'arbitraire dans cette définition, car, puisque chaque droite porte une triple infinité de chaînes, elle peut porter un nombre infini de rayons. Il faut s'imaginer que préalablement on ait assigné à chaque chaîne de chaque droite un sens bien déterminé, et qu'il soit permis de renverser le sens de l'une chaîne d'une droite, seulement si l'on renverse celui de toutes les chaînes de cette droite; ce qui donne le rayon opposé. Les choses s'embrouillent quand nous avons:

$$z_1 z_2 + 1 = 0 \qquad u_1 u_2 + 1 \neq 0.$$

Nous voyons, d'après (2), que $p_{oi} + p_{jk} = 0$, particularité distinctive des génératrices gauches de l'Absolu, c'est-à-dire de celles qui déterminent le parallélisme à gauche, d'après nos conventions. Pourtant les génératrices gauches en elles-mêmes ne serviront pas, car elles dépendent d'un seul paramètre, tandis que le couple de points dépend de trois. Il faut pousser plus loin. Effectivement, si nous nommons cette figure de l'espace sphérique, quelle qu'elle soit, un " rayon impropre gauche " et si nous définissons l'intersection orthogonale entre elle et un rayon propre (tels que nous les avons connus jusqu'à-présent) $X_1 \ldots T_1, X_1' \ldots T_1'$ par les équations:

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0, \quad X'X_1' + Y'Y_1' + Z'Z_1' = 0,$$

nous aurons une double infinité bien déterminée de ces rayons propres. Leurs parallèles droits, issus d'un point fixe, seront dans un plan, et ces rayons eux-mêmes, d'après un théorème connu de Von Staudt, couperont les génératrices droites de l'Absolu dans les couples d'une involution non parabolique.

Inversement, si nous avons une génératrice gauche de l'Absolu qui porte une involution non-parabolique de points et de plans en perspective avec une involution entre les génératrices droites, l'ensemble des rayons propres qui coupent cette génératrice gauche, et qui coupent les couples de l'involution des génératrices droites est une congruence bien déterminée, assujettie à des équations linéaires, semblables à celles déjà citées.

Nous définissons comme rayon impropre gauche (droit) une génératrice gauche (droite) de l'Absolu qui porte une involution non-parabolique de points et de plans, en perspective avec une involution de génératrices droites (gauches).

Nous dirons aussi que les rayons impropres droits et gauches sont " de première espèce ".

Supposons maintenant que:

$$z_1 z_2 + 1 = 0 \qquad u_1 u_2 + 1 = 0.$$

Les parallèles à gauche et à droite issues d'un point fixe sont tangente à l'Absolu. Inversement, si nous avons deux tangentes à l'Absolu, il y a tout un faisceau de droites qui leur sont parallèles à gauche et à droite respectivement.

Nous définissons comme rayon impropre de seconde espèce un faisceau de tangentes à l'Absolu en un même point (*).

Il est à remarquer qu'un rayon impropre de seconde espèce est identique à son opposé. Deux rayons quelconques seront définis comme parallèles à gauche si:

$$X : Y : Z : T = X_1 : Y_1 : Z_1 : \pm T_1$$

et de même pour le parallélisme à droite. Ils se coupent orthogonalement si

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = X'X_1' + Y'Y_1' + Z'Z_1' = 0.$$

§ 3.

Remarques générales sur les congruences isotropes.

Le théorème principal mis en évidence par mon mémoire précédent a été celui-ci (**):

A toute correspondance continue et directement conforme entre deux sphères correspondra une congruence continue isotrope: et vice-versa. Aux correspondances inversement conformes, correspondront les polaires absolues des congruences isotropes.

(*) Dans ma thèse de doctorat: *The dual projective geometry of elliptic and spherical space*, Greifswald, 1904, j'ai expliqué en détail un système d'éléments imaginaires tout-à-fait analogue à celui-ci.

(**) C. I., p. 8.

Nous supposons maintenant que nous ayons une correspondance directement conforme et analytique entre nos deux sphères, et en outre, que le régions réelles se correspondent entre elles. Ceci exige que quand $z_2 = \bar{z}_1$ nous ayons en même temps $u_2 = \bar{u}_1$. Finalement les deux systèmes de génératrices de l'une sphère sont transformées en celles de l'autre. Nous aurons:

$$u_1 = u_1(z_1) \qquad u_2 = \bar{u}_1(z_2). \tag{5}$$

Il s'agit alors d'étudier la fonction monogène $u_1(z_1)$. En première ligne il faut se rendre compte des circonstances dans lesquelles l'identité suivante aura lieu:

$$\bar{u}_1\left(\frac{-1}{z_1}\right) \equiv \frac{-1}{u_1(z_1)}. \tag{6}$$

Ceci exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'opposé de chaque rayon de la congruence lui appartienne également. Elle a, en outre, une autre signification non moins importante. Cherchons les rayons impropres de seconde espèce de la congruence. Nous aurons:

$$z_1 z_2 + 1 = 0 \qquad u_1 u_2 + 1 = 0$$

$$u_1(z_1)\, \bar{u}_1\left(\frac{-1}{z_1}\right) + 1 = 0$$

$$\bar{u}_1\left(\frac{-1}{z_1}\right) = \frac{-1}{u_1(z_1)}.$$

On voit que les racines de cette équation sont deux-à-deux des couples de valeurs imaginaires diamétrales. Si nous prenons une racine quelconque, et mettons $z_2 = \frac{-1}{z_1}$, nous aurons un rayon impropre de seconde espèce de la congruence. Si nous prenons deux racines différentes, en leur attribuant les valeurs z_1 et $\frac{-1}{z_2}$, l'opposé du rayon $(z_1 z_2)$ de la congruence lui appartiendra aussi.

Il faut approfondir la chose davantage. On voit, d'après les formules du § premier, que les rayons impropres de seconde espèce qui coupent, en angle droit, un rayon propre $z_1 z_2$, $u_1 u_2$ seront donnés par les équations:

$$(z_1 - z_1')(z_2 - z_2') = 0 \qquad (u_1 - u_1')(u_2 - u_2') = 0.$$

Il y aura alors quatre rayons impropres, dont les points de contact de deux seront sur le rayon donné; les plans des deux autres passeront par là. Afin de distinguer plus nettement nous prendrons le cas spécial d'un rayon passant par l'origine (1, 0, 0, 0).

Nous aurons $X = X'$ etc. :

$$z_1 = u_1 \qquad z_2 = u_2.$$

Les rayons impropres, dont les plans passent par ce rayon seront alors:

$$z_1' = z_1 \qquad u_1' = u_1$$

$$z_2' = -\frac{1}{z_1} \qquad u_2' = -\frac{1}{u_1}$$

et

$$z_1' = -\frac{1}{z_2} \qquad u_1' = -\frac{1}{u_2}$$

$$z_2' = z_2 \qquad u_2' = u_2.$$

Ces conditions sont invariantes pour tous les mouvements de l'espace riemannien, à cause de l'invariance de l'ensemble des rayons impropres de seconde espèce:

$$z_1'z_2' + 1 = 0 \qquad u_1'u_2' + 1 = 0.$$

Nous avons ainsi les équations pour déterminer les rayons impropres dont les plans passent par un rayon donné quelconque.

Prenons un rayon de notre congruence isotrope, et cherchons la condition sous laquelle les rayons impropres, dont les plans passent par là, appartiennent eux aussi à notre congruence. Nous aurons tout-de-suite:

$$\bar{u}_1\left(\frac{-1}{z_1}\right) = \frac{-1}{u_1(z_1)} \qquad \bar{u}_1(z_2) = \frac{-1}{u_1\left(\frac{-1}{z_2}\right)}$$

comme condition nécessaire et suffisante pour que l'opposé du rayon appartienne également à la congruence.

Inversement, prenons deux solutions z_1' et $\frac{-1}{z_2''}$ de l'équation:

$$\bar{u}_1\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{-1}{u_1(z)}.$$

Elles nous donnent, nous l'avons déjà vu, deux rayons impropres de seconde espèce de notre congruence. Les plans de ces deux rayons passeront par le rayon $(z_1 z_2)$ $(u_1 u_2)$ donné par les équations:

$$z_1 = z_1' \qquad u_1 = u_1(z_1)$$
$$z_2 = z_2'' \qquad u_2 = \bar{u}_1(z_2).$$

Celui-ci est un rayon de la congruence, aussi bien que son opposé.

Si nous prenons, en particulier, deux solutions diamétralement opposées de l'équation mainte fois écrite, nous aurons:

$$z_1 = \bar{z}_2, \qquad u_1 = \bar{u}_2$$

c'est-à-dire un rayon réel de la congruence.

Une congruence isotrope de rayons contient, ou l'opposé de chacun de ses membres, ou bien seulement les opposés de ses membres impropres de seconde espèce, et de tels rayons qui sont communs aux plans de deux quelconques entre ces rayons impropres.

Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet plus tard. Passons maintenant aux éléments singuliers.

L'existence d'un pôle simple de la fonction $u_1(z_1)$ n'amènera aucune singularité à la congruence. Si la fonction $u_1(z_1)$ est uniforme, il y a un seul parallèle à gauche à un rayon donné: celui qui vient des équations:

$$u_1' = u_1\left(\frac{-1}{z_2}\right) \qquad u_2' = \bar{u}_1\left(\frac{-1}{z_1}\right).$$

Les deux rayons parallèles ne peuvent être ni identiques, ni opposés, si $z_1 z_2 + 1 \neq 0$. Pour trouver les parallèles à droite il faut considérer la fonction inverse. Si la fonction $u_1(z_1)$ est à n valeurs, il y aura $2n$ rayons de la congruence parallèles à gauche à une droite donnée. Les points critiques de la fonction $u_1(z_1)$ nous donneront quelque chose de plus compliqué. Effectivement, si, par exemple, il s'agit d'une fonction algébrique $u_1(z_1)$, et pour la valeur $z_1 = x_1$, u_1 se développe en m cycles, il en sera de même pour les p_{α}, $p_{\beta k}$. $z_1 = x_1$ nous donnera ainsi une surface

de la congruence de droites (qui porte la congruence de rayons) et par chacune de ses génératrices il passera, pour ainsi dire, m feuillets de la congruence. En outre, il est clair que $z_2 = \bar{x}_1$ fournira m cycles de la fonction $\bar{u}_1(z_2)$. On voit alors que $z_1 = x_1$ $z_2 = \bar{x}_1$ fournira une droite réelle, doublement multiple pour la congruence, analogue à l'intersection de deux courbes multiples d'une surface.

Un point singulier essentiel de $u_1(z_1)$, puisque u_1 est parfaitement indéterminé dans son voisinage, nous donnera, avec les valeurs correspondantes de z_2 et de u_2, une congruence de parallèles à gauche appartenant à la congruence.

§ 4. — La fonction linéaire.

De toutes les fonctions de la variable complexe, la plus simple est la fonction linéaire. Examinons un peu la congruence qui lui correspond. Posons:

$$(7) \qquad u_1 = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} \qquad u_2 = \frac{\bar{\alpha} z_2 + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} z_2 + \delta}.$$

Je demande d'abord: dans quelles circonstances cette fonction représente-t-elle un déplacement de la sphère gauche? Gardons-nous de faire confusion entre la question ainsi posée, et celle d'un déplacement de la sphère de Gauss à un paramètre complexe seulement. Comme condition nécessaire d'un déplacement nous écrivons que le plan à l'infini sera transformé en lui-même:

$$u_1 u_2 + 1 = \sigma(z_1 z_2 + 1).$$

Nous aurons:

$$u_1 = \frac{\alpha z_1 - \rho\bar{\gamma}}{\gamma z_1 + \rho\bar{\alpha}} \qquad \rho\bar{\rho} = 1.$$

Il n'y a pas de restriction à ce qu'on suppose que le déterminant soit un nombre réel positif, c'est-à-dire $\rho = 1$:

$$(8) \quad u_1 = \frac{(a+bi)z_1 - (c-di)}{(c+di)z_1 + (a-bi)} \qquad u_2 = \frac{(a-bi)z_2 - (c+di)}{(c-di)z_2 + (a+bi)}.$$

Ce sont ici les formules connues pour un déplacement de la sphère de Gauss. Inversement, on s'assure facilement que dans la transformation (8) les distances sont invariantes. Nous avons les formules cherchées. On remarque ensuite que, puisqu'un déplacement de la sphère conserve les distances, nous avons un ensemble de rayons, chacun desquels coupe chaque autre (*), c'est-à-dire, ces rayons passent tous par un point fixe, car les rayons situés dans un plan ne forment pas de congruence isotrope. Cherchons les coordonnées de ce point. Nous commençons par appliquer les formules (4) :

$$\rho X = (-a^2 + b^2 + c^2 - d^2) X' + 2(ab + cd) Y' + 2(ac - bd) Z'$$

$$\rho Y = 2(cd - ab) X' + (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) Y' + 2(bc + ad) Z'$$

$$\rho Z = 2(ac + bd) X' + 2(ad - bc) Y' + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) Z'$$

forme bien connue pour la substitution orthogonale, exprimée au moyen des paramètres d' Euler. En outre, ce sont précisément les formules que nous aurions obtenues en cherchant la condition sous laquelle un rayon passerait par le point:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = b : c : d : a.$$

D'une façon semblable nous obtiendrons l'expression pour la congruence de rayons dans le plan (b, c, d, a) en écrivant que les polaires de ces rayons passent par le pôle de ce plan:

$$(9) \qquad u_1 = \frac{(c-di)z_2+(a+bi)}{-(a-bi)z_2+(c+di)} \qquad u_2 = \frac{(c+di)z_1+(a-bi)}{-(a+bi)z_1+(c-di)}.$$

Passons maintenant au cas général de (7). Nous demandons dans quelles circonstances la congruence contiendra l'opposé de chacun de ses rayons. En appliquant l'identité (6) nous aurons:

$$\frac{\bar{\beta} z_1 - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} z_1 - \bar{\gamma}} = \frac{\gamma z_1 + \delta}{\alpha z_1 + \beta}$$

$$\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0$$

$$\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}.$$

(*) C. I., p. 6.

Celles-ci sont les équations de condition pour la forme (8). Si cette identité ne subsiste pas, l'ordre et la classe de la congruence de rayons seront égaux à l'ordre et à la classe de la congruence des droites qui les portent. L'ordre est obtenu en comparant (7) avec (8):

$$\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}=\frac{(a+bi)z_1-(c-di)}{(c+di)z_1+(a-bi)} \qquad \frac{\bar{\alpha} z_2+\bar{\beta}}{\bar{\gamma} z_2+\bar{\delta}}=\frac{(a-bi)z_2-(c+di)}{(c-di)z_2+(a+bi)}.$$

Chacune de ces équations aura deux racines, et celles de l'une sont les imaginaires conjuguées de celles de l'autre. On peut alors les combiner en quatre manières, dont deux seulement nous donnent des rayons réels. On s'aperçoit que quand la fonction linéaire prend la forme spéciale (8), il y aura une simple infinité de rayons impropres de seconde espèce (touchant à l'Absolu le long de son intersection avec le plan polaire du point fixe), dont deux passeront par un point quelconque. Les deux rayons propres qui y passent seront opposés, de sorte que l'ordre de la congruence de droites se réduit à un: comme nous devions nous y attendre. Pour en trouver la classe, nous n'avons qu'à comparer (7) avec (9):

$$[\alpha(a-bi)+\gamma(c-di)]z_1z_2+[\gamma(a+bi)-\alpha(c+di)]z_1+$$
$$+[\beta(a-bi)+\delta(c-di)]z_2+[\delta(a+bi)-\beta(c+di)]=0.$$

$$[\bar{\alpha}(a+bi)+\bar{\gamma}(c+di)]z_1z_2+[\bar{\beta}(a+bi)+\bar{\delta}(c+di)]z_1+$$
$$+[\bar{\gamma}(a-bi)]-\bar{\alpha}(c-di)]z_2+[\bar{\delta}(a-bi)-\bar{\beta}(c-di)]=0.$$

Nous voyons qu'en général la classe est deux: elle se réduit à zéro dans le cas spécial (8), à cause des rayons impropres de seconde espèce, dont deux seront en chaque plan:

La fonction linéaire d'une variable complexe qui donne un déplacement de la sphère de Gauss, correspondra à l'ensemble des rayons passant par un point fixe, dont les coordonnées homogènes sont les paramètres d'Euler du déplacement. Si la fonction ne donne pas de déplacement, elle correspondra à une congruence de rayons situés sur une congruence de droites de quatrième ordre et de seconde classe. Deux droites réelles de cette congruence passeront par chaque point réel de l'espace.

En effet, cette congruence est bien connue. La surface focale consiste en deux cônes tangents à l'Absolu, dont les sommets sont deux points imaginaires conjugués (*). La droite qui joint ces deux sommets porte les deux rayons propres opposés de la congruence.

§ 5. — Quelques autres fonctions monogènes.

Supposons que nous ayons une fonction algébrique irréductible:

$$\sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{i=n} a_{m-i\ n-j} u_1^i z_1^j = 0. \tag{10}$$

Envisageons l'identité (6). Nous savons que la surface focale d'une congruence isotrope est une développable circonscrite à l'Absolu (**). Dans le cas actuel les coordonnées plueckeriennes des droites seront des fonctions algébriques de z_1 et de z_2. Il en sera de même pour les coordonnées des plans tangents à l'Absolu qui passent par elles, et la surface développable enveloppée par ces plans sera une surface algébrique. En outre, puisque la congruence est supposée réelle, il faut que cette surface soit à équation réelle. Il y a, alors, les deux possibilités: ou la surface focale est réductible, composée de deux parties imaginaires conjuguées; ou bien c'est une surface irréductible. Si une droite de la congruence touche à l'Absolu (c'est-à-dire, si la congruence de rayons a un membre impropre de seconde espèce), ses deux points focaux tombent ensemble sur le point de contact, et de même pour ses plans focaux; ce qui exige que les deux plans tangents à la surface qui déterminent cette droite soient des plans consécutifs. Dans le premier cas où la surface focale est réductible, il arrivera dans un nombre fini de cas qu'il y aura des plans tangents aux deux parties de la surface. L'identité (6) ne sera pas satisfaite. Dans le second cas, la droite commune à deux plans consécutifs appartiendra à la con-

(*) Sturm, *Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie.* T. 2, pag. 320.

(**) C. I., pag. 11.

gruence de droites, ce qui veut dire que la congruence de rayons aura une simple infinité de membres impropres de seconde espèce.

Nous obtiendrons l'ordre et la classe de la congruence de rayons en comparant (10) avec (8) et (9). Ainsi l'ordre sera $(m+n)^2$, quoique par un point réel il passe $(m+n)$ rayons réels seulement. La classe sera $(m+n)^2-(m^2+n^2)$. L'ordre et la classe de la congruence de rayons seront identiques à l'ordre et à la classe de la congruence de droites, dans le cas d'une surface focale réductible. Au contraire, si l'on cherche l'ordre et la classe de la congruence de droites qui porte une congruence de rayons à surface focale irréductible; il faut d'abord écarter le nombre des rayons impropres de seconde espèce qui passent par un point quelconque, c'est-à-dire, l'ordre de la courbe de contact entre la surface focale et l'Absolu; puis diviser par deux, parce qu'il y aura deux rayons opposés sur chaque droite. Nous avons exemplifié tous ces procédés dans le cas de la fonction linéaire.

Les fonctions des polyèdres réguliers nous donnent des congruences isotropes qui se transforment en elles-mêmes par des groupes de substitutions orthogonales en XYZ. Ces substitutions représentent dans l'espace elliptique (ou sphérique) des translations à gauche; c'est-à-dire, des déplacements le long des systèmes de parallèles à gauche. Ces congruences-ci seront transformées en elles-mêmes par des groupes de tels déplacements.

Considérons la fonction transcendente:

$$u_1 = e^{z_1}.$$

Il y aura un seul parallèle à gauche à chaque rayon de la congruence, puisque la fonction est uniforme; celui qui vient des équations:

$$z_1' = -\frac{1}{z_2} \qquad z_2' = -\frac{1}{z_1}.$$

Au contraire il y aura deux infinités dénombrables de parallèles à droite à notre rayon $u_1\, u_2$:

$$u_1 = e^{z_1+2k\pi i}$$

$$\frac{-1}{u_2} = e^{z_1'+2k'\pi i}.$$

Les droites de chacun de ces systèmes de rayons seront des génératrices d'une surface à courbure totale nulle. Chaque surface aura une génératrice commune avec la congruence de droites parallèles qui correspond au point singulier essentiel $z_1 = \infty$.

Nous aurons des résultats un peu semblables dans les cas de la fonction elliptique:

$$u_1 = \wp(z_1).$$

Il y a encore ici un seul parallèle à gauche à chaque rayon. Au contraire la fonction est de second ordre, et doublement périodique. Il y aura ainsi quatre ensembles infinis de parallèles à droite à notre rayon:

$$\begin{aligned} u_1 &= \wp(z_1 + 2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3) \\ u_1 &= \wp(z_1' + 2h_1'\omega_1 + 2h_3'\omega_3) \\ \frac{-1}{u_2} &= \wp(z_1'' + 2h_1''\omega_1 + 2h_3''\omega_3) \qquad \left.\begin{matrix} h_1^{(n)} \\ h_3^{(n)} \end{matrix}\right\} = -\infty \ldots 0 \ldots \infty. \\ \frac{-1}{u_2} &= \wp(z_1''' + 2h_1'''\omega_1 + 2h_3'''\omega_3) \end{aligned}$$

Chacun de ces ensembles peut être réparti, dans une infinité dénombrable de manières, sur une infinité dénombrable de surfaces à courbure totale nulle. Chaque surface contiendra un membre de la congruence de droites parallèles qui correspond au point singulier essentiel $z_1 = \infty$.

Enfin on peut remarquer que, puisque la fonction modulaire elliptique a, comme limite fermée, un grand cercle de la sphère de Gauss, les rayons réels de la congruence seront sur des droites qui sont toutes du même côté d'un hyperboloïde minimum.

Cambridge, États Units. Décembre 1904.

Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore.

Nota di TOMMASO BOGGIO, a Torino.

Consideriamo una piastra piana, elastica, isotropa, di grossezza piccolissima, i cui punti hanno inizialmente una stessa temperatura (che si può benissimo supporre nulla); si sottoponga poi la piastra ad un riscaldamento, diverso da punto a punto; allora essa si deforma, e si presenta quindi il problema generale di determinare lo spostamento longitudinale che, per effetto di tale riscaldamento, subisce ogni punto P della piastra, supponendo noto il riscaldamento, che sarà perciò una data funzione delle coordinate del punto P.

Le componenti u, v dello spostamento debbono soddisfare nei punti della piastra a due certe equazioni indefinite di 2° ordine, non omogenee (perchè vi comparisce il riscaldamento), e nei punti del contorno a due equazioni ai limiti di 1° ordine.

Queste equazioni differenziali sono state date da F. Neumann nel § 12 della sua Memoria: *Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts, ecc.* (*). Egli le applicò alla determinazione della deformazione di un cerchio o di una corona circolare (**), nell'ipotesi particolare però in cui il riscaldamento è solo funzione del raggio vettore che parte dal centro. Allora è chiaro che gli spostamenti hanno luogo nella direzione del raggio vettore e il pro-

(*) " Abhandlungen der königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin „, a. 1841; zweiter Theil. In queste equazioni però il Neumann ritiene eguale ad $\frac{1}{2}$ un certo coefficiente κ.

(**) Memoria cit., §§ 13, 14. Circa l'importanza di tali ricerche il Neumann dice a pag. 111 della sua Memoria: " Die Resultate..... finden ausser ihrem optischen Interesse noch ein praktisches, in ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Fehler, welche in den zur Winkelmessung dienender Kreisen durch ungleiche Temperaturvertheilung hervorgebracht werden „.

blema si riduce all'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria, con una sola variabile indipendente ed una sola funzione incognita.

Se invece il riscaldamento avviene con legge qualunque, si deve eseguire l'integrazione del sistema di equazioni differenziali prima accennato.

Tale integrazione è stata fatta dal Borchardt (*) nel caso di un' area circolare: le sue formole, relativamente semplici, esprimono gli spostamenti u, v per mezzo di integrali definiti.

In questa Nota riduco il calcolo delle funzioni u, v alla risoluzione del problema dei valori al contorno per le funzioni biarmoniche, o, ciò che è lo stesso, alla ricerca della seconda funzione di Green per l'area considerata.

Ottengo facilmente questo risultato, trasformando opportunamente le equazioni indefinite e ai limiti a cui soddisfano le funzioni u, v, e poi applicando le eleganti formole stabilite dal prof. Morera, per la soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo; formole che già applicai vántaggiosamente in una Nota precedente sulla deformazione delle piastre cilindriche (**).

Il problema dei valori al contorno per le funzioni biarmoniche, come è noto, è stato risolto da vari autori (Levi-Civita, Lauricella, Almansi, ecc.) per molte classi di aree; in particolare per le aree di cui si può fare la rappresentazione conforme su un cerchio con funzioni razionali, la soluzione risulta espressa per mezzo di integrali definiti: per queste ultime aree dunque le funzioni u, v si potranno esprimere mediante integrali definiti.

Se, in particolare, il riscaldamento è una funzione armonica, la questione proposta si risolve in modo estremamente semplice, qualunque sia la forma della piastra, poichè in questo caso non occorre più la risoluzione di nessun problema dei valori al contorno.

(*) Borchardt, *Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme* (" Monatsberichte der könig. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin ", pag. 9, a. 1873).

(**) Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque* (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", vol. XIII, serie 5ª, 2° sem. 1904).

Nel caso della piastra circolare, il procedimento da me seguito è assai più semplice di quello adoperato dal Borchardt, e le formole definitive che forniscono u, v hanno pure un aspetto più semplice. Se il riscaldamento poi è una funzione poliarmonica, le funzioni u, v si possono esprimere mediante integrali semplici, mentre nel caso generale esse sono espresse per integrali doppi. Infine se il riscaldamento è una funzione razionale intera, anche le funzioni u, v sono razionali intere, e questo risultato vale pure per una piastra ellittica.

I. — Piastra qualunque.

1. — Diciamo σ la sezione media della piastra che si considera, ed s il suo contorno; assumiamo poi come piano xy quello della sezione media. Le componenti u, v dello spostamento longitudinale di un punto qualunque della piastra, debbono soddisfare nei punti di σ alle equazioni indefinite:

$$(1)\quad \begin{cases} (1+\kappa)\Delta_2 u + (1+3\kappa)\dfrac{dp}{dx} = \kappa'\dfrac{d\Phi}{dx} \\[2ex] (1+\kappa)\Delta_2 v + (1+3\kappa)\dfrac{dp}{dy} = \kappa'\dfrac{d\Phi}{dy}, \end{cases} \qquad \left(\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$$

ove p indica la dilatazione superficiale, cioè:

$$p = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy},$$

e nei punti di s alle equazioni ai limiti:

$$(2)\quad \begin{cases} \left[p' + 2(1+\kappa)\dfrac{du}{dx}\right]\dfrac{dx}{dn} + (1+\kappa)\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} = 0 \\[2ex] (1+\kappa)\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left[p' + 2(1+\kappa)\dfrac{dv}{dy}\right]\dfrac{dy}{dn} = 0, \end{cases}$$

in cui:

$$p' = 2\kappa p - \kappa'\Phi,$$

e $\Phi(x, y)$ è il riscaldamento nel punto (x, y), κ è una costante

che dipende dalla natura della piastra, κ' è la costante legata al coefficiente di dilatazione termica ϵ dalla formola:

$$\kappa' = 2(1 + 3\kappa)\epsilon,$$

ed n è la normale ad s, diretta all'interno di σ.

Lo spostamento trasversale w risulta poi dato dall'equazione:

$$(1 + \kappa)w = -\frac{1}{2}p'z.$$

Si tratta ora di determinare le funzioni u, v.

Riduciamo perciò dapprima le (1) a forma omogenea. Poniamo pertanto:

$$(3) \qquad u = \xi + \frac{dF}{dx}, \quad v = \eta + \frac{dF}{dy},$$

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy},$$

ove ξ, η, F sono funzioni da determinarsi; le (1) diventano allora:

$$(4) \quad \begin{cases} (1+\kappa)\Delta_2\xi + (1+3\kappa)\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\kappa'\Phi - 2(1+2\kappa)\Delta_2 F\right] \\ (1+\kappa)\Delta_2\eta + (1+3\kappa)\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left[\kappa'\Phi - 2(1+2\kappa)\Delta_2 F\right]. \end{cases}$$

Determiniamo ora la funzione F in modo che verifichi l'equazione:

$$(5) \qquad \Delta_2 F = \frac{\kappa'}{2(1+2\kappa)}\Phi,$$

e sia regolare nell'area σ. Basta perciò, come è ben noto, assumere:

$$F(x, y) = -\frac{\kappa'}{4\pi(1+2\kappa)}\int_\sigma \Phi(x', y')\log\frac{1}{r}\,d\sigma,$$

r essendo la distanza del punto (x, y) di σ dal punto variabile d'integrazione (x', y') e $d\sigma$ l'elemento d'area attiguo a questo punto.

Le (4) si riducono allora alla forma omogenea:

$$(4') \qquad \begin{cases} (1+\kappa)\Delta_2\xi + (1+3\kappa)\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \\[2ex] (1+\kappa)\Delta_2\eta + (1+3\kappa)\dfrac{d\theta}{dy} = 0\,, \end{cases}$$

da cui segue intanto:

$$(6) \qquad \Delta_2\theta = 0.$$

Si possono ancora scrivere le (4′) in questo modo:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(1+2\kappa)\dfrac{d\xi}{dx} + \kappa\dfrac{d\eta}{dy}\right] + \dfrac{1+\kappa}{2}\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{1+\kappa}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left[\kappa\dfrac{d\xi}{dx} + (1+2\kappa)\dfrac{d\eta}{dy}\right] = 0. \end{cases}$$

Se ora introduciamo le tre funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22} definite dalle eguaglianze:

$$(8) \qquad \begin{cases} T_{11} = (1+2\kappa)\dfrac{d\xi}{dx} + \kappa\dfrac{d\eta}{dy} \\[2ex] T_{12} = \dfrac{1+\kappa}{2}\left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right) \\[2ex] T_{22} = \kappa\dfrac{d\xi}{dx} + (1+2\kappa)\dfrac{d\eta}{dy} \end{cases}$$

le (7) diventano:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dT_{11}}{dx} + \dfrac{dT_{12}}{dy} = 0 \\[2ex] \dfrac{dT_{12}}{dx} + \dfrac{dT_{22}}{dy} = 0\,; \end{cases}$$

ponendo poi:

$$(10) \qquad T = T_{11} + T_{22}\,,$$

segue subito dalle (8):

$$T = (1+3\kappa)\theta\,,$$

e quindi dalla (6):

$$(11) \qquad \Delta_2 T = 0\,,$$

cioè la funzione T è armonica.

Ciò posto, conviene applicare la proprietà seguente:

La soluzione più generale delle equazioni (9) *è data dalle formole* (*):

$$(12)\qquad \begin{cases} T_{11} = \dfrac{d^2 U}{dy^2} \\[2ex] T_{12} = -\dfrac{d^2 U}{dx\,dy} \\[2ex] T_{22} = \dfrac{d^2 U}{dx^2}\,, \end{cases}$$

ove $U(x, y)$ è una funzione per ora arbitraria.

Siccome dalle (10), (12) risulta:

$$(13)\qquad T = \Delta_2 U,$$

si conclude, sostituendo nella (11):

$$(14)\qquad \Delta_4 U = 0\,,$$

cioè: *la funzione* U *deve essere biarmonica.*

Si tratta ora di determinare la funzione biarmonica U. Bisogna perciò trovare le equazioni ai limiti a cui essa deve soddisfare.

2. — Le equazioni ai limiti (2), eseguendo la sostituzione (3), diventano:

$$\begin{cases} \left[\kappa\theta + (1+\kappa)\dfrac{d\xi}{dx}\right]\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{1+\kappa}{2}\left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} = \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{2}\kappa'\Phi\dfrac{dx}{dn} - \kappa\Delta_2 F\dfrac{dx}{dn} - (1+\kappa)\left(\dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn}\right) \\[2ex] \dfrac{1+\kappa}{2}\left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left[\kappa\theta + (1+\kappa)\dfrac{d\eta}{dy}\right]\dfrac{dy}{dn} = \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{2}\kappa'\Phi\dfrac{dy}{dn} - \kappa\Delta_2 F\dfrac{dy}{dn} - (1+\kappa)\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{d^2F}{dy^2}\dfrac{dy}{dn}\right) \end{cases}$$

(*) Queste formole sono un caso particolare di quelle stabilite dal prof. Morera nella sua Nota: *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo* (" Rendiconti della R. Accad. dei Lincei ", vol. I, serie 5ª, 1° sem., 1892, pag. 234).

esse possono ancora scriversi, tenendo anche presente la (5):

$$\begin{cases} \left[(1+2\kappa)\dfrac{d\xi}{dx}+\kappa\dfrac{d\eta}{dy}\right]\dfrac{dx}{dn}+\dfrac{1+\kappa}{2}\left(\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn}= \\ \qquad =(1+\kappa)\left(\dfrac{d^2F}{dy^2}\dfrac{dx}{dn}-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn}\right) \\ \dfrac{1+\kappa}{2}\left(\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn}+\left[\kappa\dfrac{d\xi}{dx}+(1+2\kappa)\dfrac{d\eta}{dy}\right]\dfrac{dy}{dn}= \\ \qquad =(1+\kappa)\left(-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dx}{dn}+\dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dy}{dn}\right), \end{cases}$$

ovvero, applicando le (8):

$$\begin{cases} T_{11}\dfrac{dx}{dn}+T_{12}\dfrac{dy}{dn}=(1+\kappa)\left(\dfrac{d\,F}{dy^2}\dfrac{dx}{dn}-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn}\right) \\ T_{12}\dfrac{dx}{dn}+T_{22}\dfrac{dy}{dn}=(1+\kappa)\left(-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dx}{dn}+\dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dy}{dn}\right), \end{cases}$$

ed infine mediante le (12):

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dy^2}\dfrac{dx}{dn}-\dfrac{d^2U}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn}=(1+\kappa)\left(\dfrac{d^2F}{dy^2}\dfrac{dx}{dn}-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn}\right) \\ -\dfrac{d^2U}{dx\,dy}\dfrac{dx}{dn}+\dfrac{d^2U}{dx^2}\dfrac{dy}{dn}=(1+\kappa)\left(-\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dx}{dn}+\dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dy}{dn}\right). \end{cases}$$

Prendiamo ora come senso positivo del contorno s quello che è definito dalle formole:

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{dy}{dn}, \qquad \frac{dy}{ds}=\frac{dx}{dn},$$

e allora avremo dalle (15):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dy}\dfrac{dU}{dy}\cdot\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{d}{dx}\dfrac{dU}{dy}\cdot\dfrac{dx}{ds}=(1+\kappa)\left[\dfrac{d}{dy}\dfrac{dF}{dy}\cdot\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{d}{dx}\dfrac{dF}{dy}\cdot\dfrac{dx}{ds}\right] \\ \dfrac{d}{dy}\dfrac{dU}{dx}\cdot\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{d}{dx}\dfrac{dU}{dx}\cdot\dfrac{dx}{ds}=(1+\kappa)\left[\dfrac{d}{dy}\dfrac{dF}{dx}\cdot\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{d}{dx}\dfrac{dF}{dx}\cdot\dfrac{dx}{ds}\right], \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\dfrac{dU}{dy}=(1+\kappa)\dfrac{d}{ds}\dfrac{dF}{dy} \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{dU}{dx}=(1+\kappa)\dfrac{d}{ds}\dfrac{dF}{dx}, \end{cases}$$

quindi integrando, ed omettendo due costanti arbitrarie:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dy} = (1+\kappa)\dfrac{dF}{dy} \\ \dfrac{dU}{dx} = (1+\kappa)\dfrac{dF}{dx}; \end{cases}$$

ne segue, tralasciando un'altra costante:

$$(16) \qquad \begin{cases} U = (1+\kappa)F \\ \dfrac{dU}{dn} = (1+\kappa)\dfrac{dF}{dn}, \end{cases} \qquad \text{(sopra } s\text{)}.$$

Queste formole ci dànno dunque, per ogni punto del contorno, il valore della funzione U e della sua derivata normale, e poichè la U è biarmonica in σ, essa risulta da queste condizioni completamente determinata in tutta l'area σ, e la sua effettiva determinazione si può fare, come è stato detto, per molte categorie di aree.

Ritenendo perciò conosciuta la funzione U, le (12), (13) ci fanno conoscere le funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22}, T.

3. — Cerchiamo ora le funzioni ξ, η.

Dalle (8) si hanno intanto le equazioni:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}[(1+2\kappa)T_{11} - \kappa T_{22}]$$

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}[(1+2\kappa)T_{22} - \kappa T_{11}],$$

cioè, ricordando la (10):

$$(17) \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}[(1+2\kappa)T - (1+3\kappa)T_{22}]$$

$$(18) \qquad \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}[(1+2\kappa)T - (1+3\kappa)T_{11}];$$

inoltre:

$$(19) \qquad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{2T_{12}}{1+\kappa}.$$

D'altra parte le (4') possono ancora scriversi:

$$\begin{cases} \dfrac{2(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\dfrac{dT}{dx}+\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\xi}{dy}-\dfrac{d\eta}{dx}\right)=0 \\ \dfrac{2(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\dfrac{dT}{dy}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\xi}{dy}-\dfrac{d\eta}{dx}\right)=0\,, \end{cases}$$

perciò si può porre:

$$\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}=\frac{2(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}T_0-2\omega\,, \tag{20}$$

ove T_0 è la funzione armonica legata alla T dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx}+\dfrac{dT_0}{dy}=0 \\ \dfrac{dT}{dy}-\dfrac{dT_0}{dx}=0\ (*) \end{cases} \tag{21}$$

e che sarà perciò conosciuta (a meno di una costante che si può supporre nulla), ed ω è una costante arbitraria.

Dalle (19), (20) si ricava:

$$\frac{d\xi}{dy}=\frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\left[(1+2\kappa)T_0+(1+3\kappa)T_{12}\right]-\omega\,, \tag{22}$$

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\left[-(1+2\kappa)T_0+(1+3\kappa)T_{12}\right]+\omega. \tag{23}$$

A cagione delle (21) possiamo scrivere le funzioni armoniche T, T_0 sotto la forma:

$$T=\frac{d\tau}{dx}\,,\qquad T_0=\frac{d\tau}{dy}\,, \tag{24}$$

ovvero sotto l'altra:

$$T=\frac{d\tau_0}{dy}\,,\qquad T_0=-\frac{d\tau_0}{dx}\,, \tag{24_0}$$

ove τ, τ_0 sono funzioni armoniche conosciute (a meno di una

(*) Si suole anche dire che la funzione armonica T_0 è coniugata della T.

costante che non ha influenza); sostituendo allora nelle (17), (18), (22), (23) e ricordando le (12) avremo:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = \dfrac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\left[(1+2\kappa)\dfrac{d\tau}{dx} - (1+3\kappa)\dfrac{d^2U}{dx^2}\right] \\ \dfrac{d\xi}{dy} = \dfrac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\left[(1+2\kappa)\dfrac{d\tau}{dy} - (1+3\kappa)\dfrac{d^2U}{dx\,dy}\right] - \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\left[(1+2\kappa)\dfrac{d\tau_0}{dx} - (1+3\kappa)\dfrac{d^2U}{dx\,dy}\right] + \omega \\ \dfrac{d\eta}{dy} = \dfrac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\left[(1+2\kappa)\dfrac{d\tau_0}{dy} - (1+3\kappa)\dfrac{d^2U}{dy^2}\right], \end{cases}$$

perciò integrando:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1+2\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\tau - \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{dU}{dx} - \omega y + c_1 \\ \eta = \dfrac{1+2\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\tau_0 - \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{dU}{dy} + \omega x + c_2\,, \end{cases}$$

ove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie.

Sostituendo poi nelle (3) si ha:

$$(25)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1+2\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\tau - \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{d}{dx}[U-(1+\kappa)F] - \omega y + c_1 \\ v = \dfrac{1+2\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\tau_0 - \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{d}{dy}[U-(1+\kappa)F] + \omega x + c_2. \end{cases}$$

Queste formole dànno la soluzione della questione proposta; come si vede, tutta la difficoltà consiste nella ricerca della funzione biarmonica U.

Gli spostamenti u, v risultano notoriamente determinati a meno di una traslazione di componenti c_1, c_2 e di una rotazione ω intorno ad un asse perpendicolare alla piastra. Nelle formole seguenti riterremo però, per brevità, nulle la traslazione e la rotazione.

4. — Si può ridurre la ricerca della funzione biarmonica U a quella di un'altra più semplice.

Poniamo perciò:

$$U - (1 + \kappa)F = H + K, \tag{26}$$

ove H, K sono funzioni da determinarsi.

Dalle (16) si trae allora, nei punti di s:

$$\left\{ \begin{aligned} & H + K = 0 \\ & \frac{dH}{dn} + \frac{dK}{dn} = 0. \end{aligned} \right. \tag{27}$$

Inoltre, per la (5):

$$\Delta_2 U - \kappa_1 \Phi = \Delta_2 H + \Delta_2 K, \tag{28}$$

avendo posto, per brevità:

$$\kappa_1 = \frac{\kappa'(1 + \kappa)}{2(1 + 2\kappa)}.$$

Possiamo determinare anzitutto la funzione H in modo che siano soddisfatte le equazioni:

$$\Delta_2 H = -\kappa_1 \Phi \qquad (\text{in } \sigma) \tag{29}$$

$$H = 0 \qquad (\text{su } s), \tag{30}$$

e si avrà così da una nota formola (*):

$$H(x, y) = \frac{\kappa_1}{2\pi} \int_\sigma \Phi(x', y') \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) d\sigma, \tag{31}$$

ove G_1 indica il valore nel punto variabile d'integrazione (x', y') della funzione di Green avente per polo il punto (x, y) di σ.

Dalla (28) risulta poi:

$$T = \Delta_2 U = \Delta_2 K, \tag{28'}$$

quindi, in ogni punto di σ, si ha:

$$\Delta_4 K = 0. \tag{32}$$

(*) Cfr. ad es. l'eccellente opera: Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, cap. I, § 9 (Milano, Hoepli; a. 1904).

Nei punti di s si ha poi dalle (27):

$$K = 0 \tag{33}$$

$$\frac{dK}{dn} = -\frac{dH}{dn}, \tag{34}$$

e queste due condizioni determinano completamente la funzione biarmonica K, che è quindi l'unica che rimanga ancora da conoscere.

Vedremo che, per un'area circolare, essa si può ottenere facilmente.

Conviene ancora osservare che ponendo:

$$V = U - (1 + \kappa)F, \tag{35}$$

ne segue ricordando la (5):

$$T = \Delta_2 U = \Delta_2 V + \kappa_1 \Phi, \tag{36}$$

perciò si ha, in ogni punto di σ:

$$\Delta_4 V = -\kappa_1 \Delta_2 \Phi, \tag{37}$$

e dalle (16) nei punti di s:

$$V = \frac{dV}{dn} = 0. \tag{38}$$

Ora l'unica funzione V che soddisfa alle (37), (38) è quella data dalla formola (*):

$$V(x, y) = \frac{\kappa_1}{8\pi} \int_\sigma (\Delta_2 \Phi) \left(r^2 \log \frac{1}{r} - G_2 \right) d\sigma, \tag{39}$$

G_2 indicando il valore nel punto variabile d'integrazione (x', y') della seconda funzione di Green avente per polo il punto (x, y) di σ.

Si conclude pertanto che basta conoscere la seconda funzione di Green per l'area considerata, per poter determinare gli spostamenti u, v.

5. — Si possono scrivere le (25) sotto una forma un po' diversa, che ci sarà utile. Trasformiamo perciò le funzioni τ, τ_0.

(*) Cfr. ad es.: Marcolongo, loc. cit.

Supponiamo che l'area σ sia semplicemente connessa e che contenga l'origine delle coordinate, allora la funzione U, biarmonica in σ, può rappresentarsi colla formola:

$$U = \rho^2\varphi + \psi \text{ (*)}, \qquad (\rho^2 = x^2 + y^2)$$

ove φ, ψ sono funzioni armoniche in σ.

Si avrà allora:

$$T = \Delta_2 U = 4\left(\varphi + x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}\right); \tag{40}$$

(*) Per dimostrare questa formola, basta, come è noto, dimostrare che esiste sempre una funzione armonica φ che soddisfa ad un'equazione della forma:

$$c\varphi + x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} = \Phi,$$

ove c è una costante positiva e Φ una funzione armonica.

Da essa è facile dedurre quest'altra:

$$c\varphi_0 + x\frac{d\varphi_0}{dx} + y\frac{d\varphi_0}{dy} = \Phi_0,$$

ove φ_0, Φ_0 sono le funzioni armoniche coniugate di φ, Φ.

Se ne trae:

$$c(\varphi - i\varphi_0) + x\frac{d(\varphi - i\varphi_0)}{dz} + iy\frac{d(\varphi - i\varphi_0)}{dz} = \Phi - i\Phi_0, \qquad (z = x + iy),$$

ossia:

$$cv + z\frac{dv}{dz} = V,$$

avendo posto, il che è lecito:

$$\varphi - i\varphi_0 = v(z), \qquad \Phi - i\Phi_0 = V(z).$$

Ne risulta:

$$v(z) = \frac{1}{z^c}\int_0^z z^{c-1}V(z)dz,$$

e il cammino d'integrazione, che ha per estremi l'origine 0 e il punto z dev'essere naturalmente tutto contenuto in σ. La parte reale φ della funzione v data dalla formola precedente, è la funzione che soddisfa a tutte le condizioni richieste.

La formola in questione, dovuta al prof. Almansi, è stata da lui dimostrata facendo una ipotesi assai più restrittiva circa la natura del campo σ.

In modo analogo si riconosce che, nell'area semplicemente connessa σ, la funzione biarmonica U può esprimersi colla formola, pure dell'Almansi:

$$U = (ax + by)\varphi + \psi,$$

ove φ, ψ sono funzioni armoniche, ed a, b costanti.

considerando la funzione armonica φ_0, coniugata della φ (e che è definita a meno di una costante che si può ritenere nulla), si può scrivere:

$$T = 4\left(\varphi + x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi_0}{dx}\right),$$

ed anche:

$$T = 4\left(\varphi - x\frac{d\varphi_0}{dy} + y\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

vale a dire:

$$T = 4\frac{d}{dx}(x\varphi + y\varphi_0)$$

$$T = 4\frac{d}{dy}(y\varphi - x\varphi_0),$$

e corrispondentemente:

$$T_0 = 4\frac{d}{dy}(x\varphi + y\varphi_0)$$

$$T_0 = -4\frac{d}{dx}(y\varphi - x\varphi_0),$$

perciò confrontando colle (24), (24_0) si conclude:

$$\begin{cases} \tau = 4(x\varphi + y\varphi_0) \\ \tau_0 = 4(y\varphi - x\varphi_0), \end{cases}$$

onde sostituendo nelle (25):

$$(41) \quad \begin{cases} u = \dfrac{4(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}(x\varphi + y\varphi_0) - \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{d}{dx}[U-(1+\kappa)F] \\ v = \dfrac{4(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}(y\varphi - x\varphi_0) - \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{d}{dy}[U-(1+\kappa)F], \end{cases}$$

che sono le formole che volevamo ottenere.

6. — Supponiamo ora che il riscaldamento Φ sia una funzione armonica.

Dalla (39) risulta allora, in tutta l'area σ:

$$V = 0,$$

perciò la (35) mostra che in ogni punto di σ si ha:

$$(42) \qquad U = (1+\kappa)F;$$

e la funzione F, come si deduce dalla (5), è effettivamente biarmonica; in questo caso particolare dunque la funzione biarmonica U è determinata senza che occorra la risoluzione di problemi dei valori al contorno; ed è chiaro che la formola precedente vale *qualunque sia l'area* σ. Questa formola si poteva anche dedurre dalla considerazione delle (16).

Le formole (25) si riducono ora alla forma semplicissima:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1+2\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\,\tau \\[2ex] v = \dfrac{1+2\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\,\tau_0, \end{cases}$$

dalle quali apparisce che le funzioni u, v sono armoniche.

Le formole (41) si riducono a queste altre:

$$(43)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{4(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\,(x\varphi + y\varphi_0) \\[2ex] v = \dfrac{4(1+2\kappa)}{(1+\kappa)(1+3\kappa)}\,(y\varphi - x\varphi_0), \end{cases}$$

ed è facile trovare l'espressione esplicita delle funzioni armoniche φ, φ_0.

Osserviamo perciò che si ha dalle (40), (42):

$$T = (1+\kappa)\Delta_2 F,$$

cioè, tenendo conto della (5):

$$\varphi + x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\kappa'(1+\kappa)}{8(1+2\kappa)}\,\Phi,$$

perciò, come si vide nella nota del § 5, la φ è la parte reale della funzione $v(z)$ data dalla formola:

$$v(z) = \frac{\kappa'(1+\kappa)}{8(1+2\kappa)}\,\frac{1}{z}\int_0^z V(z)dz,$$

ove $V(z) = \Phi - i\Phi_0$, e Φ_0 è la funzione armonica coniugata della Φ.

In particolare, se tutti i raggi vettori uscenti dall'origine incontrano s in un solo punto, si può, nella formola precedente, assumere come cammino d'integrazione il segmento rettilineo compreso fra i punti 0 e z, e allora risulta subito:

$$\varphi = \frac{\kappa'(1+\kappa)}{8(1+2\kappa)} \frac{1}{\rho} \int_0^\varrho \Phi d\rho,$$

$$\varphi_0 = \frac{\kappa'(1+\kappa)}{8(1+2\kappa)} \frac{1}{\rho} \int_0^\varrho \Phi_0 d\rho,$$

e sostituendo nelle (43) si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\kappa'}{2(1+3\kappa)} \frac{1}{\rho} \left(x \int_0^\varrho \Phi d\rho + y \int_0^\varrho \Phi_0 d\rho \right) \\ v &= \frac{\kappa'}{2(1+3\kappa)} \frac{1}{\rho} \left(y \int_0^\varrho \Phi d\rho - x \int_0^\varrho \Phi_0 d\rho \right). \end{aligned} \right.$$

Queste formole semplicissime risolvono, nel caso particolare considerato, la questione proposta.

II. — Piastra circolare.

7. — Trattiamo ora il caso in cui l'area σ è un cerchio di centro l'origine O delle coordinate e di raggio R.

Le formole generali (41) conducono allora assai facilmente a quelle stabilite dal Borchardt.

Come abbiamo visto nel § 4, rimane da determinare la sola funzione K che deve soddisfare alle (32), (33), (34).

Si soddisfa alle prime due di queste equazioni assumendo:

$$K = (\rho^2 - R^2)\varphi, \tag{44}$$

ove $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\varphi(x, y)$ è una funzione da determinarsi, armonica nel cerchio σ.

La (34) fornisce allora:

$$2R\varphi = -\frac{dH}{d\rho}, \qquad (\rho = R), \tag{34'}$$

cioè, ricordando la (31):

$$\varphi = -\frac{\kappa_1}{4\pi R} \int_\sigma \Phi(x', y') \left(\frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{r} - \frac{dG_1}{d\rho} \right) d\sigma, \quad (\rho = R); \tag{45}$$

e, per il cerchio, si ha, com'è notissimo:

$$G_1 = \log \frac{1}{r_1},$$

ove:

$$r_1 = \frac{\rho}{R} r',$$

r' essendo la distanza del punto (x', y') dall'immagine del polo (x, y) rispetto al cerchio.

Considerando ora $\log \frac{1}{r}$ e $\log \frac{1}{r'}$ come funzioni delle coordinate x, y, è chiaro che si deduce la seconda dalla prima con una inversione di modulo R^2; da ciò si può trarre che nei punti di s si ha l'eguaglianza:

$$\frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{r} + \frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{r'} = 0,$$

che è del resto facile da verificare col calcolo diretto.

Siccome poi:

$$\frac{dG_1}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{r'} - \frac{1}{\rho},$$

ne segue:

$$\frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{r} = -\frac{dG_1}{d\rho} - \frac{1}{\rho}, \qquad (\rho = R),$$

quindi sostituendo nella (45) possiamo scrivere:

$$\varphi = \frac{\kappa_1}{4\pi R^2} \int_\sigma \Phi \left(2\rho \frac{dG_1}{d\rho} + 1\right) d\sigma, \qquad (\rho = R)$$

cioè:

$$(46) \qquad \varphi = \frac{\kappa_1}{2\pi R^2} \rho \frac{d}{d\rho} \int_\sigma \Phi \log \frac{1}{r_1} d\sigma + \frac{\kappa_1}{4\pi R^2} \int_\sigma \Phi d\sigma,$$

e questa formola, come si vede subito, vale non solo per $\rho = R$, *ma in tutto il cerchio* σ.

Essa quindi ci fa conoscere la funzione φ, e la (44) ci dà poi la funzione K. Abbiamo dunque sostituendo nella (26) e ricordando la (31):

$$(47) \qquad U - (1 + \kappa) F = \frac{\kappa_1}{2\pi} \int_\sigma \Phi \log \frac{r_1}{r} d\sigma +$$

$$+ \frac{\kappa_1}{2\pi R^2} (\rho^2 - R^2) \rho \frac{d}{d\rho} \int_\sigma \Phi \log \frac{1}{r_1} d\sigma + \frac{\kappa_1}{4\pi R^2} (\rho^2 - R^2) \int_\sigma \Phi d\sigma.$$

Possiamo anche ottenere un'altra espressione di $U-(1+\kappa)F$ ricorrendo alle (39), (35).

Nel caso del cerchio, infatti, la funzione G_2 è data da una nota formola del Prof. Lauricella, che può scriversi:

$$G_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r^2) + r^2 \log \frac{1}{r_1},$$

perciò si ha anche:

$$U-(1+\kappa)F = \frac{\kappa_1}{8\pi}\int_\sigma (\Delta_2\Phi) r^2 \log\frac{r_1}{r}\, d\sigma - \frac{\kappa_1}{16\pi}\int_\sigma (\Delta_2\Phi)(r_1^2 - r^2) d\sigma.$$

Dalle (28′), (44) si ha:

$$\Delta_2 U = 4\left(\varphi + x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

quindi, confrontando colla (40), si conclude che la funzione φ che figura nella (44) non differisce da quella rappresentata colla stessa lettera nel § 5; in altri termini, il valore che si deve sostituire nelle (41) alla φ è quello dato dalla (46).

È ora facile trovare anche la funzione armonica φ_0; dalla (46) si deduce infatti con tutta facilità:

$$(48) \qquad \varphi_0 = \frac{\kappa_1}{2\pi R^2}\frac{d}{d\alpha}\int_\sigma \Phi \log\frac{1}{r_1}\, d\sigma, \qquad \left(\frac{d}{d\alpha} = x\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dx}\right).$$

Sostituendo dunque nelle (41) i valori (46), (47), (48) si hanno le formole definitive che risolvono il problema proposto. Come si vede, le funzioni u, v risultano espresse mediante integrali doppi.

Le formole (7), (11) date dal Borchardt nella sua Memoria citata, sono un po' più complicate, ma si possono però ridurre facilmente alle precedenti con opportune semplificazioni.

Si potrebbe anche risolvere il problema ora trattato applicando al caso dell'area circolare il procedimento dato dal Prof. Almansi per risolvere il problema corrispondente della sfera, soggetta al calore (*); però le formole che così si ottengono sono alquanto complicate, e non sembra facile ridurle a quelle date dal Borchardt, o a quelle trovate dianzi.

(*) Almansi, *Sulla deformazione di una sfera elastica soggetta al calore* („ Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XXXII, a. 1897).

8. — Consideriamo il caso particolare in cui il riscaldamento Φ è una funzione poliarmonica d'ordine m: mostreremo che le funzioni u, v possono allora esprimersi per mezzo di integrali semplici (anzichè doppi).

Basterà perciò esprimere le funzioni H, K del § 4 mediante integrali semplici.

Per quanto riguarda la funzione H, conviene applicare il procedimento esposto al § 5 della mia Memoria: *Sulle funzioni di Green d'ordine* m (*). Perciò osserveremo che la funzione Φ può rappresentarsi colla formola:

$$\Phi = -\sum_{0}^{m-1}{}_s \rho^{2s}\psi_s,$$

le ψ_s essendo funzioni conosciute, armoniche in σ.

Sostituendo nella (29) si ha:

$$\Delta_2 H = \kappa_1 \sum_{0}^{m-1}{}_s \rho^{2s}\psi_s,$$

la quale mostra che la funzione H è poliarmonica d'ordine $m+1$, e si può perciò scrivere così:

$$H = \sum_{0}^{m}{}_n \rho^{2n} h_n, \tag{49}$$

ove le h_n sono funzioni armoniche da determinarsi. Si deduce:

$$\Delta_2 H = \sum_{1}^{m}{}_n \left(4n^2\rho^{2n-2}h_n + 4n\rho^{2n-2}.\rho\frac{dh_n}{d\rho}\right) = \kappa_1 \sum_{0}^{m-1}{}_s \rho^{2s}\psi_s,$$

da cui:

$$\sum_{1}^{m}{}_n \rho^{2n-2}\left(4n^2h_n + 4n\rho\frac{dh_n}{d\rho} - \kappa_1\psi_{n-1}\right) = 0;$$

ora, affinchè quest'equazione possa sussistere debbono esser nulle tutte le espressioni entro le parentesi, cioè:

$$nh_n + \rho\frac{dh_n}{d\rho} = \frac{\kappa_1}{4n}\psi_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots, m);$$

(*) Di prossima pubblicazione nei " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ".

da quest'equazione si ricava, con una nota formola:

$$h_n = \frac{\kappa_1}{4n} \rho^{-n} \int_0^{\varrho} \rho^{n-1} \psi_{n-1} d\rho \,, \qquad (n = 1, 2, ..., m), \tag{50}$$

e così conosciamo le funzioni armoniche $h_1, h_2, ..., h_m$.

Rimane ora da determinare la funzione armonica h_0. Dobbiamo per questo tener conto della (30), che ci dà mediante la (49):

$$\sum_0^m{}_n R^{2n} h_n = 0 \qquad \text{(su } s\text{)}$$

e quest'equazione, al solito, vale non solo nei punti di s, ma in ogni punto del cerchio σ.

Se ne trae:

$$h_0 = -\sum_1^m{}_n R^{2n} h_n \,,$$

che ci dà la funzione h_0.

Abbiamo quindi sostituendo nella (49):

$$H = \sum_1^m{}_n (\rho^{2n} - R^{2n}) h_n. \tag{51}$$

Esprimiamo ora la funzione biarmonica K mediante integrali semplici.

La K è data, come abbiamo visto, dalla (44), nella quale la funzione armonica φ soddisfa alla (34'); avremo dunque, tenendo presente la (51):

$$2R\varphi = -\sum_1^m{}_n 2nR^{2n-1} h_n, \qquad (\rho = R),$$

ossia:

$$\varphi = -\sum_1^m{}_n nR^{2n-2} h_n \,, \tag{52}$$

e quest'equazione sarà valida non solo per $\rho = R$, ma nell'intero cerchio σ.

Avremo quindi:

$$K = -(\rho^2 - R^2) \sum_1^m{}_n nR^{2n-2} h_n \,,$$

onde:

$$H + K = \sum_1^m{}_n [\rho^{2n} - R^{2n} - nR^{2n-2}(\rho^2 - R^2)] h_n,$$

e, ricordando le (50), (26):

$$U-(1+\kappa)F=\frac{\kappa_1}{4}\sum_1^m{}_n\frac{1}{n}[\rho^{2n}-R^{2n}-nR^{2n-2}(\rho^2-R^2)]\rho^{-n}\int_0^\varrho\rho^{n-1}\psi_{n-1}d\rho.$$

Si ha poi ancora dalle (52), (50):

$$\varphi=-\frac{\kappa_1}{4}\sum_1^m{}_n R^{2n-2}\rho^{-n}\int_0^\varrho\rho^{n-1}\psi_{n-1}d\rho;$$

ne segue facilmente che la funzione φ_0 è data dalla formola:

$$\varphi_0=-\frac{\kappa_1}{4}\sum_1^m{}_n R^{2n-2}\rho^{-n}\int_0^\varrho\rho^{n-1}\psi_{n-1}^{(0)}d\rho;$$

essendo $\psi_{n-1}^{(0)}$ la funzione armonica coniugata di ψ_{n-1}.

Sostituendo le tre espressioni precedenti nelle (41) si ottengono precisamente le funzioni u, v espresse mediante integrali semplici (o quadrature).

9. — Se, in particolare, il riscaldamento Φ è un polinomio, le funzioni armoniche ψ_0, ψ_1, ... sono pure polinomi, perciò, dalle formole precedenti, si conclude che lo stesso accade delle funzioni $U-(1+\kappa)F$, φ, φ_0 e infine di u, v.

Questo risultato vale ancora se il contorno s, invece che una circonferenza, è un'ellisse qualsiasi.

Infatti se Φ è un polinomio di grado m, $\Delta_2\Phi$ sarà di grado $m-2$, e la funzione V che soddisfa alle (37), (38) è allora un polinomio di grado $m+2$, che, come ho stabilito in una Nota precedente (*), si può determinare facilmente col metodo dei coefficienti indeterminati. Sia cioè:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'equazione dell'ellisse s, e poniamo:

$$V=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2.\lambda,$$

ove $\lambda(x, y)$ è un polinomio di grado $m-2$ di cui dobbiamo determinare i coefficienti.

(*) Boggio, *Sopra alcune funzioni armoniche o biarmoniche, ecc.* (" Atti del R. Istituto Veneto ", tomo LX, parte 2ª; a. 1901).

È chiaro allora che le (38) sono soddisfatte; sostituendo poi nella (37) e confrontando fra loro i due membri si trovano tante equazioni lineari quanti sono i coefficienti incogniti del polinomio λ. Il determinante dei coefficienti di tali equazioni è certo differente da zero, altrimenti supponendo nulli i termini noti (ossia i coefficienti del polinomio $\Delta_2\Phi$, da cui seguirebbe che V è biarmonica in σ) queste equazioni risulterebbero omogenee ed avrebbero perciò una soluzione comune, cioè esisterebbe una funzione biarmonica, non identicamente nulla in σ, e che su s si annullerebbe colla sua derivata normale, il che è impossibile (*).

Da tali equazioni si possono dunque ricavare i coefficienti del polinomio λ, che così risulta conosciuto.

La funzione V è perciò un polinomio di grado $m+2$ e, a cagione della (35), anche $U-(1+\kappa)F$.

Dalla (36) si deduce poi che T è un polinomio (armonico) di grado m, quindi dalle (24), (24_0) che τ, τ_0 sono polinomi (armonici) di grado $m+1$, e infine dalle (25) che u, v sono polinomi di grado $m+1$.

Se invece il riscaldamento Φ non è una funzione razionale intera, le funzioni u, v (sempre nel caso di un contorno ellittico) si possono ottenere espresse con serie (di funzioni iperboliche e trigonometriche), perchè la funzione biarmonica U, che soddisfa alle (16) si sa appunto (**) determinare mediante serie (di funzioni iperboliche e trigonometriche).

(*) Questo semplice ragionamento, che permette di concludere che il determinante dei coefficienti non è nullo, è una immediata estensione di quello adoperato dal Prof. Morera nel § 8 della sua Memoria: *Sull'attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali di seconda specie* (" Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino "; serie II, t. LV, a. 1905).

(**) Boggio, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2\Delta^2=0$ *in un'area ellittica* (" Atti del R. Istituto Veneto "; tomo LX, parte 2ª; a. 1901).

La grafite nelle Alpi piemontesi.

Nota dell'Ing VITTORIO NOVARESE.

La notizia del rinvenimento di lenti grafitiche in una località delle Valli di Lanzo, dove finora non erano conosciute, data in uno degli ultimi scritti del prof. Sacco (1), m'induce ad esporre brevemente le osservazioni che sullo stesso argomento abbiamo raccolto, tanto io quanto altri egregi miei Colleghi, durante il rilevamento della Carta geologica delle Alpi Piemontesi. Anche all'infuori di una mia Monografia, che il prof. Sacco cortesemente cita (2), notizie di talune di queste osservazioni sono già state inserite nelle varie pubblicazioni, dove del sopradetto rilevamento si dà conto, ma sembrano essere passate del tutto inavvertite.

Avrò occasione di ricordarle nelle pagine che seguono:

Diverse essendo la natura e l'origine della grafite nei varii terreni, onde sono costituite le Alpi nostre, le questioni a cui la sua presenza può dar luogo, non sono già semplici problemi di paragenesi minerale, ma hanno portata ben più grande. Essendo oramai assodato che la grafite alpina in molti luoghi risulta dalla metamorfosi di banchi di combustibili fossili, la sua presenza in una formazione può avere fondamentale importanza per determinarne l'età, ed esser un criterio di primo ordine per discutere o risolvere i problemi stratigrafici o tettonici che a tale determinazione si connettono. È quindi indispensabile per ogni giacimento di grafite tener presente la nozione della formazione o della zona orotettonica, in cui è stato incontrato, e valutare altresì l'importanza delle azioni che le rocce eruttive od il metamorfismo regionale possono avervi esercitato.

(1) *Lenti grafitiche nella zona delle Pietre verdi in Val di Lanzo*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, vol. XXXIX, adun. del 19 giugno 1904.

(2) V. Novarese, *I giacimenti di grafite delle Alpi Cozie*, " Boll. del R. Com. geol. „, anno 1898, n. 1.

Se da un simile punto di vista debbono considerarsi le grafiti, le antiche divisioni della serie alpina, tradizionali nella scuola del Gastaldi, si appalesano oramai insufficienti. Già nella stessa Monografia citata poco fa, ho dovuto dichiarare che se mantenevo l'antica divisione in due zone del Gastaldi, lo faceva soltanto per ragioni d'indole pratica, avvertendo che il progresso generale della scienza ed i nuovi studii particolari sulle Alpi ne avevano diminuito il valore. Erano già stati allora trovati i fossili mesozoici nei terreni attribuiti alla zona delle Pietre verdi. Nello stesso lavoro, insistendo sulla presenza non della grafite soltanto, ma di un complesso di rocce, grafitiche o non, ad essa associate, e formanti un determinato orizzonte, di probabile età carbonifera, venivo anzi ad aggiungere un nuovo argomento a quelli già noti contro le idee del grande geologo. È troppo conosciuto per che io abbia a ricordarlo, tutto ciò che dopo la pubblicazione della mia Monografia si è nelle Alpi scoperto e riconosciuto intorno all'età di talune formazioni, prima ritenute arcaiche.

La classificazione di B. Gastaldi, dopo essere stata la guida preziosa di cui ha dovuto servirsi ogni geologo accintosi a studiare l'arduo problema, il primo punto di partenza sicuro da cui gradualmente è andata svolgendosi la conoscenza scientifica delle Alpi nostre, ha fatto oramai il suo tempo, e non è più sostenibile, nè per l'età che il Gastaldi ha attribuito ai suoi due piani principali, nè per il raggruppamento dei terreni in ciascuno di essi. Può, opportunamente modificata, rispondere al vero forse ancora in qualche caso particolare, ma ha perduto ogni valore generale.

L'illustre Maestro raggruppò in ciascuna delle sue zone fondamentali svariatissimi tipi litologici, di cui ora si riconosce oppure s'intravvede la pertinenza a formazioni di età differenti. Ciò accade per lo stesso gneiss centrale (inteso come zona e non come roccia), e ne è un esempio il cenno testè fatto, riferentesi all'età della formazione grafitica delle Cozie in essa zona contenuta; ma ha luogo segnatamente per la zona molto più complessa delle Pietre verdi. Nella quale, astraendo per ora da forme litologiche subordinate, i calcescisti cogli gneiss e micascisti detti superiori o recenti, formano, secondo il concetto del Gastaldi, un complesso che avvolge ed ingloba le rocce verdi propriamente dette, e cioè,

secondo l'antica nomenclatura, le serpentine, le anfiboliti, le dioriti, le eufotidi, i cloritoscisti, ecc. Al Gastaldi mancò il tempo di distinguere sul terreno i calcescisti dagli gneiss e micascisti, cosicchè nelle sue carte geologiche pubblicate o inedite, non si trova traccia di tale distinzione.

Quando per opera dell'Ufficio Geologico s'iniziò il rilevamento sistematico a grande scala delle Alpi Occidentali, apparve subito la possibilità di tenere distinti sulla Carta, nella maggior parte dei casi, gli gneiss e micascisti detti recenti dai calcescisti. Tale separazione incominciata, ed adottata, nella piena persuasione della perfetta equivalenza geologica *in ogni caso* delle varie forme litologiche, fu feconda, in processo di tempo, di notevolissimi risultati. Dimostrò, o se vogliamo, confermò, perchè il fatto era già stato dichiarato dal Gastaldi, la grande unità della formazione dei calcescisti propriamente detti, ed il loro stretto legame con un determinato gruppo di rocce verdi, aprendo così la via alla determinazione della loro età mesozoica; apparvero con maggior evidenza le direttrici tettoniche del sistema alpino nel suo settore occidentale, e fu possibile riconoscere un certo numero di nuove zone rappresentate da rocce gneissiche e da micascisti, la cui equivalenza coi calcescisti è per lo meno dubbia, quando non può dimostrarsi addirittura insussistente. Difatti di taluna di queste zone si è potuto con un certo qual grado di sicurezza determinare, come vedremo, l'età, mentre per altre sarebbe prematuro parlare di ciò, sebbene sia fuor di dubbio la loro individualità ed autonomia tettonica. Ad ogni modo nell'uno e nell'altro caso, se è vero che associati ai calcescisti e quantitativamente subordinati, appaiono qua e là degli gneiss e micascisti che non possono considerarsi se non come loro equivalenti, è non meno vero, e lo vedremo fra breve, che esistono nelle Alpi Occidentali italiane notevolissime estensioni di gneiss e micascisti costituenti vere unità geologiche che nulla autorizza a ritenere equivalenti dei calcescisti, ai quali sono stati invece parallelizzati per lungo tempo.

Premesse queste considerazioni, indispensabili alla chiarezza di quanto segue, passerò in rassegna i giacimenti grafitici finora noti nei varii gruppi in cui si suddividono le Alpi Piemontesi, accennando in pari tempo al livello geologico, certo o presunto, in cui compaiono.

Nelle Alpi *Liguri* la grafite è una metamorfosi locale delle antraciti del piano carbonifero. Lo Zaccagna, a cui è dovuta l'unica descrizione geologica, finora stampata, di quei giacimenti (1), nota che essi corrispondono a " punti più energicamente disturbati dalle azioni dinamiche, le quali impartirono allo strato carbonioso un metamorfismo più profondo ". Nei profili dati da Zaccagna, della miniera di Isola Grande, m'importa mettere in luce due fatti, su cui dovrò ritornare in seguito: — 1° un'intrusione, quasi un'apofisi del banco grafitico, che attraversa l'arenaria incassante; — 2° l'immediata vicinanza del banco grafitico agli scisti gneissici permiani. Questi scisti sono costituiti da besimaudite, l'antica appenninite del Gastaldi, vale a dire, da una roccia che collocata da questi nella zona delle Pietre verdi, fu riconosciuta di età permiana da Zaccagna, che, sia detto di passaggio, aveva così il merito di iniziare nel 1884 l'opera di riforma della classificazione gastaldiana.

Nella maggior parte dei casi, come è noto, le roccie comprese sotto la denominazione di besimauditi sono porfidi più o meno modificati, specialmente da azioni meccaniche. La presenza pertanto di una roccia eruttiva presso la grafite ci ammonisce a non trascurare fra le probabili cause della metamorfosi dell'antracite, le azioni di contatto, sebbene i porfidi le esercitino in generale in assai scarsa misura. È vero altresì che nelle Alpi Liguri gli affioramenti di grafite sono anch'essi assai piccola cosa di fronte all'estensione e frequenza di quelli di antracite. Vedremo nelle Cozie, verificarsi il caso inverso.

Non consta da alcuna notizia positiva che esista grafite nelle Alpi *Marittime*, cosicchè passo subito al gruppo delle *Cozie*, dove invece le grafiti hanno il loro massimo sviluppo, e si mostrano in due livelli: uno inferiore, di età quasi certamente carbonifera, ed uno superiore, nella formazione mesozoica dei calcescisti. Per le Cozie le suddivisioni del Gastaldi hanno conservato il loro pieno valore soltanto come zone orotettoniche. L'elissoide gneissico Dora-Varaita ha costituzione assai complessa ed una

(1) R. Ufficio Geologico, *Studio geologico minerario sui giacimenti di antracite delle Alpi occidentali italiane.* Memorie descrittive della Carta geol. d'Italia. Vol. XII. Roma, 1903, pag. 156-158, 161.

tettonica ancora oscura, ma il concetto del Gastaldi è tuttora accettabile e preferibile all'opinione dello Zaccagna, che ne attribuiva una parte alla zona delle Pietre verdi, ipotesi che il rilevamento non ha confermato.

La più importante zona grafitica alpina, così per estensione come per valore industriale, è racchiusa in quest'elissoide, ed è stata descritta la prima volta nel suo insieme, in base alle osservazioni degli operatori dell'Ufficio Geologico (Franchi, Stella e lo scrivente), nella mia Monografia già citata. Le osservazioni posteriori non ne hanno modificato sensibilmente i limiti, come si scorge dalla cartina al 1.000.000 che accompagna la *Memoria intorno alle Antraciti delle Alpi Occidentali*. L'unica aggiunta da farsi è l'indicazione degli scisti grafitici e della grafite alla Rocca di Cavour, già segnalati da me nel 1898 (1), e recentemente anche dal Colomba.

In favore dell'attribuzione al carbonifero della zona grafitica delle Cozie è venuto ad aggiungersi un argomento molto importante, la scoperta dell'antracite, la cui presenza era già stata più o meno vagamente segnalata dal Barelli, dal Baretti e dal Prof. Maggiore di Torre Pellice. Nel contrafforte fra il Chisone e la destra della Germanasca, presso ai casolari detti del Clot di Boulard (Comune di Pomaretto), le esplorazioni minerarie hanno messo nel 1902-03, fuor di dubbio l'esistenza di banchi antracitici dentro la zona grafitica, nella quale, all'opposto di quanto avviene nelle Liguri, la grafite sarebbe la regola e l'antracite l'eccezione. Si è potuto inoltre accertare che i banchi migliori di grafite, e quindi le miniere migliori, sono in prossimità immediata delle masse dioritiche della bassa Valle del Chisone (Porte, Poggio Pini, Malanaggio, Bric Ceresa, ecc.), probabilmente intrusive nei terreni grafitici, ma coinvolte con essi nei ripiegamenti, laminazioni, ecc., ed alle quali sono associati scisti macchiati a chiastolite, ecc., pure già segnalati e descritti petrograficamente dal Franchi e da me. (2). È quindi probabile il concorso di un'azione metamorfosante di contatto nella trasformazione totale dei banchi carboniferi in grafite, tanto più che le

(1) V. Novarese, " Boll. del R. Com. geol. „, 1899. Atti Ufficiali, p. 29.

(2) S. Franchi e V. Novarese, *Appunti geol. e petrogr. sui dintorni di Pinerolo*, " Boll. del R. Com. Geol. „, 1895, pag. 385.

poche località antracitifere sono le più lontane dalle rocce eruttive (1). Un'altro interessantissimo fatto può ancora attribuirsi a tale azione. In parecchie località, ma specialmente nel vallone di Pramollo, sono state riscontrate nei giacimenti di grafite singolarissime accidentalità stratigrafiche, analoghe a quelle poste in rilievo per la miniera di Isola Grande nelle Alpi Liguri. Il banco grafitico manda cioè ramificazioni ed apofisi nella roccia incassante, tagliandola nettamente; ed in queste ramificazioni o rigonfiamenti spesso la grafite è assai più pura che non nel banco, da cui si staccano. Questo singolare complesso di circostanze può spiegarsi in due modi. Od è dovuto ad un semplice fatto dinamico, ed allora si tratta di un'iniezione, avvenuta per pressione, della parte più bituminosa e quindi più plastica del banco carbonifero originario, prima ancora della metamorfosi di contatto; oppure può essere un effetto immediato di quest'ultima, ed in tal caso la grafite avrebbe un'origine analoga al carbone delle storte a gaz, cioè dovrebbe essersi deposta in spaccature od altre cavità a causa della decomposizione di sostanze volatili carburate, sia distillate dal combustibile per effetto dell'elevata temperatura della roccia eruttiva, sia estratte dai vapori soprariscaldati che da questa si estricavano.

Prima di abbandonare quest'argomento delle grafiti nella " zona dello gneiss centrale „ nel senso antico, credo appena necessario avvertire come a chiunque vi abbia studiato i giacimenti di talco e quelli di grafite, appaja inverosimile nel più alto grado l'ipotesi avanzata dal Weinschenk che i primi derivino per pseudomorfosi dai secondi.

Nella " zona delle Pietre verdi „, nel senso di Gastaldi, compajono pure nelle Cozie dei giacimenti grafitici, sebbene senza importanza tecnica, e ciò è noto da parecchi anni. L'indeterminatezza a cui può dar luogo l'uso dell'espressione " zona delle Pietre verdi „ nel senso antico non è grande, perchè la maggior parte di questa zona spetta nelle Cozie alla formazione dei calcescisti di età secondaria; fanno eccezione soltanto i due massicci di scisti cristallini di Pradleves e del Monte Ambin (2), dei quali

(1) V. Novarese, " Boll. del R. Com. geol. „, 1904. Atti Ufficiali, p. 32.

(2) V. la Carta geologica delle Alpi Cozie italiane desunta dai rilevamenti del R. Ufficio geologico in Franchi S., *Sull'età mesozoica della zona delle pietre verdi nelle Alpi occidentali*, " Boll. del R. Com. geol. „, 1898, p. 326.

si sa soltanto essere antitriasici. Nel 1895, quando ancora le denominazioni del Gastaldi si adoperavano senza riserve, lo Stella accennava alla presenza nella sua " regione delle Pietre verdi „ in Val Varaita, di micascisti grafitici e di filladi grafitiche (1). Nel 1897 il Franchi descriveva i micascisti grafitici ed i grafitoscisti intercalati alle rocce della zona " Pietre verdi „, mesozoica nei monti di Bussoleno (2), e nel suo lavoro citato del 1898, descriveva ed indicava in diversi profili degli scisti grafitici nei calcari con fossili triasici di Bernezzo e di Alma. Successivamente, nel 1899, lo Stella scrisse di analoghi scisti grafitici intercalati ai calcescisti con calcari fossiliferi del Saluzzese (3). Io pure, fin dal 1894, sebbene non l'abbia mai pubblicato, rinvenni estese masse di filladi grafitiche con straterelli di grafitoscisti, dentro ai calcescisti dell'alta Valle Germanasca, sulla cresta fra il Monte Pignerol ed il Monte Trussiere, nel Vallone di Rodoretto.

Nel complesso delle *Graje* e delle *Pennine*, gruppi di cui per le molte formazioni comuni e la continuità delle zone orotettoniche credo utile parlare insieme, i giacimenti grafitici compajono almeno in cinque livelli differenti.

In questo complesso però l'impiego delle antiche denominazioni usuali per designare i terreni può più che mai dar luogo ad equivoci, avendo i recenti studii arrecato profonde modificazioni alle vedute fin qui comunemente accettate. Ciò vale principalmente per quell'insieme di terreni costituente la zona orotettonica detta del Piemonte dal Desor e del Monte Rosa dal Diener, e che questi, facendo sue le opinioni della scuola del Gastaldi, ritenne appartenere complessivamente all'arcaico, nei noti due piani del " Gneiss centrale „ e delle " Pietre verdi „, salvo insignificanti eccezioni. In essa invece si riscontrano, oltre

---

(1) Stella A., *Sul rilevamento geologico eseguito nel 1894 in Valle Varaita (Alpi Cozie)*, " Boll. del R. Comit. geol. „, 1895, pag. 283, vedi pag. 288, 295, 301.

(2) Franchi S., *Appunti geologici e petrografici sui monti di Bussoleno ecc.*, " Boll. del R. Com. geol. „, 1897, pag. 26 e 31.

(3) Stella A., *Calcari fossiliferi e scisti cristallini dei monti del Saluzzese, nel cosidetto ellissoide gneissico Dora-Maira*, " Boll. del R. Com. geol. „, 1899, pag. 134, 141 e tav.

la formazione mesozoica dei calcescisti e calcari associati, terreni presumibilmente carboniferi, e scisti cristallini di età indeterminata; inoltre appare oramai molto problematica l'unità tettonica della zona che dovrà essere ulteriormente suddivisa. Delimiterò, od indicherò qui soltanto quei gruppi o formazioni che contengono grafite.

Comincia nelle valli di Lanzo e continua verso NE fino a congiungersi colla massa del cosidetto Gneiss Sesia del Gerlach, una formazione prevalentemente di gneiss e micascisti, che costituisce, con grande unità di caratteri stratigrafici, una individualità orotettonica ben distinta dalla formazione dei calcescisti, a cui appare sempre sovrastare lungo il suo lembo NW. A SE è limitata dalla nota zona dioritica d'Ivrea, pur essendone separata da una striscia, molto stretta, ma mirabilmente continua di altri terreni, su cui dovremo ritornare fra breve.

Il limite SE dell'accennata formazione è così facilmente reperibile su qualunque delle carte geologiche pubblicate, mentre quello NW, anch'esso nell'insieme quasi rettilineo, a cagione della presunta costante equivalenza fra calcescisti e gneiss minuti, si ricostruisce con estrema difficoltà. Questo limite NW, quasi rettilineo sulla carta, passa alquanto a N di Santa Cristina sopra Ceres, e diretto verso NE taglia l'Orco a S di Locana, la Dora Baltea a S di Verrès, e fatto irregolare da un'importante dislocazione, segue a mezza costa l'alta giogaja che divide la valle di Challand da quella del Lys, per passare in questa al Passo di Mascogna, e proseguire poi verso la Valsesia pel Passo di Coppa (a N del Corno Grosso). Il limite SW di questa zona, che chiamerò in via provvisoria Sesia-Val di Lanzo, si può desumere assai bene dalla recente *Carta geo-litologica delle Valli di Lanzo*, pubblicata recentemente dall'ing. E. Mattirolo (1), dove si scorge la massa indicata colla tinta di " *Gneiss minuti, micascisti, rocce quarzitiche* " immergersi sotto le serpentine e lherzoliti della bassa Valle di Lanzo ed il quaternario della pianura. Precisamente questa parte più meridionale sarebbe, se-

(1) E. Mattirolo, *Carta geo-litologica delle Valli di Lanzo*, secondo il rilevamento del R. Ufficio geologico, nel volume *Le Valli di Lanzo (Alpi Graie)*. Sessione di Torino del C. A. I. Torino, 1904, con schiarimenti ecc. a pag. 521.

condo il Sacco..... " una delle regioni più comode per esaminare in breve da Torino tale complessa formazione gneissico-micascistosa (i cosidetti Gneiss minuti) e talora calcescistosa con rocce verdi, cioè la tipica zona delle Pietre verdi del Gastaldi „.

Le rocce più caratteristiche di questa formazione, che nulla ha da fare colle " Pietre verdi „ e coi calcescisti mesozoici, sono gneiss minuti, che prevalgono verso NW presso al contatto coi calcescisti, e micascisti eclogitici, cioè a granato, glaucofane, omfacite e pirosseni giadeitoidi, micascisti che furono ripetutamente descritti da me e dai miei colleghi Franchi e Stella in più occasioni. Questi micascisti eclogitici, sovrastanti agli gneiss accennati poco fa, costituiscono la maggior parte della formazione fra l'Orco ed il Lys. In lenti e banchi sono contenuti in essa calcari cristallini, talora così micacei da meritare il nome di calcescisti; rarissime le rocce verdi propriamente dette, che hanno solo qualche sviluppo nell'estremità meridionale in Val di Lanzo, e fra questa e la Chiusella sono sostituite da rocce semimassiccie, nelle quali i minerali essenziali sono la gastaldite ed il granato (1).

Infine affatto caratteristica per questa formazione e zona orotettonica alpina è la presenza di rocce intrusive posteriori ai ripiegamenti: tali sono la diorite di Traversella, e la sienite di Biella, che hanno notevoli aureole di contatto, e numerosi filoni di porfirite anfibolica nelle valli Soana, Chiusella, di Challand e del Lys (2).

L'età della zona Sesia-Val di Lanzo non può determinarsi che per approssimazione. La sua sovrapposizione ai calcescisti, spesso con stratificazione quasi orizzontale, non porge alcun utile criterio cronologico, date le grandi complicazioni tettoniche al-

---

(1) V. Novarese, *Relazione sul rilevamento eseguito nelle Alpi occidentali (Valli dell'Orco e della Soana)*, " Boll. del R. Com. geol. „, 1894, pag. 215. — A. Stella, *Relazione sul rilevamento eseguito nell'anno 1893 nelle Alpi occidentali (Valli dell'Orco e della Soana)*. " Boll. del R. Com. geol. „, 1894, p. 343. S. Franchi, *Sopra alcuni giacimenti di roccie giadeitiche ecc.*, " Boll. R. Com. geol. „, an. 1900. — Id., *Ueber Felspath-Uralitisirung der Natron-Thonerde-Pyroxene aus den eklogitischen Glimmerschiefern der Gebirge von Biella*, " N. J. f. Min. Geol. u. Palaeont. „, Jahrg. 1902, Bd. II.

(2) Comunicazioni inedite dell'ing. S. Franchi per quanto riguarda la sienite di Biella e la valle del Lys.

pine, che fanno anzi parere più probabile un rovesciamento od un accavallamento *(recouvrement)* che una successione regolare. Più concludente sembra un fatto, assai notevole, che si verifica lungo tutto il margine SE della zona, e di cui già si è fatto cenno. Fra essa e la susseguente zona dioritica d'Ivrea, si osserva una striscia di terreni composta, fra Levone e Montalto, di graniti, porfidi, scisti varii e calcari identici all'analogo complesso che dalla banda opposta della zona dioritica appare nella bassa Val Sesia, ed a mezzogiorno del Cusio e del Verbano, di cui è assodata l'età permiana e mesozoica. Oltre Montalto e nella stessa posizione dei precedenti terreni appajono i porfidi, le porfiriti, i melafiri e le serpentine del Biellese e più a NE ancora la striscia si continua negli scisti calcareo-argillosi di Rimella, già ricordati dal Gerlach e dal Parona, che ho ritrovati nel luglio 1904, con grande sviluppo, e sempre nella stessa posizione, nell'alta Val Strona (passo d'Issola e lago di Ravinella), nell'Ossola presso Loro, donde sono stati seguiti infine dallo Stella fino all'estremità NE della zona, in Val Loana. Com'è noto questi lembi, forse triasici, sono chiusi in un complesso di gneiss e scisti sericitici, detto dal Gerlach degli " scisti di Fobello e Rimella ", molti dei quali non sono che roccie porfiritiche più o meno fortemente laminate, e già da parecchi autori ritenuti permiani. Questa lunga, stretta e continua zona permo-triasica, laminata, ma non molto intensamente metamorfosata, è certamente sovrapposta, e quindi più recente delle rocce della zona Sesia-Val di Lanzo, la quale per ciò non è certo più recente del carbonifero, e forse assai più antica (1).

Nella zona Sesia-Val di Lanzo la grafite appare sotto due forme ben distinte. La più diffusa è quella dei micascisti grafitici e grafitoscisti descritti dallo Stella nel 1894, per la valle dell'Orco e finitime (2). A questo tipo appartengono senza alcun dubbio i giacimenti descritti dal prof. Sacco nella Val di Lanzo inferiore. Nel 1890 io stesso ho rinvenuto grafitoscisti riferibili

(1) L'esistenza di questa zona, almeno per quanto riguarda i calcari, è già stata affermata dal prof. Taramelli (*Note geologiche sul bacino idrografico del fiume Ticino*, " Boll. della Società geol. ital. ", vol. IV, 1885, pagg. 12, 33 dell'estratto).

(2) A. Stella, loc. cit., pagg. 353, 358, 359, 371.

allo stesso tipo, al letto della lente calcarea di Oltreorco a Pont Canavese.

L'altra forma in cui compare la grafite è più singolare: in noduli e pagliette disseminati in una roccia a grossi granati impiantati in una pasta bianca irreducibile al microscopio. S'incontra nelle località grafitiche del Vasero nel vallone di Ribordone e delle falde del Monte Cialmera nell'alto Vallone Chiaronio (1), entrambe in Val d'Orco, e note anche per ricerche minerarie. Avverto che in entrambe le località, per quanto sopra un'estensione limitatissima, alla roccia granatifera a grafite sono associati un calcefiro ed un'eufotide o diorite di tipo affatto speciale. Rivedremo fra breve una simile associazione sopra ben più vasta scala.

Per questa formazione di età incerta le induzioni sull'origine della grafite sarebbero premature: certo però assai diversa dev'essere la genesi della grafite dei micascisti, in cui può considerarsi come minerale subordinato ed accidentale, da quella delle rocce granatifere, dov'è invece un componente accessorio, ma caratteristico.

Nella formazione oramai dimostrata mesozoica dei calcescisti delle Graje-Pennine, l'unica menzione di rocce grafitiche che io conosca è quella fatta dal Giannotti nel 1891. Però chiunque ha percorso questa zona ha potuto notare qua e là accentramenti del solito pigmento carbonioso che colora in nero i calcescisti, con carattere gratifico (2).

Di età carbonifera sono le lenti ed i giacimenti grafitici che appajono nella gamba più settentrionale dell'anticlinale descritta da me nella Valsavaranche, e che si adagia sopra la sinclinale della Grivola, a sua volta ribaltata sull'elissoide gneissico del Gran Paradiso (3). Sono precisamente i giacimenti di quest'anticlinale carbonifera quelli che lo Stella avverte incontrarsi nella Valle di Rhême Saint-Georges (4), e che hanno pure dato luogo a qualche ricerca nella Val Savaranche. Anche qui, come nelle

---

(1) V. Novarese, loc. cit., pag. 225.

(2) E. Mattirolo, *Schiarimenti alla carta geo-litologica ecc.*, pag. 533.

(3) V. Novarese, " Boll. del R. Com. geol. „, 1901. Atti ufficiali, p. 30.

(4) R. Ufficio Geologico, *I giacimenti di antracite ecc.*, pag. 87.

Cozie, è probabile non sia stata estranea alla trasformazione dell'antracite in grafite la nota diorite sfenica di Val Savaranche.

I tre complessi principali che abbiamo fin qui ricordato sono stati, per quanto riguarda le Graje, attribuiti alla zona delle " Pietre verdi „ non solo dal Gastaldi o dai suoi seguaci, ma anche da me e dai miei colleghi dell'Ufficio Geologico fin verso il 1895-96. Anzi la stessa recentissima *Carta geologica delle Valli di Lanzo*, pubblicata dal Mattirolo, conserva la denominazione " Zona delle Pietre verdi „, colla stessa estensione del Gastaldi, senza farvi alcuna suddivisione che non sia puramente litologica, nè assegnarla ad alcun determinato livello geologico, non consentendo l'indole della pubblicazione di cui era parte, una discussione esauriente dell'intricata questione (1).

Da quanto mi comunica il Franchi s'incontra grafite ancora in molte roccie, spesso granatifere e sillimanitiche, in corrispondenza di quelle minori zone dioritiche che sono segnate, invero assai schematicamente, a NW della grande zona d'Ivrea nelle carte geologiche totali o parziali finora pubblicate delle Pennine. Grafite s'incontra pure nei calcefiri dello gneiss Sesia, inteso nel senso di Gerlach, in prosecuzione cioè della nostra zona Sesia-Val di Lanzo.

Dei varii elissoidi compresi nella zona del Monte Rosa, nelle Graje e Pennine, solo quello della " Dent Blanche „ sembra contenere grafite. L'indicazione risale a Gerlach, e posso confermarla. La grafite s'incontra in pagliette e masserelle dentro ai calcari cristallini di quel singolare complesso di gneiss e micascisti granatiferi, dioriti, e anfiboliti, e calcari cristallini, corrispondenti all'asse dell'elissoide gneissica nella Valpelline, che ho paragonato alla formazione delle kinzigiti di Calabria (2), e che ripete in grande l'associazione di rocce già descritta per Vasero e Monte Cialmera nella Valle dell'Orco.

Per terminare quanto riguarda le rocce grafitiche a NW della zona dioritica d'Ivrea, ricorderò i micascisti grafitici, di

(1) Le nuove idee sulla serie dei terreni e sul loro assetto tettonico, risultanti dalle osservazioni e studii compiuti dal R. Ufficio Geologico, nell'ultimo ventennio, troveranno la loro espressione sintetica in una carta d'insieme delle Alpi Occidentali italiane, di prossima pubblicazione.

(2) V. Novarese, " Boll. del R. Com. geol. „, 1901. Atti ufficiali, p. 33-34.

cui parla Stella (1), che si trovano nella fascia micascistosa e gneissica che attraversa lo slargo di Valle Toce a Domodossola.

Anche a SE della zona dioritica d'Ivrea si conosce la grafite, in quantità anzi sufficiente da allettare a qualche esplorazione mineraria. L'ing. Franchi (2) recentemente ha segnalato nella regione tra Cervo e Sesia a contatto colle dioriti una potente massa rocciosa in cui figurano kinzigiti grafitiche con cordierite e sillimanite, nelle quali sono locali arricchimenti i noti piccoli giacimenti della bella grafite di Coggiola. Anche in questo caso la grafite, invece che pigmento, è elemento accessorio ma caratteristico della roccia, come nei casi già citati della Valle dell'Orco e della Valpelline. La grafite è anzi un elemento caratteristico spesso abbondante e macroscopico di tutti i tipi di kinzigiti, gneiss e micascisti granatiferi a sillimanite appartenenti alla zona degli gneiss Strona, in tutto il loro sviluppo tra le dioriti ed i graniti, come risulta dalle osservazioni dell'ingegnere Franchi nelle valli Sesia e Sessera e dalle mie in Val Strona. Grafite contengono pure i calcefiri dello gneiss Strona. V'ha di più. Anche lungo tutto il margine SE della così detta zona dioritica d'Ivrea, come lo ha intraveduto il Gerlach, ma lo hanno più minutamente descritto il Parona, il Porro, e specialmente Artini e Melzi, v'ha un complesso di roccie dioritiche od anfibolitiche associate a roccie granatifere (stronaliti e micascisti sillimanitici di Artini e Melzi) ed a calcari cristallini, identico all'analogo complesso che io ho descritto in Calabria sotto il nome di zona delle kinzigiti (3), conservando una denomina-

---

(1) A. Stella, " Boll. del R. Com. geol. „, 1903. Atti ufficiali, p. 34-35.

(2) S. Franchi, " Boll. del R. Com. geol. „, 1903. Atti ufficiali, pag. 34.

(3) Il primo ritrovamento della kinzigite in questa parte del territorio alpino, risale a trent'anni fa ed è dovuto al prof. G. Spezia, che la raccolse nella bassa Ossola, presso Cuzzago, erratica allo sbocco del vallone di Nibbio, inciso in piena zona dioritica ed il nome di *Kinzigite* appare infatti nel " Cenno mineralogico e geologico introduttivo „ della Guida dell'Ossola del col. G. Bazzetta e prof. E. Brusoni. Dopo, il primo che parli di roccie analoghe con grafite è il Porro (*Geognostische Skizze der Umgebung von Finero*, Berlin, 1896) che le chiamò senza più precisa denominazione " in den basischen Gesteinen auftretenden Kieselsäurereichen Gesteinen „ (pag. 411-412), vale a dire intercalazioni acide nelle roccie dioritiche dei dintorni di Finero. Queste roccie trovate colà poi anche dallo Stella, rien-

zione introdotta dal Lovisato, e che presenta pure forte analogia colla piccola zona della Valpelline. È noto che anche in Calabria, presso Olivadi, esiste un'antica miniera che ha coltivati i nuclei grafitici della kinzigite. Tornando al caso di Coggiola, rimane riservato agli studii ulteriori il decidere se la massa di kinzigite, trovata dal collega Franchi, appartenga piuttosto alla zona dioritica che alla zona degli gneiss-Strona, dato sia possibile mantenere fra queste due zone una distinzione così netta come quella indicata nelle carte finora pubblicate.

Roma, 5 gennaio 1905.

Contribuzioni di Geologia chimica.

La pressione è chimicamente inattiva nella solubilità e ricostituzione del quarzo.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA.

(Con una Tavola).

È sempre utile per la geologia chimica l'aumentare il numero delle esperienze le quali dimostrano che la pressione statica non può avere alcuna influenza nelle reazioni chimiche; tanto più che dopo la prima esperienza, che segna una data scientifica, del Vöhler, sulla solubilità dell'apofillite nell'acqua e successiva ricristallizzazione, si formarono due correnti di opinioni, interpretando il fenomeno, secondo alcuni, come dovuto alla pressione e secondo altri alla temperatura. Le quali opinioni sono tuttora in lotta, rimanendo a favore della pressione quelle idee preconcette, che difficilmente si piegano alla prova dei fatti sperimentali che parlano in favore della temperatura.

trano nel gruppo delle kinzigiti. Artini e Melzi nel loro lavoro sopra la Val Sesia, non accennano alla presenza della grafite nelle loro stronaliti e gneiss e micascisti a silliminate, roccie tutte che pur rientrano nel suddetto gruppo delle kinzigiti.

Infatti Grubenmann in una sua recente opera, indicando le cause della formazione degli schisti cristallini, pone fra le prime dell'azione chimica la pressione, a proposito della quale afferma in modo deciso: " l'aumento della pressione produce soluzione, invece la diminuzione di pressione produce la cristallizzazione „ (1).

Tale affermazione sarà un assioma per l'autore, ma per la scienza rimane ancora un'ipotesi; e pur troppo un'ipotesi può, nello spirito di chi la pone come base di una teoria e la sostiene con profonda convinzione, assumere gradatamente il valore di un fatto sperimentale. Allora è evidente che si trascuri di prendere in esame quelle esperienze le quali concordi abbattono l'ipotesi, lasciando in tal modo che si ripeta oggigiorno ciò che disse Bunsen quando dimostrò che nell'esperienza di Wöhler sull'apofillite la pressione non era la causa della solubilità: " dass es nie zur Erkenntniss des Wahren führen kann, wenn man nur Hypothesen da sprechen lässt, wo der einfachste Versuch entscheiden kann „.

Già nel 1886 (2) io avevo cominciato alcune esperienze in proposito, dimostrando che il solfato di calcio, prodotto da reazioni fra soluzioni, non poteva cristallizzare come anidrite per effetto della semplice pressione, ma cristallizzava dando luogo ancora a gesso anche sotto la pressione di 500 atmosfere.

In seguito feci numerose altre esperienze a proposito del quarzo e sempre ottenni che la pressione non aveva influenza nè sulla solubilità, nè sulle reazioni chimiche, per le quali unico fattore emergeva sempre la temperatura.

Per esempio, nella reazione fra il solfo ed il silicato sodico in soluzione acquosa ottenni quarzo colla temperatura di 300° e soltanto in 43 ore di tempo, mentre la reazione fu nulla alla temperatura ordinaria e colla pressione di 1600 atmosfere durante sei mesi (3).

Parimenti, per citare un'altra esperienza, nella trasformazione dell'opale xiloide in quarzo xiloide avevo dimostrato che l'opale si cambiava facilmente, per via umida, in quarzo in 15 giorni ed alla temperatura da 280° a 300°; mentre non vi

---

(1) Grubenmann, *Die kristallinen Schiefer*. Berlin, 1904, pag. 34.

(2) " Atti della R. Accad. delle scienze di Torino „, vol. XXI, pag. 912.

(3) " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino „, vol. XXXIII, pag. 301.

era traccia di trasformazione colla pressione di 6000 atmosfere continuata per 4 mesi (1).

Ma le esperienze da me eseguite per stabilire nelle reazioni per via umida la rispettiva importanza fra i due fattori geologici, temperatura e pressione, furono, eccetto quelle sulla solubilità del quarzo nell'acqua (2), sempre fatte separatamente; ossia una esperienza era condotta coll'alta temperatura e colla pressione dovuta soltanto alla tensione del vapore del liquido, e l'altra esperienza era, s'intende a parità di condizione del materiale di cui si sperimentava, eseguita a temperatura ordinaria e con fortissima pressione esercitata da compressione artificiale.

Quindi da coloro, pei quali è un dogma, che la pressione statica sia il fattore essenziale delle reazioni chimiche, si può obiettare che le esperienze separate non hanno gran valore, perchè, a loro avviso, la pressione entra in funzione come agente chimico soltanto quando è accompagnata dalla temperatura.

Perciò in questa nuova esperienza ho cercato di stabilire quale fosse l'importanza relativa fra la pressione e la temperatura, ponendole nella condizione di agire simultaneamente, ma procurando che l'esperienza avvenisse in un ambiente nel quale vi fossero una pressione uniforme e varii strati di temperatura differente.

L'apparecchio da me ideato è rappresentato in sezione ed alla metà del vero della fig. 1. Esso consiste di due parti in acciaio A e B unite a vite e nell'interno vi ha un recipiente tubulare C di rame inargentato, nel quale si eseguisce l'esperienza; detto recipiente è formato da due parti cilindriche di diverso diametro ed unite a vite con chiusura perfetta, e la parte col diametro minore è munita al fondo di un tappo a vite E; tale costruzione del recipiente è fatta per agevolare l'esame del risultato dell'esperienza e dei depositi ed anche per la sua pulitura.

Io adoperai rame inargentato perchè in una esperienza di diverso genere, avendo posto in un recipiente di rame silicato sodico vetroso con acqua distillata mantenendo il tutto ad alta

(1) " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino ", vol. XXXVII, pag. 585.
(2) " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino ", vol. XXXIII, pag. 292.

temperatura per alcuni giorni, trovai alcuni aggregati cristallini quarzosi con inclusioni di rame. Può darsi che siasi formato qualche composto solubile di rame e siasi prodotta anche qualche azione elettrolitica per la presenza dei due metalli, l'acciaio del recipiente di resistenza ed il rame del recipiente interno. Io non feci finora uno studio diretto del fatto osservato e mi limitai di porlo nel numero dei fenomeni curiosi che talvolta appaiono, come risultati secondari di un'esperienza, quando si esperimenta per via umida colle condizioni di un'alta temperatura e di un lungo tempo.

Il riscaldamento dell'apparecchio si effettua mediante il tubo anulare R a gas, perciò nella parte sottostante alla linea di riscaldamento la temperatura è più bassa, e per agevolare la diminuzione di temperatura il fondo dell'apparecchio è circondato nella sua sezione minore da un recipiente D, nel quale circola acqua fredda.

Per conoscere approssimativamente le varie temperature dell'apparecchio quando è in funzione, vi sono tre termometri T′, T″, T‴.

La chiusura a vite fra le due parti d'acciaio è resa perfetta con un anello di lamina d'argento puro; uso tale metallo perchè molto malleabile e non ossidabile nella ricottura dell'anello, necessaria per togliergli la durezza della laminazione. Le due parti in acciaio sono rispettivamente in A e in B foggiate a sezione esagona per avvitarle, fissando l'esagono in B ed applicando una chiave a lungo braccio in A.

Superiormente all'apparecchio vi ha un disco di amianto G per difendere il termometro T′ dall'azione diretta della fiamma.

L'apparecchio, quando è pronto per l'esperienza, viene posto in un anello F unito o ad una sbarra fissata nel muro o ad un sostegno a piedi; quindi si avvita il refrigerante D.

Tale apparecchio può servire anche per esperienze di reazioni chimiche fra composti solubili ad alta temperatura, e che si fanno reagire fra loro per lenta diffusione in ambiente di minor temperatura; bisogna all'uopo usare congegni sussidiarii che facilmente si possono ideare e costrurre da chi ha l'abitudine di sperimentare.

Per chi volesse farsi costrurre un simile apparecchio senza idearne altre forme, osservo che il sistema di chiusura a vite

delle due parti A e B serve benissimo, ma ha l'inconveniente di presentare una grande resistenza nell'aprire l'apparecchio quando questo sta in azione per molto tempo; perciò sarebbe meglio che le due parti fossero tenute insieme da alcune alette sporgenti e serrate con viti.

Per l'esperienza di cui è argomento la presente nota, io posi nella parte di maggior diametro del recipiente C un canestrino Q fatto di fili d'argento fra loro distanti e ripieno di schegge di quarzo, le quali furono tolte dall'interno di un grosso frammento di cristallo di quarzo limpidissimo, in modo che sovra esso non vi fosse assolutamente traccia di residui di facce del grosso cristallo.

Al disopra delle schegge posi un perfetto cristallo di quarzo di Carrara, come termine di confronto.

Quindi riempii il recipiente C di una soluzione acquosa di silicato sodico, preparato col sale cristallizzato della formola $Na^2SiO^3+8H^2O$; la soluzione conteneva 2 % di Na^2SiO^3.

Nella parte B del recipiente d'acciaio, lo spazio, compreso fra la parete di esso e quella dell'inchiuso recipiente C di rame inargentato, fu riempito con acqua, poi l'apparecchio fu chiuso avvitandovi la parte A.

In altro lavoro (1) io dimostrai che il quarzo è solubile ad alta temperatura nella soluzione acquosa di silicato sodico, mentre con detto solvente è affatto insolubile alla temperatura ordinaria anche sotto la pressione di 6000 atmosfere.

Perciò ritenni tale risultato opportuno per lo scopo della presente esperienza, ponendo l'ipotesi che la soluzione di silicato sodico sciogliendo ad alta temperatura il quarzo, costituisse nello strato di maggior temperatura una soluzione di silicato più acido, stabile a quell'alta temperatura, ma che diffondendosi lentamente in basso, ove la temperatura era minore, deponesse l'eccesso di silice allo stato di quarzo.

Essendo poi la pressione uniforme in tutto l'apparecchio e data dalla tensione del vapore acqueo alla massima delle varie temperature in cui avveniva l'esperienza, era evidente che avverandosi la mia ipotesi rimaneva dimostrata la nessuna influenza della pressione.

(1) " Atti della R. Accad. delle scienze di Torino ", 1900, vol. XXXVI, pag. 631.

Naturalmente trattandosi di una prima esperienza, io non potevo stabilire *a priori* il tempo necessario per ottenere il risultato, perciò abbondai con esso mantenendo l'esperienza per sei mesi, tanto più che desideravo avere le prove della verifica dell'ipotesi visibilissime ad occhio nudo.

Parimenti era impossibile di stabilire il limite fra lo strato dove avveniva la soluzione e quello dove doveva formarsi il deposito; perciò disposi l'esperienza in modo che la quantità delle schegge di quarzo fosse tale da trovarsi parte di esse sopra la linea di riscaldamento e parte sotto. Inoltre posi, ad un centimetro sotto il canestro contenente le schegge, tre cristallini di quarzo sostenuti con fili d'argento per vedere se anche su di essi si formasse deposito, non già per lo studio diretto dell'accrescimento dei cristalli, ma soltanto per avere altra prova di deposito quarzoso in uno strato inferiore a quello delle schegge.

Durante i sei mesi le temperature segnate dai tre termometri subirono le oscillazioni giornaliere date dal variare della pressione del gas nella conduttura della città; ma prendendo la media di 38 osservazioni fatte durante i sei mesi ed in ore diverse, trovai che la temperatura segnata da T′, ossia massima, fu di 338°, quella di T″ di 221° e quella di T‴ di 164°.

Tali differenti temperature, per la situazione dei termometri, erano quelle presentate dalla massa di acciaio, la quale per la costruzione dell'apparecchio ha notevoli differenze in spessore: tuttavia ritengo che, per la conducibilità del metallo, non vi potesse essere una grande diversità fra le temperature dell'apparecchio e quelle che doveva possedere il liquido interno negli strati corrispondenti ai termometri.

Quindi ammettendo per temperatura massima quella di 338°, vi doveva essere in tutto l'apparecchio una pressione uniforme di 150 atmosfere data dalla tensione del vapore acqueo della soluzione acquosa a tale temperatura.

Dopo i sei mesi, aperto l'apparecchio, trovai che il risultato era stato conforme alla mia ipotesi.

I frammenti scheggiosi di quarzo nella parte superiore del canestro erano fra di loro ancora staccati presentando segni di profonda corrosione, la quale era anche molto evidente nel cristallo di quarzo che era stato posto sopra le schegge.

Invece i frammenti della parte inferiore del canestro, ossia sottostanti alla linea di riscaldamento, erano rimasti cementati fra loro e si potevano separare soltanto con un'azione meccanica più o meno difficilmente a seconda dell'estensione del relativo contatto fra loro; inoltre le schegge dimostravano, nelle parti libere, perfettissime facce di cristallo o strati regolarissimi per il deposito di quarzo; e la maggior prova di tale deposito fu l'aver trovato alcuni fili d'argento del canestro approfonditi nel quarzo ed anche in parte ricoperti come evidentemente appare dalle figure 2ª e 3ª; le quali rappresentano, con l'ingrandimento doppio del vero, due schegge tolte dal canestrino tagliando il filo d'argento in esse rinchiuso.

Anche uno dei tre cristallini di quarzo, sottostanti al canestro, dimostrava un accrescimento quarzoso coll'inclusione parziale del filo metallico. Forse la posizione dei tre cristalli non era quella corrispondente ad un gran deposito quarzoso; ma ora io, istruito da questa prima prova condotta con altro scopo, spero di continuare le esperienze, già da me indicate in altri lavori (1), sull'accrescimento e sulla rigenerazione dei cristalli di quarzo; tanto più che il metodo sperimentale che ho usato ora deve prestarsi meglio.

Sul fondo poi del recipiente C vi era un piccolo deposito polverulento, che al microscopio si presentava costituito da cristallini di quarzo, i quali debbono essersi formati liberamente nel liquido al livello ove avvenne il maggior deposito quarzoso e poi discesi per proprio peso in fondo al recipiente.

L'esperienza dimostra che la pressione, se fosse stata la causa della solubilità del quarzo nello strato di maggior temperatura, doveva pure impedire il deposito quarzoso nello strato di minore temperatura, dove la pressione era la stessa, essendo essa uniforme in tutto il recipiente, ed inversamente se la pressione fosse stata l'agente della ricostituzione del quarzo nello strato di minore temperatura, essa avrebbe dovuto impedire la solubilità dove vi era maggiore temperatura.

Nè si potrebbe obiettare dai sostenitori dell'azione chimica della pressione che, nella mia esperienza, il quarzo non si de-

(1) " Atti della R. Accademia delle scienze di Torino ", vol. XXXIII, pag. 303 e 876.

positò man mano che il silicato acido discendeva per diffusione nello strato di minore temperatura; ma che invece il silicato acido formatosi per causa della pressione rimase sempre disciolto nel liquido e soltanto si mutò rapidamente in silicato normale depositando quarzo, quando, raffreddandosi l'apparecchio al termine dell'esperienza, la pressione scomparve per la diminuzione di temperatura.

Tale obiezione non è sostenibile per due ragioni.

Noto anzitutto che, spenta la fiamma a gaz, l'apparecchio si raffreddò presto, talchè il termometro T′, che segnava 336°, dopo un'ora segnava soltanto 97°.

Quindi una prima ragione, che invalida l' obiezione, è il fatto che col rapido raffreddamento doveva effettuarsi un deposito quarzoso così repentino da essere incompatibile colla trasparenza del deposito e colla lucentezza e perfezione delle facce di cristallo formatesi sulle schegge, i quali caratteri sono proprii delle cristallizzazioni lente.

La seconda ragione contraria all'obiezione si ha considerando che, se nel liquido fosse sempre stato disciolto il silicato acido finchè fu sospesa l'esperienza, il deposito quarzoso avrebbe dovuto effettuarsi anche sulle schegge poste in alto nel canestro e dare luogo a facce cristalline anche sopra di esse; inoltre il cristallo di quarzo che, situato sopra le schegge, si mostrava corroso anche dopo l'esperienza, avrebbe dovuto apparire ricostituito nelle sue facce.

In conseguenza il deposito quarzoso non si formò durante il raffreddamento repentino dell'apparecchio; ma si deve ammettere che il silicato sodico in soluzione si arricchiva di acido silicico sciogliendo il quarzo nello strato di alta temperatura, e discendendo nello strato di temperatura più bassa si scomponeva, dando luogo al quarzo e ritornando allo stato primitivo, nel quale stato risaliva per continuare lo stesso ciclo di trasporto. Ossia il deposito quarzoso, nell'esperienza, è dovuto ad un lento e continuo processo chimico in cui, per ottenere un effetto evidente, deve concorrere l'altro fattore, il tempo; il quale anche quando si possa aver sufficiente per un'esperienza è sovente limitato dalla impazienza dello sperimentatore.

In conclusione poi l'esperienza eseguita, nella quale esistevano contemporaneamente pressione e temperatura, rende evi-

dente che la pressione ha soltanto il còmpito di tenere il solvente allo stato liquido necessario per l'esperienza, rimanendo perfettamente neutrale rispetto al processo chimico, il quale dipende esclusivamente dalla temperatura.

E questa esperienza, nella quale compare distinta in modo evidente l'azione della pressione da quella della temperatura è di conferma, nella sua applicazione geologica, a quanto già dedussi in precedente lavoro (1), che cioè: lo riempimento dei filoni di quarzo, prodotto da acque minerali termali, è dovuto alla diminuzione di temperatura e relativo potere solvente che subiscono le acque arrivando da grandi profondità alla superficie terrestre e non già alla diminuzione in esse della pressione.

Infine questa esperienza e le altre da me eseguite sulla solubilità del quarzo, ossia sopra un minerale assai diffuso nelle rocce cristalline-schistose, mi autorizzano ad asserire che nel metamorfismo delle rocce, nelle quali è costante la presenza dell'acqua, l'alta temperatura e l'alta pressione, che debbono esistere a grandi profondità, non sono fra di loro nemiche come si esprime il Grubenmann (2), ma sono invece buone alleate.

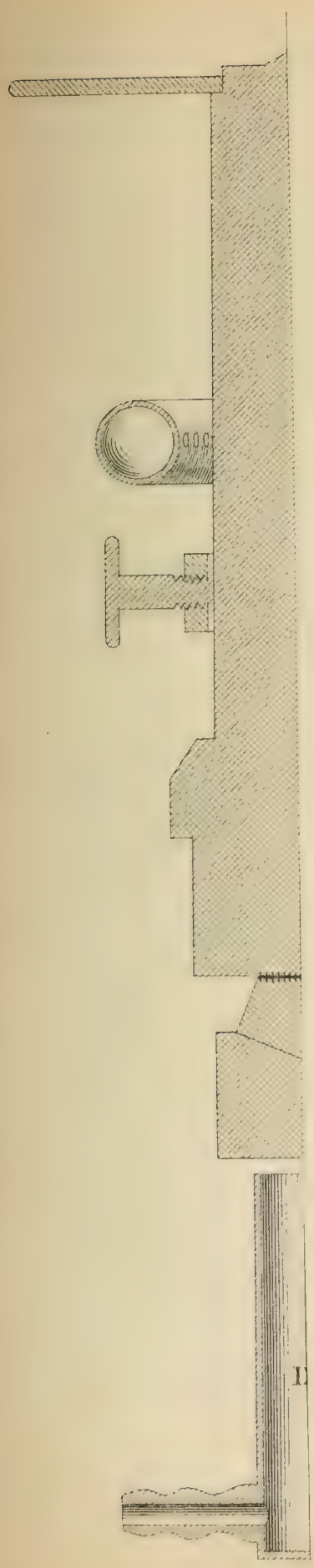
La temperatura funziona come agente chimico e la pressione aiuta la temperatura soltanto col mantenere l'acqua nello stato di aggregazione migliore per la mutua reazione degli elementi minerali, il cui movimento atomico è dato dalla temperatura.

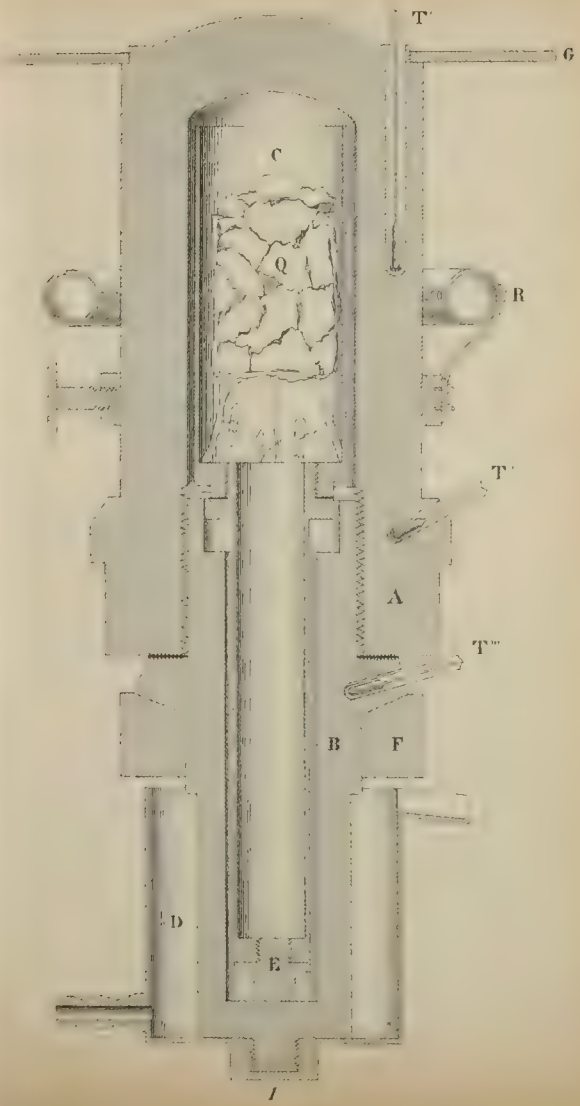
La quantità di effetto poi di tale movimento dipende da varie cause, ma anche dall'altro fattore geologico, di cui non mi pare tenga conto il Grubenmann, il tempo; il quale può sostituire la temperatura, dal grado limite necessario per iniziare una reazione, accumulando lentamente gli effetti che sarebbero prodotti in minor tempo da un aumento di temperatura.

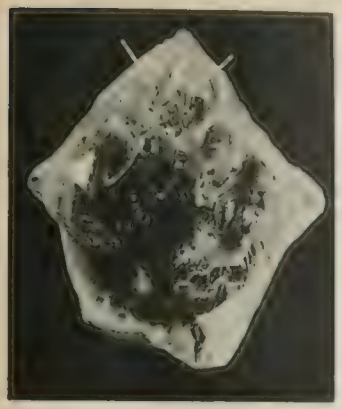
---

(1) " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino ", vol. XXXVI, pag. 631.
(2) Loc. cit.

SPEZIA G. Contrit




T'
G
C
Q
R
T'
A
T'''
B
F
D
E
I



Su alcuni nuovi acidi della serie oleica.

Nota II: *Acido 2,3-ipogeico*

del Dott. GIACOMO PONZIO.

Il solo acido non saturo $C_{16}H_{30}O_2$ della serie oleica finora conosciuto, l'acido ipogeico, fu riscontrato da Gössmann e Scheven (1) nell'olio di *arachis hypogaea* e preparato in seguito da Bodenstein (2) dall'acido stearolico per fusione con idrato potassico a 210-240°. Secondo quest'ultimo autore, all'acido ipogeico spetta la formola di costituzione:

$$CH_3 . (CH_2)_7 . CH : CH . (CH_2)_5 . CO_2H$$

col doppio legame fra il 7° e l'8° atomo di carbonio, a partire dal carbossile.

In questa Nota descrivo l'acido 2,3-ipogeico:

$$CH_3 . (CH_2)_{12} . CH : CH . CO_2H$$

che ho ottenuto dall'acido palmitico trasformandolo prima in acido α-bromopalmitico, poi in acido α-iodopalmitico e togliendo infine a quest'ultimo una molecola di acido iodidrico.

La preparazione dell'acido 2,3-ipogeico è identica a quella dell'acido 2,3-oleico che ho descritto nella I parte di questo lavoro (3): mi limito quindi ora ad accennare soltanto alle proprietà dei composti nuovi che ho ottenuto.

Acido α-iodopalmitico $CH_3 . (CH_2)_{13} . CHI . CO_2H$. — Si forma per azione del ioduro potassico sull' acido α-bromopalmitico in soluzione alcoolica e cristallizza dalla ligroina in laminette splendenti, fusibili a 57°.

(1) Annalen, *94*, 230 (1855).
(2) Berichte, *27*, 3397 (1894).
(3) Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXIX, pag. 552.

Gr. 0,2363 di sostanza fornirono gr. 0,1458 di ioduro d'argento.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{31}IO_2$
Iodio	33,30	33,24

È poco solubile a freddo e molto a caldo nell'alcool, nella ligroina e nel cloroformio, non si altera alla luce.

Acido 2,3-ipogeico $CH_3.(CH_2)_{12}.CH:CH.CO_2H$. — Si ottiene facendo agire l'idrato potassico, in soluzione alcoolica, sull'acido α-iodopalmitico. Contemporaneamente si forma anche un po' di acido α-ossipalmitico $CH_3.(CH_2)_{13}.CHOH.CO_2H$ (fusibile a 83° e già descritto da Hell e Jordanoff (1)), il quale però si può facilmente separare, essendo quasi insolubile a freddo negli eteri di petrolio.

L'acido 2,3-ipogeico cristallizzato dall'alcool, ove è molto solubile a caldo e poco a freddo, si presenta in larghe lamine splendenti fusibili a 49° e risolidificabili, dopo fusione, a 45°.

I. Gr. 0,2230 di sostanza fornirono gr. 0,6150 di anidride carbonica e gr. 0,2417 di acqua.

II. Gr. 0,2919 di sostanza fornirono gr. 0,8086 di anidride carbonica e gr. 0,3172 di acqua (2).

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{16}H_{30}O_2$
	I	II	
Carbonio	75,21	75,36	75,59
Idrogeno	11,99	12,07	11,81

È stabile all'aria, solubilissimo a freddo nell'etere e nel cloroformio, discretamente negli eteri di petrolio.

2,3-ipogeato di sodio $C_{16}H_{29}O_2Na$. — È solubile nell'acqua e cristallizza dall'alcool in prismetti bianchi.

Gr. 0,5873 di sostanza fornirono gr. 0,1515 di solfato sodico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{29}O_2Na$
Sodio	8,49	8,33

(1) Berichte, *24*, 939 (1891).

(2) Queste combustioni furono fatte con cromato di piombo.

2,3-ipogeato di calcio $(C_{16}H_{29}O_2)_2Ca + 3H_2O$. — È insolubile nell'acqua, pochissimo solubile a caldo nell'alcool.

Gr. 0,4343 di sostanza perdettero a 100° gr. 0,0400 di acqua e fornirono gr. 0,0940 di solfato di calcio.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{32}H_{58}O_4Ca+3H_2O$
Acqua	9,21	9,00
Calcio	6,36	6,66

2,3-ipogeato di bario $(C_{16}H_{29}O_2)_2Ba$. — È insolubile sia nell'acqua che nell'alcool.

Gr. 0,4140 di sostanza fornirono gr. 0,1492 di solfato di bario

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{32}H_{58}O_4Ba$
Bario	21,17	21,24

Amide dell'acido 2,2-ipogeico $CH_3 . (CH_2)_{12} . CH : CH . CONH_2$. — Si prepara passando pel cloruro acido; cristallizza dall'alcool in prismetti.

Gr. 0,1635 di sostanza fornirono cc. 8 di azoto (H_0=737,95 t = 12°), ossia gr. 0,011574.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{31}NO$
Azoto	5,66	5,53

È abbastanza solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool, nella ligroina, nell'etere e nel cloroformio.

Bibromuro dell'acido 2,3-ipogeico (acido 2,3-bibromopalmitico) $CH_3 . (CH_2)_{12} . CHBr . CHBr . CO_2H$. — Si ottiene facendo agire alla luce il bromo in soluzione cloroformica sull'acido 2,3-ipogeico; cristallizza dagli eteri di petrolio, ove è abbastanza solubile a caldo e poco a freddo, in prismetti bianchi fusibili a 66°.

Gr. 0,3935 di sostanza fornirono gr. 0,3552 di bromuro d'argento.

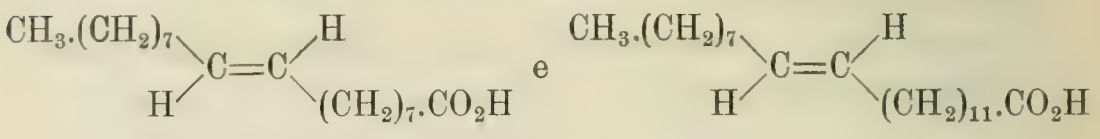
Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{30}Br_2O_2$
Bromo	38,40	38,64

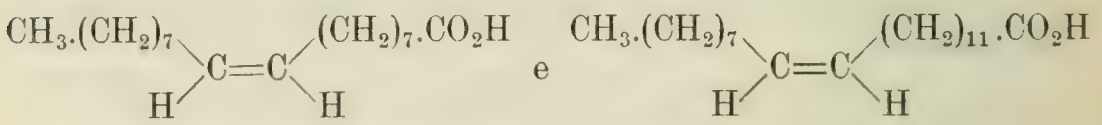
È solubile anche a freddo in tutti gli altri solventi organici ordinari.

Tanto l'acido 2,3-ipogeico quanto l'acido 2,3-oleico, che ho descritti in questo lavoro, riscaldati leggermente con acido nitrico diluito e trattati con nitrito sodico *non subiscono alcuna trasformazione*, mentre, come è noto, per influenza dell'acido nitroso in tali condizioni gli acidi ipogeico, oleico ed erucico che si trovano nei vegetali si trasformano facilmente nei loro stereoisomeri acidi gaidinico, elaidinico e brassidinico.

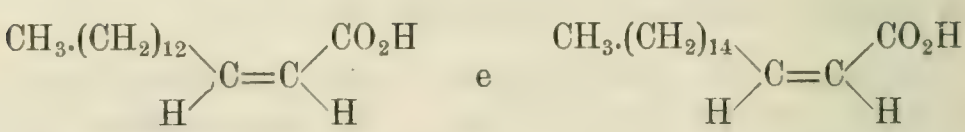
Ora tanto l'acido oleico quanto l'acido erucico hanno una configurazione centrosimmetrica:



mentre gli acidi elaidinico e brassidinico hanno invece una configurazione pianosimmetrica:



Si potrebbe perciò supporre che gli acidi 2,3-ipogeico e 2,3-oleico, i quali, come ho detto, non vengono alterati dall'acido nitroso, avessero, come gli acidi elaidinico e brassidinico, una configurazione pianosimmetrica:



la quale si accorderebbe anche col loro punto di fusione relativamente elevato. Questa supposizione richiede però una verifica sperimentale, i cui risultati mi riservo di esporre in una prossima Nota.

Torino, Istituto Chimico della R. Università,
Gennaio 1905.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 15 Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Spezia, Camerano, Jadanza, Foà, Guareschi, Parona, Mattirolo, Morera e Grassi; scusata l'assenza del Socio Segre;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pezzi, Carle, Cipolla, Brusa, Carutti, Pizzi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier, Segretario; scusata l'assenza del Socio Allievo.

È approvato l'atto verbale dell'antecedente adunanza a Classi unite, 22 maggio 1904.

Il Socio De Sanctis legge la relazione della Commissione per il premio Gautieri di Storia (triennio 1901-1903). La relazione, che è inserita negli *Atti*, propone la divisione del premio in due parti uguali, di cui una sia conferita a Giacinto Romano per il suo libro intitolato: *Niccolò Spinelli da Giovinazzo, diplomatico del secolo XIV*, Napoli, 1902, e l'altra a G. A. Colini per il suo volume: *Il Sepolcreto di Remedello Sotto nel Bresciano e il periodo eneolitico in Italia.*

Egregi Colleghi,

La Commissione incaricata di riferire sul premio Gautieri per gli studi storici nel triennio 1901-1903 ha preso in esame, oltre gli scritti inviati dagli autori, tutte quelle pubblicazioni storiche che le parvero degne di considerazione. L'opera di selezione ch'essa ebbe a compiere fu laboriosa e non facile, perchè se in fatto di storia antica i lavori veramente serî furono in Italia nel triennio assai scarsi, vi fu invece buon numero di lavori lodevoli in fatto di storia medioevale e moderna.

Tra questi peraltro alcuni fanno parte di opere in corso di pubblicazione, delle quali ancor non è venuto in luce quel tanto che possa servire per formarsene un adeguato concetto; onde non parve equo alla Commissione di metterle fin da ora al paragone con altri scritti o compiuti o condotti presso che a termine, di fronte ai quali potevano trovarsi in condizione di inferiorità forse soltanto per lo stato attuale della loro pubblicazione.

Tra gli scritti presi ad esame, due crede la Commissione di doverne segnalare ai colleghi, uno nel campo della storia moderna, l'altro in quello della storia antica, il libro di Giacinto Romano, intitolato: *Niccolò Spinelli da Giovinazzo, diplomatico del secolo XIV* (Napoli, 1902, di pp. XII-646), e la memoria di G. A. Colini in corso di stampa dal 1898 nel *Bullettino di paletnologia italiana* (vol. XXIV, a. 1898, p. 1 segg., 88 segg., 206 segg., 280 segg.; vol. XXV, 1899, p. 1 segg., 218 segg.; XXVI, 1900, p. 57 segg., 202 segg.; XXVII, 1901, p. 73 segg.; XXVIII, 1902, p. 5 segg.), intitolata: *Il Sepolcreto di Remedello Sotto nel Bresciano e il periodo eneolitico in Italia.*

La figura di Niccolò Spinelli da Giovinazzo nelle Puglie, non passò certamente inosservata dai nostri storici, ma non aveva trovato finora un biografo che ne scrivesse la vita con quella erudizione e con quella cura che il valore dell'uomo meritava. Lo Spinelli, nato verso il 1320, e morto negli ultimi anni del secolo, fu giurista, consigliere di papi e di principi,

diplomatico espertissimo. Insegnò dapprima nella università di Padova, quindi passò a quella di Bologna, al tempo del reggimento di Giovanni da Oleggio.

Quando Bologna ritornò sotto alla Chiesa, egli abbandonò l'insegnamento e, postosi accanto al card. Egidio Albornoz, si diede tutto alla diplomazia. Servì dapprima Innocenzo VI e poi Urbano V, che lo nominò Gran Cancelliere del regno di Sicilia, mentre a Napoli era stato inviato quale legato pontificio l'amico suo card. Albornoz. Poi (1367) accompagnò Urbano V a Roma, e in seguito gli tenne dietro nel ritorno ad Avignone, dove si fermò stabilmente, giacchè Giovanna I di Napoli lo costituì suo siniscalco in Provenza. Gregorio XI gli continuò il favore mostratogli dai suoi predecessori, e se ne servì in varî negoziati, specialmente nelle relazioni con Firenze (1376). Quando questo pontefice venne a Roma nel 1377, accanto a lui troviamo lo Spinelli.

Allorchè poco dopo l'elezione di Urbano VI (1378) scoppiò il grande scisma d'Occidente, lo Spinelli, che sul principio era stato nelle migliori relazioni con Urbano VI, da lui si staccò ed ebbe parte gravissima nell' origine dello scisma, promovendo l'elezione dell'antipapa, e facendo inclinare a questo l'animo della regina Giovanna, che dapprima parteggiava per Urbano.

Lo Spinelli restò a lungo nel reame di Napoli, ma sotto il governo di Carlo di Durazzo egli non poteva trovarsi che a grande disagio. Dovette dunque uscirne. Tornò alla Corte di Avignone, finchè, mandato da Clemente VII in Italia, accettò l'ospitalità offertagli da Gian Galeazzo, e si stabilì a Pavia.

Anche in quest'ultimo periodo della sua vita, egli dimostrò la sua abilità di diplomatico, specialmente nelle trattative con Venezia e con Francia, ancorchè l'esito non sempre abbia corrisposto alle sue intenzioni. Durante i negoziati visconteo-francesi egli scrisse due interessanti e curiosi pareri politici sulle cose d'Italia, proponendo fra l'altro la semisecolarizzazione degli Stati ecclesiastici. L'ultimo suo atto politico fu il trattato con la Francia del 1395.

Il Romano studiò il suo argomento nelle cronache, maggiori e minori, sopratutto poi nei documenti di archivî. Egli cita gli archivî e le biblioteche di Pavia, Milano, Venezia, Bologna, Napoli, Firenze, Padova, Giovinazzo, Marsiglia, oltre all' archivio

Vaticano; e pubblica in appendice i più interessanti documenti da lui trovati.

L'argomento da lui trattato è arduo assai, poichè è difficile trovare nella storia italiana del medioevo un momento storico nel quale così avviluppate e confuse siano state le imprese militari e le trattative diplomatiche, nel quale altrettanto varie e cozzanti tra loro siano state le correnti determinate dagli interessi delle numerose e piccole, ma pur gagliarde signorie italiane.

Il Romano riuscì a superare straordinarie difficoltà trattando di tanti e così confusi avvenimenti con molta chiarezza, e mettendo bene in evidenza il personaggio, che noi impariamo a conoscere nei suoi pregi e nei suoi difetti, nettamente distinguendone il carattere da quello dei tanti suoi contemporanei che agivano accanto a lui. La monografia del Romano merita anche lode come lavoro organico, ben elaborato in ogni sua parte, sobrio nella forma e temperato in generale nei giudizi.

Venendo ora all'opera del Colini, per farne apprezzare tutto il valore, sono necessarie alcune premesse sulla civiltà eneolitica che n'è il tema. La dimostrazione che in Europa all'età litica non ha tenuto dietro immediatamente, almeno dappertutto, la età del bronzo, ma vi è stato un periodo intermedio in cui il rame si è adoperato quasi puro per le armi e per altri istrumenti, mentre si continuava ad usare largamente la suppellettile di pietra, è stata data dal Much nel suo libro *Die Kupferzeit in Europa* (2ª ediz. Jena, 1893). Per ciò che riguarda l'Italia, fu il Chierici che, illustrando nel 1884 la necropoli di Remedello di sotto in provincia di Brescia (*Bullettino di paletnologia italiana*, X, p. 133 segg.) e notandone i caratteri diversi tanto dallo strato a cui appartengono i fondi di capanne neolitici, quanto dallo strato a cui vanno riferite le terremare, la considerò come tipica per l'Italia di quella civiltà che presso i paletnologi italiani si suole ora designare col nome, forse non del tutto proprio, di civiltà eneolitica. Nel 1898 il Colini prese a pubblicare il suo studio su questo sepolcreto, dove, allargando e precisando le considerazioni svolte dal Chierici e valendosi largamente dei risultati del Much da lui in parte rettificati, cerca di determinare le caratteristiche della civiltà eneolitica in Italia e le sue relazioni con gli strati archeologici anteriori e contemporanei in Italia e fuori. Il Colini prende per base la

suppellettile funebre del sepolcreto di Remedello e dei sepolcreti affini, spesso in buona parte inedita o insufficientemente pubblicata prima della sua memoria, la classifica secondo il materiale, la tecnica, le forme, la confronta con l'altra suppellettile preistorica italiana e straniera, studia la genesi e la evoluzione delle varie forme, e tutto ciò con una erudizione e una conoscenza degli oggetti, sparsi nei varî musei e illustrati in pubblicazioni spesso assai poco accessibili, che merita ogni lode. Per tal modo il Colini riesce a darci un quadro, quanto è possibile pieno, della civiltà esterna di questa età remota nel nostro paese. Chiaro, oggettivo, alieno da quelle ipotesi avventate che tanto fioriscono nel campo della paletnologia, schivo di sintesi affrettate e premature, lo studio del Colini può dirsi con ragione assai pregevole. Il lavoro, come già s'è accennato, cominciato a pubblicare nel precedente triennio e condotto innanzi in questo, non è ancora giunto al suo termine; vi manca così tutta la parte relativa alla ceramica. Tuttavia il programma che s'era tracciato il Colini stesso iniziando la sua memoria (*Bull. di paletnologia*, XXV, p. 3) può dirsi fin da ora in massima parte compiuto; e a ciò che manca suppliscono in parte almeno due notevoli articoli relativi allo stesso ciclo di ricerche e tali che possono considerarsi come un'appendice della sua memoria principale, da lui editi nel *Bullettino di paletnologia* del 1903 (p. 53 segg., 211 segg.), in cui ha tracciato un eccellente quadro sintetico della civiltà del bronzo nella nostra penisola.

In base a queste considerazioni la Commissione, riguardando le due pubblicazioni qui segnalate del Romano e del Colini come eguali per merito, vi propone unanime di dividere fra i due autori il premio Gautieri per le scienze storiche.

La Commissione:

C. Cipolla
F. Savio
G. De Sanctis, *relatore.*

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pezzi, Carle, Cipolla, Brusa, Carutti, Pizzi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Allievo.

Il Socio Carle fa omaggio all'Accademia di alcuni scritti recenti del prof. Vincenzo Lilla, lodando la costante laboriosità del vecchio insegnante. Nel tempo stesso presenta, in nome del Comitato promotore, il volume: *Onoranze al professore Vincenzo Lilla pel suo XL anno d'insegnamento nella R. Università di Messina*, Messina, tip. D'Angelo, 1904.

Il Socio De Sanctis, incaricato col socio Pezzi di riferire intorno alla dissertazione latina del Dr. Angelo Taccone sui tratti melici di tre tragedie di Sofocle, legge la relazione che compare negli *Atti*. La Classe approva la relazione, e presa notizia dello scritto del Dr. Taccone, ne delibera con votazione segreta unanime l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio Cipolla presenta per gli *Atti* una sua nota su *Le case degli Scaligeri a Venezia*.

LETTURE

Le case degli Scaligeri a Venezia.

Nota del Socio CARLO CIPOLLA.

Varî erano i principi italiani, che possedevano palazzi in Venezia. L'ospitalità Veneziana, vantata dal Petrarca, non era certamente disinteressata, ma era pur sempre onorevole, e per chi l'offriva, e per chi l'accettava. Case in Venezia avevano gli Estensi, siccome è notissimo. Un palazzo vi avevano anche gli Sforza. Non sono molti anni che Luca Beltrami (1) narrò la storia della casa acquistata in Venezia dal duca Francesco Sforza, storia ricca di vicende politiche e di notizie artistiche.

Non credo che finora si abbiano dati precisi intorno alle case che possedevano colà gli Scaligeri, ancorchè si sappia che negli ultimi anni del loro dominio su Verona e su Vicenza essi tennero Venezia quasi come loro seconda patria; Antonio dalla Scala allorchè, 18-19 ottobre 1387, dovette fuggire da Verona, " s'addrezzò verso Venetia „ (2).

Un documento, con squisita cortesia indicatomi dal chiarissimo Dott. V. Lazzarini, del Museo di Padova, c'informa esattamente sul luogo, dove queste case esistevano, ci dà curiosi particolari intorno a tali edifici, e ci fornisce ancora qualche dato non inutile sul tramonto di una dinastia, che in altri tempi aveva avuto l'onore di ospitar l'Alighieri.

Le case Scaligere si trovavano nel perimetro della giurisdizione ecclesiastica di S. Maurizio, e si componevano di una fabbrica vecchia e di una fabbrica nuova. La chiesa di S. Maurizio — m'informa l'egregio G. Dalla Santa, dell'Archivio di Stato di Venezia, al quale qui debbo anche qualche altra informazione

(1) *La " Ca del duca „ sul Canal Grande e altre reminiscenze sforzesche in Venezia.* Milano, Allegretti, 1900, p. 82.

(2) Saraine, *Le historie et fatti de Veronesi.* Verona, 1542, fol. 43 *v.*

— esiste tuttora, ed è situata fra la chiesa di S. Stefano e quella di S. Maria del Giglio. La chiesa è antica assai: arse nel 1105; fu rifabbricata più volte, per l'ultima volta nel 1806 (1).

Antonio Dalla Scala, dopo di essere fuggito a Venezia, tentò ancora la fortuna in Toscana, ma indarno. Le cose gli andarono di male in peggio. Morì al principio di agosto dell'anno 1388 a Tredozio, tra Faenza e Firenze (2).

Prima di cadere dalla signoria, Antonio aveva pensato alla sua famiglia, " havendo alquanti giorni avanti mandato la moglie con le robbe, e quanto di meglio puotè asportare, in una grossa barca per il fiume a Ravenna „ (3). La moglie di Antonio era Samaritana da Polenta, le cui nozze erano state celebrate in versi da Gidino da Sommacampagna, che poi, al momento del bisogno, mancò di fedeltà ai suoi signori. Samaritana si raccolse poscia a Venezia, cosicchè presso il Sanudo (4) si dice che Antonio morendo " lasciò la moglie a Venezia e un suo unico figliuolo, maschio, piccolo, chiamato Cane Francesco, e quattro figliuole, in grande necessità del vivere, a' quali per la Signoria nostra, come pietosa, fu provveduto del vivere suo „. Qui si allude alla elargazione dalla Signoria fatta a Samaritana nel 1409 (5).

Di un altro beneficio (se pur è il caso di usare di questa parola) a favore di Samaritana, parla l'atto notarile, che qui viene pubblicato e che risale al 1390. Non trattasi proprio di un beneficio, ma è ad ogni modo una provvisione, la quale dimostra che la Signoria era favorevolmente inclinata verso la sventurata signora.

---

(1) *Venezia e le sue lagune*, II, 2, 336.

(2) Ho indicato (*Cron. Veron.*, I, 129 nota) un atto della Signoria in favore di Antonio, datato 29 aprile 1389. Esso si legge in *Senato Secreti*, 1388-97, E, f. 18: " 1389, indic. XI, die 29 apr. Capta. Cum d. Anthonius de la Scalla comparuerit coram nostro Dominio allegans suam extremitatem et strictissimam condicionem et petens cum maxima instantia, quod illos suos III^m ducatos, qui sibi scripti sunt ad Cameram Frumenti ei mutuare debeamus, Vadit Pars, omnibus consideratis, quod dicti III^m ducati a Camera predicta Frumenti sibi dentur et mutuentur, cum ista condicione — „. Ma l'anno 1389 è un errore per 1388, quando infatti correva l'ind. XI.

(3) SARAINA, fol. 43 *v*.

(4) *Vite dei Dogi*, ap. MURATORI, XXII, 753.

(5) *Grazie*, t. XX, f. 29, Archivio di Stato di Venezia. Pubblicai questo documento in *Cron. Veron.*, I, 182 nota.

DOCUMENTO.

(Arch. di Stato di Venezia — *Cancelleria Inferiore.* Notaio Marino pievano di S. Gervasio; busta CXV, quaderno 1387-91, documento n° 72).

1390, maggio 9; Rialto.

Sentenza di Antonio Venier doge di Venezia e dei suoi Giudici. Al Venier, sedente coi suoi Giudici nel palazzo ducale, presentossi Samaritana vedova di Antonio della Scala presentando due carte; una carta di giudicato, datata da Rialto 24 febbraio 1388 (1389 m. c.), conteneva la concessione accordata dal doge alla medesima Samaritana di tenere, de' beni del marito, fino a ducati 24820, oltre 12 lire grosse per la sua veste vedovile. L'altra carta, datata Rialto 21 febbraio 1389 (1390 m. c.), conteneva la dichiarazione di Paolo Nicolò, Ministeriale di curia, di aver investito in Samaritana una casa il 19 febbr. 1388 (1389 m. c.). Dopo un anno dall' investitura, a seconda della nuova Costituzione, Samaritana chiese il consiglio del Doge e dei giudici sul modo di impiegare la somma indicata nella prima carta; e quelli mandarono a stimare detta proprietà, per investirne Samaritana sino all'importo della somma predetta. Laonde il 2 marzo 1390 Paolo Nicolò investì Samaritana di una grande casa, con bottega, con altre case, in prossimità del Canale, con orto, forno, ecc. Tutta questa proprietà si trova nei fini di S. Maurizio, e spettò già ad Antonio della Scala. Se ne segnano particolareggiatamente i confini. La fabbrica vecchia, cioè la casa grande per bottega, ecc. era stata data da Antonio della Scala in livello, al fu Bonagiunta da Bicorfano. Samaritana dovea avere su questi edifici gli stessi diritti, che già spettavano ai Signori della Scala, salve le riserve espresse in una carta dei giudici.

Per contro, Matteo Pesaro avvocato presentò e diede lettura di tre carte. La prima è un reclamo. La seconda è un atto del Doge e dei Consiglieri, in data di Rialto, 28 novembre 1389. In questa alcuni testimoni dichiarano dinanzi al Doge e ai Giudici, di aver conosciuto il fu Bailardino Nogarola da Verona, dichiarando che egli dapprima, poi Cagnone suo figlio, e i Signori della Scala tennero per oltre 30 anni la descritta proprietà situata nei fini di S. Maurizio, dagli Scaligeri data in livello di 29 anni a Bonagiunta fu Donnino da Bicorfano, coll'obbligo di pagare annualmente, al 1 gennaio, il fitto di 73 ducati d'oro agli Scaligeri e loro eredi. La terza carta è il testamento, scritto da Lorenzo della Torre, pievano di S. Angelo e notajo, datato: Rialto, 20 novembre 1373, e fatto fare da Bonagiunta da Bicorfano. In questo testamento lasciava

come suoi fedecomissari la moglie Agnesina e i figli Franceschino e Nicolò.

I Giudici ponderate queste carte, e considerato il reclamo di Agnesina, e dei fratelli Zambonino e Franceschino, commissari dell'eredità di Bonagiunta da Bicorfano, contro l'investitura concessa a Samaritana, deliberarono di confermare l'investitura concessa a Samaritana per quanto riguarda la fabbrica vecchia, conservando alla commissaria di Bonagiunta la fabbrica nuova.

I Giudici stimarono in 100 lire grosse la parte di proprietà concessa alla Samaritana. E per questa somma, computata nella somma considerata nella carta di giudicato, viene concessa la relativa investitura, dopo che la strida era stata fatta per il tempo legale, senza che nessuno sollevasse opposizione.

In nomine Dei eterni Amen, Anno ab incarnatione Domini nostri Iesu Christi millesimo trecentesimo nonagesimo, mense madii, die nono, indictione tertia decima, Rivoalti. Cum de rebus ambiguis etc. secundum usum. Igitur nos Antonius Venerio, Dei gratia dux Venetiarum etc., cum in nostro palacio resideremus cum nostris Iudicibus et secundum usum, venit ante nostram et nostrorum iudicum presenciam magnifica domina Samaritana, relicta magnifici domini Antonii de la Scala olim nobilis civis Venetiarum, et ostendit nobis duas cartas completas et roboratas, una quarum est diudicatus carta facta anno ab incarnatione Domini nostri Iesu Christi millesimo trecentesimo octuagesimo octavo, mense februarii, die vigesimo quarto intrante, indictione duodecima, Rivoalti, quam nos Dux cum nostris Iudicibus fecimus suprascripte generose domine Samaritane, per quam ex iuditio igitur nostrorum Iudicum et nostra confirmatione potestatem dedimus plenissimam ad suprascriptam generosam dominam Samaritanam, relictam dicti quandam magnifici et potentis domini Antonii de la Scalla, tantum intromittendi et ad proprium dominandi de bonis omnibus et havere suprascripti condam viri sui, quantum sunt suprascripti ducati viginti quatuor millia octingenti viginti ducati, boni auri et iusti ponderis, pro resto dicte sue repromisse, etiam libre duodecim ad grossos cum dimidia pro sua veste vidualia, habendi tenendi etc., ut in ea legitur. Altera est investiture, sine proprio, carta facta anno ab incarnatione domini nostri Iesu Christi millesimo trecentesimo octuagesimo nono, mense februari, die vigesimo primo, indictione tertia decima, Rivoalti, qua testificatur ipse Paulus Nicolaus, ministerialis curie palacii, quod die decimonono mensis februarii, millesimo trecentesimo octuagesimo octavo, indictione duodecima, propter preceptum nostrum et per legem

iudicum investivit, sine proprio, ad nomen magnifice domine Samaritane, relicte magnifici domini Antonii de la Scalla, olim nobilis civis Venetiarum, cunctam et super totam unam proprietatem terre et case in infrascripto proprio insertam et firmatam prout et [iuxta] suprascriptam diiudicatus cartam. Cui investitioni interfuerunt Marcus Minor et Dominicus Datalo ambo precones, etc. ut in ea legitur: que quidem investitio tamen per annum et amplius, secundum nove Constitutionis ordinem in sexto libro Statutorum contente, suprascripta proprietate terre et case stetisset et quieta fuisset, quesivit nobis et legi nostrorum iudicum suprascripta magnifica domina Samaritana ut consilium ei dare dignaremur quid ei faciendum esset quod de suprascripta pecunia contenta in suprascripta diudicatus carta posset appaccari, cuius peticionem iustam cernentes, missimus nostros iudices ad suprascriptam proprietatem, iniungentes eisdem ut ipsam seu tantum ex ipsa appreciarentur, quantum est pecunia contenta in suprascripta diudicatus carta, cum nichil aliud inveniretur de bonis dicti quondam viri sui, unde dicta domina Samaritana posset appacari; qui euntes iusta quod eis iniunximus appreciati fuerunt infrascriptam partem dicte proprietatis, infrascriptam videlicet (?) quantitatem. Quam quidem proprietatis, partem fecimus postmodum apropriare, sicut continetur in una testificationis carta completa et roborata exinde facta anno ab incarnatione Domini nostri Iesu Christi millesimo trecentesimo nonagesimo, mense martii die secundo, indictione tertiadecima, Rivoalti; qua testificatur ipse Paulus Nicolaus ministerialis Curie palacii, quod die secundo propter preceptum nostrum et per legem Iudicum investivit ad proprium ad nomen magnifice domine Samaritane relicte magnifici domini Antonii de la Scala olim nobilis civis Venetiarum, de cuncta et super tota una proprietate terre et case, coperta [1]) et discoperta, que [2]) est una domus magna, a stacio; cum una sua curia et cum quampluribus domibus asegentibus, partim de petra et partim de lignamine, positis in dicta curia et cum [3]) sua via seu fundamento, positis supra Canale, et cum uno suo calli proprio per quem venitur [4]) a dicta curia ad viam comunem; qui callis est positus iuxta proprietatem domini Nicolai Vallaresso, et cum uno suo orto et cum una sua domo de pariete, in qua est unus furnus [5]) et cum una sua curticella posita iuxta dictum furnum [6]), et cum uno alio Calli — per quem venitur [7]) a dicta curia furni [8]) ad viam comunem; qui callis est positus iuxta proprietatem [9]) monasterii Sancti Maphei de

---

[1]) Qui comincia il brano che sopprimo più tardi, per identità, al luogo *A*. Ora ne noto le varianti notevoli. [2]) *A* que videlicet. [3]) Qui si inizia il brano *B* più avanti soppresso. [4]) *A* itur. [5]) *A* clibanus. [6]) *A* clibanum. [7]) *A* itur de. [8]) a clibano, [9]) *A* positus ad latus domorum.

Constanzago, et cum sex casibus domorum [1]) de petra [2]) asegentibus; et cum suo reveteno et cum suis curticellis positis a parte posteriori [3]); que sex domus posite sunt supra viam comunem discurrentem ad campum [4]) Sancti Mauricii usque supra canale ubi fit pons Sancti Viti; et cum uno suo calli sive curticella, que vadit revolvendo, posita [5]) inter hanc proprietatem a stacio et domos asegentibus predicti domini Nicolai Vallaresso. Tota hec proprietas insimul coniuncta [6]) posita est in confinio Sancti Mauricii [7]), que fuit dicti condam magnifici domini Antonii de la Scalla, olim dicte magnifice domine Samaritane mariti: secundum quod hec proprietas firmat ab uno suo capite cum sua dicta ripa et fundamento sive via in canali unde habet introitum et exitum junctarium et juglacionem, et partim firmat cum uno latere dictorum callium in dicta proprietate maiori dicti domini Nicolai Valaresso, et partim firmat cum dictis sex domibus asegentibus et cum suis dictis curticellis in callicello de Grondalibus, tam facto quam fiendo, comuni huic proprietati et proprietati domini Leonardi Venerio Sancti Canciani; et ab alio suo capite firmat partim cum suo dicto calli per quem intratur in dictam curiam magnam in proprietate maiori dicti domini Nicolai Vallaresso, et partim firmat cum uno suo calli, per quem itur ad dictum furnum in proprietate monasteri Sancti Maphei de Constanzago; et partim firmat cum sua curia maiori et cum sua domo, in qua est furnus et (cum?) pariete proprio in orto Nicolai Bono aurificis. Ab uno suo latere firmat partim cum suo dicto fundamento, sive via et rippa, et cum sua dicta curia magna et muro proprio in callicello de Grondalibus comuni huic proprietati et proprietati dicti domini Nicolai Vallaresso, et partim firmat cum dicto suo calli per quem venitur in dictam curiam magnam in proprietate dicti domini Nicolai Vallaresso, et partim firmat cum testa dicti sui callis in dicta via comuni unde habet introitum et exitum; et partim firmat cum suo dicto calli, sive curticella, que vadit revolvendo in dicta proprietate maiori dicti domini Nicolai Vallaresso; et partim firmat cum suo muro proprio in callicello proprietatis dicti domini Leonardi Venerio; et partim firmat cum suis dictis sex domibus asegentibus et cum suo revetene in dicta via comuni, unde habet introitum et exitum; et partim firmat cum capite dicti sui callis proprii per quem itur ad dictum furnum in dicta via comuni unde habet introitum et exitum. Et ab alio suo latere firmat partim cum suo dicto furno et orto in muro

---

[1]) Finisce il brano soppresso *B*. [2]) *A* lapideum. [3]) *A* positis de retro. [4]) *A* comunem que discurrit a campo. [5]) *A* vadit ultra rivum Sancti Viti. [6]) *A om.* ius- con-. [7]) Qui termina il brano, che più tardi sopprimo, e contrassegno con *A*.

proprio monasterii Sancti Maphei de Constanzago; et partim firmat cum suo muro proprio usque in canale in terra vacua ser Galoni de Marano, seu eius commissarie. Illam videlicet partem que est tota fabrica vetus, que erat supra suprascriptam proprietam quando livellata fuit per Dominos de la Scalla ser Bonazonte de Bicorfano olim Sancti Mauricii, videlicet tantum quantum comprehendit domus magna a stacio cum sua curia et terra vacua super qua olim fuerunt certe domus ruvinate et nunc sunt plures domus de lignamine et sua via seu fundamento positum supra canale et cum suo calli proprio, per quem venitur a dicta curia ad viam comunem. Qui callis est positus inter dictam domum magnam a statio, et domum domini Nicolai Vallaresso et cum suo orto et cum una sua domo de pariete, in qua est unus furnus et cum una sua curticella posita iuxta dictum furnum et cum uno alio calli, per quem venitur a dicta curia furni ad viam comunem, qui callis est positus iuxta proprietatem monasterii Sancte Maphei de Constanzago, et cum suprascriptis sex casis (sic) domorum. Ita et taliter quod suprascripta magnifica domina Samaritana habeat illud ius in suprascriptis rebus quod habebant Domini della Scalla, salvo et reservato omni eo quod continetur et legitur in una Breviarii legis sententie carta completa et roborata manu dominorum Iudicum comunita, facta anno, indictione, mense, die quibus supra, qua testificantur ut infra. Ex adverso autem illustrissimus ser Matheus da Pesaro advocatus, nomine quo supra, ostendit ibidem legique fecit tres cartas, prima quarum est clamoris carta, et item infra. Secunda est livellationis et subventionis carta completa et roborata manu suprascripti domini nostri Ducis et eius Consiliariorum comunita, facta anno ab incarnatione domini nostri Iesu Christi millesimo trecentesimo octuagesimo nono, mense novembris, die vigesimo octo, indictione, tertia decima, Rivoalti, quam fieri fecit suprascriptus dominus noster Dux cum suis Iudicibus examinatorum, iusta quam dictis dominis Iudicibus ser Manfredus de Ubriachis de confinio Sancti Bassi et domna Simona relicta ser Abramini de Mapheo Sancti Mauricii testes iurati suo sacramento testificati fuerant, quod viderunt et cognoverunt dominum Balardinum de Nogarolla de Verona, qui mortuus erat, et sciebant quod ipse et post mortem eius dominus Cagnonus eius filius et Domini de la Scalla de Verona tenuerunt et possederunt et tunc ipsi Domini de la Scala tenebant et possidebant quandam proprietatem positam in confinio Sancti Mauricii, pacifice et quiete per spacium triginta annorum et ultra. Que est cuncta et super tota una proprietas cooperta [1]) — — Sancti Mauricii secundum et

---

[1]) Sopprimo per ragione d'identità, la descrizione della proprietà, e segno il brano qui soppresso con *A*. Il brano l'abbiamo già letto antecedentemente.

mihi manifestum fecit nunc suprascriptus Bonaventura notarius, dictus Saracenus, procuratorio nomine quo supra, cum heredibus suprascriptorum Dominorum de la Scalla, quia in Dei et Christi nomine dedit et ad perpetuum livellum concessit . . . . . [1]) ser Bonazonte de Bicorfano quondam domini Donnini de Bicorfano de confinio Sancti Mauricii et suis heredibus cunctam et super totam suprascriptam dictorum Dominorum de la Scalla proprietatem superius declaratam ad renovandum in perpetuum omni vigesimo nono anno dictam livellationem: pro qua quidem alivelatione ipse suprascriptus ser Bonazonta cum suis heredibus dare et solvere debet et tenetur ducatos septuaginta tres auri boni et iusti ponderis dictis Dominis de la Scalla et heredibus eorumdem omni anno in kalendis ianuarii, sub pena librarum centum venetialium etc. ut in ea legitur. Tercia est testamenti carta completa et roborata: quod testamentum manu Laurentii de la Turre, plebani ecclesie Sancti Angeli, et notarii, in anno ab incarnatione Domini nostri Iesu Christi millesimo trecentesimo septuagesimo tertio, mense novembris die vigesimo intrante, indictione duodecima, Rivoalti. Quod testamentum fieri fecit ipse Bonazonta de Bicorfano, de confinio Sancti Mauritii, in quo inter cetera sic se duxit, vulgariter, ordinandum: Prima voio et ordeno chel sia miei fedelli commessarii Agnesina mia muier, Franceschini, Nicolò, mei fioli etc. ut in ea legitur. Et rursum infra.

Hec igitur audientes et intelligentes nostri predicti Iudices visis suprascriptis cartis et visa suprascripta refutationis et securitatis carta facta per domnam Zaninam uxorem suprascripti Zambonini, manu presbiteri Victoris archidiaconi Torcellanensis et curie notarii infrascripti, et auditis hinc inde hiis que suprascripte partes dicere et proponere voluerunt, et super hoc habito consilio diligenter per legem Iudicum, suprascriptum clamorem suprascriptorum done Agnesine relicte Zambonini et Francischini fratrum olimque filiorum et nunc omnium commissariorum suprascripti quondam ser Bonazonte de Bicorfano olim Sancti Mauritii, quem dicti commissarii fecerant super suprascriptam investicionem sine proprio suprascripte magnifice done Samaritane, relicte magnifici domini Antonii de la Scalla, firmum tenentes de quantocumque continetur et legitur in suprascripta livelationis carta dicti ser Bonazonte de Bicorfano et in tantum quantum est dicta livelationis carta ipsis quondam ser Bonazonte, dictam investitionem ipsius magnifice domine Samaritane evacuaverunt et in reliquo ipsam investitionem firmam tenuerunt in tantum quantum est tota fabrica vetus, que erat super suprascriptam proprietatem quando livelata fuit per suprascriptos Dominos de la Scalla pre-

[1]) Due parole illeggibili, che forse s'interpreteranno: d. Bonaventura predictus.

dicto quondam ser Bonazonte de Bicorfano olim Sancti Mauritii, videlicet in tantum quantum comprehendunt suprascripta domus magna a stacio, cum sua curia et terra vacua, super qua olim fuerunt certe domus ruinate et nunc sunt plures domus de lignamina et [cum] sua via — [1]) in suprascripta investicione sine proprio dicte magnifice domine Samaritane descriptis, ita et taliter quod dicta magnifica domina Samaritana habeat illud ius in suprascriptis rebus quod habebant suprascripti Domini de la Scalla, reservatis iuribus fabrice nove facte super dictam proprietatem predictis commissaris et suis successoribus, suis loco et tempore habendis et extimandis, condemnatas dictas partes in expensis etc. ut in ea legitur propter suprascriptam diudicatus cartam. Quam quidem proprietatem seu proprietatis partem nostri predicti Iudices apreciati fuerunt libras centum grossorum, quas dare [promis]erunt suprascripte magnifice domine Samaritane pro parte suprascripte pecunie in suprascripta eius diudicatus carta contente, cui proprio interfuerunt Dominicus Datalio et Marinus Minor ambo precones etc., ut in ea legitur. Cumque suprascriptum proprium super suprascripta proprietates parte terre et case per triginta dies et annis (?) tres secundum usum stetisset et fuisset striditum et nullum inde audivissemus clamorem, quesivit a nobis et nostris Iudicibus suprascripta magnifica domina Samaritana, relicta dicti magnifici domini Antonii de la Scalla, cum instantia supplicando quatenus totam suprascriptam proprietatis partem terre et case pro suprascripta extimatione ei daremus et transactaremus per nostre notitie cartam. Cum autem id quod petebatur de iure id fieri deberet, dixerunt nostri Iudices per legem et iuditium, ut totam suprascriptam proprietatis partem terre et case copertam et discopertam pro suprascriptis libris centum grossorum, eos denarios computantes pro parte suprascripte pecunie in suprascripta diudicatus carta contente, salvo et reservato omni eo quod continetur et legitur in suprascripta Breviarii legis sententie clamoris carta ad suprascriptam magnificam dominam Samaritanam, relictam suprascripti magnifici domini Antonii de la Scalla, olim nobilis civis Venetiarum, daremus et transactaremus per nostre noticie cartam; ex iudicio igitur nostrorum Iudicum et nostra confirmatione cunctam et super totam suprascriptam et predesignatam proprietatis partem terre et case copertam et discopertam ad suprascriptam magnificam dominam Samaritanam, relictam dicti magnifici domini Antonii de la Scalla olim nobilis civis Venetiarum, pro suprascriptis libris centum grossorum, eos denarios computantes pro parte suprascripte pecunie in suprascripta diudicatus carta contente, salvo et reservato omni eo quod continetur et legitur in suprascripta Breviarii legis sententie clamoris carta damus et

---

[1]) Brano soppresso, che indico con *B*.

transactamus per hanc nostre noticie cartam, cum omni longitudine et latitudine sua etc. secundum usum, suprascriptam magnificam dominam Samaritanam relictam dicti magnifici domini Antonii de la Scalla ab omni homine et persona in perpetuum securam reddimus et quietam; suprascriptam diudicatus cartam incidi fecimus, quam evacuamus cum omnibus suis exemplis de reliquo aliam diudicatus cartam sibi fieri mandantes. Si quis igitur etc. Secundum usum.

Ego Antonius Venerio Dei gratia Dux manu mea subscripsi.
Ego Andreas Marcello iudex manu mea subscripsi.
Ego Antonius Michael iudex manu mea subscripsi.

(S. T.) Ego Marinus plebanus Sancti Gervasii notarius et aule inclite Ducis Venetiarum Cancellarius complevi et roboravi.

Relazione sulla memoria presentata dal Dott. Angelo Taccone, intitolata: *Sophoclis tragoediarum locos melicos..... descripsit, de antistrophica responsione etc. disseruit A. T. (Aiax, Electra, Oedipus rex).*

È noto che si va facendo ora il tentativo di rinnovare radicalmente le dottrine accolte fin qui da tutti sulla metrica greca. Giudicare del valore d'un tal tentativo in base agli scrittori greci di metrica e di musica è cosa assai ardua e forse non conduce a risultati sicuri, vista la scarsezza e la relativa modernità delle fonti a noi pervenute e la difficoltà della loro interpretazione. Un mezzo più sicuro di giudizio si può forse avere applicando i risultati dei più recenti studi metrici sia ai frammenti dei lirici, sia a ciò che rimane dell'antica tragedia e commedia greca, e vedendo se la critica del testo abbia o no a trovarsi soddisfatta dagli schemi metrici proposti in base a quegli studi.

Questo esperimento è stato fatto dal Dott. A. Taccone nella Memoria, in cui abbiamo a riferire ai Colleghi per le parti meliche di tre tragedie di Sofocle, l'*Aiace*, l'*Elettra* e l'*Edipo Re*. Il lavoro presentato dal Taccone è assai interessante in quanto mostra che le teorie nuove rendono inutili molti emendamenti che s'era creduto necessario introdurre per ragioni metriche nel

testo, senza che sempre potessero ritenersi a sufficienza giustificati sia filologicamente, sia paleograficamente. E perciò la memoria del Taccone, pur non risolvendo definitivamente il problema di cui si fece parola, fornisce però certo importanti elementi per la sua soluzione.

Inoltre essa si raccomanda altresì per l'assennatezza con cui l'autore cercando di ricostituire il genuino testo sofocleo, sottopone a critica, nei casi in cui è necessario ricorrere alle congetture, quelle che da altri sono state proposte e fa tra esse la sua scelta; nè mancano qua e là congetture ed interpretazioni originali, che sembrano assai degne di considerazioni. E perciò la Commissione propone che la Memoria del Dott. Taccone sia ammessa alla lettura.

D. Pezzi.
G. De Sanctis, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSI UNITE

Adunanza del 22 Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Salvadori, Direttore della Classe, Naccari, Camerano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera e Grassi; scusa l'assenza il Socio Segre;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pezzi, Cipolla, Carutti, Pizzi, Savio, De Sanctis e Renier Segretario; scusa l'assenza il Socio Ruffini.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 15 gennaio 1905.

Si procede al conferimento del premio Gautieri per la storia (triennio 1901-1903). Giusta la proposta fatta nella relazione, l'Accademia con votazione palese unanime, vota la divisione del premio in due parti uguali; quindi, a schede segrete, conferisce la prima parte del premio al prof. Giacinto Romano dell'Università di Pavia per l'opera: *Niccolò Spinelli da Giovinazzo, diplomatico del secolo XIV*, Napoli, 1902, e la seconda parte al prof. Angelo Colini, Direttore del Museo Preistorico-Etnografico Kirkeriano in Roma, per l'opera: *Il sepolcreto di Remedello Sotto nel Bresciano e il periodo eneolitico in Italia*, stampata nel " Bullettino di paletnologia italiana ".

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, NACCARI, FILETI, JADANZA, GUIDI, MORERA, FOÀ, GRASSI, PARONA, GUARESCHI, MATTIROLO e CAMERANO Segretario. — Il Socio SEGRE scusa la sua assenza.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente presenta a nome del Socio corrispondente prof. Augusto CHAUVEAU i due lavori seguenti: 1° *L'énergie dépensée par le travail interieur des muscles dans leurs divers modes de contraction;* 2° *Animal thermostat*;

a nome del Socio JADANZA la sua opera: *Tavole tacheometriche centesimali.*

Il Socio GUARESCHI presenta un suo lavoro stampato intitolato: *Della pergamena con osservazioni ed esperienze sul ricupero e sul ristauro di Codici danneggiati negli incendi e Notizie storiche,* Torino, 1905.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Francesco SEVERI: *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard, della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una*

superficie algebrica, dal Presidente D'Ovidio a nome del Socio Segre;

2° Dott. Ernesto Laura: *Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli, in un fluido incompressibile indefinito*, dal Socio Morera;

3° Efisio Ferrero: *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1904*, dal Socio Naccari.

Il Socio Mattirolo legge anche a nome del Socio Parona la relazione intorno alla memoria del Dr. Giovanni Negri, intitolata: *La vegetazione della collina di Torino*. La relazione favorevole viene approvata all'unanimità. Quindi con votazione segreta la Classe approva all'unanimità la stampa del lavoro del Dr. Negri nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Camerano presenta una sua Memoria intitolata: *Antonio Vallisneri e i moderni concetti intorno ai viventi*. La Classe con votazione segreta accoglie ad unanimità detto lavoro pel volume delle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard, della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica.

Nota di FRANCESCO SEVERI.

Il teorema da me recentemente dimostrato, circa l'irregolarità delle superficie algebriche che hanno la connessione lineare $p_1 > 1$, cioè che posseggono integrali di Picard trascendenti e della 2ª specie (*), è stato ora invertito dal sig. ENRIQUES, il quale, mediante la rappresentazione sul piano multiplo, è riuscito a costruire sopra ogni superficie irregolare sistemi continui di curve, non contenuti in sistemi lineari (**): donde, mediante un noto procedimento di HUMBERT (***), segue l'esistenza sulla superficie di integrali di 1ª specie, e quindi il fatto che la connessione lineare è >1.

Io avevo già composto una dimostrazione diretta di questo ultimo fatto, la quale mi conduceva inoltre alla conclusione che il numero r degl'integrali di 2ª specie algebricamente distinti ($r = p_1 - 1$), supera di $p = P_g - P_a$ unità il numero q degl'integrali di 1ª specie linearmente indipendenti; P_g, P_a denotando i generi, geometrico e aritmetico, della superficie. Ma alcune difficoltà incontrate nei dettagli del ragionamento, mi hanno consigliato a differirne la pubblicazione, tanto più che l'ugua-

(*) Nella mia Nota, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie* (" Rend. della R. Acc. dei Lincei ", 1904, 2° semestre) trovasi riassunta la dimostrazione, che è esposta, con tutti i dettagli, in una Memoria in corso di stampa nei " Mathematische Annalen ".

(**) Il lavoro del prof. ENRIQUES, su tale argomento, sta per uscire nei " Rend. della R. Accademia di Bologna ".

(***) Cfr. HUMBERT, *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (" Journal de Math. ", 1894).

glianza $r = p + q$, si può stabilire, in modo rapido ed elegante, come si vedrà in questa Nota, una volta ammessa la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo (*), che è stata dimostrata dal sig. Enriques nel lavoro testè citato.

Tuttavia debbo avvertire che, a quanto sembra, la inversione diretta del teorema enunciato nella mia Nota della R. Accademia dei Lincei, conduce pure a costruire sulla superficie sistemi completi di curve, non lineari; ma su ciò spero di poter ritornare (**).

1. — Diciamo S un sistema algebrico irriducibile ∞^1 (senza punti base) di curve algebriche irriducibili, tracciate sulla superficie F di equazione

$$F(xyz) = 0,$$

e

$$\varphi(\xi\eta) = 0$$

una curva piana i cui punti rappresentino le curve di S. Con μ, ν indicheremo il *grado* e l'*indice* del sistema, cioè risp. il numero dei punti comuni a due curve di S, e il numero delle curve del sistema che passano per un punto di F. Tra la curva φ e la superficie F nasce una corrispondenza algebrica, ove ad un punto ξ di φ (***) si associno tutti i punti della curva di S che

(*) Per la definizione della serie caratteristica di un sistema continuo ved. la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (" Atti della R. Acc. di Torino ", t. XXXIX, 1904).

(**) [Dopo aver licenziato il presente lavoro, ho saputo che il sig. Castelnuovo aveva inviato all'Accad. delle Scienze di Parigi una Nota (presentata il 23 gennaio), in cui egli dimostra sommariamente che il numero q degl'integrali di 1ª specie è uguale a $P_g - P_a$; donde, mediante il teorema enunciato al n° 2 della mia Nota lincea, si ricava, per altra via, che $r = p + q$. — La stessa relazione ($r = p + q$), che il sig. Enriques ebbe la cortesia di enunciare per mio incarico, in una sua Nota, inserita nei " Comptes rendus " dell'Accad. suddetta (seduta del 16 gennaio), trovasi dimostrata (coll'aiuto di una certa equazione differenziale), nei " Comptes rendus " dello stesso giorno, dal sig. Picard, insieme al teorema fondamentale della mia Nota lincea (29 gennaio 1905)].

(***) Quando non vi sia ambiguità, seguendo l'uso comune, un punto di φ o di F s'indicherà colla lettera che ne designa la 1ª coordinata.

corrisponde a ξ. Se, come supponiamo, $\nu > 1$ ed il sistema S non è composto con un'involuzione, cioè le ν curve di S che passano per un punto generico di F, non passano tutte in conseguenza per altri punti della superficie, su φ si ha una ∞^2, Σ, di gruppi di ν punti, razionalmente identica ad F: ogni gruppo è immagine di un sol punto di F, e per due punti di φ passano n gruppi (cioè n è l'*indice* e ν il *grado* del sistema Σ).

Senza introdurre alcuna restrizione, possiamo supporre, una volta per sempre, che il sistema S non abbia alcun legame particolare col fascio delle curve segate su F dai piani $y = \text{cost}$; e che inoltre il punto a di φ, che rappresenta una curva fissata C di S, sia al finito e semplice per la φ, e che non presenti alcuna particolarità rispetto agli assi di riferimento.

Costruiamo su φ un integrale abeliano $\omega(\xi\eta)$, dovunque finito, tranne che nel punto a, ove presenti un polo del 1° ordine. Allora, dicendo $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_\nu$ i ν punti di φ corrispondenti al punto x di F, la somma

$$\omega(\xi_1\eta_1) + \omega(\xi_2\eta_2) + \dots + \omega(\xi_\nu\eta_\nu)$$

si trasformerà in un *integrale di Picard*

$$J(xyz) = \int A dx + B dy,$$

relativo alla superficie F (A, B son funzioni razionali del punto (xyz) variabile su F). L'integrale J si conserverà finito in ogni punto di F non appartenente alla curva C; ma quando x tende ad un punto generico di C, uno dei termini della somma $\sum_{i=1}^{\nu} \omega(\xi_i\eta_i)$ tende all'infinito, senza che lo stesso accada di nessuno degli altri, onde anche J tenderà all'infinito.

È pur facile vedere che la curva C è *polare* per l'integrale J, cioè che trattasi di un integrale di 2ª specie. Invero, mentre il punto x di F descrive un ciclo lineare σ, infinitamente piccolo, avvolgente il punto generico x_0 di C, l'integrale J aumenta della somma dei valori di $\omega(\xi\eta)$ lungo i ν cicli infinitamente piccoli, che corrispondono a σ. Ma siccome in ogni punto di φ è nullo il residuo della funzione razionale integranda $\frac{d\omega}{d\xi}$, si conclude che il valore di J lungo σ è nullo, e quindi che il punto x_0 è un polo.

Lo stesso fatto si prova colle considerazioni che andiamo ad esporre, dalle quali risulta di più che per l'integrale J la C è una *curva polare del 1° ordine*, cioè che l'integrale $J(xy_0z)$, relativo alla sezione E di F col piano generico $y = y_0$, presenta un polo del 1° ordine in ciascuno dei punti ove E incontra C.

La corrispondenza tra φ ed F subordina una corrispondenza algebrica tra i punti delle curve φ ed E, nella quale ad ogni punto ξ di φ, corrispondono i punti in cui la curva E è segata dalla curva di S, omologa di ξ. Fissiamo l'attenzione sopra uno dei punti $(x_0y_0z_0)$ in cui E sega C, ed osserviamo che il punto x_0 non è nè doppio nè di diramazione per la suddetta corrispondenza; giacchè risulterebbe doppio solo se coincidesse col punto di contatto di un piano $y = \text{cost}$, tangente a C, e risulterebbe di diramazione solo se coincidesse con un punto del gruppo G, comune alla C e alla curva di S infinitamente vicina; mentre queste posizioni debbono escludersi, per la genericità del piano segante.

Limitando pertanto la corrispondenza agli intorni di x_0 e di uno dei punti $\xi_1^0 \equiv a, \xi_2^0, \ldots, \xi_\nu^0$ di φ, che sono omologhi di x_0, avremo una corrispondenza analitica biunivoca; donde segue che x è funzione uniforme di ξ_i nell'intorno del punto ξ_i^0; e viceversa che ξ_i è funzione uniforme di x nell'intorno di x_0. E giacchè i punti $x_0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_\nu^0$ possono supporsi tutti al finito, si conclude che le suddette funzioni uniformi son pure regolari, negli intorni in cui esse son definite. — Avremo dunque nell'intorno di $\xi_1^0 \equiv a$:

$$x = x_0 + c_1(\xi_1 - \xi_1^0) + c_2(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \ldots,$$

ove c_1, essendo uguale al valore $\left(\frac{dx}{d\xi_1}\right)_0$ assunto dalla $\frac{dx}{d\xi_1}$ nel punto ξ_1^0, è diverso da zero, per la genericità di x_0 lungo la curva C.

Inoltre anche $\omega(\xi_2\eta_2), \omega(\xi_3\eta_3), \ldots, \omega(\xi_\nu\eta_\nu)$ risulteranno funzioni uniformi e regolari di x, nell'intorno di $(x_0y_0z_0)$, e quindi, in quest'intorno, sarà:

$$J(xy_0z) = \omega(\xi_1\eta_1) + \omega(\xi_2^0\eta_2^0) + \ldots + \omega(\xi_\nu^0\eta_\nu^0) + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

donde si trae:

$$(x - x_0)J(xy_0z) = \omega(\xi_1\eta_1)[c_1(\xi_1 - \xi_1^0) + c_2(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \ldots] +$$
$$+ (x - x_0)\omega(\xi_2^0\eta_2^0) + \ldots + (x - x_0)\omega(\xi_\nu^0\eta_\nu^0) + k_1(x - x_0)^2 + k_2(x - x_0)^3 + \ldots.$$

Passando al limite per $x = x_0$ e quindi per $\xi_1 = \xi_1^0$, verrà:

$$\lim_{x=x_0}(x - x_0)J(xy_0z) = c_1 \lim_{\xi_1=\xi_1^0}(\xi_1 - \xi_1^0)\omega(\xi_1\eta_1),$$

dalla quale si rileva che ogni punto di C è un polo del 1° ordine per l'integrale J. Inoltre quando il punto x_0 si avvicina ad un punto del gruppo G, la $\left(\frac{dx}{d\xi_1}\right)_0$ varia con continuità tendendo a zero, perchè due dei punti ξ corrispondenti ad x_0, tendono a coincidere in a. Ne segue che in ciascun punto di G si annulla la funzione razionale residua (di rango 1) individuata da J su C (*); e siccome G appartiene alla serie caratteristica di C (**), si conclude ch'esso non è altro che il gruppo caratteristico individuato da J sulla propria curva polare.

Se si considera il sistema algebrico completo M, che contiene totalmente S, e si applica il teorema di Enriques, già citato, si vede che ogni gruppo caratteristico di C è segato da una curva C_0 di M, infinitamente vicina a C. Sicchè costruendo entro M, in uno degli infiniti modi possibili, un sistema algebrico irriducibile ∞^1, che contenga C e C_0, mediante il procedimento sopra esposto, si giunge a dimostrare che:

Se una curva irriducibile C, *appartenente ad una superficie algebrica* F, *è contenuta totalmente in un sistema continuo almeno* ∞^1, *esiste sempre su* F *un integrale di 2ª specie, che diviene infinito (del 1° ordine) soltanto lungo la* C, *e che individua ivi un gruppo caratteristico, comunque prefissato.*

(*) In un punto x_0 di C il valore di questa funzione razionale residua differisce per un fattore costante da $\left(\frac{dx}{d\xi_1}\right)_0$. Di ciò si potrebbe profittare per dimostrare che i poli della funzione residua cadono nei punti di contatto dei piani $y =$ cost. tangenti C, e nei punti all'infinito della curva stessa; mentre gli zeri cadono in quei punti di C ove il piano tangente ad F è parallelo all'asse z, e nei punti della curva polare ove è regolare l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ (con $\bar{y}$ parametro variabile). Questi ultimi punti costituiscono il *gruppo caratteristico individuato da* J *su* C. (Ved. la mia Nota della R. Acc. dei Lincei).

(**) Cfr. col n° 4 della mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui*...

2. — Nel lavoro, già citato, sugl'integrali di 2ª specie appartenenti ad una superficie algebrica, ho dimostrato che, mediante sottrazione di funzioni razionali, ogni integrale di 2ª specie appartenente alla superficie F, può ridursi ad un integrale che divenga infinito (del 1° ordine) soltanto lungo una curva irriducibile C, priva di punti multipli, appartenente ad un sistema lineare regolare (sprovvisto di punti base).

Se d è la dimensione del sistema lineare completo $|C|$, sarà $d-1+P_g-P_a$ la dimensione della serie caratteristica completa esistente su C (e quindi $d+P_g-P_a$ la dimensione del sistema algebrico completo che contiene totalmente $|C|$).

Sulla serie caratteristica completa prendiamo una serie lineare g, di dimensione P_g-P_a-1, che non abbia gruppi comuni colla serie h segata su C dal sistema $|C|$, e diciamo $G_1\,G_2\,...\,G_p$ $(p=P_g-P_a)$, p gruppi di g linearmente indipendenti. Siano inoltre $J_1\,J_2\,...\,J_p$ p integrali di 2ª specie, che divengano infiniti del 1° ordine soltanto lungo C, individuando ivi risp. i gruppi scelti $G_1\,G_2\,...\,G_p$ (n° prec.), ed $I_1 I_2 ... I_q$ i q integrali linearmente indipendenti, di 1ª specie, appartenenti ad F.

Allora è facile vedere che gl'integrali $I_1 ... I_q\, J_1 ... J_p$, considerati complessivamente, sono distinti, cioè che una loro combinazione lineare a coefficienti costanti (non tutti nulli), non riducesi mai ad una funzione razionale.

Dicansi invero $\varphi_1 \varphi_2 ... \varphi_p$ le funzioni razionali residue individuate su C dagl'integrali $J_1 J_2 ... J_p$ e si ricordi che le φ hanno gli stessi poli (ved. la nota (*) a piè della pag. precedente), e per zeri rispettivi i punti dei gruppi $Q+G_1$, $Q+G_2$, ..., $Q+G_p$, ove Q è il gruppo dei punti di contatto dei piani che toccano F in punti di C e son paralleli all'asse z.

Ciò posto, se avessimo:

$$\lambda_1 I_1 + ... + \lambda_q I_q + \mu_1 J_1 + ... + \mu_p J_p = R(xyz),$$

ove le λ, μ son costanti, non tutte nulle, ed R è una funzione razionale (necessariamente infinita — del 1° ordine — soltanto lungo C), la funzione residua $\psi(xyz)$ individuata da R su C, sarebbe data da

$$\psi(xyz) = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + ... + \mu_p \varphi_p,$$

onde il gruppo base H del fascio $R =$ cost, apparterrebbe alla serie g, il che è assurdo, perchè H sta nella serie h.

Se ora fissiamo d gruppi linearmente indipendenti $H_1 H_2 ... H_d$ della serie h, e diciamo $R_1 R_2 ... R_d$ d funzioni razionali che divengano infinite (del 1° ordine) soltanto lungo C, e che individuino ivi risp. i gruppi base $H_1 H_2 ... H_d$, e $\psi_1 \psi_2 ... \psi_d$ le relative funzioni residue, poichè un gruppo caratteristico qualunque risulta linearmente dipendente dai gruppi $H_1 ... H_d\, G_1 ... G_p$, dicendo J un integrale di 2ª specie, che divenga infinito (del 1° ordine) soltanto lungo la C, e φ la relativa funzione residua, avremo:

$$\varphi = \nu_1 \psi_1 + ... + \nu_d \psi_d + \mu_1 \varphi_1 + ... + \mu_p \varphi_p ,$$

onde l'integrale

$$J - \nu_1 R_1 - ... - \nu_d R_d - \mu_1 J_1 - ... - \mu_p J_p ,$$

individuando su C una funzione residua identicamente nulla, sarà di 1ª specie; cioè avremo:

$$J = \lambda_1 I_1 + ... + \lambda_q I_q + \mu_1 J_1 + ... + \mu_p J_p + \text{funz. razionale.}$$

Ricordando il teorema che ho richiamato al principio di questo n°, si conclude che la superficie F possiede $p + q$ integrali distinti di 2ª specie. Dunque:

Data una superficie di generi P_g, P_a, *l'irregolarità* $P_g - P_a$ *della superficie, è uguale all'eccesso del numero degli integrali distinti di 2ª specie, sul numero degl'integrali indipendenti di 1ª specie, che ad essa appartengono* (*).

In altri termini:

Se la superficie F *possiede* q *integrali indipendenti di 1ª specie, questi integrali hanno* $q + P_g - P_a$ *periodi.*

Si osservi che per una superficie irregolare ($P_g > P_a$) è sempre $q > 0$, perchè altrimenti ogni sistema algebrico completo, in essa contenuto, sarebbe lineare (**), contrariamente al teorema di Enriques.

(*) Nel mio lavoro citato si dimostra soltanto che quest'eccesso non supera $P_g - P_a$.

(**) Humbert, loc. cit.

3. — Sia

$$\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1r} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{q1} & \omega_{q2} & \dots & \omega_{qr}, \end{matrix}$$

la tabella dei periodi degl'integrali $I_1 I_2 \dots I_q$, di 1ª specie e linearmente indipendenti, che appartengono ad F; α_{ik} la parte reale e $\beta_{ik}\sqrt{-1}$ la parte immaginaria del periodo ω_{ik}. Se $A_i (i=1, \dots, q)$ è un integrale di 2ª specie, avente per periodi $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}$, e $B_i (i=1, \dots, q)$ un altro integrale di 2ª specie, avente per periodi $\beta_{i1}, \dots, \beta_{ir}$, gl'integrali $A_1 \dots A_q B_1 \dots B_q$ saranno distinti. Invero, nell'ipotesi contraria, esisterebbero dei numeri $\lambda_1 \dots \lambda_q \mu_1 \dots \mu_q$, non tutti nulli, soddisfacenti alle relazioni:

$$\lambda_1 \alpha_{1k} + \lambda_2 \alpha_{2k} + \dots + \lambda_q \alpha_{qk} + \mu_1 \beta_{1k} + \dots + \mu_q \beta_{qk} = 0 \qquad (k=1, \dots, r);$$

e a causa della realità dei coefficienti di queste equazioni, si potrebbero sempre ridurre i numeri λ, μ ad esser reali. Dopo ciò l'integrale $\sum_{i=1}^{q} (\mu_i + \lambda_i \sqrt{-1}) I_i$, verrebbe ad avere per periodi i numeri:

$$\sum_{i=1}^{q} (\mu_i + \lambda_i \sqrt{-1})(\alpha_{ik} + \beta_{ik}\sqrt{-1}) \qquad (k=1, \dots, r),$$

che, in virtù delle relazioni ammesse, riduconsi alle quantità reali $\sum_{i=1}^{q} (\mu_i \alpha_{ik} - \lambda_i \beta_{ik})$. L'integrale di 1ª specie $\Sigma(\mu_i + \lambda_i \sqrt{-1}) I_i$ si ridurrebbe perciò ad una costante, cioè gl'integrali $I_1 \dots I_q$ sarebbero dipendenti: contro il supposto.

Si conclude pertanto che la superficie F ammette almeno $2q$ integrali distinti di 2ª specie, e quindi, in forza del teorema dimostrato al nº prec., avremo:

$$2q \leq q + P_g - P_a,$$

cioè: $q \leq P_g - P_a$. Dunque:

Una superficie algebrica F *di generi* P_g, P_a, *ammette al più* $P_g - P_a$ *integrali indipendenti di 1ª specie* (*).

(*) Si confronti questo teorema colla proposizione dimostrata al nº 7 della mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui*... [Ved. pure la nota (**) a piè della pag. 4 del presente lavoro].

In particolare, se $P_g - P_a = 1$, dovrà essere $0 < q \leq 1$, cioè $q = 1$; donde segue che:

Una superficie algebrica d'irregolarità uno, possiede un solo integrale di 1ª specie, che ha due periodi.

Dicendo I quest'integrale, se ne rileva che le curve I=cost costituiscono un fascio ellittico di curve *algebriche* (*); e quindi:

Una superficie algebrica d'irregolarità uno, contiene sempre un fascio ellittico di curve algebriche.

Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli, in un fluido incompressibile indefinito.

Nota del Dr. ERNESTO LAURA.

Il moto di n vortici rettilinei elementari, perpendicolari ad un piano, dipende dalla integrazione del sistema di forma Hamiltoniana (**):

$$\text{I)} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \; i = 1, 2, \ldots, n$$

ove si è posto:

$$P = -\frac{1}{2\pi} \sum_{(i,k)} m_i m_k \log \left[\left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k} \right)^2 + (p_i - p_k)^2 \right]$$

la sommatoria essendo estesa alle combinazioni binarie degli indici:

$$1, 2, \ldots, n$$

ed inoltre m_i essendo la intensità del vortice di cui la traccia sul piano xy ha le coordinate cartesiane:

$$\frac{x_i}{m_i}, \; p_i .$$

(*) *Osservazioni sui sistemi continui.....*

(**) Cfr. Kirchoff, *Mechanik*, pag. 259. — Poincaré, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, pag. 77.

Il sistema I), quando si osservi che le funzioni delle $2n$ variabili coniugate $x_i; p_i$:

$$\rho_{ik} = \left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)^2 + (p_i - p_k)^2 \qquad i, k = 1, 2, \dots, n$$

formano un gruppo nel senso di Lie, scorgesi che appartiene ad una classe particolare di sistemi Hamiltoniani, quelli con $2n$ variabili coniugate, nei quali la funzione caratteristica P dipende da sole $q (< 2n)$ funzioni formanti un gruppo. Fondandoci sopra questa osservazione dedurremo dal sistema I) un sistema nelle variabili:

$$\rho_{ik} = \left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)^2 + (p_i - p_k)^2$$

il quale benchè non di forma Hamiltoniana come il sistema I), riesce utile nella discussione di quei casi particolari di moti di n vortici, in cui gli integrali noti dalla teoria riducono alle quadrature l'integrazione dei sistemi differenziali corrispondenti.

Giovandoci di questo sistema differenziale, nel n. III di questo lavoro, determiniamo il moto di quattro vortici due a due simmetrici rispetto ad un punto, allorquando il loro momento di inerzia rispetto allo stesso punto è nullo.

I.

Sia il sistema nelle $2n$ variabili coniugate $x_i; p_i$:

$$\text{II)} \qquad i = 1, 2, \dots, n \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \end{cases}$$

Suppongasi che la funzione caratteristica F dipenda solo dalle funzioni:

$$\varphi_1(x_i; p_i), \ \varphi_2(x_i; p_i), \dots, \ \varphi_q(x_i; p_i) \qquad q < 2n$$

tra loro indipendenti, e formanti un gruppo.

L' integrazione del sistema II) a meno di una quadratura, equivale a quella dell'equazione lineare alle derivate parziali del 1 . 0:

$$\text{III)} \qquad (F, f) = 0.$$

Sia:

$$\psi_1(x_i; p_i) \ldots \psi_{2n-q}(x_i; p_i)$$

il gruppo polare del gruppo $(\varphi_1 \ldots \varphi_q)$. Avendosi allora:

$$(F, \psi_i) = \sum_{h=1}^{q} (\varphi_h, \psi_i) \frac{\partial F}{\partial \varphi_h} \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n - q$$

per la definizione delle funzioni ψ_i si avrà:

$$(F, \psi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 2nq.$$

E poichè la identità precedente sta per una qualsiasi funzione delle sole:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$$

avremo: *Il gruppo polare del gruppo formato dalle* $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ *dà le soluzioni comuni a tutte le equazioni* III) *quando le* F *sieno arbitrarie funzioni delle sole* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$.

Sia ψ una funzione qualunque nelle $(x_i; p_i)$, si ha identicamente:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \frac{dp_h}{dt} \right)$$

e per il sistema II):

$$\frac{d\psi}{dt} = (\psi, F).$$

Si ponga in questa identità per la ψ ognuna delle φ_i, avremo:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = (\varphi_i, F) = \sum_{h=1}^{q} (\varphi_i, \varphi_h) \frac{\partial F}{\partial \varphi_h} \qquad i = 1, 2, \ldots, q.$$

E poichè le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ costituiscono un gruppo, e la F è funzione solo delle $\varphi_1 \ldots \varphi_q$, il sistema:

$$\text{IV)} \qquad \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{h=1}^{q} (\varphi_i, \varphi_h) \frac{\partial F}{\partial \varphi_h} \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

sarà nelle variabili:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q.$$

Abbiamo dunque: *Da un sistema Hamiltoniano* II) *si può ricavare un sistema di equazioni differenziali ordinarie (non Hamiltoniano in generale) con un numero di variabili:*

$$q < 2n$$

mediante una trasformazione:

$$\varphi_k = \varphi_k(x_i\,;p_i) \qquad k = 1, 2, \dots, q$$

quando le $\varphi_k(x_i; p_i)$ *formano un gruppo, ed inoltre* F *sia funzione delle sole* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$ (*).

Poichè ogni integrale del sistema II) contenente le sole $\varphi_1 \dots \varphi_q$ è ancora integrale del sistema IV) — avremo che la F e le funzioni distinte del gruppo $(\varphi_1 \dots \varphi_q)$ sono integrali del sistema IV) —. Osserviamo infine che allorquando il gruppo formato dalle $\varphi_1 \dots \varphi_q$ è ridotto alla sua forma canonica, il sistema IV) si potrà ridurre alla sua forma Hamiltoniana.

Infatti: il gruppo $(\varphi_1 \dots \varphi_q)$ ammetta r funzioni distinte e sieno queste le:

$$\Psi_1(\varphi_1 \dots \varphi_q),\ \Psi_2(\varphi_1 \dots \varphi_q), \dots,\ \Psi_r(\varphi_1 \dots \varphi_q),$$

si avrà allora:

$$q = 2s + r$$

essendo s un numero intiero. Sia infine:

$$X_1, P_1, \dots, X_s, P_s;\ \Psi_1 \dots \Psi_r$$

la forma canonica del gruppo delle φ, si abbiano ossia le identità:

$$\begin{aligned}
P_k, X_i) = (X_k, P_i) &= 0 \qquad i \neq k \qquad i, k = 1, 2, \dots, s \\
(X_i, P_i) &= 0 \qquad i = 1, 2, \dots, s \\
(P_i, P_k) = (X_i, X_k) &= 0 \qquad i, k = 1, 2, \dots, s \\
(P_i, \Psi_k) = (X_i, \Psi_k) &= 0 \qquad i = 1, 2, \dots, s;\ k = 1, 2, \dots, r \\
(\Psi_i, \Psi_k) &= 0 \qquad i, k = 1, 2, \dots, r.
\end{aligned}$$

(*) Il teorema non è invertibile e si può dimostrare che: Condizione necessaria e sufficiente perchè da un sistema Hamiltoniano con $2n$ variabili coniugate e di funzione caratteristica F, si possa ricavare un altro sistema differenziale con $q < 2n$ variabili (non Hamiltoniano in generale) mediante la trasformazione $\varphi_k = \varphi_k(x_i; p_i)$ $(k = 1, 2, \dots; q)$ si è che le $\varphi_k(x_i; p_i)$ e la F formino un gruppo di ordine $(q + 1)$.

Usiamo la trasformazione:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= X_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q) \\ P_i &= P_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

$$\Psi_k = \Psi_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q) \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

La funzione caratteristica:

$$F(\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_q)$$

divenga per questa trasformazione:

$$\overline{F}(X_i, P_i; \Psi_k).$$

Il sistema IV) diverrà allora ovviamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= (X_i, \overline{F}) = \frac{\partial \overline{F}}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} &= (P_i, \overline{F} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial X_i} \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Le ultime r di queste equazioni dànno, come già si sapeva, le equazioni integrali:

$$\Psi_k = a_k \qquad k = 1, 2, \ldots, r\,,$$

essendo a_k delle costanti; e se dico:

$$F'(X_i; P_i)$$

ciò che diviene $\overline{F}(X_i; P_i; \Psi_k)$ quando per la Ψ_k si sostituiscano le a_k, le prime $2s$ equazioni diverranno:

$$i = 1, 2, \ldots, s \left\{\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial \overline{F}}{\partial X_i} \end{aligned}\right.$$

che è il sistema Hamiltoniano richiesto.

Consideriamo in particolar modo il caso in cui $r = 1$, il caso ossia in cui il gruppo $(\varphi_1 \dots \varphi_q)$ ammetta una sola funzione distinta. In tal caso, conoscendosi il gruppo polare del gruppo $(\varphi_1 \dots \varphi_q)$ e la relativa funzione distinta, l'integrazione del sistema II si può effettuare con una quadratura. Infatti sono allora conosciuti:

$$q - 1 + 2n - q - 1 = 2n - 2$$

integrali indipendenti dal tempo, ed un integrale che contiene questa variabile; sicchè occorre solo trovare l'integrale del sistema II), indipendente dal tempo, che ancora è sconosciuto e questo, come insegna la teoria del moltiplicatore di Jacobi, può ottenersi con una quadratura.

II.

Il sistema I) rientra nei sistemi Hamiltoniani di cui ci siamo occupati nel numero precedente. Basterà perciò dimostrare che le funzioni:

$$\rho_{ik} = \left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)^2 + (p_i - p_k)^2$$

considerate nelle variabili $(x_i; p_i)$ formano un gruppo, allorquando (i, k) indichi una qualsivoglia combinazione binaria degl'indici:

$$1, 2, \dots, n.$$

Si ha infatti identicamente:

$$(\rho_{ik}, \rho_{il}) = \frac{4}{m_i} \begin{vmatrix} \frac{x_i}{m_i} & p_i & 1 \\ \frac{x_k}{m_k} & p_k & 1 \\ \frac{x_l}{m_l} & p_l & 1 \end{vmatrix}.$$

Ed osservato ora, posto $k \neq l$, essere il determinante del

2° membro il doppio dell'area del triangolo i cui vertici hanno per coordinate cartesiane:

$$\left(\frac{x_i}{m_i}, p_i\right) \quad \left(\frac{x_k}{m_k}, p_k, 1\right) \quad \left(\frac{x_l}{m_l}, p_l, 1\right)$$

avremo:

$$(\rho_{ik}, \rho_{il}) = f(\rho_{ik}\, \rho_{il}\, \rho_{kl}).$$

Sieno h, k; i, l due coppie di indici tutti e quattro tra loro diversi, si ha:

$$(\rho_{hk}, \rho_{il}) = 0.$$

Sicchè si conclude quanto avevamo asserito.

Il gruppo polare del gruppo formato dalle ρ_{ik} è costituito dagli integrali del sistema completo:

$$(\rho_{ik}, f) = 0.$$

Le equazioni di questo sistema che sono tra loro indipendenti, sono quelle provenienti dai valori seguenti per la coppia i, k:

$$\begin{array}{l} (1, 2) \quad (1, 3) \ \ldots \ (1, n) \\ \qquad\quad (2, 3) \ \ldots \ (2, n). \end{array}$$

Gli integrali di questo sistema sono poi:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad F_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i p_i \qquad F_3 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{x_i^2}{m_i^2} + p_i^2\right).$$

Essi formano un gruppo del 3° ordine dotato dell'unica funzione distinta:

$$F = \sum_{(i,k)} m_i\, m_k\, \rho_{ik} \ (*).$$

Si ha quindi il teorema:

Le funzioni:

$$\rho_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) Cfr. una mia nota in questi Atti, vol. XXVII.

formano un gruppo di ordine (2n — 3) *dotato della sola funzione distinta:*

$$F \equiv \sum_{(i,k)} m_i\, m_k\, \rho_{ik}\,.$$

Il gruppo polare è formato dalle funzioni:

$$F_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad F_2 \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i p_i \qquad F_3 \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{x_i^2}{m_i^2} + p_i^2 \right).$$

Esse funzioni sono poi gli unici integrali comuni a tutte le equazioni:

$$(P, f) = 0$$

quando le P sieno arbitrarie funzioni delle ρ_{ik}.

Analogamente a quanto fu fatto nel numero precedente per il caso generale, possiamo ricavare dal sistema I) un sistema differenziale, nel quale le variabili dipendenti sieno le ρ_{ik}.

Poniamo:

$$(i, k, l) = \begin{vmatrix} \frac{x_i}{m_i} & p_i & 1 \\ \frac{x_k}{m_k} & p_k & 1 \\ \frac{x_l}{m_l} & p_l & 1 \end{vmatrix} \quad (*).$$

Il sistema richiesto nelle ρ_{ik} sarà:

$$\text{V)} \qquad \frac{d\rho_{ik}}{dt} = -\frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{n}{}'' m_l \left(\frac{1}{\rho_{il}} - \frac{1}{\rho_{kl}} \right) (i, k, l) \quad (**)$$

(*) Il simbolo (i, k, l) come il determinante che rappresenta gode della proprietà:

$$(i, k, l = (k, l, i) = (l, i, k) = (l, k, i) = (k, i, l) = (i, l, k).$$

(**) Tale sistema nel caso di $n = 3$ è dato pure da W. Gröbli in *Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden*, Zürich, 1877.

il doppio indice indicando che nella sommatoria vanno esclusi gli indici i, k. Per la posizione posta si ha poi:

$$(i, k, l) = \pm 2\sqrt{-\rho_{ik}^2\rho_{kl}^2 - \rho_{li}^2 + 2\rho_{ik}\rho_{kl} + 2\rho_{kl}\rho_{li} + 2\rho_{li}\rho_{ik}}$$

ed il segno da premettersi al radicale sarà il $+$ od il $-$ a seconda che l'area nei cui vertici stanno i vortici di intensità $m_i m_k m_l$ e percorsa nel senso indicato sarà positiva o negativa. Un tal segno è noto inizialmente, e nel corso del moto andrà determinato ogni volta che si annullerà l'area (i, k, l).

La integrazione del sistema V) è sufficiente per poter integrare, con una quadratura, il sistema I). Si può osservare infatti che supposto:

$$\Sigma m_i \neq 0$$

si ha identicamente:

$$\left(\sum_{(i,k)} m_i m_k \rho_{ik}, \quad \operatorname{tang}^{-1} \frac{p_r - p_s}{\frac{x_r}{m_r} - \frac{x_s}{m_s}}\right) = 2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

quindi la funzione:

$$\operatorname{tang}^{-1} \frac{p_r - p_s}{\frac{x_r}{m_r} - \frac{x_s}{m_s}},$$

le ρ_{ik} indipendenti e le F_1, F_2, F_3 sono funzioni tra loro indipendenti. D'altronde:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tang}^{-1} \frac{p_r - p_s}{\frac{x_r}{m_r} - \frac{x_s}{m_s}} = \left(P, \operatorname{tang}^{-1} \frac{p_r - p_s}{\frac{x_r}{m_r} - \frac{x_s}{m_s}}\right)$$

ossia:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tang}^{-1} \frac{p_r - p_s}{\frac{x_r}{m_r} - \frac{x_s}{m_s}} = \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{n}{}'' \frac{m_h}{\rho_{rs}} \left(\frac{\rho_{rs} - \rho_{sh}}{\rho_{sh}} + \frac{\rho_{sr} - \rho_{rh}}{\rho_{sh}}\right) + \frac{2\sum_{i=1}^{n} m_i}{\pi} \frac{1}{\rho_{rs}}.$$

Il 2° membro di questa equazione è funzione solo delle ρ_{ik}, quindi quando si sia integrato il sistema V), esso diverrà una funzione nota del tempo, e perciò a meno di una quadratura in funzione del tempo potrà calcolarsi:

$$\operatorname{tang}^{-1} \frac{p_r - p_s}{\frac{x_r}{m_r} - \frac{x_s}{m_s}}.$$

Otteniamo così l'integrale che ancora ci abbisognava nell'ipotesi posta, per ottenere la soluzione completa del sistema I).

Qualora fosse:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$$

possiamo osservare che combinando i due integrali:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i p_i = b.$$

si ricava agevolmente l'equazione:

$$2a\left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right) + 2b(p_i - p_k) = \sum_{k=1}^{n}{}' m_h \rho_{kh} - \sum_{h=1}^{n}{}' m_h \rho_{ih}$$

dalla prima sommatoria dovendosi escludere l'indice k, e dalla seconda l'indice i. Se questa equazione si considera simultaneamente con la seguente:

$$\left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)^2 + (p_i - p_k)^2 = \rho_{ik}$$

scorgesi che i binomî:

$$\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}$$

sono funzioni note delle ρ_{ik}, e supposto quindi di aver integrato il sistema V), diverranno funzioni note del tempo. D'altronde:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{\rho_{ik}} \left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)$$

quindi con una ulteriore quadratura si otterrà p_i in funzione del tempo.

III.

Consideriamo un sistema di $2n$ vortici, ed osserviamo che supposto:

$$m_i = m_{i+n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

il sistema Hamiltoniano (I) è compatibile con le posizioni:

$$x_i = -x_{i+n} \quad p_i = -p_{i+n} \qquad (i=1, 2, ..., n)$$

dunque: *Se* 2n *vortici rettilinei inizialmente sono due a due simmetrici rispetto ad un punto, tali si conserveranno durante l'intiero moto.*

Il sistema V) si riduce, in questo caso, con $(2n-1)$ variabili indipendenti; il poligono nei cui vertici stanno i suddetti $2n$ vortici riesce infatti determinato, quando determinato sia il poligono nei cui vertici stanno n dei suddetti vortici non simmetrici, ed il centro di simmetria.

Di questo sistema sono poi conosciuti due integrali, quello delle forze vive, e quello del momento di inerzia dei vortici suddetti rispetto al centro di simmetria; si conclude quindi che conosciuti altri

$$2n-4$$

integrali il problema della integrazione si riduce alle quadrature. In particolare: *Le equazioni finite del moto di quattro vortici a coppie simmetrici rispetto ad un punto si ottengono mediante quadrature.*

La integrazione delle equazioni differenziali del moto in questo caso particolare si può avere integrando dapprima il sistema differenziale nelle ρ_{ik}, e poscia, osservato che il centro di simmetria è fisso durante il moto, poichè le azioni velocitanti esercitantesi su di esso dovute ai dati vortici sono a coppie eguali e contrarie, prendere questo punto come polo di un sistema di coordinate polari. Se allora (ρ_i, θ_i) sono le coordinate del vortice di intensità m_i, avremo:

$$\text{VI)} \quad i=1,2,...,n \begin{cases} \rho_{i,i+n} = 4\rho_i^2 \\ \dfrac{d\theta_i}{dt} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{h=1}^{n} \dfrac{m_h}{\rho_{i,i+n}}\left(\dfrac{\rho_{i,i+n}-\rho_{i+n,h}}{\rho_{i,h}} + \dfrac{\rho_{i+n,i}-\rho_{i,h}}{\rho_{i+n,h}}\right) + \dfrac{4}{\pi}\dfrac{M}{\rho_{i,i+n}} \end{cases}$$

ove si è posto:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

La seconda di queste formole ottenendosi da una formola

del numero precedente quando si osservi che nel caso attuale si ha:

$$\theta_i = \operatorname{tang}^{-1} \frac{p_i - p_{i+n}}{\dfrac{x_i}{m_i} - \dfrac{x_{i+n}}{m_{i+n}}}.$$

Le equazioni precedenti quando siasi integrato il sistema V) dànno dunque a meno di una quadratura la soluzione completa del problema.

Passeremo a considerare il moto di quattro vortici simmetrici a coppie rispetto ad un punto.

Ponendo:

$$m_1 = m_3 = m \quad m_2 = m_4 = -n$$

$$\rho_{12} = \rho_{34} = x \quad \rho_{23} = \rho_{41} = y \quad \rho_{13} = u \quad \rho_{24} = v$$

il sistema V) per $n = 4$ diviene:

$$\text{VII} \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\pi}{2}\frac{dx}{dt} &= m\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y}\right) I - n\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{v}\right) I \\ -\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dt} &= m\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right) I - n\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{x}\right) I \\ -\frac{\pi}{2}\frac{du}{dt} &= 2n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) I \\ -\frac{\pi}{2}\frac{dv}{dt} &= 2m\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) I \end{aligned} \right.$$

in cui si è posto:

$$I = \pm 2\sqrt{-x^2 - y^2 - u^2 + 2xy + 2yn + 2nx}$$

ed il segno che si dovrà attribuire al radicale sarà quello che ha l'area del triangolo nei cui vertici sono situati i vortici di intensità m_1, m_2, m_3.

Del sistema VII) sono conosciuti i tre integrali:

$$\left. \begin{aligned} mu - nv &= h \\ (xy)^{-2mn} u^{m^2} v^{n^2} &= k \\ 2(x + y) &= u + v + l \end{aligned} \right\}$$

Ponendo mente all'interpretazione geometrica delle variabili, e limitandoci al caso in cui il momento di inerzia dei suddetti vortici rispetto al centro di simmetria è nullo, questi integrali si potranno scrivere:

$$\begin{cases} mu - nv = 0 \\ xy = ku\,\dfrac{m^2+n^2}{2mn} \\ 2(x+y) = u + v. \end{cases}$$

Da queste equazioni con facili riduzioni si ricava:

$$I = \pm 4\sqrt{k}\,\sqrt{u^\alpha - A}\,.\,u$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \pm \frac{2\sqrt{B - u^\alpha}}{u\sqrt{k}\,.\,u^\alpha}$$

avendosi posto:

$$A = \frac{(m-n)^2}{16n^2k}, \qquad B = \frac{(m+n)^2}{16n^2k}, \qquad \alpha = \frac{m^2 - 4mn + n^2}{2mn}.$$

Sicchè:

$$\text{VII')} \qquad -\frac{\pi}{32}\frac{du}{dt} = \pm n\,\frac{\sqrt{(u^\alpha - A)(B - u^\alpha)}}{u^\alpha}.$$

Perchè il moto sia reale bisognerà che m ed n sieno dello stesso segno — assumeremo per il seguito:

$$m > 0 \quad n > 0.$$

La quantità α potrà assumere tutti i valori da -1 a $+\infty$.

Prima di procedere alla discussione generale dell'equazione VII') osserviamo che qualora sia $\alpha = -1$ si ottiene un caso di moto già stato studiato (*). Si ponga invece:

$$\alpha = 0.$$

La VII') darà:

$$\frac{\pi}{32}\frac{du}{dt} = n\sqrt{(1 - A)(B - 1)}$$

(*) Cfr. Poincaré, l. c., pag. 93. — A. G. Greenhill, *Plane vortex motion*, " Quarterly Journal ", vol. XV, 1878.

qualora si supponga inizialmente:

$$x > y \quad I > 0$$

e d'altronde queste ipotesi resteranno verificate durante l'intiero moto, poichè in questo caso, come si verificherà nel seguito, il parallelogramma nei cui vertici sono situati i vortici resterà simile a se stesso. Ricaviamo in questo caso, scegliendo opportunamente l'origine dei tempi:

$$u = \lambda t, \quad v = \mu t, \quad x = \lambda_1 t, \quad y = \lambda_2 t$$

essendo λ, μ, λ_1, λ_2 costanti di cui la 1ª è data dalla equazione precedente, e le rimanenti vengono ricavate dagli integrali prima scritti, purchè però alla costante k si diano valori atti a verificare le diseguaglianze:

$$B > 1 > A.$$

Le traiettorie riescono in questo caso spirali logaritmiche di cui il polo è il centro di simmetria. Si ricava ciò facilmente dalle equazioni VI). Qualora però a k si diano valori per cui:

$$A = 1, \qquad \text{oppure} \qquad B = 1$$

avendosi in questi casi:

$$\frac{du}{dt} = 0$$

ricaveremo:

$$u = \text{cost}, \qquad v = \text{cost}$$

e quindi le traiettorie diverranno cerchi — i dati vortici percorrono poi questi cerchi di moto uniforme come discende dalle equazioni VI).

Ritorniamo a considerare l'equazione VII') e limitiamoci dapprima a discutere il caso in cui:

$$\alpha > 0.$$

La variabile u avrà allora un massimo:

$$u = \sqrt[\alpha]{B}$$

ed un minimo:

$$u = \sqrt[\alpha]{A}$$

e durante l'intiero moto varierà tra questi valori estremi. Dall'essere:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \pm \frac{2\sqrt{B - u^\alpha}}{u\sqrt{k}\,.\,u^\alpha}$$

$$I = \pm 4\sqrt{k}\sqrt{u^\alpha - A}\,.\,u$$

discende inoltre che il valore massimo di u (e quindi pure il valore massimo di v) corrisponde ad $x = y$, ed i valori minimi di queste stesse variabili corrispondono ad $I = 0$.

Poniamo ora che inizialmente sia:

$$u = \sqrt[\alpha]{B}; \quad I > 0.$$

La u resta funzione decrescente del tempo sino a raggiungere il suo valore minimo $\sqrt[\alpha]{A}$. In questo intervallo di tempo si ha:

$$\frac{du}{dt} < 0$$

e quindi:

$$(y - x)\,I > 0$$

e poichè inizialmente $I > 0$ sarà in questo intervallo:

$$y - x > 0.$$

D'altra parte:

$$\frac{d}{dt}(y - x)$$

si annulla con I; sicchè allorquando u raggiunge il suo minimo $(y - x)$ è massimo e > 0. Nei primi istanti successivi a quello in cui I si annulla si ha:

$$\frac{du}{dt} > 0$$

poichè ora la u è funzione crescente del tempo, e quindi:

$$(y - x)\,I < 0$$

e poichè:

$$y - x > 0$$

sarà:

$$I < 0$$

ossia I annullandosi passa dal positivo al negativo.

Proseguendo un simile ragionamento perverremo a trovare il comportamento del moto negli intervalli.

$$0 \vdash T, \quad T \vdash 2T, \quad 2T \vdash 3T, \quad 3T \vdash 4T$$

avendo posto:

$$T = \frac{\pi}{32} \int_A^B \frac{u^\alpha du}{\sqrt{(u^\alpha - A)(B - u^\alpha)}}$$

come è indicato nella tabella:

$t = 0$	$\frac{du}{dt} = 0$	$I > 0$	$y - x = 0$	u, v sono massimi
$0 \vdash T$	$\frac{du}{dt} < 0$	$I > 0$	$y - x > 0$	
$t = T$	$\frac{du}{dt} = 0$	$I = 0$	$y - x$ è massimo;	u, v sono minimi
$T \vdash 2T$	$\frac{du}{dt} > 0$	$I < 0$	$y - x > 0$	
$t = 2T$	$\frac{du}{dt} = 0$	$I < 0$	$y - x = 0$	u, v sono massimi
$2T \vdash 3T$	$\frac{du}{dt} < 0$	$I < 0$	$y - x < 0$	
$t = 3T$	$\frac{du}{dt} = 0$	$I = 0$	$y - x$ è minimo;	u, v sono minimi
$3T \vdash 4T$	$\frac{du}{dt} > 0$	$I > 0$	$y - x < 0$	
$t = 4T$	$\frac{du}{dt} = 0$	$I > 0$	$y - x = 0$	u, v sono massimi.

Dalle equazioni VI) si ricaveranno le equazioni delle traiettorie. Possiamo a questo riguardo osservare che la traiettoria del vortice m è alternativamente tangente ai due cerchi aventi per centro quello di simmetria dei vortici e di raggi rispettivamente uguali a:

$$\frac{\sqrt[2\alpha]{A}}{2}, \quad \frac{\sqrt[2\alpha]{B}}{2}$$

I tratti di essa corrispondenti agli intervalli:

$$0 \vdash 2T,\ 2T \vdash 4T,\ \ldots$$

saranno sovrapponibili mediante una rotazione attorno al centro di simmetria. Analogamente per la traiettoria del vortice $-n$.

Relativamente al caso:

$$-1 < \alpha < 0$$

è da fare una discussione analoga.

Notiamo infine che qualora sia:

$$\alpha = 1,\ 2$$

si introducono, per integrazione della VII') nelle equazioni finite delle traiettorie delle funzioni circolari od ellittiche, e quindi con non eccessiva difficoltà si può trovare la forma delle traiettorie ed il moto dei vortici lungo di esse.

Relazione intorno alla Memoria presentata dal Dr. Giovanni Negri, intitolata: *La vegetazione della Collina di Torino.*

L'A., che da qualche anno ha intraprese ricerche sulla importanza dell'azione esercitata dai fenomeni glaciali del quaternario sulla vegetazione del Piemonte, e sulla evoluzione di quest'ultima da quel tempo ai giorni nostri, pubblica, come primo risultato di queste sue ricerche, le conclusioni alle quali l'ha condotto lo studio della vegetazione dei colli Torinesi, considerati come stazione di rifugio di numerosi relitti glaciali e presi in esame nei loro limiti naturali: la pianura del *Po* e quella di *Villanova*, e ad oriente una linea congiungente gli affioramenti liguriani di *Lavriano* e *Marmorito*, in corrispondenza della quale il *facies* dei vari piani del terziario, affioranti in serie ordinata, muta notevolmente.

La memoria del Dottor Negri consta di due parti distinte,

illustranti successivamente i fattori dell'ambiente ed il tipo della vegetazione.

Nella prima sono presi in esame lo struttura orografica della regione, assai complessa e variabile, sui due versanti opposti, *padano e chierese*, poi la natura litologica dei terreni e la conseguente loro capacità di albergare tipi differenti di vegetazione; in terzo luogo il clima assai variabile da stazione a stazione ed oscillante dal mediterraneo al montano; infine l'antica, estesa, profonda azione dell'uomo.

Nella seconda parte, prendendo appunto le mosse dallo studio precedente sui fattori dell'ambiente, vengono riconosciute le stazioni delle quali la vegetazione dispone e le associazioni vegetali che vi si stabiliscono; per ciascuna di queste ultime sono indicate le principali forme biologiche e la presenza od assenza delle specie *microterme* (1).

L'A. conclude, che lo studio della vegetazione dei Colli di Torino mostra un progressivo prevalere del forme *macroterme* (2) e per lo più *xerofile* (3) provenienti dall'Astigiano, sugli elementi di origine glaciale *microtermi* e per lo più *igrofili* (4); e che agenti di tale evoluzione sono:

1) La natura del terreno, nel quale per effetto della degradazione meteorica vengono a limitarsi sempre più le stazioni favorevoli al mantenersi di una vegetazione *microterma*.

2) L'azione dell'uomo, sia in quanto, distruggendo la vegetazione boschiva, altera le condizioni di ambiente primitivo; sia in quanto crea stazioni *xerofile* in regioni precedentemente abitate da specie igrofile; sia infine, in quanto, attivamente o passivamente, introduce nella Flora, elementi estranei sempre *macrotermi*.

3) L'adattabilità a stazioni molto svariate, assai maggiore nelle specie *macroterme*, di quanto non sia nelle specie *microterme*.

Il lavoro si chiude col catalogo completo delle specie vegetali finora raccolte nei Colli Torinesi, distribuite nelle asso-

---

(1) Piante adattate a climi freddi.

(2) Piante adattate a climi caldi.

(3) Piante adattate a vivere in ambiente secco.

(4) *Igrofile*, piante adattate a vivere in ambiente umido.

ciazioni di cui fanno parte; ciò che costituisce un pregevolissimo contributo alla Flora delle nostre Colline; un catalogo ragionato dei risultati delle erborizzazioni fatte successivamente dai botanici piemontesi. Notisi: che tale lavoro di censimento non era stato fatto più a partire dall'anno 1826, epoca della pubblicazione del 2° Volume della Flora torinese di G. F. Re; che la collina nostra è il campo favorito della attività erborizzatrice di tutti i botanici, e si comprenderà quanto lavoro bibliografico, quante ricerche nei differenti erbarii, quante escursioni abbia costato all'A. questo Catalogo, nel quale ha inteso tener esatto conto di tutto quanto è stato scoperto prima di lui nello studio botanico di detta regione.

La memoria del Dottor Negri che per incarico vostro, onorevoli Colleghi, abbiamo esaminato, ci è risultata in tutte le sue parti degnissima di essere accettata nei Volumi delle Memorie accademiche, perocchè rivela nell'Autore non solo un profondo e colto conoscitore del tema trattato; ma uno studioso appassionato della Flora della regione da lui indefessamente esplorata durante un decennio.

Per queste ragioni proponiamo ufficialmente all'Accademia che il lavoro del Dr. Negri venga stampato nei nostri Volumi.

C. F. Parona
O. Mattirolo, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 29 Gennaio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Carle, Cipolla, Carutti, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario; sono scusate le assenze del Vice Presidente Boselli e dei Soci Manno, Brusa, Allievo.

È letto ed approvato l'atto verbale dell' adunanza antecedente, 15 gennaio 1905.

Il Presidente legge le lettere dei professori Angelo Colini e Giacinto Romano, i quali ringraziano l'Accademia per il premio Gautieri per la storia, loro conferito.

Il Socio Carle offre in omaggio da parte dell'autore l'opera in due volumi di Cesare L. Gasca: *Trattato della compra-vendita*, Roma, Società Editrice Laziale, 1905.

Per l'inserzione negli *Atti* sono presentate con acconci riassunti, le seguenti note:

1° dal Socio Ruffini: Antonio Mocci, *Documenti inediti sul canonista Paucapalea;*

2° dal Socio De Sanctis: Umberto Mago, *Osservazioni sul riassunto dato da Fozio dei* Περσικά *di Ctesia.*

Poscia la Classe si raccoglie in adunanza privata, e a norma dell'articolo 1° del Regolamento speciale, procede alla nomina della Commissione per il conferimento del premio di fondazione Gautieri per la *Letteratura, Storia letteraria, Critica letteraria*, triennio 1902-1904.

Riescono eletti i Soci Graf, Renier e Manno.

LETTURE

Documenti inediti sul canonista Paucapalea.

Nota del Prof. ANTONIO MOCCI.

A c. 59-60 del condaghe di S. Maria di Bonarcado posseduto dal barone Matteo Guillot (1), che gentilmente me ne concesse visione, si legge la seguente *notitia* (2):

Ego iudice Barusone de Serra potestando locu de Arborea fazo custa carta pro saltu qui do a santa Maria de Bonarcatu in sa sacratione de sa clesia nova pro anima mea et de parentes meos da unde lu cognosco su regnu de Arborea. Et pro dedimi [l. daremi] Deus et santa Maria vita et sanitate et fijos bonos ki potestent su regnu post varicatione mea, dolli su saltu de Anglone qui levo daue su regnu de Piscopio cum voluntate mea bona et de omnia fratre meus. Dollilu daue in si segat daue sa riola de clesia et falat via derettu assa + (3) ki est facta in issa petra suta su sueriu pares cum ipsu quercu de Mariane de Scanu et ergesi a su castru de Serra de copios ubi est facta sa + in issa petra et falat assu flumene a bau de berbeges ube si amesturant appare sos flumenes et ue si ferint appare cum issu saltu dictu de Petra Pertusa.

Ego custu datu li fazo ego iudice Barusone a santa Maria de Bonarcatu: appant inde podere usque in seculos monagos qui hant su iure in issa badia pro anima mea et de parentes meos et de pastu et de aqua et de glande et de aratoriu in castigandolu co et ateros saltus de regnu. Et non apat ausu non iudice, non curatore non mandatore. non nulla maiore de regnu dessa domo de Piscopio a kertarende et ne

(1) Al colto barone rendo anche pubblicamente sentite grazie per le molteplici gentilezze usatemi.

(2) Sull'indole e sulla materia dei condaghi cfr. Besta in " Bullettino bibliogr. sardo ", III, f. 31-32, p. 104-109 (1903), e sull'origine greca del nome, che nel medio evo fu spesso sinonimo di *breve memoratorium*, il Bonazzi, *Condaghe di S. Pietro di Silki*, Cagliari-Sassari, 1900, p. xlii e p. 149 e il Meyer-Lubke, *Zur Kenntniss der Altlogudoresischen*, Wien, 1902, dai " Sitzungsberichte d. Wien. Akad. d. Wissensch. ".

(3) Leggasi naturalmente *gruke*.

ad intrareve in cussu saltu a turturu de sos monagos. Testes: donnu Comita de Lacon, archipiscobu d'Aristanis, donnu Paucapalea piscobu de sancta Iusta, donnu Alibrandinu piscobu de Terralba, donnu Merellu piscobu d'Usellus, donnu Azu archiepiscobu de Turres, donnu Marianu Thelle piscobu de Gisarclu in co furunt a sacrare sa clesia et issos et populum quantu ibi sun a sacratione sunt testes.

Il documento non è del tutto ignoto. Già il Mittarelli (1) infatti — e da lui attinse il Tola (2) — lo riprodusse in parte da un apografo dell'archivio di S. Michele in Borgo, la celebre chiesa pisana (3): e parzialmente lo pubblicò poi anche l'Angius, desumendolo a quanto sembra da un apografo del condaghe della badia donatoria (4). Ma solo oggi è dato a me di poterne offrire una edizione completa in base al condaghe originale e non sarà certo ingrata, e perchè offre uno dei più antichi soggetti dell'idioma arborense (5) e perchè, mentre getta qualche raggio di luce su un periodo assai oscuro della storia sarda, servirà — confidiamo — a porre in miglior risalto una figura eccelsa di prelato, che emerse non solo nella storia ecclesiastica dell'isola, ma pur in quella dell'Italia tutta e potrà porgere al tempo stesso un nuovo criterio d'orientamento riguardo alla tuttora controversa cronologia del *Decretum* di Graziano e dei primi decretisti.

L'esegesi di esso non presenta soverchie difficoltà: il giudice in occasione della consacrazione della chiesa nuova, cedeva infatti al monastero camaldolese di S. Maria di Bonarcado, situato nel Campidano di Milis, il salto (6) di Anglona, che non

---

(1) Mittarelli, *Ann. Camald.* Venezia, 1758, III, p. 229 e App. coll. 443-44.

(2) Tola, *Cod. diplom. Sardo*, I, p. 217, in *Mon. hist. patr.*, XIII.

(3) Cfr. Bonaini, *Statuti pisani.* Firenze, 1854, III, p. 69 e p. 144-45.

(4) Angius, v. *Sardegna*, in Casalis, *Dizionario geografico*, Torino, 1851, vol. XVIII^{ter}.

(5) Interessante è specialmente la forma *turturu* invece del *tutturu* che si legge nel condaghe di S. Pietro di Silchi: ne risulta affermata la derivazione e il significato che già alla parola attribuirono il Bonazzi, il Meyer-Lubke ed il Guarnerio. Anche è notevole il verbo *amesturare* nel senso di confluire, mescer le proprie acque.

(6) Sul significato tecnico di questa voce cfr., oltre al Pillito, *Dizion. del ling. archiv.*, Cagliari, 1886, p. 63, il Besta, *Dir. sardo nel m. e.*, Torino, 1899, p. 66-68 e *Nuovi studi su le orig., la storia e l'organizz. dei giudicati sardi*, Firenze, 1901, p. 70 e sgg. (estr. dell' " Arch. stor. ital. „, 1901,

va cercato nella regione di tal nome esistente nella Sardegna settentrionale (1), ma era senza dubbio situato nel giudicato arborense, che dal documento medesimo con interessantissimo ragguaglio risulta esser stato detto *de Piscopio*, così come il cagliaritano fu detto *de Pluminos*.

Ben più difficile è determinarne la data, giacchè essa non risulta in modo preciso dal condaghe. Il Mittarelli e il Tola propendevano ad assegnarla al 1147 (2), ma il documento potrebbe anche essere dell'anno precedente.

Ed ecco perchè.

Fino al 1145 il giudicato arborense fu retto da Comita II; ma in quell'anno l'arcivescovo pisano Baldovino, passando nell'isola quale primate e legato pontificio colpiva della scomunica e spodestava quel giudice, a Pisa e a Roma inviso forse più che per un tirannico governo dei suoi sudditi, perchè avversava la potente repubblica dell'Arno nelle sue mire di predominio ed era insieme restio a un pieno riconoscimento della supremazia pontificia, mentre agitava nell'animo propositi di conquista sull'isola tutta (3). La causa occasionale delle mosse di Baldovino potè anche essere stata l'aver Comita mosso guerra al pio Gonnario di Torres, ma altre cause dovettero agire nell'animo e congiurare alla rovina del ribelle e ostinato regolo arborense

---

fasc. 1), il Mondolfo, *Terre e classi sociali in Sardegna*, Torino, 1903, estr. della " Riv. ital. per le scienze giur. „ e il Solmi, *Ademprivi*, Modena, 1904 (estr. dall' " Arch. giur.) „.

(1) Ciò sfuggì ai precedenti scrittori, i quali pensarono invece realmente all'Anglona del giudicato turritano. Ma come sarebbero potuti sorgere i diritti del giudice arborense su quelle terre? Forse perchè le ebbe quale dote della prima moglie Pellegrina di Lacon, colei che fu madre al giudice Pietro, a Orzocorre e a Costantino? Pur questa ipotesi avrebbe per sè una ben scarsa probabilità: probabilmente Pellegrina non fu dei Lacon di Torres, ma della stessa casa regnante in Arborea in modo che, quando si presentò la prospettiva di più cospicue nozze, con Algabursa, il matrimonio fu facilmente annullato come quello ch'era contratto fra parenti in grado sì stretto da escluderne la legittimità. Che il matrimonio sia stato sciolto è in dubbio perchè Pellegrina viveva ancora mentre già regnava la nuova regina. L'Anglona arborense è attestata anche dal Lippi, *Inventario del R. Archivio di Stato di Cagliari, ecc.*, Cagliari, 1902.

(2) Nessun valore hanno le affermazioni del Bima, *Serie cronologica degli arcivescovi e vescovi del regno di Sardegna*, Asti, 1844, p. 103.

(3) Martini, *St. eccl. della Sardegna*. Cagliari, 1839, pp. 183-185.

che vedea contro di sè alleati l'antistete di Pisa e il pontefice romano (1).

Mentre un illustre loro concittadino occupava la cattedra di S. Pietro, i pisani ebbero l'intuizione che i tempi potevano essere assai propizi all'affermazione della loro egemonia e si strinsero di buon animo intorno al loro arcivescovo nella lotta contro il fiero ed audace Comita, ai cui danni si rivolgevano ora quelle armi che già Gregorio VII, credendo che fosse in sua facoltà di deporre principi e re e imperatori (2), avea minacciate altra volta ai regoli di Sardegna.

Non era egli stato il più fido alleato della rivale Genova? Tornato Baldovino in Pisa, i consoli e il popolo del fiorente comune si legarono appunto con solenne giuramento a parteggiare per Gonnario di Torres e pei suoi figli, affinchè non perdessero il giudicato; e l'aiuto promesso al giudice turritano era naturalmente una dichiarazione di guerra all'arborense. Poco dopo Comita per morte o per abdicazione o per deposizione violenta (3)

---

(1) Cfr. Muratori, *Rer. ital. script.*, Milano, 1723, III, pp. 473-479; Roncioni, *Istorie pisane*, in " Arch. stor. it. „, serie I, vol. VI, parte I, p. 257 (Firenze, 1884); Santoro, *Le relazioni fra Pisa e la Sardegna dal 1015 al 1165*, Roma, 1896, pp. 68-69. Sulla politica ecclesiastica dei giudici è specialmente a vedersi il Dove, *De Sardinia insula contentioni inter pontifices romanos atque imperatores materiam praebente*, Berolini, 1886, p. 39 e 199, con le aggiunte fatte nell'altro suo articolo *Corsica und Sardinien in Schenkungen an die Päpste*, p. 221, nei " Berichte d. histor. class. d. bay. Akad. „ del 1894. Un giudizio complessivo di essa, acuto e giusto, è nel Ruffini, *Lineam. stor. delle relazioni fra lo Stato e la Chiesa in Italia*, presso Friedberg, *Diritto eccles.*, Torino, 1893, p. 113.

(2) Cfr. specialmente, per le teorie affermate da Gregorio VII, il bel libro del Solmi, *Stato e Chiesa secondo gli scritti politici da Carlomagno al concordato di Worms*, Modena, 1901, pp. 110 sgg.

(3) Non è a credersi però che a Comita il papa abbia sostituito Gonnario di Torres: S. Bernardo di Chiaravalle in una epistola mandata il 1146 ad Eugenio III gli raccomandava bensì di mantenere l'opera del compianto Baldovino, morto il 6 ottobre del 1145, per riguardo alla *excomunicatio arborensis iudicis quia non nisi iuste hoc virum bonum fecisse credebat*, e aggiungeva: *Porro turritanus iudex quia bonus dicitur esse princeps, sit vobis maxime commendatus et a vobis manuteneatur* (cfr. *Opera omnia*, Lione, 1867, I, p. 108, ep. CCXLIV), ma con quelle parole l'abate di Chiaravalle non volle certamente consigliare il papa di sostituire Gonnario a Comita nel giudicato di Arborea, come credettero dopo il Mattei (*Sardinia sacra*, Roma, 1758, cap. II, p. 31), l'Angius e il Martini, ma consigliò solo di conservar Gonnario nei suoi possedimenti.

(forse la prima ipotesi è la più probabile), scomparve dalla scena politica (1): e, salendo al trono il figlio suo Barisone, fu necessariamente tratto ad avvicinarsi al pericoloso nemico, e forse di tale avvicinamento è testimone il nostro atto: la liberalità da lui compiuta a favore di una figliale della celebre badia di S. Zenone (2), potè benissimo rappresentare un atto di resipiscenza o di devozione verso il comune pisano, e dovette esser fatto precisamente agli inizi del suo regno.

Un termine *ad quem* abbastanza sicuro risulta del resto segnato dall'atto che e nel condaghe di S. Maria di Bonarcado (3) e nella pergamena vista dal Mittarelli (4), seguiva immediatamente al precedente per dar notizia della donazione del salto di Petra Pertusa fatta dallo stesso Barisone, cui avrebbero presenziato Villano, arcivescovo di Pisa, Costantino giudice di Cagliari, Gonnario di Torres e Costantino di Gallura. Infatti la visita di Villano avvenne probabilmente subito dopo che a lui, con bolla del 29 maggio (5) 1146, Eugenio III ebbe riconfermato, nel passar da Pisa (6), le prerogative e i privilegi con-

---

(1) *Le Pergamene d'Arborea illustrate dal* Martini, Cagliari, 1863, pp. 484-485, lo fanno morto in Terrasanta alla crociata del 1147: ma il ragguaglio è più che dubbio. Il Fara tra Comita e Barisone inserì come regolo Orzocco, fratello a Comita. Resse forse il giudicato finchè Barisone raggiunse la maggior età? O fu usurpatore nel suo corto regno? Cfr. Martini, *Biografia sarda*, Cagliari, 1847, p. 140, sul v. *Barisone*.

(2) Mi sembra opportuno premunire il lettore contro un possibile errore. La donazione di Barisone non è la dotazione iniziale della badia, e la consacrazione della chiesa nuova seguì probabilmente la riedificazione e ristorazione d'una chiesa più antica; non si tratta della fondazione *ex novo* di un tempio dovuto alla larghezza del giudice.

(3) A. c. 60-61.

(4) Il Mittarelli e dietro lui il Tola hanno a torto confuso le due donazioni sì da presentare come intervenuti anche al primo atto i personaggi che intervennero al secondo. Se Villano fosse stato presente anche al primo, certo si sarebbe ricordato prima dei vescovi sardi.

(5) Cfr. Machin, *Libri II defensionis primatus archiepisc. calaritani*, Calari, 1639, p. 143; Viviani, *Praxis iuris patronatus*, Venezia, 1652, pp. 75 e segg.; Ughelli, *It. sacra*, III, p. 394; Pflugk-Harthung, *Acta pontificum romanorum inedita*, Stuttgart, 1884, III, pp. 77-78.

(6) Pasqui, *Docum. p. la storia della città di Arezzo nel m. e.*, Firenze, 1899, I, p. 5, 69, in *Doc. di stor. ital.*, vol. XI. Su Villano cfr. le *Mem. ist. dei più illustri uomini pisani*, Pisa, 1792, III, p. 54, e per la sua politica il Volpe, *Studi sulle istituzioni comunali a Pisa*, Pisa, 1902.

cessi ai predecessori. E, se così è, evidentemente il nostro documento potrebb'esser tutt'al più dell'anno stesso.

Il ricordo dei vescovi che figurano con Paucapalea non oppone difficoltà all'accettazione della data da noi proposta. Se pure di Comida di Lacon, che tenne la cattedra di Oristano per lunga serie d'anni, s'ignora la data dell'elezione, il Gams (1) ci apprende che Ildebrando fu chiamato al vescovado di Terralba il 1144, che Azo fu arcivescovo di Torres dal 1146 al 1164 (2), che Mariano Thelle reggeva la sede di Bisarcio fin dal 1139 (3).

Posto in chiaro il significato politico del documento e fissata con grande approssimazione la sua età, abbiamo una ferma base per gli ulteriori studi che intendiamo dedicare più specialmente alla persona d'uno dei testimoni dell'atto stesso.

Tra essi figura infatti come vescovo di S. Giusta un Paucapalea. Il quale riappare in altro documento del medesimo condaghe di S. Maria di Bonarcado, che qui riproduciamo.

Ego priore Iohanni ki fazu r[ecordu] ca posuit donnu Bericu de Copedu a santa Maria de Bonarcadu sa domestica sua de padru de domo et ipsa domestica de muru d' ulumos cum sas palas de rure et cum s'ortu sou de sas benas de Turre et ipsas venas suas d'aba viva et ditas venas et ditas domesticas qui siant pergujares de Santa Maria de Bonarcadu et de santa Vittoria de Sella pro pastu et pro lavore. Testes judike Parasone et donnu Comite de Lacon archiepiscopu, Pauca palea piscopu de santa Iusta et donigellu Orzoco curadore de Gilciber et tota corona (4).

È ovvio il pensare al Paucapalea, che in un vecchio esemplare del *Decretum* grazianeo del convento di S. Maria della Minerva, ora conservato nella Biblioteca casanatense di Roma, al c. 209, 1, c. 10 era dato sulla fede d'Uguccione e di Giovanni Teutonico (*Hu* e *Jo*), come autore delle *Paleae* e come *discipulus Gratiani* (5). Potrebbe veramente trattarsi del celebre cano-

(1) Gams, *Series episcoporum*, pp. 841, 197.

(2) Cfr. *Cod. Dipl. Sardo.*

(3) Cfr. *Cod. Dipl. Sardo.*

(4) a c. Fl.

(5) Cfr. Sarti, *De claris archigymnasii bononiensis professoribus*, Bononiae, 1769, I, parte II, p. 354.

nista (1) che seguendo le orme del maestro (2), fu tra i migliori interpreti del suo pensiero e fra quelli che più contribuirono alla fortuna della sua opera? (3).

Certo il Paucapalea, cui si allude nei due documenti surricordati, non era sardo: i vescovi nativi dell'isola non s'indicavano infatti all'uso continentale col semplice nome, ma portavano altresì indicazioni della famiglia ond'erano originarii (4). Egli veniva dunque dal di fuori. Quasi tutti poi i più distinti canonisti del secolo decimosecondo, poichè le opere e l'insegnamento ebbero procurato loro solida fama, salirono la cattedra vescovile. Ognibene, l' autore dell' *Abbreviatio Decreti*, poco dopo la compilazione di questa, fu eletto vescovo di Verona (5); Rufino, dopo aver scritto tra il 1157 e il 1159 la lodata sua *Summa*, tenne la sede di Assisi e come vescovo di Assisi partecipò al concilio lateranense del 1179 (6); Sicardo, canonista e storico egregio, fu eletto vescovo di Cremona, sua patria, il 1185 (7); Uguccione da Pisa ebbe la cattedra di Ferrara nel 1190, e

---

(1) Cfr. su lui specialmente il Sarti nell'opera succitata, ov'è riassunta la migliore letteratura a lui precedente, il Maassen, *Paucapalea*, Wien, 1859, dai " Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. „, vol. XXXI, e lo Schulte, *Die summa des Paucapalea*, Giessen, 1890, e riassuntivamente in *Gesch. der Quell. u. Lit. d. can. Rechts*, Stuttgart, 1875-1880, I, p. 105.

(2) È noto che Paucapalea chiama sempre Graziano coll'epiteto di *magister* e pur nell'introduzione della sua *Summa* sonvi " Magistri autem hoc opus condentis ipsa decreta sunt materia „. Gli altri canonisti, che non derivarono direttamente da lui, lo designavano invece costantemente per nome. Cfr. Schulte, *Die Summa d. Stephanus tornacensis*, Giessen, 1891, p. 5-6 e *Die Summa d. Rufinus*, Wien, 1892. Quanto a Rufino ora è a consultarsi di preferenza l'edizione del Singer, *Die Summa decretorum des magister Rufinus*, Paderborn, 1902.

(3) Sul nome del canonista non vi può essere più dubbio: se qualcuno lo disse *Quota palea* (cfr. Diplovataccio, *De praestantia doctorum*, ed. Pescatore, Greifswald, 1888, p. lxxiv), ciò accadde senza dubbio per errore.

(4) Già i due documenti qui pubblicati danno la riprova della nostra affermazione, ma si possono anche consultare a suo sostegno il condaghe di S. Pietro di Silchi, i documenti pubblicati dal Tola e i regesti che il Baudi di Vesme diede delle pergamene dell'archivio arcivescovile cagliaritano.

(5) Cfr. Schulte, *Gesch. d. Quellen u. Lit. d. kan. Rechts*, I, p. 119.

(6) Cfr. Ruffini, *La Summa Decretorum di maestro Rufino*, in " Rivista t al. p. le scienze giur. „, XXXV, pp. 120-121.

(7) Schulte, *Gesch. d. Quellen, ecc.*, I, p. 143.

finalmente Stefano tornacense, il discepolo di Rufino, fu creato vescovo di Tournay nel 1192 (1).

È forse strano che a Paucapalea siansi accordati gli stessi onori? V'era nelle scuole una tradizione che lo facea persin cardinale: intessuta con elementi favolosi concernenti le sue pretese gare con Graziano, fu raccolta infatti, tra gli altri, da Giovanni da Imola, da Giasone del Maino e dal Diplovataccio (2). Ma se nella serie dei cardinali non può ancora collocarsi con certezza, non è inverosimile invece che la tradizione abbia avuto la sua base nel fatto ch'ei fu realmente vescovo.

Nè la sede di S. Giusta era indegna di lui. Era infatti fra le principali d'Arborea e interessava altamente al pontefice l'affidarla a persona autorevole che dominando le difficoltà della situazione, fosse abile e strenuo difensore delle ragioni ecclesiastiche. Nè è assurdo il pensare, che, poichè Paucapalea fu senza dubbio monaco, e pei suoi accenni a Montecassino (2) ed alle regole di S. Benedetto (3) è abbastanza probabile che appartenesse all'ordine onde usciva lo stesso Eugenio III, anche l'esistenza di relazioni personali col pontefice abbia spianata la via alla sua promozione.

Sono questi — lo riconosciamo — dei semplici indizi; ma nel loro complesso depongono fortemente a favore dell'identificazione da noi proposta, massime di fronte all'assoluto difetto di documenti più sicuri e più espliciti, a sostegno delle altre identificazioni prima di noi tentate.

Ammessa la nostra identificazione, ne seguirebbero alcune importanti conseguenze. Anzitutto, respinti i dubbii del Maassen che tendeva a crederlo d'origine francese (3), converrà concludere che Paucapalea era veramente italiano. E, poichè romano non fu dal momento che nella *Summa*, c. 26, c. 6, omise il *Cum*

---

(1) Schulte, *Gesch. d. Quellen, ecc.*, I, p. 28.

(2) Cfr. per tutti il *De praestantia doctorum* di questo autore nell'edizione del Pescatore già citata e il Barbosa, *Coll. doct. in ius pontif.*, Lione, 1636, vol. V, p. 2.

(3) Maassen, *Paucapalea*, pp. 465-466. I pochi accenni alle consuetudini franche e alla Chiesa gallicana che si leggono nella *Summa*, c. 2, q. 7; d. 11, c. 2; d. 14, c. 1; d. 38, c. 10, non dànno prove sufficienti per crederlo francese e precisamente senonese, mentre l'uso delle leggi e del diritto longobardo lo dicono senza dubbio italiano.

simus romani delle fonti, e non era nemmen bolognese, poichè parlando dei *bononienses* (1) fa egli stesso manifesta una ben diversa provenienza e d'altra parte non risultano appoggiate da fondamenti validi le congetture che lo faceano piemontese (2) o lombardo (3) e precisamente o astigiano (4) o alessandrino (5) o cremonese (6); l'esser stato chiamato ad occupare un vesco-

---

(1) *Summa*, 16, c. 5; e 32, q. 7, c. 18; c. 35, q. 2 c. 3.

(2) Dal Pancirolo in qua molti lo pensarono più o meno esplicitamente.

(3) Nell'Archivio di Stato di Milano in una pergamena del monastero di S. Benedetto del Polirone, 66 del 1122, figura però un *Jacobus Paucapalea*, e nel 1178 un *Albertinus qui vocatur Paucapalea* si trovava nel nonantulano: cfr. Tiraboschi, *Storia della badia di Nonantola*, Modena, 1748, III, p. 303. Un altro Ugo Paucapalea è ricordato nella cronaca di fra Salimbene, cfr. *Mon. hist. ad prov. parm. et plac. pertin.*, Parma, 1827, p. 413.

(4) Ei certo non ha nulla da fare coi seguaci di Pocapaglia che nell'ultimo quarto del secolo dodicesimo ebbero il dominio di quel feudo appartenente prima al monastero di Breme e poi alla chiesa vescovile di Asti. Cfr. Gabotto, *Ricerche e studi sulla storia di Bra*, Bra, 1892, I, p. 141; Manno A., *Dizion. feudale degli antichi Stati cont. della monarchia di Savoia*, Firenze, 1895, p. 201, v. *Pocapaglia*; Mathis, *I Signori di Pocapaglia*, Bra, 1901, p. 7. Solo nel 1199, Guglielmo Brayda, dividendo coi fratelli i feudi paterni, consolidò in sè Pocapaglia, derivandone il cognome alla sua casa, cognome che già il 16 settembre 1203, in un atto alessandrino, era assunto da Rufino G. Gasparolo, *Codex qui Liber Crucis nuncupatur*, Roma, 1889, pp. 67-68.

(5) Il primo a pensare ad Alessandria fu il Pancirolo che nel *De claris legum interpretibus*, Lipsia, 1721, II, 2, p. 317, parlando delle palee o del loro autore, ne avvicinò il nome all'*oppidum* denominato *Paleae, in subalpinis*, anzichè al borgo di Poca-paglia, su cui vedi il Casalis, op. cit., vol. XI, alludeva certamente ad Alessandria. Cfr. Ficker, *Forschungen zur Reichs- u. Rechtsgesch. Italiens*, Innsbruck, 1878, vol. II, indice.

(6) Augustini, *Opera omnia*, Lucca, 1767, III, p. 26. Parrebbe che la famiglia onde lo facea generato si chiamasse Pagnia, ma d'un tale casato non è notizia nè nell'Astegiano, *Codex dipl. cremonensis*, Torino, 1898, in " Mon. hist. nat. „, serie II, vol. XXI e XXII e nemmeno nelle schede manoscritte del Lancetti. Nè ci è riuscito di sapere onde l'erudito arcivescovo di Tarragona abbia tratto le sue notizie. Notevole è piuttosto contro la sua affermazione il veder come il cremonese Sicardo scrivendo nella sua *Summa* al decreto intorno alla partizione e rubricazione delle varie parti del decreto affermasse che *primam divisit, ut quidam aiunt, Paucapalea et causas et distinctiones* e medesimamente *tertiam, ut aiunt, Paucapalea in quinque distinctiones:* se fosse stato cremonese, lungi dal rimettersi ad una vaga tradizione, quel dotto uomo avrebbe dato senza dubbio notizie precise.

vado sardo potrà piuttosto indurre a crederlo toscano; anche nella Toscana fu abbastanza comune il nome di Paucapalea (1); il cui significato simbolico è facilmente comprensibile. È noto poi che quella regione già nei secoli undecimo e dodicesimo primeggiava fra le altre provincie italiche per la sua cultura giuridica (2), poichè non solo vi si coltivava il diritto longobardo (3), ma anche il romano: e una delle caratteristiche e uno dei meriti del Paucapalea fu quello appunto di aver pel primo fatto uso delle leggi romane per l'interpretazione del Decreto.

Ma un altro e più importante corollario deriva dalle nostre osservazioni. L'opera scientifica di Paucapalea, che ancora porta in sè l'impronta della sua origine dalla scuola e della sua finalità didattica (4), dev'essere senza dubbio anteriore alla sua nomina a vescovo, dev'essere cioè anteriore al 1146. La più recente decretale riassunta nelle *Palee,* che sembrano con certezza

---

(1) In una pergamena dell'8 febbraio 1176 della Certosa di Calci, ora esistente e visibile nell'Archivio di Stato di Pisa, si parla della vendita che un tal Villano del fu Guido Baroncelli fece ad Alberto di Bernardo di un pezzo di terra aratoria in Pratoscello confinante con altra di Bandino del fu Paucapalea. Cfr. Targioni-Tozzetti, *Viaggi in Toscana*, Firenze, 1768, I, p. 382 sgg. Pratoscello trovavasi presso Monte Amiata: cfr. Brunetti, *Cod. dipl. toscano*, Firenze, 1806, parte I, p. 503. Anche a Viterbo il 28 luglio 1278 fu testimonio ad un atto un Jacopo de Paucapalea *cubicularius domini papae* (cfr. Lunig, *Cod. Ital. diplom.*, Francoforte, 1732, III, col. 1483-1488 e Dal Borgo, *Raccolte di scelti diplomi pisani*, Pisa, 1775, p. 121), che poi in altro documento del 21 luglio 1291 figura quale capitano di Acquapendente; cfr. Fumi, *Cod. dipl. della città di Orvieto*, Firenze, 1884, p. 34, in *Docum. di stor. ital.*, vol. VIII.

(2) Cfr. per periodo più remoto Chiappelli, *Recherches sur l'état des études du droit romain en Toscane au IXe siècle*, Paris, 1896, pp. 12-13 e pp. 24-25 della " Nouv. Revue hist. d. droit „, e per tempi più recenti il Bonamici, *I giureconsulti di Pisa al tempo della scuola bolognese,* in " Studi giur. e stor. per il centenario dell'Univ. di Bologna „ e *Della scuola pis. e del dir. rom.*, in " Annali delle Università toscane „, vol. XIV.

(3) La conoscenza del diritto longobardo ha traccie in *Paucapalea*, *Summa*, d. 3, c. 3; c. 1, q. 1, c. 103; c. 2, q. 4; c. 27, q. 10. I due ultimi passi sono i più interessanti poichè, se i primi potrebbero anche far apparire il diritto longobardo come qualche cosa di estraneo all'autore, rivelano invece che il diritto stesso era vigente nella sua patria.

(4) Cfr. la prefazione dello Schutte alla *Summa.*

potersi riferire a lui, è di Celestino II (1), e, poichè le palee dovettero essere aggiunte al decreto dopo che Paucapalea riassunse l'opera sua di glossatore nella *Summa* (2), questa dovette esser fatta ancor prima del 1143-1144: siamo quindi indotti a riportare la compilazione del Decreto intorno al 1140 (3).

Un nuovo argomento, adunque, queste nostre ricerche aggiungono a quelli che da varie parti furono recentemente addotti in favore di questa data (4), e, per combattere l'opinione prima dominante, che ritardava la origine del Decreto di un buon decennio.

A conclusione della nostra breve nota soggiungiamo soltanto che già nel 1164 la sede di Santa Giusta (5) era tenuta da quell'Ugo che sì importante parte ebbe nelle trattative tra Barisone d'Arborea e Federico I: e forse la reggeva già da qualche tempo per aver acquistato sull'animo del regolo tanto

---

(1) *Summa*, c. 35, q. 6, c. 2.

(2) Molte *palee* del resto furono aggiunte al Decreto anche in tempi di assai posteriori, cioè dopo la redazione della *Summa* di Rufino; cfr. Singer, nel proemio alla sua edizione di essa, già citata, p. c e segg.

(3) Cfr. la mia *Nota storica giuridica sul decreto di Graziano*. Sassari, 1904, p. 11 e sgg.

(4) Che il Decreto di Graziano abbia avuto origine in un anno più prossimo al 1140 che non al 1150 aveva già affermato l'ultimo, autorevolissimo editore di quell'opera, il Friedberg (in " Zeitschrift für Kirchenrecht „, vol. XVII, 1882, p. 397). Recentemente il Fournier (*Deux controverses sur les origines du décret de Gratien*, Macon, 1898, anche in " Revue d'histoire et de littérat. religieuse „, tom. III, pp. 97, 253) ha con validissime ragioni sostenuto che la redazione del Decreto abbia da porsi, precisamente come noi diciamo, intorno all'anno 1140. La sua opinione ebbe di poi il plauso del Friedberg, *Lehrbuch der Kirchenrechts*, 5ª ediz., Lipsia, 1903, § 40, p. 128, nota 2. A sostegno della data da noi accolta aveva del resto fatto di già un calzantissimo rilievo il Patetta, " Rivista italiana per le Scienze giuridiche „, XII, 1891, p. 319.

(5) A proposito del rapido influire della coltura canonista continentale nell'isola sarda, di cui anche Paucapalea sarebbe stato uno degli autori, ricordo anche qui il documento del 25 marzo 1229, di cui dà notizia il Solmi, *Sul periodo della legislazione pisana in Sardegna*, nel " Bull. dell'Ist. stor. it. „, n. 25. Accanto al Decreto e alle tre prime compilazioni delle Decretali la chiesa di S. Gallia possedeva la *Summa* di Uguccione, con altra *Summa* adespota delle Decretali e una *Summa* pure adespota *De matrimonio*.

ascendente. La data della morte del nostro canonista potrebbe quindi determinarsi approssimativamente intorno al 1160 (1).

Osservazioni sul riassunto dato da Fozio dei Περσικά *di Ctesia.*

Nota di UMBERTO MAGO.

Per parecchi dati di storia persiana i Περσικά di Ctesia di Cnido sono nostra unica fonte, per altri ci presentano una versione notevolmente differente dalla comune. Com'è noto, noi conosciamo i Περσικά quasi esclusivamente per un magro estratto contenuto nella Biblioteca di Fozio; è perciò assai interessante e per alcuni problemi cronologici e storici assolutamente necessario studiare il valore del riassunto foziano di fronte all'originale. Alcuni ammettono nell'epitome gravi errori di sostanza, altri che il riassunto sia nel complesso fededegno, altri ancora come il Marquart (2), infirmando l'attestazione di Fozio, non ammettono derivazione diretta dell'estratto da Ctesia. Siccome quest'ultima opinione potrebbe condurre a gravi conseguenze e d'altra parte nessuno, ch'io sappia, ancora ha risposto all'argomentazione del Marquart, credo sia opportuno anzitutto esaminarne in breve il valore.

Il Marquart (3) restaurata, a parer suo, la vera lezione del

---

(1) Il Condaghe di S. Maria di Bonarcado a c. 5 e a c. 29 mi permette di aggiungere alla serie dei vescovi di S. Giusta un nome ignoto, quello di Bonaccorso, d'origine continentale e probabilmente toscana. Che sia un predecessore di Paucapalea e possa inserirsi tra l'Agostino che figura nel *Cod. dipl. sardo,* I, pp. 196-197 e lui, è escluso dal fatto che in ambo i luoghi l'atto che lo ricorda segue alla donazione del 1° novembre 1213 che il Tola riporta a p. 320. Va dunque collocato nei primi anni del secolo decimoterzo.

(2) *Die Assyriaka des Ktesias,* in " Philologus „, Supplementband VI (1891-93), pag. 503-658.

(3) Op. cit., p. 592. Egli suppone che nel passo di Fozio (Περσικά, c. 1): καὶ ἐν τὸ ζ' καὶ η' καὶ ι' καὶ ια' καὶ ιβ' καὶ ιγ' (Κτησίας) διέξεισι τὰ περὶ Κύρου καὶ Καμβύσου καὶ τοῦ Μάγου, Δαρείου τε καὶ τοῦ Ξέρξου, dopo καὶ ιγ' si debba inserire καὶ ιδ'.

cap. 1 del riassunto dove si parla della divisione in libri della storia dei re persiani da Ciro a Serse compreso, osserva come, malgrado la sproporzione del numero dei libri dedicati da Ctesia a ciascun regno, la storia di Cambise, Sfendadate, Dario e Serse (compresa in Ctesia in due libri) occupa in Fozio uno spazio maggiore di quella di Ciro (compresa in Ctesia in cinque libri) e che in generale presso Fozio è abbastanza proporzionatamente divisa la materia dei singoli regni. Osserva quindi che nel nostro riassunto i singoli libri dell'opera originale sono riuniti in gruppi. Il primo è costituito dai libri VII-XIII (o secondo l'accennata correzione VII-XIV), il secondo dai libri XIV (secondo il Marquart XV)-XVIII. Al termine del XIII (XIV) non è indicato il principio d'un nuovo gruppo di libri: ciò sarebbe dovuto ad una distrazione del Patriarca. Viene infine un gruppo costituito dai libri XIX e così pure XX, e dai libri XXI-XXIII. Da tutto ciò si può riconoscere che il nostro estratto è condotto sur un piano sistematico, turbato dalla accennata distrazione di Fozio in un luogo d'importanza capitale, e questo appunto induce a credere che il piano sistematico, il raggruppamento di libri non sia opera di Fozio, ma già sia stato da lui trovato in un'epitome anteriore, ch'egli avrebbe a sua volta compendiata. A questo risultato conduce pure secondo il Marquart il paragone fra l'estensione del sunto dei Περσικά e quello di altri riassunti del *Myriobyblon*; p. es. quello degli Ἰνδικά o V libro di Agatarchide περὶ τῆς ἐρυθρᾶς θαλάσσης occupa da solo più spazio del compendio di tutta la storia persiana di Ctesia. Ora sappiamo di una epitome di Ctesia in tre libri composta da Panfila, dotta greca del tempo di Nerone (1). Questa divisione in tre libri concorda molto bene con quella trovata a base del sunto foziano. In tal caso soltanto si comprende perchè Fozio abbia trattato con estrema brevità parecchi episodî ed altri abbia interamente omessi; anche il fatto che manca presso di lui la storia assira si può soddisfacentemente spiegare. Strabone (XIV, p. 656) chiamando l'opera di Ctesia τὰ Ἀσσυριακὰ καὶ τὰ Περσικά ci fa intendere che già ai suoi tempi queste due parti erano separate; ora Panfila può aver compendiato solo la seconda. Si comprende pure così perchè siano sì rari gli ionismi nel riassunto foziano e perchè siano

(1) Suid., s. v. Παμφίλη.

modernizzati dei nomi che Ctesia aveva certamente scritti in altro modo (p. es. Ἀγβάτανα, Δερβισσοί sono cambiati in Fozio in Ἐκβάτανα, Δέρβικες), mentre sembra difficile attribuire questo rimodernamento all'opera di Fozio.

Fin qui il Marquart: cominciando per comodità di discussione dall'ipotesi che l'epitome riassunta da Fozio sia quella di Panfila, osservo che Suida, a cui il Marquart s'appoggia, dice ch'essa compose tra altri riassunti ἐπιτομὴν τῶν Κτησίου ἐν βιβλίοις γ': stando a quest'espressione, l'ipotesi che Panfila abbia riassunto i soli Περσικά mi pare arbitraria. Posto ora che Panfila abbia compendiato, come pare dal passo di Suida, tutta l'opera storica di Ctesia, la divisione in gruppi di libri trovata dal Marquart a base del sunto foziano, non può evidentemente corrispondere a quella in tre libri dell'epitome di Panfila, chè rimarrebbe esclusa dalla divisione la storia antepersiana, la quale (poichè la divisione in gruppi di libri in Fozio s'inizia solamente col VII di Ctesia, e con questo pure cominciava secondo il Marquart il primo libro di Panfila) dovrebbe essere stata oggetto di un altro libro almeno nel compendio di Panfila, che avrebbe così dovuto avere almeno quattro invece di tre libri come Suida riferisce.

La presenza poi di certe forme caratteristiche ioniche accanto ad altre dell'attico e della κοινή corrispondenti (1), si può spiegare molto più agevolmente in uno scrittore bizantino del IX secolo, il quale lavorava affrettatamente sì, ma sul testo originale, che in una dotta grammatica del tempo di Nerone, come Panfila, la quale deve aver dato un'edizione corretta e coerente nelle forme grammaticali. Venendo alla questione generale se Fozio si sia valso di un'epitome di Ctesia, mi pare che la dimenticanza di cui il Marquart accusa il Patriarca, di non aver cioè notato dopo la morte di Serse I la fine di un gruppo di libri ed il principio d'un altro (se pure è vera dimenticanza), può provare ugualmente bene che Fozio non abbia avuto alcun piano prestabilito nè da lui stesso, nè da altri al suo riassunto;

---

(1) Per es. l'oscillazione fra le forme Τανυοξάρκεω e Τανυοξάρκου (c. 10 e 11), Τεριτούχμου e Τεριτούχμεω (c. 55), νηῶν (c. 32) e νεῶν (c. 33), νῆας (c. 32) e ναῦς (c. 26), le forme Ὑστάσπεω (c. 14), Σκυθάρβεω (c. 17), Σπαρτιήτας (c. 25), προθυμίῃ (c. 45), ἔτεα (c. 43), δοκέοντα (c. 59), Ἰδέρνεω (c. 53).

e possono addursi a conferma sia le forme prettamente ioniche già ricordate, sia la dichiarazione esplicita del nostro compendiatore d'aver letto l'opera di Ctesia (Περσικά, c. 1), il suo giudizio su di essa, il suo confronto fra lo ionismo dei Περσικά e quello degli Ἰνδικά; mentre d'altra parte non abbiamo motivi sufficienti per accusare a questo riguardo di menzogna il Patriarca, che del resto non pare avesse alcun interesse speciale nel far entrare nella sua Biblioteca il riassunto di Ctesia a preferenza di quello di un'altr'opera qualunque. Il paragone poi fra l'estensione del sunto dei Περσικά e quello di altri riassunti del *Myriobyblon* non può condurci ad alcun risultato sicuro, essendo l'estensione dei compendî di fronte ai loro originali assai irregolare e varia da riassunto a riassunto, da una parte all'altra della stessa opera.

Resta una lieve difficoltà intorno alle forme che in Ctesia suonavano Ἀγβάτανα e Δερβισσοί (1) e che nel riassunto compaiono sotto la forma comune Ἐκβάτανα e Δέρβικες: a Fozio, come dice il Marquart, non possiamo attribuire tale correzione: ed in questo solo parmi che il Marquart abbia ragione, tanto più che il Patriarca quando nomina Astiage ha cura di avvertirci che Ctesia dava a questo nome una forma diversa e questa sèguita ad usare per tutto il racconto; ora per essere coerente a sè stesso egli avrebbe dovuto avvertirci in ugual modo per gli altri nomi. Ma nulla ci vieta di credere che già nel codice di cui Fozio disponeva fossero questi nomi corretti secondo la forma comune; a nessuno è ignoto quali alterazioni abbiano subito i nomi proprî, specie orientali, trasmettendosi attraverso ai manoscritti. Ed appunto pel nome di Ecbatana abbiamo analogie nei codici di Erodoto, in cui esso oscilla fra Ἐκβάτανα ed Ἀγβάτανα; assai facile sarebbe citare altre analogie. Un'altra osservazione che ci conforta sempre più a credere che ci troviamo davanti ad una derivazione diretta da Ctesia è la forma Δαρειαῖος (c. 20, 29, 30): in Erodoto lo stesso principe è detto Δαρεῖος (IX, 108 segg.), come pure in Diodoro (XI, 69): la forma Δαρειαῖος è, per quanto io sappia, speciale a Ctesia e, come nota il Rawlinson (*Herodot*, T. IV, p. 261, n. 3), risponde meglio della forma greca comune al persiano Dārayavaus. Anche per

(1) Steph. Byz., s. v. Ἀγβάτανα e Δερβισσοί.

Dario II si trova nel riassunto Δαρειαῖος, mentre gli altri scrittori Greci adoperano la forma Δαρεῖος. Così la forma Βαγαπάτης (c. 9), pur questa peculiare, per quanto io sappia, ai Περσικά, corrisponde assai meglio del comune Μεγαβάτης al persiano *Bagapāta. Ora l'essere corrette le altre due forme Ἀγβάτανα e Δερβισσοί e non Δαρειαῖος e Βαγαπάτης c'induce a credere sempre più che Fozio ebbe innanzi non già un riassunto anteriore, ma un codice di Ctesia, il quale in certe forme di nomi proprî meno usate dalla comune degli scrittori era stato qua e là corretto. Tutto sommato ci pare fuor di dubbio la derivazione diretta dell'epitome dall'originale dei Περσικά.

Alcuni, come il Rühl (1), ammettono che nel riassunto foziano si trovino errori gravissimi di sostanza, come la famosa trasposizione cronologica della battaglia di Maratona avanti a quella di Salamina e che ciò provenga dall'avere il Patriarca fatto il compendio a memoria. Ma all'ammettere che Fozio abbia seguìto questo sistema si oppongono più ragioni: l'estensione stessa dell'opera di Ctesia, la varietà ed il numero degli avvenimenti in essa narrati, i quali più volte hanno una versione diversa dalla comune. Inoltre non par possibile che i 118 dati numerici che si contano nell'epitome, molti dei quali o non si trovano altrove o presentano gravi divergenze dalla tradizione generalmente seguìta, vi siano stati inseriti dal Patriarca appoggiandosi soltanto alla sua memoria. Di più sonvi nel riassunto non meno di 184 nomi proprî (118 di persone e di divinità e 66 di città, popoli, regioni, ecc.), parecchi dei quali non si trovano che nel solo Ctesia, ovvero si trovano sotto una forma differente dalla comune, e per di più alcuni di questi nomi occorrono più volte, applicati talora anche a persone diverse. Ora è assolutamente inverisimile che Fozio tenesse a memoria una sì lunga lista. E se a tutto ciò s'aggiunga la menzione di talune particolarità, la cui natura è tale che difficilmente si possono ritenere a memoria, e si tenga debito calcolo delle forme ioniche sparse qua e là, credo si possa con ragione affermare che Fozio ebbe dinanzi scrivendo il suo riassunto l'opera di Ctesia.

---

(1) Nella sua recensione all'articolo del Wecklein, *Ueber die Tradition der Perserkriege*, inserita a p. 1094 del " Literarisches Centralblatt für Deutschland „, 1877, num. 33. Vedi peraltro Pomtow negli " Jahrbb. für Philologie „, 129 (1884), p. 232.

Quanto poi alla famosa trasposizione cronologica citata, tutto c'induce a credere ch'essa già si trovasse in Ctesia. Ma l'importanza della questione è tale che non sarà inopportuno discorrerne brevemente. È d' importanza capitale il testo di Dione Crisostomo (XI, 145): οἷον εὐθὺς περὶ τοῦ Περσικοῦ πολέμου οἱ μέν φασιν ὑστέραν γενέσθαι τὴν περὶ Σαλαμῖνα ναυμαχίαν τῆς ἐν Πλαταιαῖς μάχης, οἱ δὲ τῶν ἔργων τελευταῖον εἶναι τὸ ἐν Πλαταιαῖς. καίτοι γε ἐγράφη παραχρῆμα τῶν ἔργων. Se passiamo, per quanto ci è dato, in rassegna gli storici che scrissero παραχρῆμα τῶν ἔργων (evidentemente in questo passo occorre prendere il παραχρῆμα in senso un po' lato) procedendo per via d'esclusione e tenendo presente il sunto foziano, sembra molto probabile che si debba intendere Ctesia nell'espressione οἱ μέν φασιν ὑστέραν γενέσθαι τὴν περὶ Σαλαμῖνα ναυμαχίαν κτλ., tanto più vista la divergenza esistente anche altrove fra Ctesia ed Erodoto riguardo alla cronologia (p. es. la ribellione di Babilonia da Erodoto è posta sotto Dario, da Ctesia sotto Serse; Ctesia, cap. 17, narra la storiella dell'invio dell'arco sotto Dario, Erodoto, III, 21, un aneddoto press'a poco dello stesso genere pone sotto il regno di Cambise). La celebrità di Erodoto a cui non poteva non pensare Dione scrivendo il passo citato, e la nota opposizione di Ctesia allo storico d'Alicarnasso, doveva richiamare alla mente del Crisostomo la notizia ctesiana sì differente. Che Dione poi non abbia inteso rettamente il pensiero del medico di Cnido non par possibile e perchè Ctesia, anche per la parte dei Περσικά propriamente detti, era abbastanza letto nei primi secoli dell'impero, come risulta da citazioni di grammatici, e perchè dato il costume degli oratori di valersi assai d'esempî tratti dalla storia delle guerre persiane, Dione, persona d'altronde di molta coltura, dovette essere più che mezzanamente perito della storia delle guerre mediche, epperciò in grado di rilevare facilmente la divergenza cronologica nella narrazione dei due storici più famosi. La chiarezza poi dell'espressione del Crisostomo non dà adito ad alcuna interpretazione di essa fuori della comune.

Nè vale, contro l'opinione che lo spostamento cronologico detto si trovasse già in Ctesia, sostenere, come vorrebbe Carolina Lanzani (" Rivista di Storia antica ", a. V, p. 586 seg.), che anzi ne fa, come sembra, un argomento capitale, che se questa trasposizione cronologica fosse realmente esistita in Ctesia,

Fozio, che pur conosceva Erodoto, ce n'avrebbe avvertito, poichè anche in altri casi lo vediamo accennare alle discrepanze fra lo storico di Cnido e quel d'Alicarnasso. Di fatto in molti altri casi il Patriarca, di queste discrepanze non ci avverte punto, anche nella stessa narrazione delle guerre persiane, quando p. es. si parla della morte di Dati a Maratona (c. 18), delle cause dell'inimicizia del gran re contro i Greci (c. 21), della ferita di Mardonio a Platea (c. 25), della morte di Mardonio a Delfi (c. 25), dove così profondamente differisce dall'erodotea la versione ctesiana; molti altri esempî si potrebbero trarre dalla storia di Ciro, Cambise, Sfendadate e Dario. Del resto il passo seguente di Fozio prova all'evidenza che secondo Ctesia la ritirata di Serse è posteriore alla battaglia di Platea: Ξέρξης δὲ πάλιν στράτευμα πέμπει κατὰ Πλαταιέων... Θηβαῖοι δ' ἦσαν οἱ κατὰ Πλαταιέων τὸν Ξέρξην κινοῦντες. Nè credo necessario combattere le sottigliezze addotte per interpretarlo da chi ha preteso di mettere d'accordo la cronologia ctesiana della battaglia di Platea con quella di Erodoto. La trasposizione di Salamina e di Platea deriva dal concetto che il medico di Cnido s'era formato della seconda guerra persiana, ed è uno degli argomenti per provare l'origine greco-asiatica della tradizione ctesiana e che i Περσικά sono stati secondo ogni verisimiglianza composti nell'Asia minore greca; ma di ciò dirò forse in altra occasione.

Il riassunto di Fozio però è tutt'altro che un modello del genere: da una semplice lettura di esso risulta evidente che il Patriarca non ha seguìto alcun piano prestabilito. Cominciando dall'estensione del compendio di fronte all'originale osserviamo ch'essa è molto variabile a seconda probabilmente dell'interesse che Fozio poneva al racconto e di molte altre cause coefficienti per noi imponderabili: talora scende a particolari minuti e persino a parole testuali poste in bocca a qualche personaggio (c. 11), ora specialmente verso la fine (nei tre ultimi libri) si riduce ad un secco sommario che appena ci permette di seguire il filo del racconto. Si confronti il racconto dell'astuzia impiegata nella presa di Sardi (c. 4) col frammento 31 dell'ed. Müller conservatoci da Teone nei *Progymnasmata* od il passo del riassunto (c. 9): οὗτος (Καμβύσης) στρατεύει ἐπ' Αἴγυπτον καὶ τῶν Αἰγυπτίων βασιλέα Ἀμυρταῖον col racconto conservatoci da Ateneo (fr. 37, Müller) sulle cause dell'inimicizia dei due re; così, ri-

guardo all' uccisione di Ciro, le parole del riassunto (c. 58): προσβολὴ Κύρου πρὸς τὴν βασιλέως στρατιὰν καὶ νίκη Κύρου· ἀλλὰ καὶ θάνατος Κύρου ἀπειθοῦντος Κλεάρχῳ, καὶ αἰκισμὸς τοῦ σώματος Κύρου corrispondono al lungo racconto ctesiano che Plutarco ci ha conservato nella vita d'Artaserse. Così pure si osservino i particolari che il compendio foziano dà nel racconto della congiura fra Cambise e Sfendadate ai cap. 10, 11, 12, o riguardo alla battaglia fra Megabizo ed Usiri al cap. 37, ecc. Quindi dall'estensione maggiore o minore delle varie parti del riassunto non si può trarre alcuna conclusione sicura riguardo all'estensione delle parti corrispondenti in Ctesia.

Riguardo alla scelta fatta dal Patriarca degli avvenimenti da ricordarsi nell'epitome non può dirsi davvero che sia molto soddisfacente. Mentre ci dà particolarità trascurabili o quasi, Fozio tace od appena accenna a fatti ed a cose della più alta importanza storica e che formano il filo direttivo della narrazione. E così mentre p. es., nulla dice delle cause della prima guerra persiana (1), narra per disteso l'aneddoto ridicolo relativo all'attentato d'un eunuco (c. 53), oppure la storia di Teritucme (c. 53, 54). Solamente per un ordine di fatti pare che Fozio abbia seguìto un criterio fisso: nel libro X Ctesia, prendendo occasione probabilmente dalla spedizione di Ciro contro

---

(1) Al c. 18 nulla si dice della ragione della spedizione di Dati, ma al c. 21 si pone fra le cause della seconda guerra persiana: ὅτι τε Χαλκηδόνιοι λῦσαι τὴν γέφυραν, ὡς ἤδη εἴρηται, ἐπειράθησαν, καὶ ὅτι τὸν βωμὸν ὃν ἔστησε Δαρεῖος καθεῖλον. Ora questa ragione presa per sè sarebbe assurda, perchè secondo il c. 17 i Calcedonesi, sudditi dell'impero, avevano già ricevuto da Dario la debita punizione. La cosa non si spiega altrimenti che ammettendo che i Greci d'Europa, forse specialmente gli Ateniesi, abbiano cooperato o con l'istigazione o con aiuti materiali al tentativo fatto dai Calcedonesi di distruggere il ponte. Puniti costoro, il gran re manda Dati a far rappresaglia sui loro complici. L'intervento dei Greci d'Europa nel tentativo dei Calcedonesi corrisponderebbe nei Περσικά come causa di guerra a quello degli Ateniesi e degli Eretriesi nella rivolta ionica in Erodoto. Dati poi, partendo dal Ponto Eusino (stando all'uso che, comune già in Erodoto, diviene affatto generale ai tempi di Ctesia, Πόντος equivale a Ponto Eusino), dove aveva probabilmente cooperato coll'esercito persiano contro la Scizia, va contro la Grecia. E qui devesi notare il nesso cronologico immediato che poneva lo storico di Cnido fra l' impresa di Scizia e la prima guerra medica.

i Derbici faceva un *excursus* geografico ed etnografico su parecchie popolazioni asiatiche (1), press'a poco come Erodoto descrive i popoli della Scizia prendendo pretesto dalla guerra mossa da Dario I contro gli Sciti. Altre descrizioni di usi e costumi e di prodotti notevoli erano sparse per l'opera. Ora Fozio omise completamente queste notizie non conservando che ciò che aveva carattere storico o quelle novelle che per lui appartenevano alla storia e di cui l'opera di Ctesia pare fosse assai ricca.

La preoccupazione principale del medico di Cnido sembra fosse quella di farsi credere ben informato (2), e quindi dava nell'opera sua una quantità straordinaria di numeri e di dati precisi, anche là dov'era assolutamente impossibile che la tradizione li ricordasse; già negli Ἀσσυριακά enumerava partitamente quanti fanti, cavalli e carri Nino aveva condotto contro i Massageti (Müller fr. 6 = Diod. II, 5, 3), lo stesso faceva per l'esercito di Semiramide contro gl'Indiani (fr. 15). Nei Περσικά diceva il numero dei caduti dei Derbici e quello dei Persiani che combatterono nella spedizione di Ciro (c. 7), quanti pedoni e quanti cavalli conteneva la città di Barene data da Ciro a Creso (c. 4), quanti Egizî e quanti Persiani perirono nella battaglia fra Amirteo e Cambise (c. 9), ecc. Così Ctesia era audacissimo nel fissar con precisione i dati cronologici e ciò non solo nella cronologia dei re assiri, medi e persiani, ma anche per cose di poca o nessuna importanza storica, i giorni dell'ultima malattia di parecchi re e di personaggi della corte, gli anni di esiglio di qualche cortigiano. Anche su altre particolarità minime per la storia insisteva l'audacia del medico di Cnido, come quella sua speciale attenzione a cose toccanti l'arte sua (3):

---

(1) Steph. Byz., s. v., Δυρβαῖοι, Χωραμναῖοι. Apollon., *Hist. mir.*, XX. Costituiscono i framm. 33, 34 e 35 dell'ed. del Müller.

(2) È notissimo che Ctesia dichiarava nell'opera sua d'essersi servito di archivi reali della corte persiana (cfr. Diod., II, 32, 4); però a questo riguardo si può ormai considerare come convinto di falsità. Pei tempi a lui più vicini, Ctesia affermava di aver veduto egli stesso od udito da testimoni oculari ciò ch'egli narrava.

(3) Altri esempi di questa nota tendenza di Ctesia sarebbero: (c. 19) Δαρεῖος..... ἡμέρας νοσήσας λ' τελευτᾷ; (c. 33) καὶ βάλλει Μεγάβυζος εἰς τὸν μηρὸν Ἴναρον; (c. 37) καὶ (Οὔσιρις) τυγχάνει Μεγαβύζου εἰς τὸν μηρὸν καὶ τιτρώσκει ἄχρι δακτύλων δύο, ὁ δὲ (Μεγάβυζος) ὡσαύτως ἀκοντίῳ τὸν τοῦ

così egli con precisione ci sa dire di qual ferita è morto Ciro il vecchio (c. 6), con pari precisione descrive la ferita infertasi inavvertentemente da Cambise (c. 12), ecc. A ciò non si limitavano le capricciose ed audaci integrazioni del nostro storico alla tradizione: si trovava in Ctesia un numero grande assai di nomi di personaggi secondarî di cui o la tradizione serbava appena un ricordo o taceva affatto; d'altronde è naturale che colui che non ci trasmette esattamente, ma anzi con parecchi errori, i nomi dei sette congiurati contro Gaumata (e su ciò è molto difficile che non abbia potuto, se l'avesse voluto, ottenere notizie precise alla corte persiana), non possa considerarsi affatto come fonte sicura per nomi di personaggi a quelli contemporanei od anche anteriori. Ctesia però usò generalmente l'avvedimento di dare ai suoi personaggi nomi orientali. Del resto la tendenza dell' inventar nomi proprî s' accorda assai bene con quella dell'inventare numeri: ambedue non sono che manifestazioni del medesimo spirito.

Ora tornando a Fozio, egli merita il nostro biasimo anche riguardo alla scelta dei dati numerici: mentre nota i giorni dell'ultima malattia di Ciro, di Cambise e di Dario, ed i giorni che impiegò a morir di fame Petesaca (c. 5), non nota gli anni di regno di Serse I; mentre nota il numero dei sacerdoti che con corde tiravan su pel monte dov'era la tomba di Dario I, il padre e la madre di questo re (c. 15), o quello degli Egizî compagni d'Amirteo a Susa (c. 9), o quello degli sgherri d'Udiaste uccisi da Teritucme (c. 54), tace affatto il numero dei combattenti in celebri battaglie, come in quelle di Maratona e di Cunassa (per la quale ultima sappiamo positivamente che Ctesia dava il numero dei combattenti e quello dei caduti), per non parlar di altre di minore importanza o fama. Talora avviene che solamente la cifra di uno dei due eserciti combattenti sia ricordata da Fozio, mentre è assai probabile che Ctesia abbia aggiunto la cifra anche dell'altro. Ad es., parlandosi della battaglia delle Termopili si nota il numero delle milizie persiane ad ogni singolo assalto, mentre del numero dei Lacedemoni che difendono

Οὐσίριος μηρόν, εἶτα βάλλει εἰς τὸν ὦμον κ. τ. λ.; (c. 38 e 41) Megabizo fugge fingendosi lebbroso; (c. 30 e 42) ripetuta menzione del medico Apollonide di Coo; (c. 57) malattia di Dario II; (c. 61) avvelenamento di Statira; (in Plut., *Artax.*, 11) ferite del re Artaserse e di Ciro.

il passo nulla si dice; altro esempio al cap. 32. Lo stesso biasimo merita Fozio riguardo ad altre particolarità del genere di quelle a cui si è sopra accennato.

Un'osservazione ancora converrà fare al riassunto: il compendiatore forse in momento di stanchezza cade in qualche contradizione di cui, benchè i termini siano assai vicini, non s'avvede: p. es. al c. 58 καὶ αἰκισμοὶ τοῦ σώματος Κύρου ὑπὸ τοῦ ἀδελφοῦ Ἀρτοξέρξου. τήν τε γὰρ κεφαλὴν καὶ τὴν χεῖρα, μεθ' ἧς τὸν Ἀρτοξέρξην ἔβαλεν, αὐτὸς ἀπέτεμε καὶ ἐθριάμβευσεν. Poche linee dopo Fozio dice (c. 59): τὰ περὶ Βαγαπάτου τοῦ ἀποτεμόντος προστάξει βασιλέως τὴν κεφαλὴν ἀπὸ τοῦ σώματος Κύρου. Un altro esempio vedasi al cap. 34 sgg.

Nel complesso pare che il sunto sia da riprendersi per omissioni di dati importanti e per cattiva scelta di parecchi dei dati e dei fatti da narrarsi, piuttosto che per trasposizioni od altri veri e proprî errori storici e cronologici: perciò il còmpito nostro per conoscere la tradizione ctesiana dovrà volgersi sopra tutto ad integrare il riassunto, dove sia possibile, sottoponendone ad attento esame i dati.

In gran parte le mende rimproverate al compendio sono prodotte dal fatto che la compilazione di esso fu stesa molto affrettatamente; e ciò risulta con evidenza quando si ponga mente al numero grande dei riassunti del *Myriobyblon*, alla grande sproporzione fra parte e parte del riassunto stesso dei Περσικά, alla lingua ed allo stile pochissimo, anzi nulla curati da Fozio nella sua epitome, agli ionismi che il compendiatore forse in momenti di stanchezza ha tolti di peso dal testo di Ctesia.

Non è qui il caso di trattare della questione perchè Fozio abbia riassunto di Ctesia i soli Περσικά; osserviamo soltanto che già ai tempi di Strabone si soleva dividere l'opera in Ἀσσυριακά ed in Περσικά. Questa partizione però non rimontava a tempi molto antichi, perchè fu fatta evidentemente dopo la divisione in 23 libri di tutta l'opera, divisione che deve risalire alla età alessandrina. Ad ogni modo pare che le due parti corressero nella pratica separate. Ora o Fozio ebbe a sua disposizione i soli Περσικά, o ragioni d'opportunità dovettero indurlo a compendiare i soli Περσικά meno noti all'universale, mentre conosciuta assai era la materia almeno degli Ἀσσυριακά.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Febbraio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Spezia, Jadanza, Guidi, Foà, Morera, Segre, Peano, Grassi, Guareschi, Mattirolo, Fileti e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica le lettere dei professori G. Romano e G. A. Colini i quali ringraziano per il premio Gautieri loro conferito.

Il Presidente presenta a nome del Socio Mosso il volume 1° dei lavori del *Laboratoire scientifique international du Mont Rosa*. Il Presidente è lieto di presentare alla Classe questo volume il quale raccoglie una serie importante di lavori dovuti al Socio Mosso ed ai suoi collaboratori, e richiama l'attenzione della Classe sull'opera importante dal Socio Mosso stessa compiuta coll'istituzione del Laboratorio e coll'aver saputo colla sua energia e colla sua autorità far convergere ad uno scopo altamente scientifico ed onorifico per l'Italia gli aiuti di molti connazionali e stranieri. Egli crede di interpretare i sentimenti della Classe tutta non solo inviando i più vivi ringraziamenti all'egregio Consocio, ma anche i voti più sentiti di pronto e

completo ristabilimento in salute. La Classe si associa alle parole del Presidente.

Il Socio Guidi fa omaggio alla Classe della sua opera intitolata: *Lezioni sulla scienza delle costruzioni.* Il Presidente ringrazia l'egregio Socio donatore.

Il Socio Spezia offre in dono alla Classe, a nome del Dr. Luigi Colomba, i due opuscoli seguenti: 1° *La leucite del tufo di Pompei;* 2° *Cenni preliminari sui minerali del Lausetto.*

Il Presidente annunzia essere giunto alla presidenza un lavoro manoscritto del sig. Niccolò Pizzarello, sul quale richiede il giudizio della Classe per l'inserzione negli *Atti* accademici. Il Presidente delega i Soci Naccari e Grassi a riferire sopra detto lavoro.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Dr. Mario Donati: *Contributo allo studio delle formazioni limitanti il canale inguinale nell'uomo*, dal Socio Foà;

2° Ing. Modesto Panetti: *Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche e sue applicazioni al calcolo di alcuni organi meccanici e dei serbatoi cilindrici*, dal Socio Guidi.

Il Socio Segre, anche a nome del Socio Peano, legge la relazione sulla Memoria del Prof. Mario Pieri: *Nuovi principii di Geometria proiettiva complessa.* La relazione è favorevole per la stampa della Memoria. La Classe all'unanimità approva la relazione stessa e con votazione segreta all'unanimità approva pure la stampa della Memoria del Prof. M. Pieri nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Mattirolo presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Dr. Giuseppe Gola: *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumenti impermeabili.* Il Presidente delega i Soci Mattirolo e Camerano a riferire su di esso.

LETTURE

Contributo allo studio delle formazioni limitanti il canale inguinale nell'uomo.

Ricerche anatomiche del Dott. MARIO DONATI
Assistente alla Clinica operativa.

(Con una Tavola).

La costituzione anatomica della regione inguinale non è ancora ben chiara, per quanto sia stata oggetto di una lunghissima serie di ricerche; ed anche gli studi recenti, pur avendo cercato di supplire alle deficienze delle vecchie descrizioni e sopratutto di semplificare molte e disparate nomenclature, non sono riusciti a risolvere tutte le questioni.

Per questo ho voluto riprendere lo studio anatomico della regione inguinale; e poichè di solito le descrizioni classiche si riferiscono pressochè esclusivamente al canale inguinale maschile, ho portato invece più specialmente l'attenzione sul sesso femminile, compiendo così una ricerca comparativa sistematica che finora, per quanto io sappia, mancava.

Riferisco qui brevemente i più importanti risultati ottenuti collo studio della suddetta regione in 52 cadaveri (31 donne, 21 uomini) in età varia da 13 a 86 anni (1).

Sorvolerò sul comportamento della cute e della *fascia superficialis* da un lato, del peritoneo e della fascia propria dall'altro, e tratterò soltanto dei piani aponeurotico-muscolari, come quelli che hanno importanza precipua nella costituzione del canale inguinale.

L'*aponeurosi d'inserzione del muscolo grande obliquo* presenta fra le sue fibre degli interstizi che sono generalmente più numerosi e più ampî nel maschio, cosicchè nella donna essa è, di

(1) Al prof. R. Fusari, che mi ha concesso di compiere queste ricerche nell'Istituto da lui diretto, e le ha convalidate col suo controllo, l'espressione della mia più viva gratitudine.

solito, più compatta. I pilastri interni (superiori) si incrociano sulla linea mediana appena al disopra della sinfisi pubica e vanno ad inserirsi sulla faccia anteriore e sulla spina del pube dell'altro lato; nel maschio il pilastro destro passa generalmente davanti al sinistro; nella donna si trova pressochè con eguale frequenza il destro avanti al sinistro o viceversa. Spesso le fibre dei due pilastri si embricano irregolarmente.

Particolar menzione convien fare delle cosidette *fibre arciformi*, che furono descritte dagli autori in vario modo: come originate cioè dal *ligamentum inguinale* (Cloquet) o anche dalla spina iliaca anterior-superiore (Cooper, Nicaise), dall'aponeurosi del grande obliquo del lato opposto (Velpeau, Pétrequin), eventualmente da tutte queste sorgenti insieme (Denegri, Gilis, Dall'Acqua, ecc.).

Io le ho trovate generalmente più robuste nell'uomo che nella donna, probabilmente perchè in questa le fibre principali dell'aponeurosi del grande obliquo sono più compatte. Esse si dividono in *fibre dirette* e *fibre incrociate*, secondo che derivano dallo stesso lato o dall'aponeurosi del lato opposto. Le prime possono avere una triplice origine, e cioè:

1° Dalla spina iliaca anterior-superiore (eccezionalmente da tutta la cresta iliaca) e dal terzo esterno del legamento inguinale; da questi punti si irradiano sull'aponeurosi del grande obliquo con concavità in alto e all'esterno;

2° Dalla linea alba e dal pilastro superiore dello stesso lato, dirigendosi poi in basso e in fuori, delimitando superiormente l'anello inguinale superficiale e quindi perdendosi a ventaglio in corrispondenza del pilastro inferiore;

3° Dal pilastro inferiore in vicinanza dell'orificio esterno del canale (con decorso inverso alle precedenti).

Le fibre incrociate derivano dall'aponeurosi del lato opposto (pilastro superiore), circondano l'anello inguinale esterno e si disperdono a ventaglio lateralmente a questo.

Nell'uomo le fibre arciformi sono nei $^2/_3$ dei casi solamente dirette, in $^1/_3$ anche incrociate; nella donna il primo reperto si trova nei $^3/_4$ dei casi e si possono riscontrare anche soltanto fibre incrociate.

L'*orifizio inguinale esterno* è nella donna di dimensioni assai minori, di forma ovoidale o rotondeggiante e corrisponde alla

spina del pube. Nel maschio esso è di solito triangolare, ampio cm. 2 × 1,5, e anche più; inoltre si trova situato più in alto e più esternamente, a causa del diverso decorso e delle diverse dimensioni che ha il cordone spermatico in confronto al legamento rotondo.

L'*arcata crurale* (*ligamentum inguinale*) non esiste come legamento distinto, ma deve considerarsi il margine inferiore dell'aponeurosi del grande obliquo. Essa forma la parete inferiore del canale inguinale. Il *ligamentum lacunare* (di Gimbernat) non rappresenta che l'inserzione di questa aponeurosi al pube. Il *legamento di Colles* è dato dalla continuazione in alto e in dentro di una parte delle fibre del pilastro inferiore che si inseriscono sul pube e si portano dorsalmente al pilastro superiore per congiungersi con le fibre dell'aponeurosi del lato opposto; in generale è più sviluppato nella donna e prende parte alla costituzione della porzione mediale della parete posteriore del canale inguinale.

Le maggiori divergenze fra gli autori riguardano precisamente la costituzione di questa parete del canale, senza dubbio la più importante fra tutte; infatti, mentre in molti trattati classici trovasi tuttora scritto che la parete posteriore è costituita dalla sola *fascia transversalis*, è ormai accertata la presenza di fasci muscolari ed aponeurotici di rinforzo; ma non vi è accordo sul numero, i rapporti ed il valore di questi fasci. Si può dire anzi che neppure sui limiti e rapporti della *fascia transversalis* stessa vi è accordo fra gli autori: gli uni considerando come tale solo l'aponeurosi che tappezza la superficie dorsale del muscolo trasverso, altri pensando che la guaina posteriore del muscolo retto, al disotto dell'arcata del Douglas, ne sia la continuazione; altri infine ritenendo che essa si sdoppi in due lamine in corrispondenza del tendine del retto, l'anteriore fissandosi a questo tendine, la posteriore passando dorsalmente fino a raggiungere la linea mediana.

Hesselbach (1806) trovò che al margine inferiore della *fascia transversalis* esistono dei fasci fibrosi più robusti e li chiamò *ligamentum inguinale internum*; alla porzione esterna di questo, o pilastro esterno, Thomson (1837) diede poi il nome di *bandelette iléo-pubienne*, considerandola come un fascetto distinto (v. anche Blaise, 1894). La nomenclatura divenne poi sempre più compli-

cata, Luschka (1863) avendo dato lo stesso nome di *ligamentum inguinale internum* al pilastro esterno dell'anello inguinale interno e Braune (1884) al pilastro interno!

Henle (1871) descrisse col nome di *lig. ing. internum mediale* tutta la parte di *fascia transversalis* compresa fra l'anello inguinale interno e il tendine del retto, del quale può anche sembrare una continuazione; e col nome di *ligamentum inguinale internum laterale* la parte corrispondente al nastrino ileo-pubico di Thomson. His nella parte compresa fra anello inguinale interno e tendine del retto distinse una parte interna robusta o *falx inguinalis* (da Braune denominata erroneamente *legamento di Henle*), una parte esterna pure robusta, o *ligamentum interfoveolare* (di Hesselbach), ed una intermedia, nella quale la *fascia transversalis* non è fornita di alcun rinforzo e che corrisponde alla *porzione debole* della fossetta inguinale mediale.

Il legamento interfoveolare, le cui fibre si trovano fra i vasi epigastrici e l'anello inguinale interno, è considerato da taluni (Hesselbach, Douglas, His, Dall'Acqua, ecc.) come il pilastro esterno dell'arcata del Douglas; esso secondo alcuni rinforzerebbe solo il lato mediale dell'anello inguinale interno, secondo altri costituirebbe l'elemento essenziale di questo.

La falce inguinale è descritta dagli uni nello spessore della *fascia transversalis* (Romiti, Denegri, ecc.); altri la ritengono formata dall'espansione laterale del tendine del retto (Langer-Toldt, Gilis, Charpy, ecc.), altri da fibre del trasverso (Braune, His, Merkel, Dall'Acqua) e in certi casi vi descrivono fibre tanto del retto come del trasverso (gli stessi Gilis e Charpy, Denegri); infine gli autori inglesi e Blaise dicono che la falce è formata dal tendine congiunto del piccolo obliquo e trasverso!

Notiamo inoltre che Cooper, Hesselbach, Denegri, Ranzi ecc. hanno descritto fibre muscolari del piccolo obliquo o del trasverso o anche di entrambi nella parete posteriore del canale inguinale; e che Luschka descrisse in certi casi un muscolo (*M. pubotransversalis; M. interfoveolaris* (His)), che va dal margine superiore del pube fino al trasverso, attraversando diagonalmente la porzione debole della parete posteriore del canale. Secondo Eisler e Romiti questo muscolo sarebbe invece una dipendenza del retto; e secondo Dall'Acqua potrebbe trovarsi anche nel piano del piccolo obliquo.

Come si vede, le contraddizioni riguardo alla struttura della parete posteriore del canale inguinale sono molto numerose: ad ogni modo quanto ho brevemente esposto, dimostrando lo stato attuale della questione, varrà anche a chiarire quest'ultima parte delle mie ricerche.

Se, tolta la cute e la *fascia superficialis*, si arrovescia in basso l'aponeurosi del grande obliquo e si esamina dal davanti la parete posteriore del canale inguinale senza sollevare il cordone spermatico od il legamento rotondo, si osserva che il *margine inferiore congiunto dei muscoli piccolo obliquo e trasverso* ha, nel maschio, un decorso arcuato a concavità inferiore, allontanandosi dall'arcata al massimo di 2 cm. circa; nella donna il decorso è più orizzontale e la distanza dall'arcata può essere nulla o al massimo $^1/_2$-1 cm. Avvicinandosi alla linea mediana, il margine inferiore dei due muscoli volge in basso e si inserisce con brevi fibre tendinee alla spina del pube, al davanti ed all'esterno del muscolo retto. Talora l'inserzione avviene anche più lateralmente lungo la parte mediale dell'arcata o la cresta pettinea (ciò che si vede bene sollevando il cordone spermatico o il legamento rotondo), e allora si forma una lamina muscolo-aponeurotica (*tendine congiunto*) che costituisce lo strato più superficiale della parete posteriore del canale inguinale; essa continua medialmente con la guaina anteriore del retto, mentre all'esterno termina con un margine concavo più o meno ravvicinato all'anello inguinale interno. Nella donna non solo è più frequente che codesto margine esterno (quando esiste un vero tendine congiunto) si avvicini di più all'anello inguinale interno, ma è anche più frequente trovare la lamina fibro-muscolare ben individualizzata, così da acquistare importanza come elemento costitutivo della parete posteriore del canale. Infatti io l'ho trovata nell'uomo circa nel 55 % dei casi, nella donna nel 70 %.

Se ora si esamina la parete addominale anteriore nella faccia dorsale dopo tolto il peritoneo e la fascia propria, appare la *fascia transversalis*.

Nella regione inguino-addominale, al disopra del canale inguinale, la fascia riveste la superficie posteriore del muscolo trasverso; procedendo medialmente, aderisce più o meno intimamente all'aponeurosi d'inserzione del trasverso stesso e, quindi,

trasformata in lamella cellulare piuttosto esile, passa sulla superficie dorsale del muscolo retto, di cui forma la guaina posteriore, rinforzata da fascetti tendinei che derivano dalle arcate del Douglas. In corrispondenza del canale inguinale, dopo avere all'esterno formato con un margine falcato, concavo in fuori ed in alto, l'anello inguinale interno, si porta ispessita verso il margine laterale del tendine del retto e quivi si sdoppia, con un foglietto anteriore aderendo al tendine stesso, con un foglietto posteriore passando sulla superficie dorsale del muscolo. In questa porzione interposta fra il muscolo retto e l'anello inguinale interno la fascia riceve generalmente dei rinforzi fibrosi che costituiscono il *legamento interfoveolare* nella parte esterna, la *falce inguinale* medialmente.

Ho osservato il *legamento interfoveolare* nel 70 % dei cadaveri maschili, nel 64 % di quelli femminili: esso decorre tra i vasi epigastrici e l'anello inguinale interno che rinforza. Diretto in basso e all'esterno, della larghezza di 2-3 millimetri, eccezionalmente di più, può giungere inferiormente a toccare l'arcata e anche la cresta pettinea, dietro il legamento lacunare, oppure scivola sotto il cordone o il legamento rotondo e si perde in parte nell'arcata, in parte nella *fascia transversalis* all'esterno dell'anello inguinale interno. In alto si confonde spesso con le fibre laterali dell'arcata del Douglas, della quale appare allora una derivazione. Nel maschio è accompagnato, in un terzo dei casi, da fibre muscolari del trasverso che lo seguono nella sua faccia antero-esterna, in corrispondenza della porzione superiore all'anello inguinale interno.

Il nome di *falce inguinale* deve essere, secondo me, riserbato alla porzione di *fascia transversalis* che si trova subito all'esterno del tendine del retto, rinforzata da fibre tendinee provenienti in parte dal retto stesso, in parte dall'aponeurosi d'inserzione del trasverso. Essa costituisce una lamina larga $^1/_2$-1 cm., alta 4-5 cm., espansa inferiormente presso l'inserzione al pube. Nel maschio si trova più spesso che nella donna (risp. nel 75 e nel 55 % dei casi).

Lateralmente alla falce, la *fascia transversalis* non riceve alcun rinforzo fino al legamento interfoveolare: in questo spazio intermedio si ha quindi una *porzione debole* della *fascia transversalis*, che nella donna ha minor importanza perchè al davanti

si ha con gran frequenza un robusto piano muscolare; nell'uomo, invece, il margine esterno del tendine congiunto, quando questo esiste, corrisponde di solito al margine laterale della falce e quindi davanti alla porzione debole della *fascia transversalis* non havvi che l'orificio esterno del canale inguinale con un tratto dell'aponeurosi dell'obliquo esterno.

Nella donna si riscontra inoltre assai frequentemente (60 $^0/_0$ dei casi) un altro elemento di rinforzo della parete posteriore del canale, che nell'uomo trovasi solo eccezionalmente. Esso è costituito da un sistema di fibre verticali che derivano dall'aponeurosi d'inserzione del trasverso e sono applicate sulla sua superficie dorsale. Nell'insieme, queste fibre costituiscono una lamina più o meno compatta, che chiamerò *lamina pubo-transversalis*, la quale ha origine e decorso costante pur variando in estensione. Inizia a distanza di cm. 2-5 dal margine pelvico, con fibre che in parte sono evidentemente la continuazione di fasci dell'aponeurosi d'inserzione del trasverso, anche nel tratto in cui è già passata davanti al m. retto anteriore, in parte si vedono inserirsi sull'aponeurosi stessa all'esterno del retto. La lamina ha una larghezza di cm. 1-2 $^1/_2$ all'origine; nella porzione media si restringe facendosi più compatta e inferiormente si allarga più o meno a ventaglio per inserirsi al margine superiore del pube, alla cresta pettinea, al legamento di Gimbernat e talora persino alla linea innominata. Come dimostra la fig. 2, la sua forma può anche essere pressochè triangolare.

La lamina suddescritta mantiene tesa l'aponeurosi del trasverso, supplisce la falce inguinale quando questa manca e talora con essa coesiste rendendo allora grandemente valida la parte mediale della parete posteriore del canale. Essa può occupare in larghezza tutta l'estensione di questa parete.

In un quarto dei casi dei cadaveri maschili e in un solo cadavere di donna ho inoltre riscontrato un *muscolo interfoveolare*; esso ha decorso obliquo in basso e in dentro e attraversa la fossetta media; va da un punto situato un po' più in alto e medialmente all'anello inguinale interno sino alla spina del pube od alla cresta pettinea. Esso non contribuisce però ad aumentare la resistenza della parete posteriore in corrispondenza del punto debole.

Nella donna dunque oltre ad aversi nel canale inguinale

una parete anteriore di solito più robusta e l'anello inguinale esterno più stretto, trovasi maggiormente valida che nell'uomo la parete posteriore.

Questa è costituita dall'indietro al davanti: dalla *fascia transversalis*, rinforzata lateralmente dal legamento interfoveolare e medialmente dalla *falx inguinalis*; dai muscoli piccolo obliquo e trasverso (tendine congiunto) che occupano per lo più nell'uomo un piccolo tratto mediale, mentre nella donna più facilmente si estendono lateralmente finanche a rivestire tutta la parete posteriore; dal legamento di Colles nel tratto più interno. Inoltre fra tendine congiunto e *fascia transversalis*, nella donna trovasi ben spesso la *lamina pubo-transversalis*, che rinsalda ancor più la parete posteriore nella metà o nel terzo interno, talora anche in tutta la sua estensione; questa lamina si riscontra assai raramente nel sesso maschile.

Cosicchè, mentre nel maschio havvi di regola una porzione di parete posteriore, corrispondente più o meno all'anello inguinale esterno, costituita dalla sola *fascia transversalis*, tale " porzione debole „ nella donna non esiste od è ristrettissima.

Queste differenze nella costituzione del canale inguinale nei due sessi dànno la ragione anatomica della grande rarità dell'ernia diretta nel sesso femminile.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Le figure rappresentano la superficie dorsale della parete addominale anteriore, dopo asportata la *fascia transversalis* (quindi anche il legamento interfoveolare e la *falx inguinalis*); le tre preparazioni si riferiscono tutte a cadaveri di donna (oss. XLIII, XXXIV, VI) e sono conservate nell'Istituto Anatomico.

Fig. 1ª. — La lamina *pubo-transversalis* è a sinistra più larga e meno alta che a destra; a sinistra occupa tutta la parete posteriore del canale inguinale e spinge le sue inserzioni inferiori fino alla linea innominata; a destra la lamina, aderendo alle fibre dell'aponeurosi d'inserzione del transverso, le sposta in un piano posteriore alle altre fibre che si inseriscono più all'esterno sull'arcata femorale. La porzione mediale più bassa delle due lamine prende aderenze col corrispondente margine esterno del tendine del retto, presso la sua inserzione al pube.

Fig. 2ª. — Lamina *pubo-transversalis* di forma pressochè triangolare. Il muscolo trasverso (in realtà il tendine congiunto) occupa solo la metà mediale della parete posteriore del canale. Esisteva un'ernia inguinale destra obliqua esterna.

Fig. 3ª. — Lamina *pubo-transversalis* molto sviluppata. Il muscolo trasverso ha una parte importante nella costituzione della parete posteriore del canale inguinale.

Fig. 1

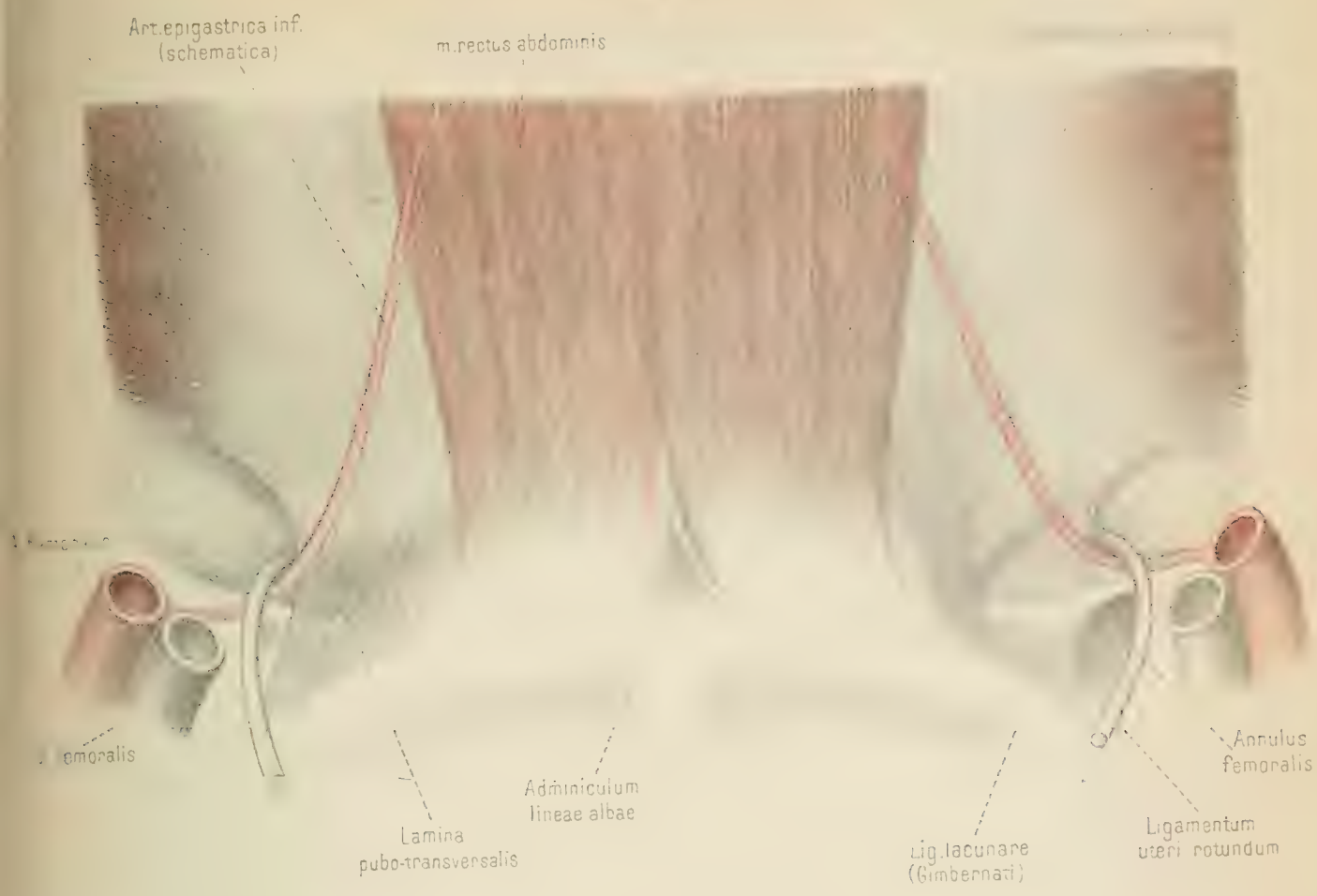


Fig. 2

Fig. 3

Lit.Salussola-Torino

Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche e sue applicazioni al calcolo di alcuni organi meccanici e dei serbatoi cilindrici.

Nota dell'Ing. MODESTO PANETTI.

(Con una Tavola).

1. Premesse. — Si considerano nel presente studio piastre aventi spessore costante, costruite di un materiale omogeneo ed elasticamente deformabile, in forma di scorze tronco-coniche, saldate per la base minore a nuclei perfettamente rigidi, e libere lungo il contorno della base maggiore.

A questa struttura schematica si possono paragonare gli stantuffi conici, usati nelle macchine a vapore con cilindri di grande diametro, quando si faccia astrazione dall'azione irrigidente dell'orlo rinforzato, di cui sono muniti per trattenere l'organo elastico di tenuta.

Come casi speciali del modello che ci siamo proposti studiamo quelli in cui la semi-apertura del cono uguaglia l'angolo retto o si annulla. Al primo corrispondono le piastre piane a corona circolare, trattenute da un nucleo centrale indeformabile (stantuffi piani). Al secondo le piastre cilindriche nascenti da una base rigida che ne costituisce il fondo, e libere in vece in corrispondenza dell'altra estremità. Tali sono i cilindri di alcune macchine a gas e quelli dei torchi idraulici, le capsule per le prove di compressione dei liquidi e dei materiali polverulenti, e, nel campo delle costruzioni civili, i serbatoi cilindrici.

Eccezion fatta per questi ultimi, la cui teoria verrà indicata a parte, le forze sollecitanti le piastre sono nei casi pratici citati ripartite uniformemente sulle loro superficie sotto forma di pressioni.

Per semplificare il problema supporremo applicata direttamente alla *superficie media* della piastra la differenza delle pres-

sioni che operano in sensi opposti sulle due sue faccie, il che non può alterare in modo sensibile i risultati nel caso di piastre di spessore non troppo rilevante rispetto all'ampiezza.

Per tali piastre in oltre è più facilmente giustificabile l'ipotesi fondamentale della presente teoria, secondo la quale si ammette che le fibre materiali, rettilinee, dirette normalmente alla superficie media della piastra, non si deformino, mentre detta superficie si inflette: e ciò per analogia colla legge dell'invariabilità delle sezioni trasversali, posta dal Navier a fondamento della teoria elementare dei prismi inflessi.

Importa poi fin d'ora notare come, in conseguenza delle due predette ipotesi, si trascurino gli sforzi interni diretti normalmente alle superficie premute, e si possano prendere subito in esame gli elementi piccolissimi di 2° ordine aventi una dimensione uguale all'intero spessore della piastra; in vece di ricorrere alle equazioni generali dei sistemi elastici, che si deducono, come è noto, dalle condizioni di equilibrio di elementi infinitesimi del 3° ordine.

Di questo modo approssimato di procedere nello studio statico delle piastre furono già dati esempi nelle opere del Grashof e del Föppl. Esso semplifica il problema, permettendo di giungere a parecchi risultati adatti al calcolo numerico.

2. Condizioni di equilibrio fra le tensioni interne. — La piastra tronco-conica di spessore costante h, rappresentata con una sezione diametrale AB nella fig. 1, sia incastrata in modo perfetto lungo il labbro interno di traccia AA al nucleo rigido. Indicheremo con θ la semiapertura della superficie conica media di vertice V, che, per effetto della pressione simmetricamente distribuita rispetto all'asse i della piastra, si trasformerà nella *superficie elastica* di rivoluzione intorno ad i, avente per traccia la curva A_0B'. Siano r ed R i raggi delle circonferenze di base della superficie media, e quindi

$$l = \frac{R - r}{\operatorname{sen}\theta}$$

la lunghezza delle sue generatrici.

Chiameremo *sezione normale* della piastra ogni sezione S fatta con un cono complementare del cono medio, avente il vertice sull'asse i; e la definiremo in posizione, dando la lunghezza x dei segmenti di generatrice del cono medio compresi fra la base minore e la sezione S.

È chiaro che, in virtù della già notata simmetria della piastra e delle forze ad essa applicate, sulle sezioni diametrali si svilupperanno soltanto tensioni normali σ_t. In vece sulle sezioni coniche esisteranno al tempo stesso tensioni normali σ_r e tensioni tangenziali. Principiamo dal calcolo di queste.

Perciò stacchiamo un elemento compreso fra due sezioni diametrali formanti l'angolo $d\alpha$, fra il lembo libero della piastra e la sezione normale di ascissa x. Lo si vede rappresentato in pianta nella fig. 2 col contorno $C_1C_2B_2B_1$. Esprimiamo poi che le pressioni applicate dall'esterno a questo elemento sono equilibrate dalle tensioni, che si sviluppano sulle faccie messe a nudo dai tagli immaginati. La risultante di dette pressioni, tenuto conto della prima delle due ipotesi enunciate nel precedente §, è

$$P = \frac{1}{2}\, p \left(\frac{R^2 - r^2}{s} - 2rx - sx^2 \right) d\alpha\,, \tag{1}$$

ove p indica la differenza fra le pressioni agenti sulle due faccie della piastra, riferita all'unità di area, e, per brevità di notazione, sta scritto s invece di sen θ, come in avvenire si porrà:

$$\cos\theta = c \qquad\qquad \operatorname{tang}\theta = t.$$

Intenderemo in oltre che p sia preso con segno positivo, quando prevale la pressione applicata alla faccia interna; abbia in vece segno negativo nell'ipotesi opposta. Così i due casi possibili rientrano in una trattazione unica.

Definiamo la posizione di un elemento su di una sezione diametrale qualsiasi coll'ascissa x della sezione normale S che lo incontra e colla sua distanza z dalla superficie conica media della piastra, positiva se diretta verso l'interno. Allora le tensioni $\sigma_t dxdz$ che si sviluppano su due elementi di uguali coordinate x e z, appartenenti alle sezioni diametrali A_1B_1, A_2B_2,

che limitano lo spicchio tronco-conico preso in esame, hanno lo stesso valore, e ammettono quindi una risultante:

$$\sigma_t \, dx \, dz \, d\alpha ,$$

giacente nel piano di simmetria di detto spicchio e diretta orizzontalmente.

Proiettando queste tensioni risultanti sulla direzione in cui agisce P, e sommandole poi per tutto lo spessore h della piastra, cioè da $z = -\frac{h}{2}$ fino a $z = +\frac{h}{2}$, e per tutto l'intervallo compreso fra la sezione di ascissa x e l'estremo lembo B di ascissa l, si ottiene il 2° termine dell'equazione di equilibrio cercata:

$$c d\alpha \int_x^l dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t dz .$$

Data la solita convenzione sul segno delle tensioni normali, l'espressione precedente rappresenta una forza diretta verso l'interno della piastra conica, quando risulti numericamente >0; quindi va presa con segno opposto a P, e sommata collo sforzo di taglio $Td\alpha$, ripartito sulla faccia S. Onde risulta:

$$(2) \qquad c \int_x^l dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t dz + T = \frac{1}{2} p \left(\frac{R^2 - r^2}{s} - 2rx - sx^2 \right).$$

Stacchiamo ora dallo spicchio del tronco di cono considerato un elemento infinitamente piccolo di 2° ordine, per mezzo di un'altra sezione normale S_1 distante dx dalla sezione S, e proponiamoci di esprimere le sue condizioni di equilibrio.

Sulla faccia S esistono le tensioni normali σ_r, la cui risultante è

$$(3) \qquad d\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz) \sigma_r dz ,$$

poichè σ_r, sempre in virtù della simmetria del sistema, è funzione soltanto di x e di z, e ha quindi in una data sezione S lo stesso valore per tutti i punti di ordinata z.

Normalmente ad S_1 dev'essere applicata una tensione totale calcolabile come la (3), ma il cui valore differisce dal precedente dell'incremento dell'espressione scritta calcolato rispetto ad x. E ciò in virtù della legge di continuità colla quale certo variano da punto a punto della piastra le tensioni considerate.

Detto incremento:

$$d\alpha\, dx \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz) \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}\, dz + s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r dz \right]$$

misura dunque la risultante delle tensioni normali applicate alle due faccie opposte S ed S_1, e rappresenta una forza che, secondo le convenzioni fatte, è positiva nel senso in cui crescono le x.

Hanno invece senso opposto le proiezioni sulla superficie conica media delle

$$\sigma_t\, dx\, dz\, d\alpha,$$

a cui si riducono, come già si è detto, le coppie di tensioni applicate a punti corrispondenti delle sezioni diametrali. La somma di dette proiezioni estesa alle faccie dell'elemento preso in esame vale:

$$s\, d\alpha\, dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t dz\,,$$

quindi per l'equilibrio alla traslazione nella direzione x deve essere:

$$(4) \qquad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz) \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}\, dz + s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r dz = s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t dz.$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione normale ad x nulla dice di nuovo, poichè si riduce, come è prevedibile, a quella che si ottiene dalla (2) derivandone ambi i membri rispetto ad x.

Rimane da esprimere la condizione di equilibrio fra i momenti, che conviene valutare rispetto all'asse passante pel punto

di mezzo G della generatrice media dell'elemento, e normale al piano diametrale che la contiene.

Le σ_r applicate ad S ammettono un momento risultante:

$$d\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz)\sigma_r z\, dz\,;$$

la cui espressione, grazie alla direzione positiva scelta per le distanze z, rappresenta effettivamente un momento positivo, se risulta >0.

Opposto ad esso è il momento delle σ_r distribuite su S_1; e in valore assoluto lo supera di quanto vale l'incremento del precedente integrale calcolato rispetto ad x, cioè di

$$d\alpha\, dx \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz) \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} z\, dz + s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z\, dz \right].$$

Questa espressione, presa con segno negativo, è dunque un primo termine dell'equazione di equilibrio alla rotazione.

Il momento delle σ_t vale, come è facile dedurre,

$$+ s\, d\alpha\, dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t z\, dz.$$

Le pressioni p hanno momento nullo rispetto all'asse scelto. Lo sforzo di taglio $Td\alpha$ e quello $-\left(T + \frac{dT}{dx} dx\right) d\alpha$, applicato alla faccia S_1, dànno luogo al momento:

$$- T\, d\alpha\, dx - \frac{dT}{dx} d\alpha\, dx \frac{dx}{2}.$$

Nell'uguagliare a zero la somma algebrica delle tre espressioni dedotte si possono dividere tutti i termini per $d\alpha\, dx$, riducendoli così a quantità finite, salvo l'ultimo che conserva il moltiplicatore dx, e tende quindi insieme con esso a zero. Lo omettiamo perciò, scrivendo l'equazione di equilibrio dei momenti:

$$- \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz) \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} z\, dz - s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z\, dz + s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t z\, dz = T.$$

E finalmente, sostituendo a T il suo valore deducibile dalla (2), si ottiene:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r + sx - cz) \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} z\,dz + s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_r - \sigma_t) z\,dz - \\ &- c \int_x^l dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t dz + \frac{1}{2} p \left(\frac{R^2 - r^2}{s} - 2rx - sx^2 \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La (4) e la (5) sono le equazioni di condizione, che devono essere soddisfatte dai valori delle tensioni normali σ_r e σ_t, funzioni ignote delle coordinate x e z.

3. Calcolo delle deformazioni. — La 2ª ipotesi, posta sul finire del § 1 a fondamento della presente teoria, tenuto conto della simmetria del fenomeno intorno all'asse della piastra, dà luogo alla seguente legge di deformazione: Le sezioni normali della piastra, che sono coni complementari della superficie media, si trasformano in altre superficie coniche a base circolare, aventi il medesimo asse, e normali alla superficie elastica.

Ciò posto il parametro fondamentale, da cui dipende il modo di deformarsi della piastra, è l'inclinazione φ dei singoli elementi della curva A_0B', in cui si trasformano le generatrici del cono medio, misurata rispetto alla posizione iniziale di queste stesse generatrici. Ricorrendo allo spostamento y di ciascun punto della superficie conica media, computato normalmente ad essa, positivo verso l'esterno del cono, si ha grazie alla piccolezza dell'angolo φ:

$$(6)\qquad \varphi = \sim \operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Però l'esistenza di due equazioni di condizione indipendenti, come la (4) e la (5), ci avverte che non basta nel caso generale un solo parametro a definire la deformazione della piastra, ma che bisogna anche ammettere una componente ξ dello spostamento dei punti della superficie media in direzione parallela alle sue generatrici.

Assumeremo ξ positivo nel senso delle x positive. Se ξ è diverso da zero la 2ª delle uguaglianze (6) non è rigorosa; ma l'errore commesso è di 2° ordine rispetto alle quantità piccolissime che misurano le deformazioni, e come tale si trascura.

Sia LI una fibra materiale che incontra normalmente la superficie conica media in L, ed è lunga z; la sua posizione finale $L'I'$ è determinata, per quanto fu detto, dalle componenti ξ ed y dello spostamento di L e dall'angolo φ di cui essa ha rotato. Se ne deduce che la distanza di I dall'asse del cono è passata dal valore iniziale:

$$\rho = r + sx - cz$$

al valore finale:

$$\rho' = r + s(x+\xi) + cy - z\cos(\theta+\varphi) = \sim r + s(x+\xi) + cy - z(c - \varphi s),$$

sempre ammessa la piccolezza di φ. Ma queste distanze ρ e ρ' sono i raggi delle circonferenze materiali, che si possono pensare tracciate intorno all'asse del cono nell'interno del mezzo elastico per le due posizioni I ed I' del punto di coordinate iniziali x e z. Quindi il rapporto $\frac{\rho'-\rho}{\rho}$ misura la dilatazione unitaria delle fibre normali alle sezioni diametrali, che, essendo diretta come la tensione σ_t, indichiamo con

$$\epsilon_t = \frac{s\xi + cy + z\varphi s}{r + sx - cz}. \tag{7}$$

Consideriamo un'altra fibra $L_1 I_1$ della medesima lunghezza z della precedente e distante dx da essa. Segnata anch'essa nella posizione $L_1' I_1'$ dopo la deformazione, si vede che

$$I'I_1' = L'L_1' + z d\varphi = \frac{dx + \frac{d\xi}{dx} dx}{\cos\varphi} + z\, d\varphi.$$

L'espressione si semplifica sostituendo al solito a $\cos\varphi$ l'unità; e allora, potendosi esprimere la dilatazione unitaria della fibra $I I_1$ come rapporto dell'allungamento $I'I_1' - I I_1$ alla lunghezza primitiva, risulta:

$$\epsilon_r = \frac{d\xi}{dx} + z\,\frac{d\varphi}{dx}. \tag{8}$$

Utilizzando ora le note relazioni fra tensioni e deformazioni:

$$\epsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right) \qquad \epsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right),$$

che sono conseguenza del principio di proporzionalità e di quello della sovraposizione degli effetti, si deducono le espressioni di σ_r e di σ_t in funzione dei parametri ξ ed y e delle loro successive derivate, rappresentate d'ora innanzi per brevità di notazione colle stesse lettere munite di apici. Esse sono:

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma_t = \dfrac{mE}{m^2-1}\left(m\dfrac{s\xi + cy + szy'}{r + sx - cz} + \xi' + zy''\right) \\[2ex] \sigma_r = \dfrac{mE}{m^2-1}\left(\dfrac{s\xi + cy + szy'}{r + sx - cz} + m\xi' + mzy''\right). \end{cases}$$

4. — Le equazioni differenziali del problema si deducono sostituendo nelle condizioni di equilibrio (4) e (5) i valori delle tensioni σ_t e σ_r dianzi calcolati, ed eseguendo le integrazioni rispetto a z che vi sono indicate.

Posto per brevità:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dz}{t\left(x+\frac{r}{s}\right)-z} = \log\frac{2t\left(x+\frac{r}{s}\right)+h}{2t\left(x+\frac{r}{s}\right)-h} = A\,,$$

e

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{zdz}{t\left(x+\frac{r}{s}\right)-z} = At\left(x+\frac{r}{s}\right) - h = X\,,$$

l'equazione (4) si trasforma nella seguente:

$$(10)\quad Ay + \left(tX - \frac{h}{mt}\right)y' + \frac{1}{t}\frac{h^3}{12}y''' + At\xi - h\xi' - h\left(x+\frac{r}{s}\right)\xi'' = 0;$$

e dalla (5) si deduce:

$$(11)\quad \begin{cases} Xy + t^2\left(x+\frac{r}{s}\right)Xy' - \frac{h^3}{12}y'' - \left(x+\frac{r}{s}\right)\frac{h^3}{12}y''' + tX\xi + \frac{1}{t}\frac{h^3}{12}\xi'' + \\ + \int_x^l \left(A\xi + \frac{h}{tm}\xi' + \frac{A}{t}y + Xy'\right)dx = \frac{p}{2}\frac{m^2-1}{m^2E}\left(\frac{R^2-r^2}{s^2} - \frac{2rx}{s} - x^2\right). \end{cases}$$

La risoluzione dipende dunque dall'integrazione di due equazioni differenziali, lineari e simultanee, contenenti la y e la ξ, funzioni della stessa variabile x, ed entrambe di 3° ordine rispetto alla y e di 2° ordine rispetto alla ξ. Compariranno dunque 5 costanti arbitrarie che le condizioni speciali del problema meccanico permettono di determinare.

In fatti, essendosi supposta la piastra incastrata lungo il suo contorno interno, in corrispondenza del quale fu scelta l'origine delle ascisse x, dovrà essere per $x=0$:

$$y=0\,,\quad y'=0\,,\quad \xi=0. \tag{12}$$

Finalmente sul lembo estremo libero, cioè per $x=l$, deve annullarsi tanto la risultante finita quanto la coppia risultante delle tensioni σ_r; le quali risultanti sono calcolabili per ogni elemento della superficie che termina la piastra, compreso fra due sezioni diametrali contigue, colle formole seguenti:

$$d\alpha\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}(R-cz)\sigma_r\,dz \qquad d\alpha\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}(R-cz)\sigma_r z\,dz. \tag{13}$$

Se ne deducono le due ultime equazioni di condizione:

$$\left\{\begin{aligned} &s\xi+mR\xi'+cy-mc\frac{h^2}{12}y''=0\\ &-mc\xi'+sy'+mRy''=0\,, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

da verificarsi entrambe per $x=l$.

Importa qui notare che (essendosi ammessa l'indeformabilità delle fibre normali alla superficie media in genere, e quindi, come caso speciale, di quelle appartenenti al cono complementare che limita la piastra lungo il contorno libero) sarebbe condizione troppo restrittiva il richiedere che, per $x=l$, data l'assenza di forze esterne applicate al contorno, σ_r si debba annullare per tutti i possibili valori di z.

Ciò del resto condurrebbe nel caso generale a 3 equazioni, in vece delle 2 sopra indicate; cosicchè il numero totale delle condizioni supererebbe di uno quello delle quantità arbitrarie.

Soltanto nel caso di piastre piane i due criteri per dedurre le condizioni al contorno libero si equivalgono. In vero, posto

nelle (14) $s = 1$ e $c = 0$, come dev'essere per $\theta = \frac{\pi}{2}$, esse diventano:

$$(14') \qquad \xi + mR\xi' = 0 \qquad y' + mRy'' = 0;$$

e, fatte le stesse sostituzioni nella 2ª delle (9), si verifica subito che queste sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè essa sia identicamente nulla.

Tale concordanza di risultati si può riguardare come una conferma dell'attendibilità incondizionata dell'ipotesi fondamentale sulle deformazioni nel caso di piastre piane.

Per giustificare detta ipotesi nel caso generale bisogna supporre le piastre coniche assai sottili, e di conseguenza ritenere trascurabile il rapporto $\frac{z}{R}$ rispetto all'unità. Allora le (13) e la seconda delle (9) si riducono alle forme più semplici:

$$Rd\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r dz \qquad Rd\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z\, dz$$

$$(9') \qquad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\left(\frac{s\xi + cy + szy'}{R} + m\xi' + mzy''\right),$$

dalle quali si deducono le condizioni:

$$(14'') \qquad s\xi + mR\xi' + cy = 0 \qquad sy' + mRy'' = 0\,,$$

sufficienti ad annullare identicamente la (9').

Ciò conferma quanto è già stato detto, che la presente teoria è sopra tutto attendibile per le piastre di spessore non troppo rilevante. È però certo che l'indeformabilità delle generatrici della superficie del contorno libero della piastra dev'essere favorita, anche nel caso di grandi spessori, dall'orlo rinforzato, di cui sono quasi sempre munite in pratica le piastre tronco-coniche e cilindriche.

5. Primo caso limite — Piastre piane. — Le equazioni (10) ed (11) si riducono a forma molto semplice e facilmente integrabile, quando si faccia in esse:

$$s = 1 \qquad c = 0 \qquad t = \infty\,,$$

come dev'essere per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Per eseguire il passaggio al limite, basta sviluppare in serie di potenze crescenti del rapporto $\frac{1}{2t(x+r)-h}$ le funzioni A ed X, scrivendo:

$$A = \frac{2h}{2t(x+r)-h} - \frac{2h^2}{[2t(x+r)-h]^2} + \frac{8h^3}{3[2t(x+r)-h]^3} - \dots$$

$$X = h^3 \frac{2t(x+r)+3h}{3[2t(x+r)-h]^3} - \dots$$

Sostituite queste espressioni nei singoli termini delle equazioni citate, e cercando in seguito il valor limite di ciascuno di essi per $t = \infty$, si deduce dalla (10):

$$(10') \qquad \frac{1}{x+r}\xi - \xi' - (x+r)\xi'' = 0\,;$$

e dalla (11), dividendo ambi i membri per $-\frac{h^3}{12}$:

$$(11') \qquad -\frac{1}{x+r}y' + y'' + (x+r)y''' + 6p\frac{m^2-1}{m^2Eh^3}[R^2-(x+r)^2] = 0.$$

La ξ e la y riescono dunque in questo caso semplice già separate fra le 2 equazioni differenziali; e in particolare quella relativa alla y non contiene la funzione, ma solo le sue derivate successive; si può quindi abbassarne immediatamente l'ordine, sostituendo ad y' l'inclinazione φ della curva meridiana della superficie elastica.

Alla (11') del resto si può giungere in modo spedito, trattando direttamente, colle stesse ipotesi fondamentali, il problema della piastra a corona circolare piana, incastrata lungo il suo contorno interno e soggetta ad una pressione uniformemente ripartita. Si trova in fatti l'equazione, che esprime l'equilibrio dei singoli elementi alla rotazione, indipendente dall'eventuale dilatarsi o restringersi della superficie elastica, e collegata soltanto al suo modo di inflettersi. Essa non contiene quindi la ξ.

Anzi è lecito supporre senz'altro ξ identicamente nullo, come è abitudine nella trattazione del problema della piastra circolare piana, appoggiata lungo il perimetro.

Qui l'esattezza di tale ipotesi è dimostrabile. In vero l'integrale generale della (10'), a cui la ξ deve soddisfare, è:

$$\xi = C_1(x+r) + \frac{C_2}{x+r}\,,$$

dove C_1 e C_2 sono costanti che si determinano colle equazioni di condizione per la ξ, registrate nel precedente § ai N^{i} (12) e (14′). Da esse si deduce $C_1 = C_2 = 0$, come volevasi dimostrare.

Si possono allora ricavare dalle (9) le espressioni semplificate delle tensioni:

$$(9') \qquad \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{y'}{r+x} + y''\right)z \qquad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\left(my'' + \frac{y'}{r+x}\right)z$$

entrambe proporzionali alla distanza z dell'elemento dalla superficie media della piastra, come nel problema della flessione dei prismi. Non rimane dunque che calcolare y'.

L'integrale generale della (11′) è:

$$(15) \quad y' = \frac{3}{4}p\frac{m^2-1}{m^2Eh^3}\left[(x+r)^3 + K_1(x+r) - \frac{K_2}{x+r} - 4R^2(x+r)\log(x+r)\right]$$

dove K_1 e K_2 sono costanti calcolabili colle solite condizioni registrate ai N^{i} (12) e (14); e precisamente:

per $\qquad x = 0 \qquad y' = 0$

per $\qquad x = R - r \qquad y' + mRy'' = 0.$

Per mezzo di esse si ottiene:

$$K_1 = \frac{(m-1)(R^4-r^4)+4R^2[(m-1)r^2\log r+(m+1)R^2\log R]}{(m-1)r^2+(m+1)R^2}$$

$$K_2 = \frac{4(m+1)R^2\log(R/r)+(m+1)r^2+(m-1)R^2}{(m-1)r^2+(m+1)R^2}\, r^2R^2.$$

La funzione y' resta così determinata, e per mezzo di essa sono pure definite le tensioni σ_r e σ_t, che si possono esprimere come segue:

$$\sigma_t = \frac{3}{4}\frac{pz}{mh^3}\Big[(m+3)x_1^2 + (m+1)K_1 - \\ - (m-1)\frac{K_2}{x_1^2} - 4(m+1)R^2\log x_1 - 4R^2\Big]$$

$$\sigma_r = \frac{3}{4}\frac{pz}{mh^3}\Big[(3m+1)x_1^2 + (m+1)K_1 + \\ + (m-1)\frac{K_2}{x_1^2} - 4(m+1)R^2\log x_1 - 4mR^2\Big],$$

ponendo per brevità $x + r = x_1$.

Importa vedere con qual legge varino dipendentemente da x_1 i valori numericamente massimi delle tensioni σ_t e σ_r, che si verificano in adiacenza alla faccia superiore ed alla inferiore della piastra inflessa.

Per quanto riguarda σ_t si osservi che la derivata del termine entro parentesi, fatta rispetto ad x_1, è positiva per valori di x_1^2 minori di

$$x_0^2 = \frac{m+1}{m+3} R^2 - \sqrt{\left(\frac{m+1}{m+3}\right)^2 R^4 - \frac{m-1}{m+3} K_2}\,;$$

diventa in vece negativa per $x_1 > x_0$, e rimane tale per tutto l'intervallo che ci interessa, fino a $x_1 = R$.

Dunque σ_t per un dato valore di z va crescendo da $x_1 = r$ fino a $x_1 = x_0$, per poi decrescere fino al lembo estremo della piastra, come appare dal diagramma AB della fig. 3, le cui ordinate furono calcolate per una piastra a corona circolare coi raggi estremi scelti nel rapporto $^1/_5$. L'ascissa x_0 corrispondente al valor massimo di σ_t fu trovata a $^3/_{10}\,R$ dal centro, adottando pel coefficiente m il valore teorico 4.

La σ_r in vece si può riguardare come decrescente coll'aumentare della distanza x_1 dal centro per tutta l'estensione della piastra. In vero la sua derivata è negativa pei valori di x_1^2 minori di

$$x_2^2 = \frac{m+1}{3m+1} R^2 + \sqrt{\left(\frac{m+1}{3m+1}\right)^2 R^4 + \frac{m-1}{3m+1} K_2},$$

e in seguito cambia segno. Ma l'ascissa x_2, a cui corrisponde necessariamente l'inversione del senso in cui varia la σ_r, è molto prossima al lembo estremo della piastra, sul quale detta tensione, come fu dimostrato, si annulla. Non si può dunque temere che essa raggiunga nell'intervallo compreso fra x_2 ed R valori troppo grandi; che anzi, nel caso a cui si riferisce la fig. 3, essi riescono affatto trascurabili.

Siccome poi per $x = 0$, cioè lungo il contorno incastrato al nucleo centrale,

$$\sigma_r = m\,\sigma_t$$

come si deduce dalle (9'), tenendo presente che ivi $y' = 0$; così l'equazione di stabilità va scritta confrontando al carico di si-

curezza k la tensione ideale massima, che ha luogo in detta zona nella direzione di σ_r.

Essa vale, in virtù della (8), in cui si faccia $\xi = 0$:

$$\max E\epsilon_r = \frac{hE}{2}(y'')_{x=0};$$

e quindi, eseguite le debite sostituzioni, risulta:

$$(16) \qquad k = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{h^2}\frac{R^4\left[4(m+1)\log\frac{R}{r}-(m+3)\right]+r^4(m-1)+4r^2R^2}{(m-1)r^2+(m+1)R^2}.$$

Sempre assumendo $m=4$, la precedente formola si trasforma in quest'altra adatta al calcolo numerico diretto dello spessore h degli stantuffi piani a parete semplice:

$$h = \frac{R}{\alpha}\sqrt{0{,}7\,\frac{p}{k}\,\frac{\alpha^4(46\,\mathrm{Log}\,\alpha-7)+4\alpha^2+3}{5\alpha^2+3}},$$

ove si è posto $\alpha = R/r$, e si indica con Log il logaritmo decimale del termine che segue.

Supposta ammessibile, rispetto a questo genere di sollecitazione, l'equivalenza delle piastre di struttura diversa, i cui elementi, compresi fra due sezioni diametrali contigue, presentino in adiacenza all'incastro uguali moduli di resistenza $Wrd\alpha$, si può estendere l'ultima formola al calcolo degli stantuffi a doppia parete, sostituendo $\sqrt{6W}$ ad h. Si potrà calcolare W, immaginando sviluppata in un piano la sezione cilindrica di incastro, valutando per essa il modulo di resistenza, e dividendolo per $2\pi r$, e ciò allo scopo di tener conto delle nervature di rinforzo, che si dispongono fra le due pareti per assicurarne la solidarietà.

Nella fig. 3 è poi segnata la curva GD_1B delle tensioni ideali massime per tutta l'estensione della piastra, deducendola dai diagrammi delle σ_t e delle σ_r per mezzo della relazione:

$$E\epsilon_r = \sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t,$$

valida fino al punto D, a partire dal quale $\sigma_t > \sigma_r$; e per mezzo della

$$E\epsilon_t = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r,$$

pel tratto residuo.

Il suo andamento dimostra che i valori delle tensioni ideali diminuiscono molto rapidamente, allontanandosi dalla sezione di incastro. Ad essa quindi si potrà limitare la verifica della stabilità, anche nel caso di stantuffi di spessore decrescente verso il contorno libero.

Alle due speciali strutture qui accennate i risultati della presente teoria non sono però applicabili che per approssimazione, in conseguenza d'una estensione verosimilmente lecita entro certi limiti, ma non giustificata.

6. Secondo caso limite — Recipiente cilindrico. — Eseguiamo ora la riduzione delle equazioni (10) ed (11) al caso in cui si abbia $\theta = 0$, e quindi sia

$$s = t = 0 \qquad\qquad r = R.$$

Ciò riesce facile dopo aver moltiplicato ambi i membri sia dell'una sia dell'altra per t. Si ottiene:

$$(10'') \qquad \frac{h^2}{12} y''' - \frac{1}{m} y' - R\xi'' = 0,$$

$$(11'') \qquad \frac{h^3}{12} \xi'' - R \frac{h^3}{12} y''' + \int_x^l \left(\frac{h}{m} \xi' + Ay \right) dx = pR \frac{m^2-1}{m^2 E} (l-x);$$

nelle quali

$$A = \log \frac{2R+h}{2R-h}$$

non è più funzione di x.

Derivando due volte di seguito la (11''), si ottiene successivamente:

$$(17) \qquad \frac{h}{m} \xi' - \frac{h^3}{12} \xi''' + Ay + R \frac{h^3}{12} y^{\text{IV}} = pR \frac{m^2-1}{m^2 E}$$

$$\frac{h}{m} \xi'' - \frac{h^3}{12} \xi^{\text{IV}} + Ay' + R \frac{h^3}{12} y^{\text{V}} = 0.$$

Si elimini in quest'ultima ξ'' e ξ^{IV} per mezzo della (10'') e della sua derivata seconda; risulta:

$$(18) \qquad \left(A - \frac{h}{m^2 R} \right) y' + \frac{h^3}{6mR} y''' + \frac{h^3}{12} \left(R - \frac{h^2}{12R} \right) y^{\text{V}} = 0.$$

È questa un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti, di 4° ordine rispetto alla funzione y', che conviene assumere come incognita. L'equazione algebrica che risulta dalla sostituzione $y' = e^{\omega x}$ è biquadratica ed ha radici tutte immaginarie, essendo il suo discriminante minore di zero, purchè il rapporto $\frac{R}{h}$, che indicheremo d'ora innanzi con W, sia maggiore di $\frac{1}{2}$.

Quindi l'integrale generale della (18) è

$$(19) \quad y' = e^{\frac{ux}{h}}\left(M\cos\frac{vx}{h} + N\operatorname{sen}\frac{vx}{h}\right) + e^{-\frac{ux}{h}}\left(P\cos\frac{vx}{h} + Q\operatorname{sen}\frac{vx}{h}\right),$$

essendosi posto per brevità:

$$u = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{(12W^2-1)(m^2WA-1)}}{\frac{m}{6}(12W^2-1)}} \qquad v = \sqrt{\frac{1+\sqrt{(12W^2-1)(m^2WA-1)}}{\frac{m}{6}(12W^2-1)}}.$$

Con M, N, P, Q si indicano 4 costanti che le condizioni del problema meccanico permettono di determinare. Così: per $x = 0$ deve annullarsi y'; quindi $P = -M$.

Integrando poi la (19) e utilizzando la condizione $y = 0$ per $x = 0$, si ottiene:

$$(20) \begin{cases} \frac{u^2+v^2}{h}y = Me^{\frac{ux}{h}}\left(u\cos\frac{vx}{h} + v\operatorname{sen}\frac{vx}{h}\right) + Ne^{\frac{ux}{h}}\left(u\operatorname{sen}\frac{vx}{h} - v\cos\frac{vx}{h}\right) \\ +Me^{-\frac{ux}{h}}\left(u\cos\frac{vx}{h} - v\operatorname{sen}\frac{vx}{h}\right) - Qe^{-\frac{ux}{h}}\left(u\operatorname{sen}\frac{vx}{h} + v\cos\frac{vx}{h}\right) + v(N+Q) - 2Mu. \end{cases}$$

Ricorriamo adesso alle condizioni al contorno libero, date nel caso generale dalle (14). La 1ª, fattovi $s = 0$ e $c = 1$, si riduce alla

$$(21) \qquad \frac{h^2}{12}y'' - \frac{1}{m}y - R\xi' = 0.$$

Essendo però il suo primo membro uguale a quello che si ottiene integrando la (10''), essa sta non solo come condizione da soddisfarsi per $x = l$, ma come equazione differenziale del problema, che utilizzeremo per eliminare ξ'.

In fatti la si potrebbe dedurre direttamente, scrivendo la

condizione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse della piastra di uno spicchio elementare di essa, compreso fra il lembo libero e la sezione di ascissa x.

La 2ª delle (14), fatte le debite sostituzioni, ed eliminato ξ', diventa:

$$\frac{y}{mWh} + hy''\left(W - \frac{1}{12W}\right) = 0 \qquad \text{per } x = l. \tag{22}$$

Per ultimo rimangono da soddisfare le equazioni (17) e (11''). Dopo ridotte per mezzo della (21) e delle sue derivate a contenere la sola y, si deducono da esse le altre due condizioni necessarie alla determinazione delle tre costanti M, N, Q contenute tuttora nell'espressione (20) della y:

$$\left\{\begin{aligned} & v(N+Q) - 2Mu = (m^2-1)(u^2+v^2)\frac{W^2}{Am^2W-1}\frac{p}{E}. \\ & \left(Ne^{\frac{ul}{h}} - Qe^{-\frac{ul}{h}}\right)\cos\frac{vl}{h} = M\left(e^{\frac{ul}{h}} + e^{-\frac{ul}{h}}\right)\operatorname{sen}\frac{vl}{h}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

La (22) non è suscettibile d'essere posta sotto una forma altrettanto semplice, sostituendo in essa ad y ed y'' i loro valori per $x = l$. Quindi rimettiamo la discussione dei risultati del presente problema alla forma più elementare cui si possono ridurre nell'ipotesi di piastre sottilissime.

Fin d'ora però lo si può riguardare come perfettamente risolto anche per il calcolo numerico. In vero non è difficile dedurre in ogni singolo caso colla (22) e le (23) i valori delle costanti, e in conseguenza determinare tutte le grandezze da cui dipende il modo di deformarsi e di resistere della piastra, come ad esempio le tensioni principali ideali massime, calcolabili per una sezione di ascissa x qualsiasi colle formole:

$$\left\{\begin{aligned} & E\epsilon_r = E\left[y''\left(\frac{h^2}{12R} \pm \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{mR}\,y\right] \\ & E\epsilon_t = E\frac{y}{R \mp \frac{h}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Se ne darà in seguito un esempio.

7. Semplificazione della teoria nel caso di piastre sottilissime. — Già discutendo in fine del § 4 le condizioni del problema meccanico, si notò che l'ipotesi dell'indeformabilità delle fibre normali alla superficie media della piastra è plausibile nel caso di spessori assai piccoli rispetto all'ampiezza. È anzi lecito prevedere che essa verrebbe dedotta come caso limite della trattazione rigorosa delle piastre elastiche, supponendovi $\frac{h}{r+sx}$ infinitamente piccolo per tutti i possibili valori di x.

Per giustificare questa ipotesi, che vogliamo introdurre a semplificazione della teoria, bisogna però che sia grande non solo il diametro del contorno esterno libero, ma anche quello della base minore incastrata della piastra tronco-conica.

Ciò premesso si osservi che nel trinomio $r+sx-cz$ delle formole (5), (7) e (9) sarà lecito sopprimere l'ultimo termine; e in conseguenza le equazioni fondamentali (10) ed (11) si riducono alla forma più semplice:

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{1}{tx_1}y-\frac{1}{mt}y'+\frac{1}{x_1}\xi-\xi'-x_1\xi''=0 \\ \frac{h^2}{12}\frac{y'}{x_1}-\frac{h^2}{12}y''-\frac{h^2}{12}x_1y'''+\frac{1}{t}\int_x^l\left(\frac{\xi}{x_1}+\frac{\xi'}{m}+\frac{y}{tx_1}\right)dx= \\ \qquad =\frac{p}{2h}\frac{m^2-1}{m^2E}\left(\frac{R^2}{s^2}-x_1^2\right), \end{cases}$$

nella quale si conservò per brevità la notazione $x_1=x+\frac{r}{s}$.

Le condizioni al lembo libero della piastra sono espresse nella presente ipotesi dalle (14″) già ricavate.

L'integrazione delle (25), che si presenta come possibile anche nel caso generale, si rimette ad un altro prossimo studio.

8. Recipiente cilindrico con parete sottilissima. — Sia specializzando le precedenti equazioni nel caso di $\theta=0$, e integrandole poi con procedimento analogo a quello seguito nel § 6; sia adattando i risultati in esso ottenuti all'ipotesi semplificativa testè discussa, in virtù della quale si possono trascurare i termini contenenti $\frac{1}{W}$ a confronto degli altri, si deducono facilmente le seguenti formole:

$$(20') \quad \begin{cases} \sqrt{2}\,\frac{u}{h}\,y = \left(Me^{\frac{ux}{h}} - Qe^{-\frac{ux}{h}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ux}{h} + \frac{\pi}{4}\right) + \\ \qquad + \left(Ne^{\frac{ux}{h}} - Me^{-\frac{ux}{h}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ux}{h} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,u\,\frac{p}{E}\,W^2. \\ \frac{h}{u\sqrt{2}}\,y'' = -\left(Me^{\frac{ux}{h}} + Qe^{-\frac{ux}{h}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ux}{h} - \frac{\pi}{4}\right) + \\ \qquad + \left(Ne^{\frac{ux}{h}} + Me^{-\frac{ux}{h}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ux}{h} + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

In esse

$$(26) \qquad u = \sqrt[4]{3\,\frac{m^2-1}{m^2 W^2}} = 1{,}3\sqrt{\frac{h}{R}}.$$

Le equazioni di condizione per determinare le costanti M, N, Q sono simili alle (22) e (23), la 1ª delle quali diventa:

$$(23') \qquad N + Q - 2M = 2u\,\frac{p}{E}\,W^2.$$

In questo caso però si risolvono facilmente, e dànno:

$$M = -2Y\cos^2\frac{ul}{h}, \qquad N = \left[2\operatorname{sen}^2\left(\frac{ul}{h} - \frac{\pi}{4}\right) + e^{-\frac{2ul}{h}}\right] Y$$

$$Q = \left[2\operatorname{sen}^2\left(\frac{ul}{h} + \frac{\pi}{4}\right) + e^{\frac{2ul}{h}}\right] Y,$$

essendosi posto per brevità:

$$Y = \frac{2uW^2}{4\cos^2\frac{ul}{h} + \left(e^{\frac{ul}{h}} + e^{-\frac{ul}{h}}\right)^2}\,\frac{p}{E}.$$

Ricorrendo a questi valori, si ricava subito un'espressione abbastanza semplice della y al lembo libero della piastra, che misura l'incremento elastico del raggio alla bocca del recipiente:

$$f = \frac{ph}{E}\,W^2\left[1 - \frac{4\left(e^{\frac{ul}{h}} + e^{-\frac{ul}{h}}\right)\cos\frac{ul}{h}}{4\cos^2\frac{ul}{h} + \left(e^{\frac{ul}{h}} + e^{-\frac{ul}{h}}\right)^2}\right].$$

Essa permette di concludere che detto incremento non varia sempre nello stesso senso col crescere di l, ma tende per $l = \infty$ al

valor limite $f_1 = p \frac{h}{E} W^2$, intorno al quale oscilla con smorzamento rapidissimo. Ciò fa vedere la fig. 4, sulla quale sono segnati con circoletti, in corrispondenza di altezze del recipiente crescenti di $\frac{\pi}{4} \frac{h}{u}$, i valori di f e la curva a tratti luogo di essi.

Il limite f_1 ha un significato meccanico importante; poichè misura precisamente l'incremento del raggio di un tubo sottilissimo senza fondi soggetto alla pressione p. E così doveva essere; in vero a distanza infinita dal fondo l'influenza di questo è certo nulla.

Il massimo di f si verifica per un'altezza del recipiente molto prossima a $\frac{3}{4} \pi \frac{h}{u}$, e precisamente alquanto minore. Esso vale:

$$\max f = 1{,}262 \frac{ph}{E} W^2 = 1{,}262\, f_1. \tag{27}$$

La sezione meridiana della curva elastica è, nel caso generale, una linea che non presenta d'ordinario la sua ordinata massima all'estremità; a meno che si tratti di altezze poco rilevanti, come si desume da quella singolarmente caratteristica corrispondente al caso di $l = \infty$, la cui equazione è

$$y = \frac{ph}{E} W^2 \left[1 - \sqrt{2}\, e^{-\frac{ux}{h}} \operatorname{sen}\left(\frac{ux}{h} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

diventando in questa ipotesi $M = N = 0$.

Il suo andamento è segnato colla linea t sulla fig. 4, e, a partire dall'ascissa $x_0 = \frac{3}{2} \pi \frac{h}{u}$ si confonde praticamente coll'asintoto di ordinata f_1. Al di là di questa medesima ascissa sono affatto trascurabili le differenze fra le ordinate estreme f delle curve meridiane corrispondenti a recipienti di altezza finita e quelle dell'anzidetta linea, mentre prima di essa tali differenze sono assai sensibili, come appare dalle curve elastiche t_1 e t_2 tracciate nella fig. 4 in corrispondenza di altezze $^3/_4 \pi \frac{h}{u}$ e $\pi \frac{h}{u}$. Si può dunque conchiudere che, per $l > x_0$ cioè quando

$$\frac{l}{h} \geq 2{,}43 \sqrt{\frac{R}{h}},$$

sono applicabili i risultati assai semplici, che si deducono per il recipiente di altezza infinita.

Le espressioni generali delle tensioni principali ideali massime per ogni sezione prendono, nel caso della parete sottilissima cilindrica, le forme seguenti:

$$(24') \qquad E\epsilon_r = E\left[\pm\frac{1}{2}hy'' - \frac{1}{mW}\frac{y}{h}\right], \quad E\epsilon_t = \frac{E}{W}\frac{y}{h}.$$

La 2ª di esse raggiunge dunque il valore più elevato dove è massimo y; cosicchè, per quanto è stato detto, l'altezza critica del recipiente, rispetto al pericolo di rottura dell'orlo, è quella a cui corrisponde il valore (27) di f, per la quale si ha:

$$\max E\epsilon_t = 1{,}262\, p\,\frac{R}{h}.$$

Supposto invece il recipiente di altezza infinita, per $x = \pi\frac{h}{u}$ si trova:

$$\max E\epsilon_t = 1{,}043\, p\,\frac{R}{h} \quad (*).$$

Quanto alla tensione ideale $E\epsilon_r$, diretta nel senso delle generatrici, è chiaro che il suo massimo si dovrà trovare in prossimità dell'incastro, dato l'andamento delle sezioni meridiane. Per identificarlo in modo rigoroso si osservi che, per $x=0$, dalla (24') combinata colla 2ª delle (20'), e sostituendo i noti valori delle costanti NMQ risulta:

$$(28) \qquad E\epsilon_r = \pm\frac{Eu}{2}\,Y\left[\left(e^{\frac{ul}{h}} + e^{-\frac{ul}{h}}\right)^2 - 4\cos^2\frac{ul}{h}\right].$$

La quantità entro parentesi è sempre positiva, perchè il 1° termine è sempre maggiore di 4; quindi, essendo $Y>0$, la tensione ideale $E\epsilon_r$ ha il 1° o il 2° dei segni esplicitamente in-

(*) I due presenti risultati dimostrano inesatto, almeno nel caso delle pareti sottili, ciò che il Grashof presume nel § 210 del suo magistrale trattato *Elasticität und Festigkeit*; ove, dopo aver esaurito il problema del recipiente chiuso da due fondi indeformabili, discutendo, senza trattarlo, il caso qui risolto, afferma che la massima tensione ideale periferica dev'essere minore di quella che a parità di altre condizioni si verifica nel tubo senza fondi.

dicati nella formola, secondochè la si ricerca nelle fibre della parete interna o dell'esterna di un recipiente premuto dall'interno. Si ha poi

$$\left[\frac{d(E\epsilon_r)}{dx}\right]_{x=0} = \pm \frac{Eu^2}{h} Y \left[e^{-2\frac{ul}{h}} - e^{2\frac{ul}{h}} - 2 \operatorname{sen} \frac{2ul}{h} \right];$$

e qui la quantità entro parentesi è costantemente negativa; il che appare evidente per $l < \frac{h}{u}\frac{\pi}{2}$, e risulta subito per valori maggiori di l, calcolando il 2° termine del trinomio.

Dunque $E\epsilon_r$ e la sua derivata rispetto ad x hanno segni opposti all'incastro; quindi nelle sue vicinanze la tensione ideale principale è in valore assoluto decrescente, ed ha in corrispondenza di esso il suo massimo relativo espresso dalla (28). Nella fig. 5 è rappresentata la legge di variazione di max $E\epsilon_r$ in funzione dell'altezza l del recipiente, per mezzo di una curva riferita alla verticale Ox. Essa ha un andamento simile a quella che nella fig. 4 misura colle sue ordinate gli incrementi f del raggio alla bocca del recipiente. Tende per $l = \infty$ al valor limite:

$$\sqrt{3\frac{m^2-1}{m^2}}\, p\, \frac{R}{h} = 1{,}677\, p\, \frac{R}{h},$$

e si può ritenere che praticamente lo raggiunga per $l > \frac{3}{2}\pi\frac{h}{u}$. Ha il suo massimo $2{,}188\, p\, \frac{R}{h}$ per l poco superiore a $\frac{3}{4}\pi\frac{h}{u}$.

Importa per ultimo notare come per valori relativamente bassi del rapporto fra raggio e spessore le divergenze fra i risultati della presente teoria e quelli calcolabili colle formole del § 6 siano tuttavia piccoli.

Così per $W = 5$ ed $l = \frac{\pi}{2}\frac{h}{v}$ si ottiene da queste ultime:

$$\max E\epsilon_r = 8{,}10\, p, \qquad \max E\epsilon_t = 5{,}47\, p$$

in vece di $8{,}38\, p$ e $5{,}00\, p$, che risultano immediatamente dall'applicazione di quanto si è concluso nel presente §.

Però, quando il rapporto W si accosta all'unità, l'accordo cessa di esistere; anzi nasce contraddizione fra le conclusioni

delle due indagini. Supposto p. es. $W = 1$, e sempre ritenendo $l = \frac{\pi}{2} \frac{h}{r}$, si trova in fatti la tensione ideale al lembo uguale a 1,68 p, superiore a quella che si sviluppa all'incastro, ove raggiunge appena 1,39 p, all'opposto di quanto si potè conchiudere in generale, trattando il problema nell'ipotesi di pareti sottilissime.

9. Serbatoio cilindrico. — Il quesito differisce dal precedente solo per la legge colla quale è ripartita la pressione. Detta H l'altezza del livello liquido sul fondo (Cfr. fig. 6) ed $l > H$ l'altezza totale del serbatoio, si ha il tronco sovrastante al livello H non soggetto a forze esterne. Quello inferiore a detto livello è cimentato in vece da una pressione che cresce proporzionalmente ad $H - x$, e il cui valore totale all'altezza x, per uno spicchio di parete cilindrica corrispondente all'angolo $d\alpha$, vale:

$$R\gamma \frac{(H-x)^2}{2} d\alpha ,$$

essendo γ il peso specifico del liquido.

La curva meridiana della superficie elastica ha dunque due equazioni distinte. Però la relazione analoga alla (21), che, per parete sottilissima si riduce a

$$\frac{y}{m} + R\xi' = 0 , \tag{21'}$$

sussiste invariata per tutta l'altezza l, come risulta subito dal suo significato meccanico accennato nel § 6. La utilizzeremo per eliminare la ξ nelle due equazioni differenziali analoghe alla (11) valide per i 2 tronchi anzidetti, che si riducono quindi alla seguente forma:

$$(11''') \left\{ \begin{array}{l|l} \text{per } H \geq x \geq 0 & \text{per } l \geq x \geq H \\ -\frac{h^2}{12} R y''' + \frac{m^2-1}{m^2 R}\left(\int_x^H y\,dx + \int_H^l y\,dx\right) = & -\frac{h^2}{12} R y''' + \frac{m^2-1}{m^2 R}\int_x^l y\,dx = 0. \\ = R\gamma \frac{m^2-1}{m^2 E} \frac{(H-x)^2}{2h} & \end{array} \right.$$

In esse la y del 1° tronco, essendo una funzione dell'ascissa diversa dalla y del 2° tronco, è indicata con carattere differente. Le (11'''), salvo il termine noto, non differiscono da quelle da cui dipende la risoluzione del problema precedente. Ne diamo quindi senz'altro gli integrali generali:

$$(29)\quad \begin{cases} \mathrm{y} = e^{\frac{ux}{h}}\left(M\cos\frac{ux}{h}+N\operatorname{sen}\frac{ux}{h}\right)+ \\ +e^{-\frac{ux}{h}}\left(P\cos\frac{ux}{h}+Q\operatorname{sen}\frac{ux}{h}\right)+\frac{R^2\gamma}{Eu}\frac{H-x}{h}u \end{cases} \quad \begin{cases} y=e^{\frac{ux}{h}}\left(M^0\cos\frac{ux}{h}+N^0\operatorname{sen}\frac{ux}{h}\right)+ \\ +e^{-\frac{ux}{h}}\left(P^0\cos\frac{ux}{h}+Q^0\operatorname{sen}\frac{ux}{h}\right) \end{cases}$$

conservando al simbolo u il significato del § 8.

Alla determinazione delle costanti, che sono in questo caso in numero di 8, servono: 1° Le condizioni al contorno libero ed al contorno incastrato della parete cilindrica; cioè:

$$(30)\quad \begin{cases} \text{per } x=0 \qquad \mathrm{y}=\mathrm{y}'=0 \\ \text{per } x=l \qquad y''=0. \end{cases}$$

2° Le condizioni imposte dalla forma definita delle equazioni differenziali (11'''), che si possono ridurre alle seguenti:

$$(31)\quad \begin{cases} \text{per } x=H \qquad \frac{h^2}{12}R\mathrm{y}'''=\frac{m^2-1}{m^2R}\int_H^l y\,dx \\ \text{per } x=l \qquad y'''=0. \end{cases}$$

3° Le condizioni di continuità dei due tronchi della curva meridiana in corrispondenza all'ascissa $x=H$, ove si raccordano, nonchè quelle di equilibrio fra le tensioni ripartite sulle sezioni estreme combacianti dei tronchi stessi; cioè:

$$(32)\quad \text{per } x=H \qquad y=\mathrm{y},\ y'=\mathrm{y}',\ y''=\mathrm{y}'',\ y'''=\mathrm{y}'''.$$

Supposte soddisfatte queste condizioni, le 2 equazioni (31) si riducono, come è facile vedere, ad una sola.

Rimangono complessivamente 8 condizioni indipendenti, cioè appunto tante quante occorrono a risolvere il problema.

Dalle (32), in numero di 4, si deduce:

$$M-M^0=\frac{R^2\gamma}{4Eu}e^{-\frac{uH}{h}}(c_H-s_H) \qquad N-N^0=\frac{R^2\gamma}{4Eu}e^{-\frac{uH}{h}}(c_H+s_H)$$

$$P-P^0=-\frac{R^2\gamma}{4Eu}e^{\frac{uH}{h}}(c_H+s_H) \qquad Q-Q^0=\frac{R^2\gamma}{4Eu}e^{\frac{uH}{h}}(c_H-s_H),$$

posto per brevità:

$$s_H = \operatorname{sen}\frac{uH}{h} \qquad c_H = \cos\frac{uH}{h},$$

come in seguito porremo:

$$s = \operatorname{sen}\frac{ul}{h}\ldots \qquad s_a = \operatorname{sen} u\,\frac{l-H}{h}\ldots,$$

chiamando a l'altezza del ciglio del serbatoio sul livello dell'acqua.

Le equazioni (30) e (31) prendono allora la forma seguente:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&M+P=-\frac{R^2\gamma}{Eu}\cdot\frac{H}{h}\,u,\\
&M+N-P+Q=\frac{R^2\gamma}{Eu},\\
&se^{\frac{ul}{h}}M-ce^{\frac{ul}{h}}N-se^{-\frac{ul}{h}}P+ce^{-\frac{ul}{h}}Q=\\
&\qquad=\frac{R^2\gamma}{4Eu}\left[(s_a-c_a)e^{\frac{ua}{h}}+(s_a+c_a)\,e^{-\frac{ua}{h}}\right]\\
&(s+c)e^{\frac{ul}{h}}M+(s-c)e^{\frac{ul}{h}}N+(s-c)e^{-\frac{ul}{h}}P-(s+c)e^{-\frac{ul}{h}}Q=\\
&\qquad=\frac{R^2\gamma}{2Eu}\,s_a\left(e^{\frac{ua}{h}}-e^{-\frac{ua}{h}}\right).
\end{aligned}\right.$$

Col loro mezzo si possono determinare in ogni caso le 4 costanti, essendo certamente diverso da zero il determinante dei loro coefficienti:

$$(34)\qquad 4c^2+\left(e^{\frac{ul}{h}}+e^{-\frac{ul}{h}}\right)^2$$

che indicheremo con $\frac{R^2\gamma}{Eu}\,\Delta$.

La soluzione riesce particolarmente semplice nell'ipotesi che il serbatoio sia affatto pieno. In vero, fatto $a=l-H=0$, si annullano i secondi membri delle due ultime equazioni (33), dalle quali si deduce allora:

$$M\Delta=2c^2-\frac{ul}{h}\left[1+2c(c-s)+e^{-\frac{2ul}{h}}\right]$$

$$N\Delta=1+2sc+e^{-\frac{2ul}{h}}-\frac{ul}{h}\left[1+2s(c-s)-e^{-\frac{2ul}{h}}\right]$$

$$P\Delta=-2c^2-\frac{ul}{h}\left[1+2c(c+s)+e^{+\frac{2ul}{h}}\right]$$

$$Q\Delta=1-2sc+e^{\frac{2ul}{h}}+\frac{ul}{h}\left[1-2s(c+s)-e^{\frac{2ul}{h}}\right].$$

Ricorrendo allora alla (29) si ricava facilmente il valore di y per $x = l$, che indicheremo come in passato con f:

$$f\Delta = 2(c+s)e^{\frac{ul}{h}} - 2(c-s)e^{-\frac{ul}{h}} - 4c\left(e^{-\frac{ul}{h}} + e^{\frac{ul}{h}}\right)\frac{ul}{h}.$$

Tenendo presente l'espressione (34) che definisce Δ, si vede che, col tendere di l ad ∞, f tende a zero. Risultato a prima vista singolare, ma perfettamente spiegabile, pensando che in generale la legge lineare colla quale sono ripartite le pressioni idrostatiche importa un'azione nulla alla sommità; e che nel caso limite di altezze grandissime, per non avere alla base pressioni che tendono a diventare infinite, bisognerebbe supporre la densità del liquido piccolissima, e quindi piccolissima la sua azione su tutta la zona di parete a profondità non grandissima sotto il livello.

Del resto questo carattere si rivela già nel caso di altezze limitate, come appare dalla curva s disegnata a tratti nella fig. 7, avente per ordinate gli incrementi f del raggio della bocca di un serbatoio pieno, la cui altezza l sia rappresentata dall'ascissa corrispondente. Ora questa curva, dopo un punto di ordinata massima in prossimità di $l = \frac{3}{4}\pi\frac{h}{u}$, tende a confondersi colla fondamentale, intorno alla quale oscilla con smorzamento così rapido, che per valori di $l > \frac{3}{2}\pi\frac{h}{u}$ le divergenze cessano di essere sensibili, appunto come nel caso del recipiente soggetto a pressione uniforme.

Dalla stessa parte della s e nella stessa scala è tracciata la sezione meridiana m della superficie elastica di un serbatoio di altezza $l = 2\pi\frac{h}{u}$, cioè all'incirca una volta e mezzo il raggio, supposto $\frac{R}{h} = 10$. Il rigonfiamento massimo si produce, com'era lecito attendersi, nella metà inferiore del serbatoio; e poichè in corrispondenza di esso ha luogo, in virtù della 2ª equazione (24'), la massima tensione ideale periferica, e quindi il pericolo maggiore di rottura secondo le generatrici, interessa trovare una formola facilmente adattabile al calcolo numerico per valutarlo.

Ciò non riesce difficile per serbatoi di altezza almeno uguale a $\frac{3}{2}\pi\frac{h}{u}$, com'è il caso pratico; poichè allora le co-

stanti M ed N sono estremamente piccole, ed è perciò trascurabile l'influenza dei termini che le contengono sul valore di y dato dalla (29), finchè si considera la parete cilindrica ad un livello non troppo elevato sul fondo, per modo che $e^{\frac{ux}{h}}$ non sia eccessivamente grande.

Con molta approssimazione si ha pure nelle stesse ipotesi:

$$P = -\frac{R^2\gamma}{Eu}\frac{ul}{h} \qquad Q = -\frac{R^2\gamma}{Eu}\left(\frac{ul}{h} - 1\right);$$

e quindi:

$$(29') \qquad \frac{Eu}{R^2\gamma}\,\mathrm{y} = \frac{l-x}{h}\,u - e^{-\frac{ux}{h}}\left[\frac{ul}{h}\cos\frac{ux}{h} + \left(\frac{ul}{h} - 1\right)\operatorname{sen}\frac{ux}{h}\right]$$

i cui massimi registrati nella 3ª linea della seguente tabella, in corrispondenza di altezze l del serbatoio date coi valori di $\frac{ul}{h}$ nella 1ª linea, si verificano a distanze x dal fondo determinate nella 2ª:

ul/h =	$3/2\,\pi$	$7/4\,\pi$	$2\,\pi$	$9/4\,\pi$	$5/2\,\pi$	$11/4\,\pi$
$\frac{180}{\pi}\,ux/h$ =	114°	120°	125°	129°	133°	135° 1/2
$\frac{Eu}{R^2\gamma}\,\mathrm{y}_{max}$ =	2,52	3,26	4,02	4,78	5,56	6,32

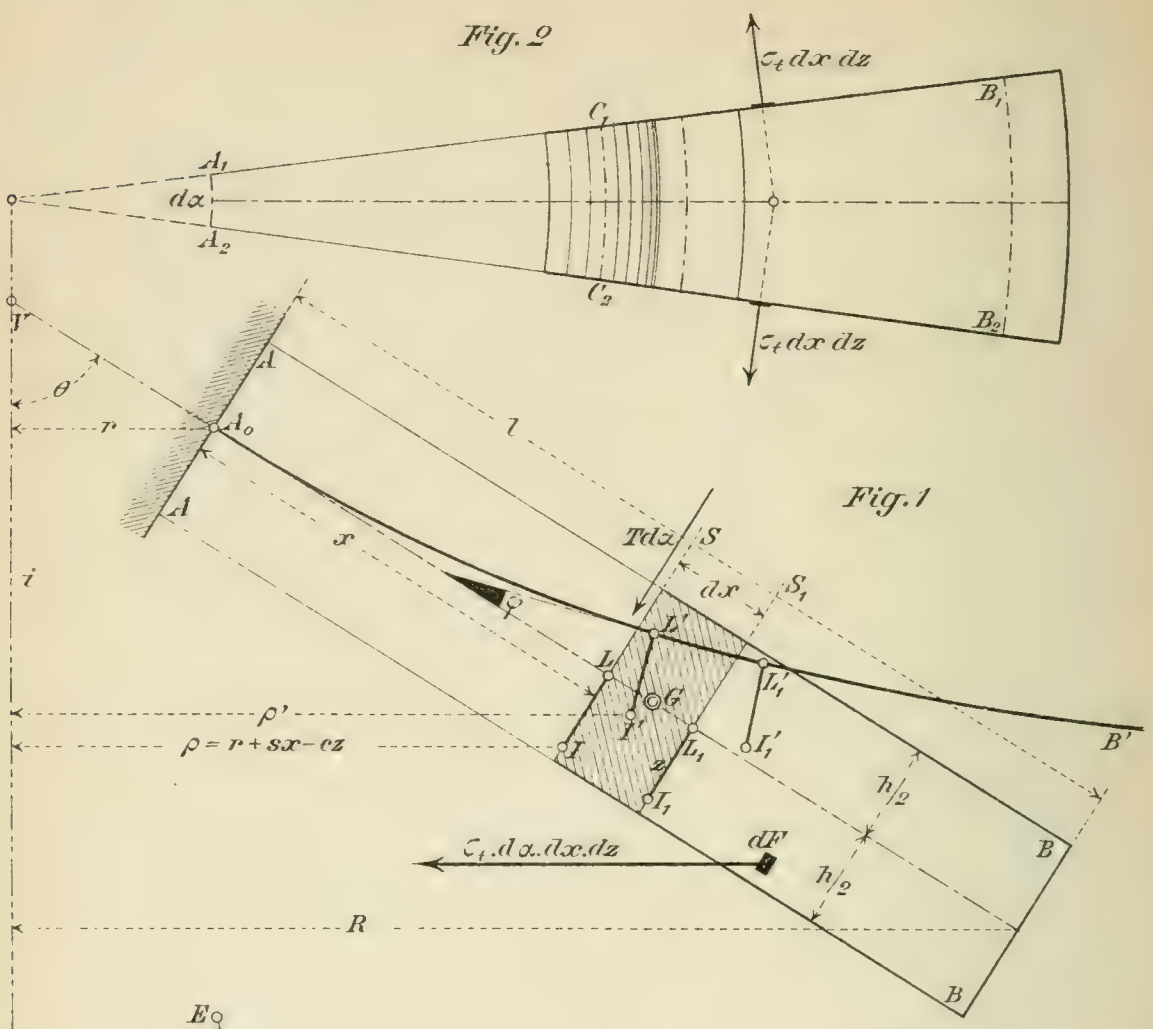
ul/h =	3π	4π	5π	6π	7π	8π
$\frac{180}{\pi}\,ux/h$ =	138°	145° 1/2	151°	154° 1/2	157° 1/2	159° 1/2
$\frac{Eu}{R^2\gamma}\,\mathrm{y}_{max}$ =	7,14	10,31	13,55	16,77	20,02	23,28

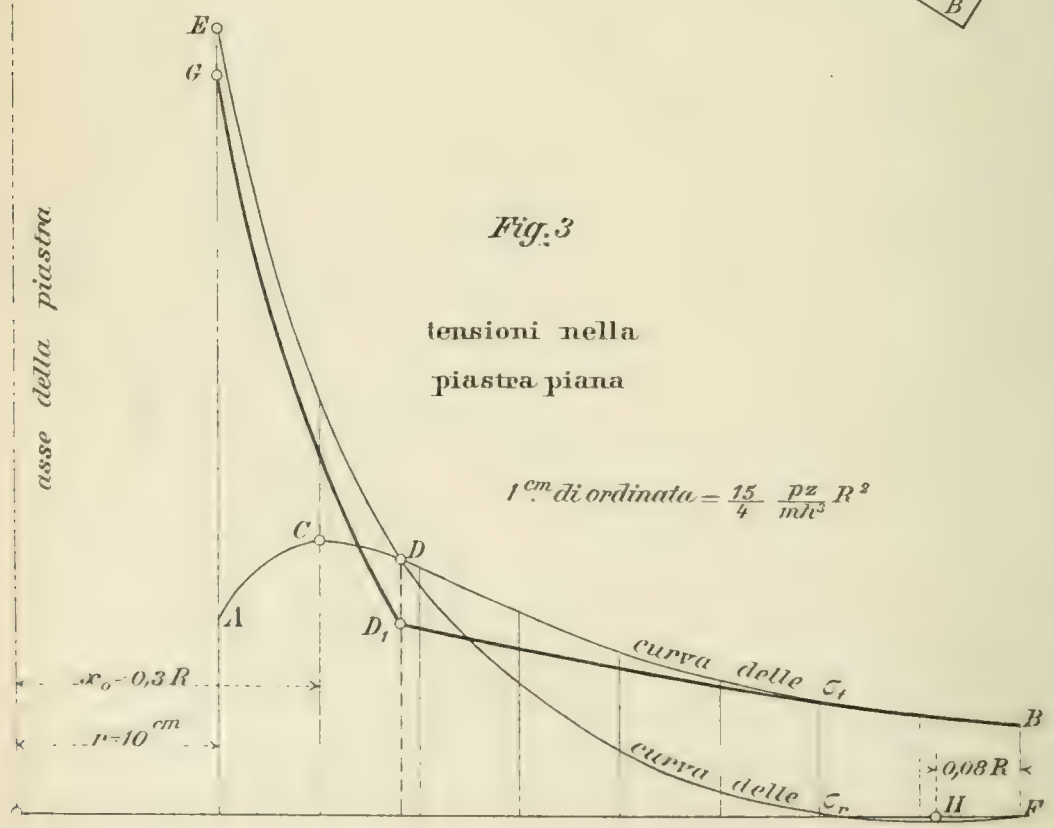
Indicando i fattori numerici contenuti nella 3ª linea colla lettera n, si ha dalla 2ª delle (24'):

$$(35) \qquad \max E\epsilon_t = n\,\frac{R\gamma}{u} = 0{,}77\,n\gamma\sqrt{\frac{R^3}{h}}.$$

Quanto alla tensione ideale massima nella direzione delle generatrici, è logico cercarla in corrispondenza dell'incastro, ove

M. PANETTI - Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche.





Lit. Salussolia

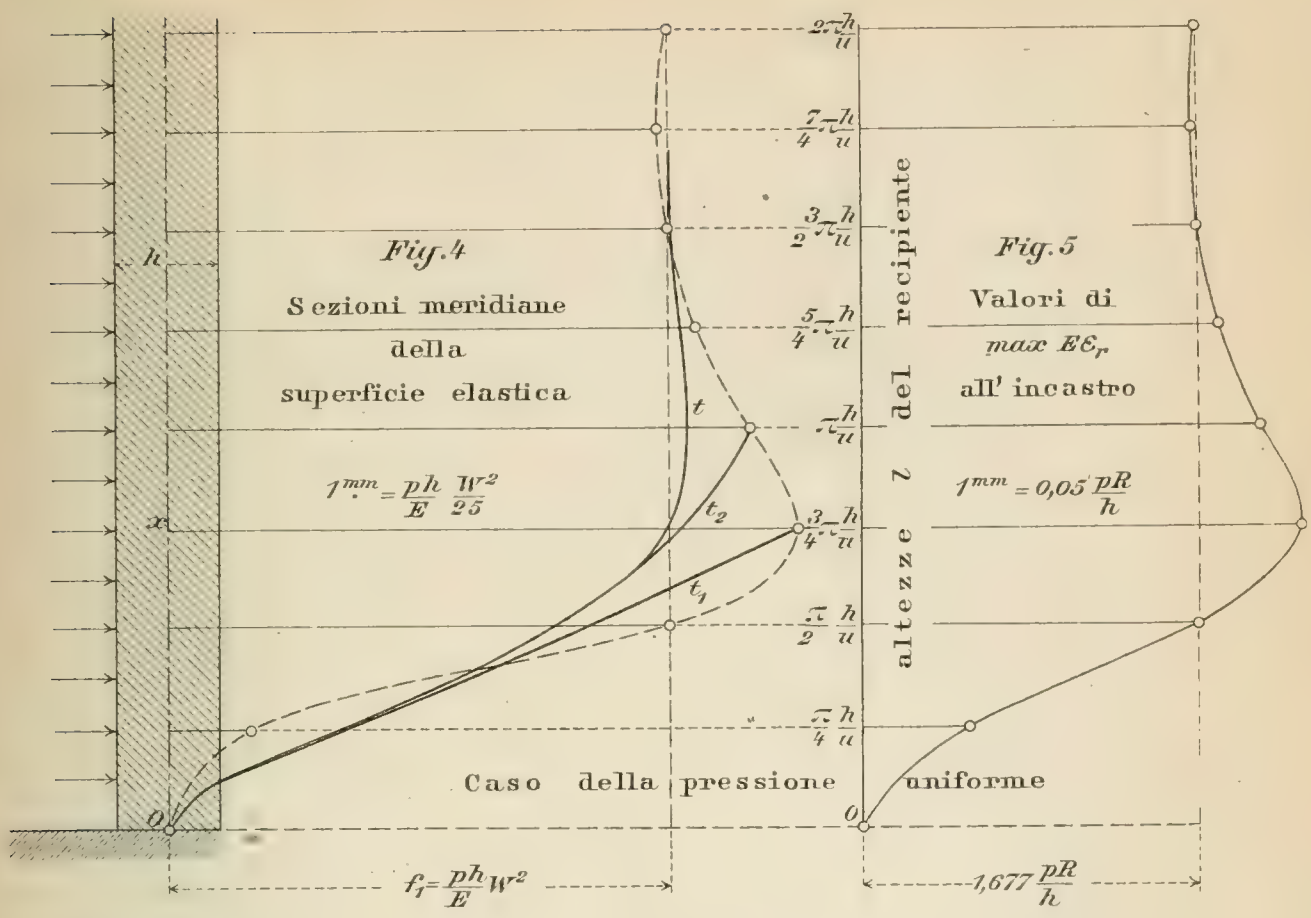


Fig. 4
Sezioni meridiane della superficie elastica
$1^{mm} = \frac{ph}{E}\frac{W^2}{25}$
Fig. 5
Valori di max $E\varepsilon_r$ all' incastro
$1^{mm} = 0{,}05\frac{pR}{h}$
altezze l del recipiente
Caso della pressione uniforme
$f_1 = \frac{ph}{E}W^2$
$1{,}677\frac{pR}{h}$

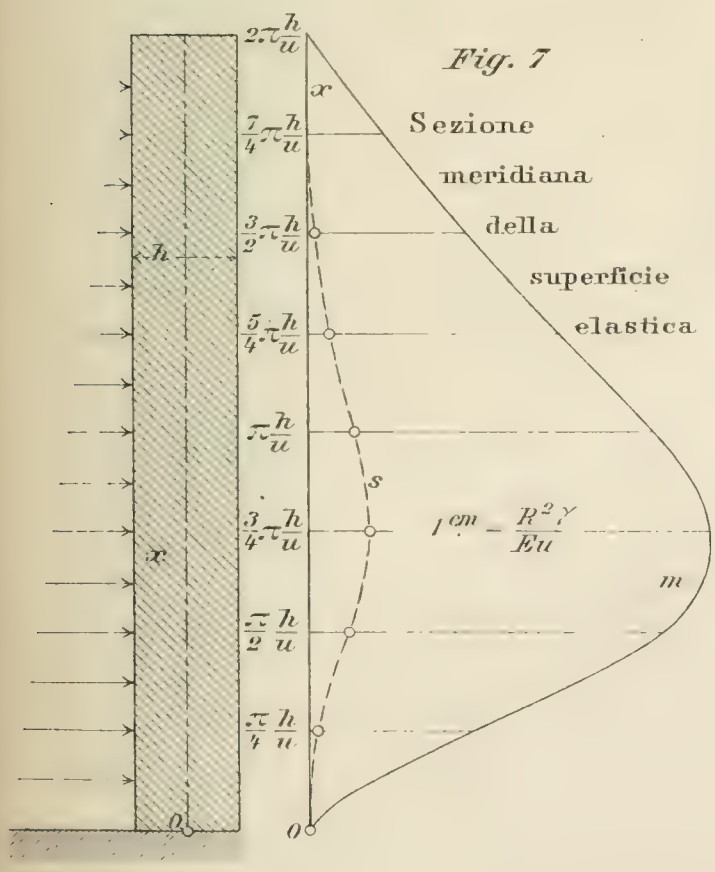
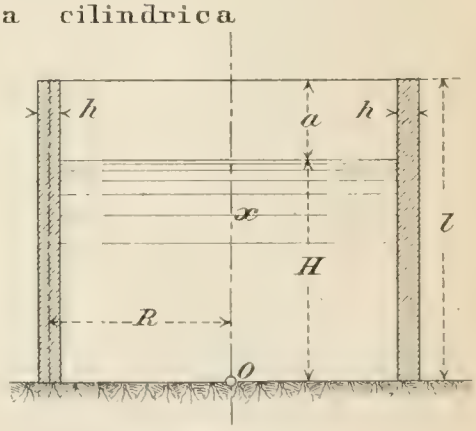


Fig. 7
Sezione meridiana della superficie elastica
$1^{cm} = \frac{R^2\gamma}{Eu}$
Caso della pressione idrostatica


piastra cilindrica
Fig. 6

si deve trovare a più forte ragione che nel problema precedente. Ciò ammesso, dalla 1ª delle (24′), sostituendo ad y'' il valore deducibile dalla (29), e facendo $x = 0$ e quindi $y = 0$, si ottiene in valore assoluto:

$$\max E\epsilon_r = \frac{Eu^2}{h\Delta}\left\{4sc - \left(e^{\frac{2ul}{h}} - e^{-\frac{2ul}{h}}\right) + \frac{ul}{h}\left[4s^2 + \left(e^{\frac{ul}{h}} - e^{-\frac{ul}{h}}\right)^2\right]\right\}.$$

Anche qui, supposta l'altezza del serbatoio non troppo piccola $\left(\text{non occorre neanche sia raggiunto il limite } \frac{3}{2}\pi\frac{h}{u}\right)$, si può con molta approssimazione sostituire alla formola precedente quest'altra assai più semplice:

$$(36) \quad \max E\epsilon_r = u\left(\frac{ul}{h} - 1\right)\frac{R^2\gamma}{h} = 1{,}3\left(1{,}3\frac{l}{\sqrt{Rh}} - 1\right)\gamma\sqrt{\frac{R^3}{h}}\,.$$

La (35) e la (36) di comoda applicazione pratica sostituiscono nel calcolo dei serbatoi di spessore costante il metodo non razionale di riguardarli come costituiti di anelli indipendenti, e di considerare quindi l'elemento adiacente al fondo come soggetto alla tensione periferica $l\frac{R}{h}\gamma$.

Le tensioni ideali massime dirette come le generatrici, calcolabili colla (35), superano notevolmente questo valore; e, quantunque sia lecito attendersi dall'imperfetto funzionamento dell'incastro una diminuzione sensibile della loro entità, è prudenza riferirsi ad esse nella verifica di un serbatoio con parete cilindrica di spessore costante.

Finalmente si noti che la massima tensione ideale periferica non ha luogo sul fondo, ma ad una distanza da esso che, nei limiti della tabella calcolata, varia fra $\frac{42}{100}$ e $\frac{11}{100}$ dell' altezza totale. Quindi, nel caso di strutture, in cui si provveda con mezzi differenti alla resistenza della parete secondo le generatrici e normalmente ad esse (costruzioni in cemento armato), sarebbe opportuno dare la massima importanza a questi ultimi nella zona in cui le $E\epsilon_t$ raggiungono effettivamente i valori più elevati.

Relazione sulla memoria del prof. Mario Pieri: *Nuovi principî di Geometria projettiva complessa.*

Lo Staudt nei suoi classici *Beiträge zur Geometrie der Lage* ha edificato la *Geometria complessa* basandola sulla ordinaria *Geometria reale.* Così, secondo lui, la locuzione "*punto imaginario*" sta per significare una ben definita figura composta di elementi *reali.* Altri, e primo di tutti il Klein, han modificato lievemente questa figura; ma il concetto è rimasto lo stesso. È quel medesimo indirizzo secondo cui in Aritmetica si definiscono i *numeri imaginari* come coppie di numeri *reali.* Esso corrisponde bene al naturale svolgersi della scienza per gradi successivi. Ciò non toglie che lo si possa anche invertire, prendendo a costruire *direttamente* la Geometria complessa, senza presupporre come dati gli elementi reali!

Questo fa il Prof. Pieri nella sua Memoria.

Egli ammette come nozione primitiva quella di *punto complesso;* e così pure quelle di *retta* e di *catena* (la *Kette* di Staudt). Supposto verificato da esse un certo sistema di postulati, o proposizioni primitive, ne trae con processo logico-deduttivo la parte fondamentale della Geometria projettiva complessa, per gli spazi di qualunque dimensione, fino a porre in questi le coordinate projettive complesse.

Un primo gruppo di postulati ed i teoremi che ad essi si appoggiano vengono tratti, con pochi cambiamenti di parole, da altri lavori, pubblicati dalla nostra Accademia, nei quali il Pieri aveva studiato i fondamenti della Geometria projettiva *reale.* Così i postulati sui punti di una *catena* corrispondono perfettamente ai postulati della *retta reale.* Ma un campo essenzialmente diverso si comincia ad avere quando si debban considerare *tutti* i punti complessi di una retta; quindi le catene di una retta; le *zone* in cui la retta è divisa da una catena; ecc. Qui si hanno difficoltà nuove. I postulati si complicano notevolmente. Così, per le catene di una retta, si devono ammettere proposizioni primitive corrispondenti a quelle che occorrerebbero per svolgere la Geometria sopra una sfera reale (imagine della retta complessa).

Adempiono ad un ufficio essenziale in questa trattazione. insieme colle *projettività*, le *antiprojettività*. Son le due sorta di trasformazioni che mutano le catene in catene (*alisigrafie*, come le chiama il Pieri). Ne vengon ritrovate le proprietà fondamentali fino alle *antinvoluzioni* e alle *catene* di specie superiore.

Se poi in uno spazio complesso si fissa ad arbitrio una sua catena, e si chiamano *punti reali* dello spazio i punti di questa catena, *punti complessi coniugati* quelli separati armonicamente dalla catena, ecc.; si otterrà subito, dalla Geometria delle catene e delle antinvoluzioni, quella dello *spazio reale*.

Il lavoro del Prof. Pieri corrisponde, come ognun vede, ad un concetto filosofico e ad una necessità scientifica. Niun dubbio che in uno stadio avanzato della scienza geometrica, essendo da assumere come ambiente lo spazio di punti complessi, sia più semplice assumerlo a priori, anzi che dedurlo dallo spazio reale! La questione dell'effettiva esistenza dei punti imaginari, che, prima di Staudt, aveva dato luogo a tanti malintesi, qui non si presenta più: trattandosi ora di un' esistenza esclusivamente logica, che non lascia adito ad equivoci per relazioni col mondo fisico!

Quanto al procedimento seguìto dal Pieri, esso è molto pregevole per chiarezza e rigore, come per l'ingegnosità. Lo si potrà forse ancora migliorare, con qualche riduzione o cambiamento nel sistema dei postulati. Forse si potranno anche ridurre i concetti primitivi a quelli soli di *punto* e *retta*, deducendone le catene rettilinee con costruzioni lineari completate da postulati di limite, oppure definendole come luoghi di punti uniti di certe corrispondenze armoniche (antiprojettività). Ma in ogni caso la Memoria del Prof. Pieri avrà il merito d'esser stata la prima a risolvere un interessante problema; e potrà servir di guida sicura per altre soluzioni.

In conseguenza noi proponiamo che essa sia accolta fra i volumi dell'Accademia.

G. Peano,
C. Segre, *Relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 12 Febbraio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Manno, Cipolla. Brusa, Carutti, Pizzi, Chironi, De Sanctis e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Ruffini.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente 29 gennaio 1905.

Il Socio Chironi, presentando in nome dell'autore, prof. Giovanni Pacchioni, due volumi, cioè: *Trattato della gestione degli affari altrui secondo il diritto romano e civile,* Lanciano, Carabba, 1903 e *Corso di diritto romano,* vol. I, *La costituzione e le fonti del diritto*, Innsbruck, Wagner, 1905, ne segnala con specialissimi elogi l' importanza e si riserva di riparlarne estesamente in una nota che presenterà per gli *Atti.*

Dal Socio Cipolla è fatto omaggio d'un commentario storico di Placido M. Lugano, intitolato: *Origini e primordi dell'Ordine di Monte Oliveto,* Firenze, 1903.

Il Socio Renier fa dono all'Accademia di due grossi volumi documentati di *Memorie della rivoluzione siciliana dell'anno 1848*, Palermo, 1898, a lui regalati dal Municipio di Palermo, a cui si deve quella pubblicazione.

Sono presentate per gli *Atti*:

1° dal Socio Chironi: R. Bobba, *Intorno il caso e la fortuna in Democrito*;

2° dal Socio Ferrero: Luigi Valmaggi, *Tacitiana*;

3° dal medesimo Socio Ferrero: Giovanni Carbonelli, *Suppellettile di una busta da oculista scoperta a Sibari.*

LETTURE

Intorno il caso e la fortuna in Democrito.

Comunicazione del Prof. ROMUALDO BOBBA.

Francesco Fiorentino nel suo *Manuale di Storia della Filosofia*, ad uso dei Licei (Napoli, 1887, 2ª edizione), dopo aver riassunto la dottrina atomistica di Leucippo e di Democrito, aggiunge: del moto non si assegna causa: è eterno. L'incontro degli atomi, la loro riunione, non succede per caso, ma per necessità di natura (ἀνάγκη) ed è determinata dalla legge di gravità; onde si scorge quanto erroneo sia il giudizio volgare seguito dall'Alighieri quando cantò:

Democrito che il mondo *a caso* pone.

Questo sbaglio divulgato va messo colla solita storiella del riso di Democrito e del pianto di Eraclito, ripetuta da tutti quelli che vogliono fingere di essere versati nella storia della filosofia. E lo sbaglio, nota lo Zeller, fu messo in voga da Cicerone, il quale fa produrre il cielo e la terra, secondo gli atomisti, " concursu quodam fortuito „. Ora se con ciò si vuole indicare la mancanza di ogni finalità nella produzione del mondo, non a Leucippo e a Democrito soli, ma a tutti i filosofi precedenti bisogna estendere il citato giudizio; ma se si vuole indicare la mancanza di ogni causa naturale, è vero perfettamente il contrario, perchè gli atomisti vollero che tutto nascesse per necessità con determinato fondamento (pag. 30, vol. II, *Storia della Filosofia greca*).

Siccome il Manuale del Fiorentino, pregevole per altri riguardi, era un tempo adoperato nelle classi liceali, i giovani leggendolo e meditandolo, dovevano facilmente condividere la condanna che egli infligge a Dante ed a Cicerone, come quelli che nel parlare di Democrito non seppero elevarsi al disopra del

volgo e con esso giudicarono che secondo gli atomisti il mondo fu formato " concursu quodam fortuito „, mentre secondo il Fiorentino, appoggiato allo Zeller, tutto nasce per necessità con determinato fondamento.

Se non che già il Trezza nel suo *Lucrezio* aveva scritto, fino dal 1870, queste parole: " quando il gran filosofo di Abdera dicea quelle parole memorande: il corso della natura tale è oggi quale fu sempre, egli indicava l'eterna immanenza delle leggi, fermandosi a questo fatto immenso, senza cercare più in là in un presunto antivedere di cause finali. Aristotele gliene diè biasimo, non intendendone il senso, giacchè Democrito rifiuta nei fenomeni tutto ciò che in qualche modo ne sospende o ne rompe la connessione fatale „ (pag. 11 e 12).

Il Fiorentino si limitava a dire che l'errore volgare in cui era caduto Dante proveniva dall'aver egli seguito Cicerone, mentre, secondo il Trezza, quegli che lo avrebbe dapprima accreditato è Aristotele (Εἰσὶ δὲ τινες οἳ καὶ τοῦ οὐρανοῦ τοῦδε καὶ τῶν κοσμικῶν παντῶν· αἰῶνται τὸ αὐτόματον, ἀπὸ ταὐτομάτου γὰρ γίγνεσθαί φασι τὴν δίνην καὶ τὴν κίνησιν, τὴν διακρίνασαν καὶ κατὰ στήσασαν εἰς ταὐτὴν τὴν τάξιν τὸ πᾶν) (*Fisica*, II, 4) " Sunt etiam qui et hujusce coeli ceterorumque coelorum omnium casum esse causam asserant; nam a casu conversionem motionemque fieri dicunt quae quidem distinxit et in hunc ordinem redegit atque constituit universum „.

Come si vede, anche Aristotele ha calunniato gli atomisti affermando che essi hanno attribuito al caso la primitiva formazione dell'universo e l'ordine che vi regna. Chi dunque ha ragione? il Fiorentino coll'appoggio dello Zeller ed il Trezza o Cicerone ed Aristotele? Ecco ciò che dobbiamo investigare prima di pronunciarci.

Che Aristotele conoscesse la dottrina degli Atomisti e che avesse sotto gli occhi le loro opere, mentre noi non ne possediamo che frammenti, appare dalla esposizione sommaria che ne fa scrivendo: questo adunque (Empedocle) ha ammesso quattro principii, e così: Leucippo invece e il suo amico Democrito dicono che non ci siano altri elementi che il pieno e il vuoto, chiamando l'uno l'*ente* l'altro *non ente*; il pieno cioè e il solido *ente*, il vuoto e il rado *non ente*. E perciò affermano che l'ente sia tanto quanto il non ente, perchè il vuoto è nè più nè meno

che il corpo: e che queste siano le cause degli enti come materia. E come quegli i quali ammettono un' essenza soggetta unica generano ogni altra cosa per mezzo delle sue modificazioni, ponendo a principii delle modificazioni stesse il rado e il denso, e così questi dicono che le differenze siano causa delle altre cose. E affermano che ce ne siano tre: la figura, l'ordine e la posizione. Sostengono in fatto che l'ente differisce solo di *rismo*, di *diatige* e di *trope*; parole che equivalgono, *rismo* a figura, *diatige* ad ordine, *trope* a posizione; giacchè l'A differisce di figura dall' N, l'AN d'ordine dal NA e lo Z di posizione dall'N. La difficoltà del movimento donde e come sia negli esseri, costoro non hanno più animo d'affrontarla (*Met.*, I, capo 4°).

Ma, scrive lo Zeller, come gli atomi volteggianti nello spazio infinito sono in perpetuo movimento, questo parve agli Atomisti un fatto sì naturale, che dichiararono esplicitamente essere senza cominciamento, e perciò Democrito non ne indicava la causa, perchè non può derivare da altra cosa ciò che non ha cominciamento, è infinito. Per questo Aristotele potè rimproverare agli Atomisti di non aver cercato sufficientemente la causa del movimento; ma è andare troppo oltre pretendere che essi attribuirono la causa del movimento al caso. Non si può chiamare tale movimento fortuito se non s'intende per fortuito tutto che non deriva da una *causa finale*; ma se tale espressione significa l'assenza di causa naturale, gli Atomisti sono tanto lontani quanto è possibile da una tale dottrina, ed in questo senso dichiararono che niente nel mondo è il risultato del caso, ma che tutto risulta da cause determinate.

Il rimprovero di Aristotele non riguarda il modo con cui Democrito ha cercato di spiegare gli accostamenti e concorsi particolari e subordinati, la vita e la morte delle parti del Cosmo, ma bensì il modo con cui il moto eterno degli atomi si diversifica nelle varie classi di corpuscoli, in guisa da farli concorrere insieme o fra essi dividersi e distribuirsi per formare i primi composti e l'ordine totale dei composti, ossia il Cosmo; ed è questa formazione che Aristotele sostiene dovuta al caso, non la prima.

Inoltre il dottissimo Zeller sembra supporre che Aristotele non attribuisca al fortuito se non ciò che sarebbe formato senza un fine; come se egli ignorasse che nella dottrina atomistica

non si parla mai di causa finale; mentre la dottrina del caso in Aristotele ha ben altra estensione.

La mancanza di precisione e determinazione nel concetto del moto primitivo base dell'atomismo era una lacuna che non poteva sfuggire all'acume di Aristotele nella formazione del Cosmo e spiegare l'ordine universale. Il moto è inerente agli atomi, ma non si dice perchè vi sia, nè come; è affermato come necessità, ma non è in alcun modo dimostrato ed effettivamente niuno scorge come vi entri, tanto più che agli atomi non si assegnano altre qualità che la grandezza, la figura e l'ordine, cioè non sono che solidi geometrici impenetrabili, senza attività ed energia qualitative, non si vede, ripeto, perchè sarebbero piuttosto in moto che in riposo, nè si moverebbero piuttosto in un verso che in un altro per rendere possibile quella legge supposta da Democrito, che il simile si porta verso il simile, e tanto meno si vede come dal loro concorso si formerebbe un ordine immutabile.

Ma la questione dell'esistenza del caso e del suo fondamento naturale è assai diversa da quella de' suoi limiti e della sua estensione. Perocchè, come già acutamente notava il compianto Prof. Ferri (*La Filosofia delle Scuole italiane*, 1870, disp. 3ª), altro è chiedere se i complessi fenomenici e ontologici siano adunati per semplice concorso senza ragione sufficiente interiore ed esteriore, altro se il Cosmo è l'effetto di un semplice accozzamento al quale tutto al più si potrà aggiungere un concetto indeterminato di *Natura* e si premetterà la costituzione particolare delle esistenze subordinate. In fatto Aristotele non esclude il caso dallo sviluppo e dalle relazioni degli enti finiti, specialmente in causa dei contrarii contenuti nella loro materia e delle differenze non eguagliate fra questo principio e la forma, ma accusa Empedocle e gli Atomisti di aver introdotto il caso nel mondo riguardo al Cielo, all'ordine cosmico, all'origine del moto e sue specie (*Fisica*, II, capo IV), scrivendo: " ci sono alcuni che di questo Cielo e delle cose cosmiche tutte accagionano il fortuito (αἰτίονται ταὐτόματον) e dal fortuito affermano derivare il moto vorticoso e il moto direttivo e compositivo del tutto verso quest'ordine „. Ed il Bonitz (*Aristotelis Metaphysica*, parte II, pag. 76, capo IV, libro 1°): " motricem autem causam quum necessitatem esse voluerunt „. Democritus, *Frag. phys.*, 40:

" eamque ita simpliciter et indefinite posuerint, ut non injuria — τὴν τύχη καὶ αὐτόματον — Aristoteles eos pro causa habuisse universi rerum ordinis censeret „ (*Phys.*, II, 4).

E Cicerone quando parla del caso applicandolo agli Atomisti e ne fa loro rimprovero, si riferisce evidentemente al modo con cui descrivono la macchina e costituzione del mondo; in fatto egli scrive: " Democritus ἄτομος quas appellat, id est corpora individua propter soliditatem, censet in infinito inani, in quo nihil nec summum, nec infimum, nec medium, nec ultimum, nec citimum sit, ita ferri, ut concursionibus inter se cohaerescant; ex quo efficiantur ea, quae sint, quaeque cernantur omnia; eumque motum atomorum nullo a principio, sed ex aeterno tempore intelligi convenire. Epicurus autem in quibus sequitur Democritum, non fere labitur. Quamquam utriusque quum multa non probo, tam illud in primis, quod quum in rerum natura duo quaerenda sint, unum, quae materia sit, ex quo quaeque efficiatur, alterum quae vis sit, quae quodque efficiat: de materia disseruerunt: vim et causam efficiendi reliquerunt „ (*De Finibus Bon. et Mal.*, I, § 6).

Ma, dirassi, forse Cicerone non fa che ripetere il rimprovero di Aristotele quasi colle stesse parole, quindi siamo sempre alla sola autorità di Aristotele. Ma anche Diogene Laerzio nella vita di Democrito dice bensì che secondo questo tutto avveniva per necessità, ma aggiunge che questa necessità si convertiva col moto: Πάντα τε κατ' ἀνάγκη γίγνεσθαι τῆς δίνης αἰτίας οὔσης τῆς γενέσεως πάντων ἐν ἀνάγκη λέγει (XII).

Sicchè per la critica il valore dei due concetti è perfettamente eguale, e se il secondo è così costituito ed indeterminato, e sprovveduto di ragion sufficiente da immedesimarsi in qualche modo col caso, una simile necessità equivarrebbe alla necessità del caso.

Plutarco (1, 4, 1, *Placiti dei filosofi*) nel riferire l'origine del Cosmo secondo gli Atomisti, si accorda con Aristotele, e Simplicio nel suo *Commentario alla Fisica* (fol. 13-74) la conferma pienamente.

Ma si insisterà dicendo che tutte queste testimonianze derivano sempre da un' unica fonte, cioè da Aristotele ed è questa appunto che si ritiene infedele. Si potrebbe anzitutto osservare che la maggior parte dei frammenti degli Atomisti sono ap-

punto desunti da Simplicio, il quale secondo ogni probabilità aveva sotto gli occhi i testi originali, e quindi poteva correggere l'interpretazione di Aristotele, il quale indubbiamente prendeva le sue citazioni dai testi originali, se avesse creduto che questi attribuiva agli Atomisti una opinione che non era ammessa da loro, tanto più che si trattava di un punto fondamentale della dottrina atomistica.

Ma anche un altro pensatore moderno e di primo ordine conferma l'interpretazione aristotelica. Non avendo presente il testo, citiamo la traduzione, la cui fedeltà è generalmente riconosciuta: " C'est à ce point de vue que s'arrête la philosophie atomistique pour laquelle l'absolu c'est l'être pour soi, l'un et l'agglomération des unités. Elle considère comme force essentielle la répulsion qui réside dans la notion même de l'*un*, mais ce qui rassemble les uns, ce n'est pas pour elle l'attraction, mais le hasard, c'est-à-dire un principe irrationnel „ (Hegel, *Log.*, pag. 391. Traduction de Veras).

Comprendiamo che i sostenitori della necessità nella formazione del Cosmo, secondo gli Atomisti, non ammettano l'interpretazione aristotelica, perchè secondo essi non è verosimile che Leucippo e Democrito abbiano parlato di caso e di fortuito nella formazione del mondo, dal momento che essi riferivano tutto alla necessità. Inoltre, se per caso s'intende ciò che avviene senza scopo prefisso, si estende arbitrariamente il suo significato; o si intende per caso ciò che avviene senza causa e allora si attribuisce agli Atomisti una assurdità contro cui protesta tutta la loro dottrina. Essi non si servivano del concetto di fine, ma di quello di una forza ciecamente operante, e ciò basta per escludere dalla loro teoria il fortuito e implicarvi invece la necessità.

Questa argomentazione si basa sul modo con cui essi intendono il concetto del caso e del fortuito, mentre l'analisi che Aristotele istituisce di questi due concetti è indubbiamente assai più completa e feconda. E poichè questa parte della dottrina aristotelica ci pare che anche presso i più diligenti storici della filosofia lasci alquanto a desiderare, ne presentiamo una esposizione che speriamo, potrà compiere quella lacuna.

Si dice che il caso e la fortuna sono nel numero delle cause e che molte cose avvengono casualmente e fortuitamente; ma in qual modo il caso e la fortuna siano nel numero delle cause e se

il caso e la fortuna siano la stessa cosa o diversa, e che veramente sia la fortuna, che il caso, ecco ciò che si deve investigare.

Ora la prima opinione è di quelli che negarono darsi fortuna o caso od essere cause di qualsiasi effetto, prima perchè di tutti gli effetti che si attribuiscono al caso e alla fortuna si dà una causa determinata; per esempio: un tale si reca al foro per comperare alcunchè, e trova un uomo cui voleva trovare ma non pensava di trovare, e si dice essere stata la fortuna la causa di trovare, mentre la vera causa è la volontà di comperare ed è per questa che si reca al foro, non per fortuna; dunque si dà una causa determinata del trovare e tale causa non è la fortuna, come non è causa di altri effetti, che si attribuiscono alla stessa, epperciò non si dà fortuna, nè essa è causa di alcun effetto.

Secondariamente gli antichi trattando delle cause della generazione e della corruzione, niente determinarono rispetto alla fortuna e ciò non per altra ragione se non perchè pensavano non darsi fortuna, nè questa essere causa sotto alcun aspetto.

Aristotele confuta queste opinioni osservando che pur essendo vero non darsi alcun effetto senza causa, tuttavia tutti dicono che alcuni effetti sono della fortuna, altri no; quindi gli antichi avrebbero dovuto trattare della fortuna nello spiegare perchè alcuni le attribuiscano certi effetti, specialmente pensando essi non essere la fortuna causa di checchessia tra quelle che ponevano, come la concordia, la discordia, il fuoco, la mente..... Inoltre se opinarono non darsi fortuna, avrebbero dovuto spiegare perchè da tutti si dice alcuni effetti provenire dalla fortuna; se poi pensarono darsi fortuna, tanto più avrebbero dovuto spiegare che avviene specialmente quando mettono in campo la fortuna e le attribuiscono alcuni effetti: come Empedocle parlando della costruzione del mondo fatta da ciò che egli dice la discordia aver separato gli elementi, aggiunge essere accaduto fortuitamente che l'aria concorresse nel luogo in cui è, e molte parti essersi prodotte negli animali a caso. Vi sono poi altri, gli Atomisti, i quali sostengono il caso essere causa e di questo cielo e di tutti i mondi, imperocchè affermano dal caso essersi fatti la rivoluzione ed il moto, che distribuì e costituì l'universo in questo ordine. Ora Aristotele osserva essere meraviglioso, anzi assurdo che gli animali e le piante non siano dalla

fortuna nè dal caso, ma dalla natura o dalla mente o da altra causa di simil genere, come è manifesto perchè non da qualsiasi cosa nasce qualsiasi cosa, ma dal seme di lattuca la lattuca e non la quercia.... e che il cielo e gli altri corpi divinissimi tra le cose sensibili siano del caso. Laonde qui avrebbero dovuto addurre la ragione perchè non attribuiscono al caso la produzione delle cose inferiori, mentre assegnano al caso l'origine delle cose celesti; vero è che non si poteva addurre tale ragione. Imperocchè nelle cose celesti nulla avviene casualmente e fortuitamente, poichè tutti i movimenti sono regolarissimi, mentre nelle cose inferiori molte cose avvengono casualmente; quindi è assurdo che in un ente casualmente costituito niente sia casuale, ma tutto sia regolato, invece nell'ente non costituito casualmente molte cose siano casuali.

Finalmente alcuni dissero la fortuna essere certo una causa, ma ignota all'umano intendimento: " ὡς θεῖόν τι οὖσα καὶ δαιμονιώτερον — perinde ac quiddam admirandumque numen „. — Esposte e confutate le opinioni dei filosofi che lo precedettero, Aristotele viene ad enunciare la sua ed a definire che cosa intenda per caso e per fortuna, illustrando la sua teoria con opportuni esempi.

Anzitutto premette alcune divisioni degli effetti e delle cause. Primamente vi sono alcuni effetti che sono prodotti sempre nello stesso modo, come il levare del sole, altri che avvengono ordinariamente, come che un uomo nasca con due occhi, altri nè sempre nè d'ordinario, come che un uomo nasca con sei diti in una mano. Gli effetti che sempre o d'ordinario avvengono nello stesso modo niuno di sana mente attribuisce alla fortuna o al caso; così niuno dice essere per caso che nasca il sole o che un uomo nasca con due orecchi. Invece si attribuiscono alla fortuna gli effetti che si producono raramente. Così diciamo essere casuale che un uomo nasca con sei dita. Quindi si scorge che la fortuna e il caso possono essere causa di effetti che si verificano raramente. Ma alcune cose avvengono per un fine, altre no; ancora alcune hanno luogo per elezione, come quelle che si fanno con intelligenza, alcune si fanno non per elezione, ma per natura, e poichè tanto le prime quanto le seconde si fanno per un fine, perciò tanto l'intelletto quanto la natura quando producono effetti che raramente avvengono possono ope-

rare per un fine, e tali effetti possono essere prodotti da causa operante per un fine. E poichè gli effetti che avvengono raramente avvengono per accidente da causa operante per un fine, diciamo che essi avvengono fortuitamente.

Ma siccome altro è l'ente per sè, altro l'ente per accidente, così altra è la causa per sè, altra la causa per accidente: e questa ancora può essere per accidente rispetto alla causa e per accidente rispetto all'effetto. È per accidente rispetto alla causa quando ciò che è per accidente rispetto alla causa si congiunge per sè: così il musico e il bianco è per accidente causa della casa, in quanto che la musica e la bianchezza si congiungono coll'edificatore, il quale è la causa per sè della casa. Per accidente poi rispetto agli effetti si dice quando l'effetto per accidente si congiunge all'effetto per sè non sempre, nè frequentemente, ma raramente. Così un uomo che ara un campo è per accidente causa di trovare un tesoro, perchè tale invenzione accidentalmente si congiunge alla aratura, la quale per sè è l'effetto dell'aratore. Quindi si scorge che la causa per sè è determinata a certi effetti, mentre la causa per accidente è indeterminata, giacchè all'effetto per sè possono congiungersi per accidente molte cose e molte all'infinito; quindi una causa può causare indeterminatamente per accidente più e più effetti. La fortuna adunque e il caso sono causa per accidente operante per un fine e producente effetti che raramente si congiungono all'effetto per sè.

Da queste divisioni Aristotele deduce quali siano gli effetti fortuiti, quali i casuali. Gli effetti fortuiti sono quelli che conseguono dall'azione che è fatta in grazia di un fine, ma però tale azione non è prescelta nella previsione che seguirà tale effetto, nè sempre, nè ordinariamente è connessa con tale effetto: così se alcuno si reca al foro allo scopo di comperare alcunchè e trovi un suo debitore da cui riceva il denaro dovuto, questa esazione è un effetto fortuito della sua venuta al foro; se tuttavia venendo nel foro non prevedea che avrebbe ricuperato il suo credito, nè ciò accada frequentemente di riscuotere un credito, ripeto, è fortuito l'incontro. Se poi il creditore venendo nel foro colla intenzione e il proposito di ricevere denaro e col fine di riceverlo e sempre e frequentemente ciò accadesse di ricevere denaro, certo il ricevimento del danaro non sarebbe

fortuito, nè causato dalla fortuna. Quindi la fortuna è causa per accidente di effetti spettanti a quelle cose che sono operate dall'intelletto per elezione, i quali effetti non seguono nè sempre, nè frequentemente alla azione fatta in grazia di un altro fine.

Aristotele per giustificare la sua definizione della fortuna osserva sotto quale condizione sia vero che l'intelletto e la fortuna sono uno stesso; imperciocchè dalle cose sopraddette appare che quelle cose solo agiscono per fortuna che agiscono per elezione, e siccome le sole cose aventi l'intelletto operano per elezione, così queste sole operano per fortuna. Sicchè la fortuna è solo nelle cose nelle quali vi è intelligenza.

Di qui si raccoglie ancora a quale condizione sia vera l'opinione secondo cui si dice essere la fortuna una causa ignota, cioè perchè la fortuna è una causa per accidente, e come tale si estende ad infiniti effetti che possono accadere alla causa per sè: ora l'infinito come tale è ignoto, quindi la fortuna è ignota per la sua indeterminazione a causare checchè sia per accadere. Di qui ancora s'intende che si vuole significare quando si dice che la fortuna è causa di nulla; cioè perchè una causa per accidente non è una causa semplicemente e tale essendo la fortuna, ragionevolmente si dice che essa non è causa di alcun effetto.

In fatto, perchè un suonatore di flauto per accidente edifica una casa, si dice che esso non è causa della casa, ma solo l'edificatore è causa della casa, quindi la fortuna essendo causa per accidente, così può dirsi che è causa di nulla. E poichè le cause per accidente possono essere infinite per la ragione che possono essere infinite le cause per cui chi recandosi al foro recuperi denaro, potendovi andare per fuggire qualcuno, o per seguirlo, o per visitarlo, o per assistere ai giuochi, perciò ben si dice la fortuna essere una causa indeterminata.

Di qui si scorge perchè volgarmente si dica essere la fortuna una causa senza ragione, attesochè essendo causa per accidente, raramente è seguita da effetti dei quali non si può rendere ragione, e tanto più che può causare cose infinite delle quali non si può dar ragione.

Ciò ci pone in grado di risolvere alcuni dubbî, cioè primo, se tutte le cause per accidente per le quali seguono effetti possano dirsi cause fortuite di questi; ad esempio, producendosi calore, vento, tonsura del capo, segua la salute di un ammalato,

e si dimandi se il caldo, il vento, la tonsura dei capelli siano cause fortuite della salute. E si risponde, poichè la fortuna è causa per accidente da parte dell'effetto, come si è detto sopra, certo il vento, il caldo, possono produrre qualche alterazione nell'ammalato, dalla quale per accidente può seguire la salute, quindi possono essere cause fortuite della guarigione. Ma la tonsura dei capelli se nulla produce nell'ammalato ed in cui per accidente segua la guarigione, non è causa fortuita della stessa. Imperocchè le cause della guarigione per accidente, altre sono più vicine, altre più lontane, ma le remotissime non sembrano cause.

Da ciò si deduce che cosa sia la buona fortuna, che la cattiva. La buona fortuna è causa per accidente di qualche bene, e se il bene sia grande dicesi prosperità e colui al quale capita tale bene si dice semplicemente fortunato. La cattiva fortuna è causa per accidente di male, e se questo è grande, si dice infortunio, e chi ne è colpito si dice semplicemente sfortunato. Aristotele aggiunge chiamarsi sfortunato non solo l'uomo che perde un gran bene che già possedeva, ad esempio, l'essere spogliato del regno, perchè essere privato di un gran bene è un gran male, ma anche quando poco vi manca per conseguire un gran bene e non si consegue. E la ragione si è che il poco vi mancò si reputa per nulla; quindi quando poco vi manca perchè altri conseguisca un gran bene e non lo consegue, vale come se dopo aver conseguito un gran bene, lo perdesse. Per la stessa ragione è fortunato non solo chi è liberato da un gran male in cui era, ma ancora chi è vicino a questo, cioè di cadere in un gran male e non vi cade; così chi è vicino ad essere ucciso e non lo è, dicesi fortunato; ad essere imperatore e non lo diventa, sfortunato.

Ed è perciò che la fortuna dicesi incerta, cioè perchè essendo causa per accidente e raramente producendo l'effetto, questo appunto perchè raro si produce rimane incertissimo.

Spiegato così chiarissimamente ciò che comunemente si dice della fortuna Aristotele procede ad investigare in che convengano e in che disconvengano il caso e la fortuna. Convengono in quanto il caso e la fortuna sono cause per accidente di effetti che nè sempre nè ordinariamente si verificano da una azione fatta per un altro fine; differiscono in quanto il caso è

paragonato alla fortuna, come il genere alla specie, sicchè ogni fortuito è casuale, ma ogni casuale non è fortuito. Il caso è causa per accidente di effetti sia rispetto a cose che possono essere fortunate o non fortunate; mentre la fortuna è causa per accidente di effetti riguardanti agenti che possono essere fortunati o sfortunati; ora i soli agenti forniti di intelletto e operanti per elezione possono essere tali cioè felici o infelici, poichè essere fortunato o sfortunato è lo stesso che essere felice o infelice o gli è assai vicino; mentre per gli agenti privi di intelletto e di elezione non si dà fortuna ma solo caso. Così le cose inanimate, i bruti, i fanciulli prima dell'uso della ragione non operando per elezione e deliberazione, non agiscono per fortuna ma per caso, sebbene impropriamente e metaforicamente si dicano talvolta fortunate cose inanimate, come là dove Protarco dice fortunate le pietre con cui si costruiscono gli altari perchè vengono onorate mentre altre consimili sono conculcate. Si può tuttavia alcunchè di animato dirsi fortunato dalla fortuna dell'uomo; così lo scoprimento di un tesoro si dice fortunato perchè da tale scoprimento si dice fortunato il suo scopritore.

Le cose inanimate quindi e i bruti operano dal caso, così si dice che un cavallo casualmente sfuggisse la morte se per qualche accidente era in pericolo e la evitò. Da tutto ciò Aristotele conchiude dal caso farsi quelle cose che avvengono per accidente e raramente da una azione avente qualche altro fine distinto da quello che accade; farsi fortuitamente quelle cose che così si fanno come spettanti ad agenti elettivi, perciò capaci di essere fortunati o sfortunati. Aristotele conferma ancora la sua definizione del caso dalla etimologia della parola μάτον, la quale vale frustra o frustraneo, che si dice quando alcunchè si fa in grazia di altro ed è atto a conseguirlo, e non consegue ciò in grazia del quale si fa; come se alcuno passeggia per digerire e non digerisce, diciamo che egli passeggiò invano, *frustra*; ma se prese un bagno e il sole non si oscurò niuno dirà che si lavò indarno, perchè ciò non fece perchè si oscurasse il sole. Invece diciamo a caso fatta una cosa quando ciò che poteva farsi in grazia di ciò che segue, si fa ma non in grazia di esso ma casualmente: così diciamo che una pietra che cade casualmente uccide un uomo, perchè potendo essere lanciata appunto

per uccidere non cadde in grazia di uccidere ma uccise casualmente perchè non era caduta per ciò. Da tutto ciò Aristotele raccoglie che la principale differenza tra la fortuna e il caso sta in ciò che il caso si riferisce agli agenti che procedono da natura quando qualche cosa avviene per accidente oltre natura, ad esempio, la nascita di un fanciullo con sei dita in una mano; ora quando ciò accade diciamo non provenire dalla fortuna ma dal caso, epperciò la causa del caso è estrinseca, della fortuna intrinseca.

Dopo l'acuta ed esauriente analisi della fortuna e del caso, Aristotele ritornando alla teoria degli atomisti rispetto alla formazione del Cosmo, osserva che il caso e la fortuna essendo cause per accidente non sono cause prime nel causare come le cause per sè, giacchè l'effetto per accidente segue da qualche effetto per sè; quindi se il caso è causa per accidente del mondo deve esservi qualche causa per sè che precede il caso dall'azione della quale per accidente sarebbe avvenuta la produzione del mondo. Ma è assurdo che qualsiasi effetto per accidente abbia preceduto la produzione dell'universo, epperciò la causa di questo non fu il caso ma la mente e la natura avente per fine lo stesso universo e tutte le altre cose che lo compongono.

Ora se l'analisi che fa qui Aristotele, dopo aver esposta l'opinione degli atomisti intorno alla prima formazione del mondo, è più larga, completa e profonda di quella, diremo col compianto professore Luigi Ferri (*Filosofia delle scuole italiane*, disp. 3ª, 1870), che è nella mente di molti storici moderni anche eminenti, anche tedeschi e per molti riguardi stimabilissimi, quale meraviglia che la sua critica dell'atomismo riesca anche più sicura, più giusta e più comprensiva? Se i sensi varii, minuti, veraci del fortuito da lui notati con mirabile accuratezza oltrepassano di numero quelli di molti critici moderni, se contengono osservazioni essenziali che questi, non tutti, fecero, qual meraviglia che nasca in essi l'illusione di ritenersi per più competenti di lui nel giudicare di libri e di scritture che egli aveva sott'occhio e che non abbiamo più noi?

E per vero Aristotele è tanto lontano dall'identificare i due concetti di fortuna e di caso colla negazione della causalità, che anzi, come abbiamo lungamente dimostrato, afferma ripetutamente

che sono cause per accidente che versano nel possibile del divenire, negli avvenimenti possibili, non nel possibile semplice e ordinario, e versano anche nel possibile di quelle cose che possano avvenire per un fine. Stabilisce che il caso — ταὐτόματον è come il genere rispetto alla fortuna — τύχη che ne è una specie, indica ancora le relazioni dell'una e dell'altro col frustraneo e di tutte tre col concetto di fine, che ordinariamente vi congiungiamo nelle nostre idee, separando ancora la finalità inconsapevole della natura dalla finalità consapevole (elezione) dell'uomo per concludere che la fortuna e il caso si distinguono sopratutto quando si tratta degli avvenimenti naturali, non umani, nei quali ha luogo il fortuito non la fortuna, essendo la causa di quelli una spontaneità frustranea ed interna, mentre la cagione di ciò che riguarda noi è esteriore. Epperciò il caso e la fortuna sono nel numero delle cause motrici ed efficienti, appartengono cioè a quelle cose e a quei fatti da cui si inizia e produce il moto, si convertono coll'accidentale e questo si converte coll'esterno e l'interno; l'accidente poi è il contrario del proprio τὸ ἴδιον il quale alla sua volta si intrinseca nell'essenziale, quindi nella natura delle cose. Il fortuito quindi suppone la necessità naturale, mentre se ne distingue ad un tempo, è in certo senso irrazionale παράλογον, indefinito — ἄόριστον come gli accidenti, e gli innumerevoli esempi che Aristotele adduce contengono sempre una coincidenza di cause indipendenti, ed allato alla serie delle condizioni relative alla efficienza, quella che riguarda la finalità elettiva e consapevole dell'uomo o quella inconsapevole della natura, aggiunge che rispetto al caso il suo concetto è anche più generale di questa relazione, sicchè il riscontro tra la finalità e la produzione di un effetto conforme ad essa, ma indipendente da essa per le sue proprie cause, non è la sola maniera di considerarlo; e così, dice egli, cade una pietra e ferisce alcuno, il ferito è detto fortuito perchè si esclude il fine possibile o reale in quel momento della sua caduta, perchè non è caduta per quello; ma aggiunge ancora, il fortuito in senso generale appartiene alle cose che sono per accidente, anzi alle cause che sono tali; così del fabbricare la casa è causa quell'insieme di condizioni che costituiscono la qualità di architetto e solo per accidente vi entrerà essere egli musico o bianco. Anzi nel V della *Metafisica*, capo 2°, Aristotele illustrando questo

punto scrive: " Certe altre cose hanno nome di cause perchè accidenti o generi di accidenti. D'una statua, per esempio, altrimenti è causa Policleto perchè allo statuario accade di essere Policleto, ed altrimenti lo statuario; e così le nozioni che comprendono in sè quella dell'accidente; l'uomo, per esempio, è causa della statua, o a dirittura l'animale, perchè Policleto è uomo e l'uomo animale. Degli accidenti poi, ce ne sono di più lontani e di più vicini, come se il bianco e l'abile in musica si dicessero causa della statua e non già solo Policleto „.

Il Cournot, illustre matematico francese, nella sua opera col titolo: *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, tome premier, al capitolo 3° dal titolo *Du hasard et de la probabilité mathématique*, scrive: " Come ogni cosa deve aver la sua ragione, così tutto che chiamiamo avvenimento deve aver una causa. Spesso la causa di un avvenimento ci sfugge, o noi prendiamo per causa ciò che non è; ma nè l'impotenza in cui ci troviamo di applicare il principio di causalità nè gli sbagli in cui ci avviene di cadere volendolo applicare inconsideratamente hanno per risultato di scuotere la nostra adesione a quel principio concepito come una regola assoluta e necessaria „.

Noi rimontiamo da un effetto alla sua causa immediata, la quale a sua volta è concepita come un effetto e così di seguito senza che lo spirito concepisca, nell'ordine degli avvenimenti, e senza che l'osservazione possa raggiungere alcun limite a questa progressione ascendente. L'effetto attuale può a sua volta divenire causa di un effetto susseguente e così all'infinito. Ora questa catena indefinita di cause ed effetti che si succedono, catena di cui l'avvenimento attuale forma un anello, costituisce essenzialmente una serie lineare; ed una infinità di serie simili possono coesistere nel tempo, le quali possono incrociarsi in modo che un avvenimento alla produzione del quale più avvenimenti hanno concorso, come effetto si riattacca a più serie distinte di cause generatrici, o genera a sua volta più serie di effetti che rimarranno distinte e perfettamente separate a partire dal termine iniziale che è loro comune. Ma sia che si riguardi come finito o infinito il numero delle cause o serie di cause che contribuiscono a produrre un effetto, il buon senso ci dice che vi sono serie *solidarie* o che si influenzano a vi-

cenda e serie indipendenti, cioè che si svolgono parallelamente o consecutivamente senza aver la menoma influenza le une sulle altre, cioè senza esercitare le une sulle altre una influenza che possa manifestarsi mediante effetti apprezzabili. Così niuno crederà seriamente che battendo col piede la terra disturbi il viaggiatore che cammina agli antipodi o che si scuota il sistema dei satelliti di Giove; perchè in ogni caso il disturbo sarebbe di un tal ordine di piccolezza da non potersi manifestare con alcun effetto sensibile a noi, epperciò siamo pienamente autorizzati a non tenerne conto. Non è impossibile che un avvenimento accaduto, ad esempio, nella Cina e nel Giappone abbia una certa influenza sopra fatti che debbono accadere in Europa; ma in generale è certo che un cittadino d'Italia il quale ordini il modo di passare la sua giornata non è influenzato da ciò che attualmente avviene in una città cinese dove non mai penetrò alcun Europeo. Vi sono qui due piccoli mondi in ciascuno dei quali si può osservare un incatenamento di cause ed effetti che si svolgono simultaneamente senza avere tra loro alcuna connessione e senza esercitare le une sulle altre influenza apprezzabile.

Ora gli avvenimenti prodotti dalla combinazione o dal concorso di altri avvenimenti che appartengono a serie indipendenti le une dalle altre, sono quelli che si dicono avvenimenti fortuiti, o risultati del caso, *du hasard.*

Per esempio: un tale vuol fare una scampagnata e prende il treno per recarsi alla sua destinazione: al treno in corsa succede uno scontro e quel tale ne è vittima, vittima fortuita, perchè le cause che hanno prodotto lo scontro non hanno alcuna connessione colla presenza del viaggiatore ed esse avrebbero avuto lo stesso svolgimento anche quando quel viaggiatore per altre influenze si fosse determinato a prender un altro mezzo per recarsi a destinazione o ad attendere un altro treno.

Ora non è già perchè gli avvenimenti di tal genere sono rari che si devono qualificare come risultati del caso, *du hasard*, ma sono rari perchè il caso li produce tra molti altri ai quali darebbero luogo combinazioni diverse e come rari ci sorprendono. Nella nozione del caso bisogna adunque tenersi a ciò che vi è di veramente fondamentale, cioè alla idea della indipendenza o della non solidarietà delle diverse serie di cause. Già Boezio commentando un passo del *de Interpretatione* aveva detto:

il caso è un avvenimento inopinato proveniente da cause che originariamente hanno un altro oggetto... se zappando un campo si trova un tesoro, la scoperta è veramente fortuita, perciocchè fu necessario che uno nascondesse un tesoro e che un altro zappasse quel campo, e ciascuno con intenzione assai differenti.

Senza dubbio l'esame che il Cournot fa da matematico della nozione del caso, insistendo specialmente sulla reciproca indipendenza delle serie di condizioni o di cause il cui concorso può produrre un dato effetto, era richiesto dallo scopo che si prefiggeva, cioè la sua applicazione al calcolo delle probabilità, ma sostanzialmente si conforma alla teoria di Aristotele, il quale aveva già rilevato quella indipendenza e l'ha connessa così bene colla sua teoria dell'accidente e della essenza da togliere ogni dubbio sulla chiarezza e pienezza delle sue vedute su tale questione.

L'insinuare che Aristotele ha criticato l'atomismo dal punto di veduta del suo sistema appare in queste parole: " Quando il grande filosofo d'Abdera dicea quelle memorande parole: il corso della natura tale è oggi quale fu sempre, egli annunciava l'eterna immanenza delle leggi, fermandosi a questo fatto immenso, senza cercare più in là in un presunto antivedere di cause finali. Aristotele gliene dà biasimo, non intendendone il senso, giacchè Democrito rifiuta nei fenomeni tutto ciò che in qualche modo ne sospende o ne rompe la connessione universale „ (Trezza, *Lucrezio*, capo VI, pag. 111-112).

Ora contro il signor Trezza sosteniamo che nella teoria di Aristotele intorno al caso e alla fortuna nulla ha a che fare il suo sistema speciale, poichè in essa espone le idee regolatrici delle investigazioni filosofiche e queste sono quelle che lo spirito umano deve seguire nello studio dell'arduo problema della formazione del Cosmo ossia nella ricerca delle sue cause. Quindi dato che negli atomi non vi sia che *grandezza*, *figura* e *posizione*, il loro moto non si spiega *razionalmente*, perchè la mera estensione è per se stessa indifferente al moto come alla quiete, e il moto non originando dal proprio e dall'essenziale degli atomi, non può essere che accidentale, e il dirlo eterno non approderà a nulla, perchè secondo la ragion filosofica, esso non sarà nulla più che un eterno accidentale o pure un accidente dichiarato eterno.

Vero è che il Grote (*Plato and the other companions of Sokrates,* vol. 1°, pagg. 75, 76, 77) fa dire a Democrito che l'eterno moto non è men naturale dell'eterno riposo, e che l'uno non richiede più che l'altro una causa speciale, che quindi la materia essendo attualmente in moto è ragionevole di pensare che lo sia sempre stata; è facile osservare che con ciò non si fa che ripetere l'affermazione degli Atomisti e non rispondere alle ragioni di Aristotele nè alle esigenze della ragione, non è spiegare, non è giustificare gli Atomisti. Non è questione di sapere se Democrito ha affermato la naturale necessità del moto e dei moti, ma su che ragioni l'ha affermata; non si cerca di sapere se l'ha posta, ma, come scrive il Ritter, se la sua necessità non si converta nel caso: " C'est parce que cette nécessité ne diffère en rien du hasard qu'on a été vraisemblablement conduit à affirmer que Démocrite attribue tout au hasard „ (vol. 1°, pag. 483, traduction de Tissot), e tale necessità si converte di fatto nel caso in causa della indipendenza che esiste tra i modi della pura estensione e il moto, quando non ci è di mezzo l'energia, la forza o, in altre parole, quell'insieme di condizioni primitive che si chiama natura, per spiegare le produzioni, qualità e direzione del movimento. Ed è la mancanza di queste condizioni che costituisce la base della critica Aristotelica, la quale, come abbiamo largamente provato, si collega colla teoria dell'accidentale e del fortuito come con quella della finalità e dell'ordine universale.

Vero è che lo Zeller e il Grote (opera citata), comprendendo la gravità della critica Aristotelica, credono di superarla, poichè secondo essi Democrito oltre le qualità assegnate agli atomi da Aristotele, a questi attribuisce pure una forza inerente da cui origina il loro moto. Che noi i quali abbiamo esplicito quel concetto dedotto da tante analisi filosofiche e scientifiche possiamo vederlo come adombrato dalle sue affermazioni ed a esse unibile quando siano colmate le lacune indicate, lo concediamo, ma che Democrito lo impiegasse in modo nella produzione del Cosmo da colmare l'insufficienza dei principii puramente quantitativi del meccanismo atomistico è appunto ciò che essi dovrebbero provare con testi espliciti tratti da' suoi frammenti. Ora questi testi non si adducono, mentre Diogene Laerzio ci dice esplicitamente che la sua necessità delle cose non

era altro che quella del moto stesso; il che si riduce alla affermazione che sempre ritorna su se stessa.

Ma si insiste: se tra i frammenti di Democrito ve ne fosse uno che contenesse le espressioni *fortuna*, *fortuito* e fossero da lui applicate alla formazione del Cosmo, Aristotele potrebbe per avventura aver ragione, ma ciò non è, e quando pure si trovasse sarebbe ancora da cercare come si potrebbero conciliare nella sua dottrina la necessità col caso. Noi ammettiamo pienamente che nei frammenti fisici di Democrito non troviamo quelle espressioni, ma non le aveva trovate neppure Aristotele il quale doveva avere sotto gli occhi gli originali di Democrito, imperciocchè egli scrive: Alcuni affermano niente avvenire per fortuna e per caso ma di qualunque effetto esservi cause determinate..... imperciocchè niuno dei sapienti antichi trattando della generazione e della corruzione nulla dissero della fortuna, perchè pensavano niente accadere per fortuna nè essere dessa causa in alcun modo. Ma ciò reca meraviglia, perciocchè molte cose avvengono e per fortuna e per caso e sebbene di qualsiasi effetto si dia una causa, tuttavia tutti dicono che alcuni effetti provengono dalla fortuna altri no, epperciò gli antichi saggi avrebbero dovuto parlarne per spiegare perchè alla fortuna ed al caso essi attribuissero alcuni effetti, specialmente ritenendo non essere la fortuna causa di alcuna cosa nè tra le cause che essi riconoscevano, come l'amore, l'odio, il fuoco, la mente..... Imperciocchè sostenendo non darsi fortuna avrebbero dovuto poi spiegare perchè da tutti si dica certi effetti provenire da fortuna; se poi pensarono darsi la fortuna, molto più avrebbero dovuto spiegare che cosa sia specialmente quando ne fanno uso e le attribuiscono la produzione di alcuni effetti, come Empedocle, il quale parlando della costruzione del mondo fatta da ciò che l'odio separa gli elementi, aggiunge essere avvenuto fortuitamente che l'aria corresse nel luogo in cui ora è, e ancora negli animali molte parti essere nate fortuitamente.

Ed Aristotele aggiunge: vi sono altri, gli Atomisti, i quali e di questo Cielo e di tutte le altre cose pongono la causa nel caso, perciocchè e la conversione e il moto stesso che distinse l'universo e lo ridusse in questo ordine dicono essere il caso. E ciò che reca grandissima meraviglia è che, mentre affermano e gli animali e le piante nè essere nè farsi dalla fortuna, ma

o la natura o la mente o altro di simile essere la causa perchè da ciascun seme non si faccia qualsiasi cosa, ma da tale l'olivo, da tale l'uomo: il Cielo invece e quelle cose che tra le sensibili sono più divine stimano prodursi dal caso, mentre il caso sostengono non essere causa di alcuna pianta, di alcun animale. Se la cosa è così, è degno di considerazione aggiungere, oltrechè è assurdo ciò che dicono è ancora più assurdo sostenere che a caso siasi formato il Cielo in cui nulla veggono farsi a caso, e negano poi molte cose non per fortuna formarsi dove veggono che effettivamente avvengono fortuitamente (*Fisica*, II, capo IV). Dunque Aristotele sapeva benissimo che Democrito nella sua teoria fisica della formazione del mondo non aveva usato le parole τὸ αὐτόματον ἀπὸ ταὐτομάτον. Se poi si credesse di cogliere in fallo Aristotele perchè in uno dei frammenti morali Democrito usò la parola τύχη, ma in modo da escludere ogni fortuito dal mondo, scrivendo: ἀνθρώποι τύχης εἴδωλον ἐπλάσαυτο τρόφασον ἰδίης ἀβουλίης· Βαιὰ γὰρ φρονῆσι τύχη μάκεται, τὰ δὲ πλείστα ἐν βίῳ ψυχὴ εὐξύνετος ὀξυδερκέειν κατιθύνει, frammento 14: " homines fortunae simulacrum praetextu imprudentiae suae finxerunt; nam parum resistit prudentiae fortuna ac pleraque mens perspicax in vita moderatur „.

Pur concedendo che questo frammento contenesse implicitamente l'immedesimazione della fortuna con l'ignoranza umana riferendosi alla morale, non esclude in alcun modo la questione di sapere che cosa pensava Democrito nella sua teoria fisica della necessità primitiva nella formazione dell'universo; e dal momento che niuna ragione scientifica si è addotta per giustificare tale necessità sempre affermata ma non mai dimostrata, non si può non assentire ad Aristotele quando immedesima tale necessità col caso.

Ma osserva il dottissimo Zeller tra le qualità assegnate agli atomi la grandezza, la forma e la posizione, è chiaro che colla grandezza è immediatamente dato il peso, perchè appartiene ad ogni corpo come tale, e come tutte le sostanze sono similari, il peso allo stesso titolo appartiene a tutti i corpi in guisa che tra masse eguali il peso deve essere uguale. E siccome gli atomisti dovettero considerare il movimento primordiale come l'effetto necessario di una causa naturale, tale causa non poterono cercarla che nel peso, epperciò la necessità degli

atomisti si riduce al vario peso degli atomi dipendente dalla loro grandezza. Quindi la forza inerente agli atomi che lo Zeller e il Grote affermano sostenuta da Democrito da cui si origina il loro moto primordiale è il peso il quale si identifica colla necessità.

E poichè il movimento degli atomi è semplicemente una conseguenza del loro peso e perciò il moto verticale verso il basso è il movimento primordiale: quindi tutti gli atomi come tali devono nel loro movimento seguire la stessa direzione. Ma siccome differiscono in grandezza e in peso cadono con ineguale velocità e perciò s'incontrano. I più leggeri sono spinti in alto dai più gravi e il conflitto di questi due movimenti, l'urto e il rimbalzamento degli atomi, genera un moto circolare o turbinamento che trae con sè tutte le parti degli atomi che sono in giuoco. Da questo movimento degli atomi le sostanze similari sono riunite, perchè ciò che ha lo stesso peso e la stessa forma cadrà nello stesso sito ove sarà spinto, e così si è formato l'universo.

Ora Aristotele dopo avere esuberantemente dimostrato che gli atomisti introducono il caso nella formazione del mondo, dimostra che anche identificata la necessità col peso non possono giungere a spiegare meglio tale formazione. Anzitutto osserva che gli antichi i quali ammisero il vuoto si dividono in due classi, cioè in quelli che posero uno spazio vuoto separato dai corpi e ciò ritennero necessario per rendere possibile il movimento non potendo questo aver luogo in uno spazio pieno, ed in quelli che ammisero il vuoto nei corpi stessi ciò pensando essere necessario per la condensazione e rarefazione dei corpi stessi. Lasciando in disparte questa seconda opinione occupiamoci solo della prima che riguarda gli Atomisti. Per intendere bene le ragioni di Aristotele contro gli Atomisti bisogna premettere che gli antichi insegnavano i corpi non poter essere in riposo senza essere sostenuti da qualche altro corpo circostante quindi, ad esempio, se noi non fossimo sostenuti dalla terra non riposeremmo ma cadremmo: così non potendo essere sostenuti dall'aria non possiamo riposare in questa. Ma se lo spazio fosse pieno, per ciò stesso tutti i corpi sarebbero sostenuti, non potendo penetrare nello spazio pieno. Quindi la causa per cui i corpi si muovono è lo spazio vuoto da cui non possono essere sostenuti, quindi gli atomi prima che colla loro caduta formassero il mondo si movevano da tempo infinito.

Premesso ciò Aristotele oppugna la teoria degli Atomisti con varie ragioni. Primo, se il vuoto fosse necessario al movimento specialmente locale gli elementi aventi la loro natura propria per la quale i gravi si movono all'ingiù i leggeri all'insù non si moverebbero più senza il vuoto, ciò che è contrario alla esperienza. Se poi il vuoto fosse uno spazio separato privo assolutamente di qualsiasi corpo, non vi sarebbe alcuna ragione perchè gli atomi sarebbero portati piuttosto da una parte che dall'altra; nè potrebbero muoversi in qualunque direzione. In fatti l'atomo si move piuttosto verso una parte anzi che verso un'altra in quanto troverà più consentanea ad esso questa o quella parte.....

Ma una parte del vuoto non può per alcuna ragione essergli preferibile a qualsiasi altra, sicchè si porti in una piuttosto che in altra. Inoltre siccome nel vuoto assoluto non vi è alcuna ragione perchè una parte sia al disopra, un'altra al disotto, così l'atomo non potrà moversi in alcuna direzione: imperocchè non v'è alcuna ragione perchè l'atomo si mova piuttosto verso una parte anzi che verso un'altra, attesochè il vuoto essendo un non ente non ammette alcuna differenza di parte, quindi l'atomo ben lungi dal muoversi starebbe fermo; come appunto dicono che la terra distando egualmente da qualunque parte del Cielo non vi ha alcuna ragione perchè si mova verso questa o quella parte. Dirassi forse che se nel vuoto essi non possono muoversi naturalmente potranno essere mossi per violenza; ma anche ciò è impossibile: in fatto il moto per violenza è il contrario del moto naturale epperciò suppone la sua possibilità; ma si è provato che nel vuoto gli atomi non possono muoversi naturalmente, dunque nemmeno per violenza. Un moto naturale è piuttosto un movimento verso una parte anzichè verso un'altra; ma siccome nel vuoto come infinito non può trovarsi differenza di parti, di luoghi, non luogo alto, non basso, non medio, non estremo, poichè del non ente come della privazione non si danno differenze, così resta confermato essere nel vuoto impossibile ogni movimento dell'atomo. È notevole che a queste argomentazioni di Aristotele contro il moto degli atomi nel vuoto assoluto, il dottissimo Zeller se la disbrighi con queste parole: " Quant à cette remarque, que dans l'espace infini il n'y a ni haut ni bas, elle ne semble pas être venue à l'esprit des Ato-

mistes „ (vol. 2°, *La philosophie des Grecs*, pag. 309): ma se la cosa è così, che cosa vale la tanto declamata necessità del moto degli atomi, dal momento che Aristotele dimostra così rigorosamente che essi non si muovono nè possono muoversi nel vuoto assoluto!

Ancora nel vuoto non vi è alcuna ragione perchè ciò che si muove stia fermo in un luogo anzi che in un altro; epperciò o gli atomi staranno in riposo o si muoveranno indefinitamente salvochè non siano impediti da qualche ostacolo più forte, perchè, secondo i sostenitori del vuoto, gli atomi si muovono perchè il vuoto non può sostenerli, loro cede; ma il vuoto sotto qualunque aspetto si consideri non può sostenere gli atomi, quindi essi dovrebbero muoversi in tutte le direzioni ciò che è impossibile.

Supponiamo ora che l'atomo più pesante o più leggero possa essere mosso più velocemente per due cause. Primo, può muoversi più velocemente perchè il mezzo in cui si muove resiste meno, epperciò meno impedisce il moto. Così, ad esempio, una palla di piombo si move più velocemente nell'aria che nell'acqua, perchè l'aria oppone minor resistenza dell'acqua. Ma il mezzo resiste al moto per la densità a causa della quale si scinde difficilmente o perchè si muove in contrario, epperciò una cosa in un mezzo quiescente si move più velocemente che in un mezzo che si move in contrario, e più velocemente si move attraverso un mezzo sottile che ad uno denso, ad esempio, nell'aria che nell'acqua. Inoltre il peso si move più velocemente nello stesso mezzo per l'eccesso della sua gravità o leggerezza, così una palla di piombo si move più velocemente nell'aria di una palla eguale di legno perchè la prima ha maggior peso, la seconda meno.

Pongasi ancora che lo stesso mobile attraverso un mezzo diversamente resistente si mova con diversa velocità, e che vi sia la stessa proporzione di velocità a velocità che corre tra la resistenza di mezzo, ed ecco come Aristotele prova e spiega la cosa con un esempio: Sia il peso A, cioè una palla di piombo, sia il mezzo B, ad esempio, l'acqua, e si mova con tale velocità da percorrere cento palmi nel tempo C, cioè dieci momenti. Lo stesso peso A percorra il mezzo D più sottile, ad esempio, l'aria, si moverà più velocemente e la stessa lunghezza di cento palmi sarà percorsa in minor tempo, ad esempio, in cinque mo-

menti che chiameremo E: sarà la stessa proporzione di velocità a velocità come di resistenza a resistenza; epperciò se la resistenza dell'aria sarà la metà di quella dell'acqua la palla di piombo si moverà il doppio più velocemente nell'aria che nell'acqua; ma ciò che si move il doppio più velocemente percorrerà lo stesso spazio in tempo minore della metà, quindi la palla di piombo che nell'acqua percorrerà quello spazio in dieci momenti ne impiegherà solo cinque per percorrerlo nell'aria.

Pongasi ancora che il pieno non può aver alcuna proporzione col vuoto, come il numero non può aver alcuna proporzione col nulla. Ora il quattro; ad esempio, ha proporzione col tre perchè eccede il tre per uno; ha proporzione col due, perchè eccede questo di due, ha proporzione coll'uno perchè lo eccede di tre; ma col nulla non ha proporzione di sorta; così il pieno acqua ha proporzione col pieno aria, questo col pieno di qualche altro mezzo più sottile.

Ma niun corpo ha proporzione col vuoto. E la ragione sta in ciò che qualunque cosa che ne eccede un'altra, si compone di quella cui eccede e dell'eccesso stesso, e si può dividere nella stessa: così il quattro che supera il tre per uno si compone di tre e di uno, e così dicasi degli altri numeri minori del quattro. Ora se quattro eccedesse il nulla, eccedendolo per quattro, questo si comporrebbe di quattro e di nulla, ciò che è assurdo; per la stessa ragione se una retta si componesse di punti e il pieno avesse qualche proporzione col vuoto, si comporrebbe del vuoto e pieno.

Queste premesse che a primo tratto potrebbero parere superflue erano invece assolutamente necessarie per giungere allo scopo che si è prefisso Aristotele, cioè che l'aggiunta del peso agli atomi non li rende più atti a formare il mondo del caso. In fatto siccome si è dimostrato esservi rispetto alla velocità la stessa proporzione del moto al moto che corre tra il mezzo al mezzo rispetto alla sottigliezza, invece tra il pieno e il vuoto non vi ha alcuna proporzione rispetto alla sottigliezza e resistenza, perchè una resistenza nulla non ha alcuna proporzione con una resistenza qualsiasi; quindi la velocità con cui un mobile qualunque, ad esempio, una palla di piombo, si moverebbe nel vuoto, non ha alcuna proporzione colla velocità con cui si moverebbe anche nel pieno più sottile: ma se nel vuoto quel

mobile si movesse rispetto al tempo più velocemente avrebbe una proporzione colla velocità; epperciò nel vuoto quel mobile non si moverebbe nel tempo, ma in nessun tempo ciò che è impossibile e contrario alla ragione del moto.

Se poi si insistesse dicendo che nel vuoto un mobile percorre, ad esempio, uno spazio eguale in un tempo cento volte minore di quello che impiegherebbe a percorrerlo nell'acqua, si osserva che in un vuoto in cui nulla oppone resistenza il mobile non si moverebbe più velocemente che in un pieno egualmente resistente ciò che è assurdo. In fatto sia il vuoto F cento palmi; siano due pieni eguali anche di cento palmi B; ad esempio, acqua e D aria; il mobile A, una palla di piombo, si moverebbe attraverso lo spazio B, acqua, nel tempo E, poni cento momenti; si moverebbe anche attraverso lo spazio vuoto F nel tempo G minore, ad esempio, in un momento solo, quindi vi sia la stessa proporzione tra il vuoto F al pieno acqua B, che corre tra un momento solo a cento momenti, e poichè il mobile A percorre in un momento tutto il vuoto F di cento palmi, così in un momento percorra la centesima parte C, dello spazio B pieno d'acqua, cioè un palmo. Se si trovi un corpo cento volte più sottile dell'acqua, lo stesso mobile percorrerà lo spazio pieno di quel tale corpo più sottile cento volte dell'acqua in un tempo cento volte minore di quello che impiegherebbe per percorrere lo spazio pieno acqua, cioè in un momento solo; ma dalla fatta supposizione quel mobile percorre lo spazio vuoto in un momento; dunque nello stesso tempo percorrerà uno spazio eguale di pieno, quindi il mobile si moverà colla stessa velocità nel vuoto che non ha alcuna resistenza come in un pieno che presenta qualche resistenza, ciò che è assurdo ed impossibile.

Laonde, siccome nel vuoto non può verificarsi la proporzione secondo la quale lo stesso mobile si move con diversa velocità in mezzi diversi, così nel vuoto non può verificarsi questa altra proporzione che stabilisce che i mobili, atomi, che hanno diversa gravità e leggerezza, si muovano con velocità diversa. Infatti i mobili, atomi, che sono più pesanti sia perchè hanno maggior grandezza o altra maniera nello stesso mezzo, si movono più velocemente di quelli che hanno minore velocità proporzionalmente al loro peso; così una palla di piombo nello stesso mezzo si move più velocemente di una palla di eguale

grandezza ma di legno, poniamo l'aria per la ragione che i mobili più pesanti hanno maggior forza per scindere la resistenza del mezzo, ad esempio, l'aria, dei mobili più leggeri; ma il vuoto assoluto non presentando alcuna resistenza, tutti gli atomi comunque differenti per grandezza e peso si moveranno tutti con eguale velocità. Quindi è impossibile l'urto degli atomi più pesanti e creduti moversi più velocemente dei più leggeri, impossibile il rimbalzo e la formazione del mondo (*Fisica*, libro IV, Capo VIII, c. IX).

Ciò che siamo venuti esponendo rispetto alla esauriente confutazione che Aristotele fece della teoria atomistica rispetto al movimento degli atomi ed alla impossibilità del loro urto e rimbalzo per formare il mondo, dimostra quanto profondamente ed oggettivamente avesse studiato la loro dottrina, ed è curioso rilevare che egli indicasse tanti secoli prima la vera ragione per cui i corpi più pesanti come i più leggeri nel vuoto cadono colla stessa velocità, ciò che dimostra sperimentalmente la macchina di Atwood.

Il dottissimo Zeller scrive; si dice che l'ipotesi di Epicuro relativa alla declinazione degli atomi sia diretta contro l'opinione di Democrito, del quale volle con ciò evitare il determinismo. come pure che la sua polemica e quella de' suoi discepoli contro la caduta perfettamente verticale degli atomi è unicamente diretta contro l'antica teoria atomistica. D'altra parte non si può considerare Epicuro come l'autore della spiegazione puramente fisica del movimento e della formazione del mondo, perchè egli indebolì precisamente quella spiegazione colla sua arbitraria ipotesi della declinazione degli atomi (Vol. II, pagg. 308-309).

Con tutto il rispetto che professiamo verso lo storico insigne ci permettiamo di osservare che secondo ogni probabilità Epicuro fu indotto ad ammettere la declinazione degli atomi convinto dalle obiezioni di Aristotele le quali dimostrarono fino alla evidenza che nel vuoto di Leucippo e di Democrito gli atomi gravi come i leggeri cadendo verticalmente colla stessa velocità si rendeva impossibile l'urto dei più pesanti sopra i più leggeri, quindi impossibile il rimbalzo e la formazione del nucleo intorno a cui si sarebbero conglobati altri atomi, e quindi impossibile la formazione del mondo. Lo Zeller poi giudica arbitraria la declinazione dalla verticale nella caduta degli atomi. Ammettiamo

che Epicuro immaginasse l'ipotesi della declinazione, vuoi per sottrarsi al determinismo vuoi per superare le difficoltà opposte da Aristotele contro la diversa velocità degli atomi in ragione del loro peso diverso nel vuoto, ma è oramai un fatto ammesso da tutti dopo le esperienze di Galileo fatte dalla torre di Pisa, che i gravi cadendo si scostano dalla verticale; così che, fatto abbastanza curioso, Epicuro per sostenere la possibilità dell'urto e del rimbalzo degli atomi nella loro caduta ammette una ipotesi che solo dopo tanti secoli fu verificata colla esperienza da Galileo e convertita in una verità dimostrata.

Ci piace qui di ricordare il giudizio che il Brukero porta intorno alla questione che abbiamo fin qui discussa: " Aquilanus hic movet quaestionem satis spinosam et difficilem, utrum in via methodoque Democriti sit principium in genere causae efficientis et si est quodnam sit? Quae vero ex studiose collectis obscuris vagisque veterum narrationibus tandem elicit huc redeunt, coelestia *casu*, coetera natura evenire; naturam vero quam Laertius vocavit, Democritum nominare necessitatem; casu autem evenire adeoque carere efficiente causa atomorum concursum, nec esse principium tertium efficiens re distinctum a duobus illis materialibus, sed haec ipsa materialia, alia atque alia ratione sumpta, et materiale esse et efficiens principium rerum: quam vero necessitatem dixerit non explicuisse. Recte haec dici, non ipsa tantum systematis Democritei natura et constitutio probat, quae animae mundanae Pythagorae, Platonis aliorumque vanum infinitum inane opponebat, de alia causa non sollicita; sed et Aristoteles diserte testatur qui post quam indignum philosopho dixerat, nullam rationem causarum naturalium afferre nisi hanc hoc semper ita fuisse, et fieri, ad hoc addit, principium Democritus refert naturae causas, sic et antea factum esse: aeternitatis autem non putat rationem habendam principii. Ex his enim sole meridiano clarius est. Democritum de causa efficiente quae atomos in infinito inani moveret, non fuisse sollicitum „ (pars. 11ª, lib. II, cap. XI).

Se volessimo addurre ancora una prova della tesi che sosteniamo possiamo trovarla evidentissima nel fatto che Democrito suppone realizzati o in via di realizzarsi tutti i mondi possibili dai più imperfetti ai più perfetti e li considera come tentativi di cui gli uni riescono gli altri falliscono senza una

legge costante e ricorrente che dal di dentro spinga la natura a rinnovare, perfezionare i suoi conati, che ne coordini e disponga gli effetti, ma con piena indipendenza e senza altra base che quella del concorso fortuito degli atomi (conf. ZELLER, luogo citato, pag. 311 e seguenti).

Possiamo dunque assennatamente conchiudere e contrariamente all'asserto del Fiorentino che Dante non cedette a un pregiudizio volgare, ma espresse un giudizio basato sopra ragioni veramente scientifiche quando cantò:

Democrito che il mondo *a caso* pone.

Tacitiana.

Nota di LUIGI VALMAGGI.

Hist. II, 86, 1 sg. *At in Pannonia tertia decuma legio ac septima Galbiana, dolorem iramque Bedriacensis pugnae retinentes, haud cunctanter Vespasiano accessere.*

A tacere di altre difficoltà di questo passo (le ha messe in rilievo col consueto acume il Fabia, *Rev. des ét. anc.* V, 358 sgg.), lo stesso accenno alla legione XIII non riesce alla prima troppo chiaro, dacché poco innanzi (II, 67) Tacito ha detto che la legione era rimasta in Italia, *comandata* alla costruzione di due anfiteatri, l'uno a Cremona e l'altro a Bologna (*tertiadecumani struere amphitheatra iussi; nam Caecina Cremonae, Valens Bononiae spectaculum gladiatorum edere parabant*). A togliere di mezzo l'apparente contraddizione si potrebbe supporre che di detta legione fossero stati trattenuti in Italia soltanto alcuni distaccamenti; onde *tertia decuma legio*, come *tertiadecumani* nel cap. 67, designerebbe non già tutta la legione, ma una parte di essa (cfr. il mio commento a *Hist.* II, 43, 9), secondo l'uso non infrequente di Tacito.

Se non che v'ha luogo anche a un'altra ipotesi, cioè che lo scrittore abbia omesso di avvertire che la legione XIII, condotte a termine le costruzioni, s'era restituita alla sua sede in Pannonia. Lacune di tal sorta, per soverchio studio di concisione, non sono rare in Tacito (1), e qui probabilmente ne abbiamo un esempio assai notevole; poiché, che questa seconda sia la congettura piú attendibile, par confermato da quanto sappiamo circa quel che accadde piú tardi, dopo la caduta di Cremona.

I Flaviani invero posero a sacco la città, non solo (*Hist.* III, 32) per " insitam praedandi cupidinem ", ma anche " vetere odio " contro i Cremonesi. E tra le ragioni di siffatto odio, Ta-

(1) V. tra altri gli esempi addotti dal Fabia, l. cit.

cito allega anche il modo come il popolazzo di Cremona s'era comportato verso i soldati della legione tredicesima addetti alla costruzione dell'anfiteatro (" mox tertiadecumanos ad exstruendum amphitheatrum relictos, ut sunt procacia urbanae plebis ingenia, petulantibus iurgiis inluserant "). Ora è agevole intendere che se questi soldati fossero rimasti a Cremona, allo scoppiare delle ostilità i Vitelliani si sarebbero affrettati a sopprimerli: se ciò non avvenne, è segno manifesto che, costrutto l'anfiteatro, erano tornati in Pannonia. Dunque al principiare della nuova guerra tra Vespasiano e Vitellio la legione XIII si trovava tutta intera in Pannonia, e piú precisamente a Pettau (*Hist.* III, 1), donde poi accorse a Padova, dopo i primi successi di Antonio Primo, con l'altra legione di Pannonia (*Hist.* III, 7). S'aggiunga, a tacer d'altro, che nella battaglia di Cremona la legione tredicesima tenne il centro della linea flaviana (*Hist.* III, 21), e appresso, nell'attacco del campo vitelliano dinanzi a Cremona (*Hist.* III, 26), fronteggiò da sola il lato settentrionale del campo stesso (*Hist.* III, 27): ora è chiaro che uffici cosí importanti non si sarebber potuti commettere a una legione dimezzata, quale la tredicesima avrebbe dovuto essere secondo la prima ipotesi di sopra enunciata.

Hist. III, 23, 5 sgg. *Magnitudine eximia quintae decumae legionis ballista ingentibus saxis hostilem aciem proruebat. Lateque cladem intulisset, ni duo milites praeclarum facinus ausi, arreptis e strage scutis ignorati, vincla ac libramenta tormentorum abscidissent.*

Può esser dubbio se nel secondo periodo il participio *ignorati* sia da congiungere con l'inciso *arreptis e strage scutis*, ovvero, virgolando dopo *scutis*, con la proposizione seguente *vincla ac libramenta tormentorum abscidissent.* Ad ogni modo nell'un caso e nell'altro il senso generale torna ad un medesimo, ciò è dire che i due soldati riuscirono a compiere quel loro atto eroico perché non vennero riconosciuti, grazie agli scudi che avevano tolto ai caduti. Se non che qui si affaccia una difficoltà non lieve, della quale non parmi che i commentatori si sieno resi finora piena ragione. Infatti non trovo che siasi data risposta soddisfacente a una domanda, che pur sorge spontanea e ragio-

nevole: come e perché quegli scudi presi tra i cadaveri nemici (1) abbiano dato agio ai due Flaviani di accostarsi inosservati alla ballista, che menava strage cosí furiosa.

Siamo, appena è d'uopo rammentarlo, alla battaglia di Cremona (o di Bedriaco, come si suol chiamarla impropriamente), e piú precisamente nel primo periodo dell'azione, che si svolse in piena notte, senza luce neppure di luna (2). Cade quindi senz'altro la congettura di Orelli-Meiser, che i due Flaviani coperti dagli scudi nemici " haud agnoscebantur a Vitellianis, quia horum scutis inscriptum erat Vitellii nomen ". Ognuno intende che tra le tenebre non era possibile leggere le iscrizioni, né distinguere i fregi, o il colore, o altri particolari siffatti degli scudi. La sola cosa che poteva dar nell'occhio in quella oscurità, e anche a mala pena, era la loro forma; né il passo di Tacito ammette altra spiegazione diversa. I Flaviani imbracciarono due scudi nemici, poiché la forma dei loro proprî scudi li avrebbe potuti tradire, rendendo vana la coraggiosa impresa. Il grave è che intorno a questa parte dell'armatura romana non abbiamo notizie molto precise (3). Tuttavia quel poco che ne sappiamo basta a escludere che vi fossero tante forme diverse di scudi, quante erano le legioni, di guisa che i soldati di una legione si potessero distinguere da quelli di un' altra per la forma degli scudi, a quel modo per esempio che in alcuni eser-

---

(1) Che fossero scudi dei nemici risulta dal contesto, ed è detto espressamente da Dione LXV, 14: ἀσπίδας τε ἐκ τῶν Βιτελλείων σκύλων ἥρπασαν.

(2) Tacito, proseguendo il racconto, dice espressamente che la luna sorse piú tardi, a notte alquanto inoltrata (*Neutro inclinaverat fortuna, donec adulta nocte luna surgens ostenderet acies falleretque*).

(3) Le rappresentanze figurate offrono una certa promiscuità di forme negli scudi, senza che riesca possibile ravvisare sempre differenze sicure di corpi, di gradi o di tempi. La trattazione piú ampia dell'argomento è tuttavia quella di E. Hübner, *Röm. Schildbuckel*, nelle *Arch.-epigr. Mittheil. aus Oesterr.* II, 117 sgg. Poco ne dice il Lindenschmit, *Tracht u. Bewaffn. des röm. Heeres*, Braunschweig 1882, p. 15, e pochissimo Alberto Müller, tanto negli articoli critici (*Die neueren Arbeiten üb. Tracht u. Bewaffn.*) del *Philol.* XXXIII, 632 sgg.; XLVII, 514 sgg.; 721 sgg., quanto in Baumeister, *Denkmäler*, III, 2043 sgg. Altri scritti dello stesso Müller (*Philol.* XL, 122 sgg. e 221 sgg.) e del Hübner (*Herm.* XVI, 302 sgg.) intorno all'armamento dei soldati romani non riguardano gli scudi. Piú scarsi ancora di notizie sono i manuali e dizionarî di antichità.

citi moderni la varietà dei colori serve a distinguere reggimenti o brigate. Pertanto, dacché la ballista apparteneva alla legione XV, e perciò erano legionarî quelli con cui i due volevano andar confusi, se ne deve desumere non già che essi fossero militi di un'altra legione, che non servirerebbe a niente, ma bensí di un' altr' arma. Di quale arma? Non è difficile ricavarlo dalla narrazione stessa di Tacito.

La legione XV era al centro della linea vitelliana, a cavaliere della via Postumia (*Hist.* III, 22), e aveva di fronte la legione XIII, fiancheggiata a destra dalla legione VIII e a sinistra dalla VII Galbiana (ib. 21). Se non che vacillando la legione Galbiana (ib. 22), il generale Antonio Primo aveva chiamato a sostegno di essa i pretoriani (ib. 23), i quali al principio del combattimento erano disposti all'estrema ala destra (ib. 21). E i pretoriani, racconta Tacito, " ubi excepere pugnam, pellunt hostem, dein pelluntur. Namque Vitelliani tormenta in aggerem viae contulerant, ut tela vacuo atque aperto excuterentur, dispersa primo et arbustis sine hostium noxa inlisa „. Alle quali parole segue immediatamente il passo di cui ci stiamo occupando: " Magnitudine eximia quintae decumae legionis ballista etc. „. La stessa connessione dei fatti quali vengono esposti da Tacito conferma apertamente la congettura che anche per altra via si presenta ovvia: dacché in quel punto non si trovavano altri combattenti che legionarî e pretoriani (gli ausiliari stavano alle ali e la cavalleria ai fianchi e alle spalle, come è detto da Tacito nel cap. 21), e dal momento che i due militi che abbatterono la ballista non erano legionarî, ne scende manifestamente che dovevano essere appunto pretoriani. Cosí del resto aveva già inteso il Wolff (che è tra gli interpreti di Tacito senza dubbio dei piú acuti e felici), ma senza addurne prove. E qualche prova sicura era in questo caso tanto piú necessaria, in quanto intorno all'armamento dei pretoriani non abbiamo, come è noto, che notizie molto scarse, e qui si tratta di un particolare che ha importanza molto maggiore che semplicemente esegetica, dacché il presente passo di Tacito (1) è l'unico docu-

(1) Cfr. tuttavia anche *Hist.* I, 38: " Rapta statim arma, sine more et ordine militiae, ut praetorianus aut legionarius insignibus suis distingueretur: miscentur auxiliaribus galeis scutisque „.

mento che possa attestare in modo non dubbio che gli scudi dei pretoriani erano diversi da quelli dei legionarî non solo per i fregi, ma anche per la forma.

Ib. 24, 12 sgg. *Vos, inquit, nisi vincitis, pagani, quis alius imperator, quae castra alia excipient? Illic signa armaque vestra sunt, et mors victis; nam ignominiam consumpsistis.*

Sono parole di Antonio Primo ai pretoriani che presero parte alla battaglia di Cremona tra le milizie flaviane. Primo il Dübner tentò render ragione dell'inciso *illic signa armaque vestra sunt*, che è di colore oscuro, intendendo *illic* " apud hostem, quem monstrat „; e la sua spiegazione fu ripetuta dai commentatori piú recenti (eccezion fatta, ch'io sappia, del Constans e del Balgarnie, i quali tacciono), ricordando che i pretoriani, inviati da Vitellio in congedo anticipato, " arma ad tribunos suos deferebant „ (*Hist.* II, 67). Ma questa interpretazione è assurda, perché nel passo testé citato Tacito soggiunge che quei pretoriani furono poi richiamati regolarmente in servizio (" tum resumpta militia robur Flavianarum partium fuere „). *Illic* si riferisce invece a *vincitis*, e vale " nella vittoria „, in opposizione al seguente *victis*. Siffatto uso dell'avverbio *illic* è comunissimo in Tacito, specie in relazione con nomi di persona (ad esempio *Hist.* II, 47 *Civile bellum a Vitellio coepit, et ut de principatu certaremus armis, initium illic fuit*), e anche in altri casi, come *Hist.* I, 83 *An et illic* (cioè *in bello*) *nocte intempesta rapientur arma?*; V, 17 *ne terrerentur vario Treverici proelii eventu: suam illic victoriam Germanis obstitisse.* E Antonio dice ai pretoriani che nella vittoria soltanto *signa armaque* (s'intende che i due sostantivi hanno senso pregnante) *vestra sunt*, appunto perché, in caso di sconfitta, sarebbero stati respinti da tutti (*quis alius imperator, quae castra alia excipient?*).

Ib. 25, 8. *Per limitem viae sparguntur festinatione consectandi victores* (i. e. *Flaviani*).

I commentatori spiegano *limitem* per " sentiero „; e la stessa interpretazione è data nel *Lessico* di Gerber e Greef. Ma che cosa vuol dire " sentiero della via „? Perché la chiosa del *Lessico* predetto, " un *sentiero* della *via maestra* „, è semplicemente una freddura, anche se si trattasse di uno scrit-

tore meno stringato di Tacito. Piuttosto si potrebbe sospettare che *viae* sia genitivo soggettivo od oggettivo (" un sentiero che si staccava dalla via ", ovvero " che attraversava la via "), chi pensi quanto Tacito soglia essere ardito in quest'uso: sennonché occorre por mente a una circostanza, la quale esclude in modo assoluto che qui si parli di un sentiero trasversale. Infatti in questo punto Tacito, poco preciso come è spesso quando ha da descrivere operazioni di guerra, non espone già le mosse di tutto quanto l'esercito flaviano, ma si occupa soltanto di quello che seguí al centro, sulla via Postumia, ove si trovava il comandante supremo Antonio Primo. Ora siccome i Vitelliani fuggivano verso Cremona, è chiaro che la strada piú breve per inseguirli non era un sentiero di traverso, ma la linea retta, quale era offerta, secondo la regola costante delle strade romane, dalla stessa via Postumia. Ed è questo appunto il pensiero di Tacito, sí nel caso che l'attacco sia stato generale e simultaneo su tutta la fronte, e sí ancora se Antonio, come Napoleone III a Solferino, abbia voluto sfondare prima il centro per far piegare appresso le ali; il che noi ignoriamo per deficienza del racconto tacitiano, e per difetto di altre fonti.

Invero l'espressione *limes viae*, per essere intesa rettamente, vuol porsi in relazione con un' altra frase, che ha dato molto filo da torcere agli interpreti, cioè *agger viae* (*Hist.* II, 24; 42; III, 21; 23), la quale designa precisamente l'opposto della prima. *Agger viae* è il centro o l'alto (1) della strada (sicché quando ad esempio Tacito dice, *Hist.* III, 21, che la legione XIII venne collocata *in ipso viae Postumiae aggere,* ciò significa che fu incolonnata nella strada, e non spiegata a cavaliere di essa); laddove *limes viae* è il suo lembo o margine estremo (2). Pertanto *per limitem viae* sarà, alla lettera, " lungo il lembo della strada ", ossia, piú liberamente, " nel terreno laterale ".

---

(1) L'espressione *agger viae* non ricorre in Tacito che a proposito della via Postumia, la quale, attraversando un terreno frastagliato da canali e da fossi (*Hist.* II, 25; 41; III, 17; ecc; Plutarco, *Oth.* 12), doveva essere naturalmente costruita in rialzo e *aggerata.* La frase tacitiana non ha niente di comune con la nota perifrasi poetica (Virgilio *Aen.* V, 273) per il semplice *via.*

(2) Cfr. anche J. J. Hartman, *Mnemos.* n. s. XXX (1902), 342.

La voce *limes* è da prendere verosimilmente nello stesso senso pure in *Hist.* III, 21, dove, descrivendosi le posizioni dei varî corpi flaviani, è detto che la legione VIII venne collocata a destra *per apertum limitem*. Anche in questo passo i commentatori, e con loro il *Lessico*, intendono di un sentiero trasversale. Ma un sentiero non poteva offrire spazio sufficiente allo spiegamento di un'intera legione. È adunque probabile che *per apertum limitem* qui significhi " nel terreno laterale scoperto ", che si stendeva tra la via Postumia e l'alberata da cui, a destra dell'ottava, era coperta la legione terza (*dextro octava per apertum limitem, mox tertia densis arbustis intersaepta*).

Ib. 33, 1. *Quadraginta armatorum milia inrupere, calonum lixarumque amplior numerus* etc.

È l'entrata dell'esercito flaviano in Cremona, dopo la resa della città. Questo esercito si componeva delle legioni III, VII Claudiana e VIII di Mesia, VII Galbiana e XIII di Pannonia, le quali, con gli ausiliari e la cavalleria, a non parlar dei pretoriani e delle bande Sveve (*Hist.* III, 5; 21), al principio della campagna dovevano sommare a piú di 50000 combattenti (1), anche facendo ragione dei vuoti prodotti dalla guerra precedente, se pur non erano già stati colmati. Come mai, se vogliamo prestar fede alle parole di Tacito, l'esercito di Antonio Primo si trova ora diminuito di tanto? Le perdite dei Flaviani in quella breve campagna non pare sieno state molto gravi; infatti Flavio Giuseppe le riduce, a sacco finito, ad appena 4500 morti: Ἔνθα δὴ (a Cremona) πολλοὶ μὲν τῶν ξένων ἔμποροι (2), πολλοὶ δὲ τῶν ἐπιχωρίων ἀπώλοντο, πᾶσα δὲ Οὐιτελλίου στρατιά, μυριάδες τρεῖς ἀνδρῶν καὶ διακόσιοι· τῶν δὲ τῆς Μυσίας Ἀντώνιος τετρακισχιλίους ἀποβάλλει καὶ πεντακοσίους (*Bell.*

(1) La forza numerica della legione oscillava tra i 5000 e i 6000 uomini. È vero che non abbiamo notizie esplicite per il I secolo; ma dacché questo era l'effettivo dell'età precedente, e poiché ricompare immutato al principio stesso del II secolo (Mommsen, *Arch. epigr.-Mittheil. aus Oest.* VII, 188 sgg.), non v'è ragione di dubitare che non fosse anche la norma del periodo intermedio. E l'effettivo degli ausiliari soleva essere uguale a quello dei legionarî.

(2) Era quello il tempo della fiera annuale di Cremona (Tacito, *Hist.* III, 30).

Iud. IV, 11, 3). L'espressione τῶν ... τῆς Μυσίας è una semplice svista dello scrittore, dacché le sue cifre si riferiscono alle perdite complessive dell'una e dell'altra parte, e pertanto non può trattarsi di una porzione soltanto dell'esercito di Antonio, ma bensí dell'esercito tutto intero. La svista poi è facile a spiegare, chi consideri che le legioni di Mesia, non che per numero, primeggiavano eziandio per avere avuto una parte preponderante fin dal principio dell'impresa (1). Del resto inesattezze di tal fatta non sono senza altri riscontri: ad esempio anche Plutarco, *Oth.* 8, parla delle legioni di Mesia (Ἄννιος δὲ Γάλλος ... γράψαντος ... Ὄθωνος αὐτῷ συνεβούλευσε μὴ σπεύδειν, ἀλλὰ τὴν ἐκ Μυσίας περιμένειν δύναμιν ἤδη καθ' ὁδὸν οὖσαν), mentre poco prima sul medesimo proposito aveva accennato alle legioni di Mesia e di Pannonia (Ὄθωνι δὲ τῆς ἤδη παρούσης οὐκ ἐλάττονα προσδόκιμον εἶναι δύναμιν ἐκ Μυσίας καὶ Παννονίας), entrambe le volte con poca precisione, perché una parte delle legioni di Pannonia si trovava già sul posto (2), e con quelle di Mesia era per via anche il resto delle altre legioni dell'Illirico (3). Lo stesso errore è pure in Tacito (*Hist.* II, 44 *venire Moesicas legiones*; cfr. pure II, 46); ed è probabile che l'avesse anche la fonte comune di lui e di Plutarco.

Piuttosto è da por mente che al momento dell'entrata dell'esercito vincitore in Cremona il numero dei caduti doveva essere inferiore al totale accennato da Flavio Giuseppe, perché non pochi Flaviani perirono in seguito durante il sacco (4). Se non che la testimonianza di Flavio non par da accettare senza riserve, essendo sospetta per piú ragioni. Per esempio è falso che l'esercito di Vitellio sia stato interamente distrutto, dacché all'opposto trovò scampo nella resa (5). Anche la cifra dei caduti

(1) Tac. *Hist*, 24: " tum ad Moesicos conversus principes auctoresque belli ciebat „; cfr. Fabia, *Rev. des ét. anc.* V, 345 sgg.

(2) Tac. *Hist.*, II, 11; 43; 67.

(3) Tac. *Hist.* II, 11.

(4) Tac. *Hist.*, III, 33: " ubi adulta virgo aut quis forma conspicuus incidisset, vi manibusque rapientium divulsus ipsos postremo direptores in mutuam perniciem agebat. Dum pecuniam vel gravia auro templorum dona sibi quisque trahunt, maiore aliorum vi truncabantur „. È da notare peraltro che al saccheggio presero anche parte, e piú sfrenatamente, bagaglioni, servi, vivandieri ecc.

(5) Tac. *Hist.* III, 31; 35; Dione LXV, 15.

di parte vitelliana sembra maggiore del vero, quantunque Dione parli addirittura di 50000 morti (1). Non è improbabile che in

---

(1) LXV, 15: ὥστε πέντε μυριάδας σὺν τοῖς ἐν τῇ μάχῃ πεσοῦσιν ἀπολέσθαι: queste parole chiudono il racconto delle stragi di Cremona. La discrepanza tra i due autori, sempre quando non vi sia errore dei copisti, procede verosimilmente da questo, che Dione dà il numero totale dei morti nel sacco e in battaglia, compresi forse anche i caduti di parte flaviana, laddove la cifra di 30200 registrata da Flavio Giuseppe pare riferirsi esclusivamente alle perdite vitelliane, designandosi con un generico πολλοί il numero dei periti durante il sacco. In questo caso la differenza tra la cifra di Dione (50000, numero totale dei morti) e la somma delle due cifre di Flavio (30200, caduti dell'esercito vitelliano, e 4500, caduti dell'esercito flaviano) potrebbe rappresentare il numero delle vittime del sacco, che sarebbero state pertanto 15300. Sennonché questo numero parrà forse a taluno esagerato in confronto con la popolazione di Cremona, quale si può presumere dovesse essere a quel tempo. Come è noto, Cremona era colonia latina (Livio XXVII, 10, 8; XLIV, 40, 5), e venne dedotta contemporaneamente a Piacenza nell'anno 536 di R. (Livio XX per.; XXI, 25, 2; XXXI, 48, 7; Polibio III, 40, 5; Velleio I, 14, 8): a ciascuna delle due nuove città furono assegnati 6000 coloni (Polibio III, 40, 4; cfr. Asconio *in Pis.*, p. 3 K.). Ma la popolazione non tardò ad essere alquanto diradata, perché molti coloni erano morti, e altri emigrati (Livio XXXVII, 46, 9); di guisa che nel 564 fu necessaria una nuova deduzione supplementare di 6000 coloni latini, i quali andarono divisi tra Cremona e Piacenza (Livio ib. e 47, 2). Saremo adunque piuttosto al disopra che al di sotto del vero, se congetturiamo che la popolazione iniziale di Cremona si trovasse allora diminuita almeno di un terzo, ossia ridotta a circa 4000 coloni, i quali, sommati coi 3000 della deduzione supplementare, dànno un totale di 7000 coloni al piú. Aggiungendo le donne e i fanciulli, secondo il rapporto medio di 3 : 1, ci aggireremo intorno a una somma, in cifra tonda, di 20000 abitanti, che dovrebbe rappresentare a un dipresso la popolazione di Cremona alla fine del VI secolo di R. Che gli abitanti fossero cresciuti di molto nel I secolo dell'èra nostra, sebbene la città paresse per il tempo relativamente grande (Plutarco, *Oth.* 7; Strabone V, 1, 10; Dione LXV, 15; Tacito, *Hist.* III, 30; 34), è cosa che non si può supporre, perché tutta l'Italia soggiacque allora a una grave crisi di spopolamento, provocata da varie cause, e soprattutto dalle guerre civili degli ultimi tempi della repubblica (v. le testimonianze presso Beloch, *Die Bevölker. der griech.-röm. Welt*, 442 sg., e cfr. E. von der Smissen, *La population*, 82 sgg.). Né a crescere considerevolmente la popolazione cremonese possono avere contribuito le poche centinaia di veterani dedotti da Augusto nel 713 (Virgilio, *Ecl.* 9, 28; Probo, ad *Ecl.* p. 6 K.; Ps. Donato, *Verg. vita* 61 sg.). Ora se è vero che quando avvenne il sacco Cremona era piena di forestieri accorsi alla fiera che cadeva in quei giorni (Tacito, *Hist.* III, 30), e anche tra essi le vittime possono essere state pa-

questi particolari si rispecchi una narrazione di fonte flaviana, la quale, a quel modo medesimo che esagerava le perdite del nemico, può ragionevolmente supporsi che attenuasse le proprie. Infatti la sproporzione tra il numero dei morti delle due parti è troppo grande, perché non possa lasciar luogo a qualche dubbio. È vero bensí che i Flaviani non soggiacquero a inseguimenti (e questa, come cortesemente mi rammenta Ermanno Ferrero, era di solito la fase piú micidiale di ogni azione campale), mentre i Vitelliani ne subirono due, un primo dopo la battaglia (1), e un secondo, e piú disastroso (2), dopo la presa del campo trincerato. Sennonché anche i primi ebbero a patire gravi danni nei varî combattimenti (3); onde si affaccia ovvia la congettura che le loro perdite sommassero a una cifra un po' maggiore di quella indicata da Flavio Giuseppe. La quale in tal caso non potrebbe avere altro valore che approssimativo: ad ogni modo, sia che i morti di parte flaviana sieno stati qualche centinaio di piú, sia che il numero dato da Flavio Giuseppe voglia tenersi per esatto, siamo sempre alquanto lontani dal numero di combattenti, di cui Antonio Primo si trovava mancare, secondo il racconto di Tacito, al suo entrare in Cremona.

Buona parte adunque di queste forze (cioè la parte che avanza detratti i morti e i feriti) dovette restare indietro. E poiché nell'Illirico non fu lasciato nessun presidio (4), ne segue che vennero tutte impiegate a proteggere le linee di comunicazione. Del che Tacito dà bensí qualche cenno, ma, come suole spesso, in modo alquanto imperfetto ed incompiuto, restringendosi a far menzione dei soli particolari di maggiore impor-

---

recchie, non si deve però dimenticare che buona parte della popolazione si salvò (molti vennero presi prigionieri con la speranza di lauti guadagni, e di questi pochi soltanto furono trucidati, come sappiamo dallo stesso Tacito, ib. 34): talché i Cremonesi, rientrati nella città subito dopo la partenza dei Flaviani, poterono in breve ripristinarla senza bisogno d'altri soccorsi che pecuniarî (Tacito, ib.).

(1) Tac. *Hist.* III, 25.

(2) Tac. ib. 29; si abbiano presenti specialmente le ultime parole de capitolo: " Completur caede quantum inter castra murosque vacui fuit ".

(3) Tac. *Hist.* III, 22; 23; 27; 28; 29.

(4) Tac. *Hist.* III, 5: " ne inermes provinciae barbaris nationibus exponerentur, principes Sarmatarum lazugum, penes quos civitatis regimen, in commilitium adsciti ".

tanza strategica. Egli ricorda infatti l'ala di cavalleria e le otto coorti (1) destinate con milizie locali (2) alla difesa del Norico; piú innanzi rammenta di passata il presidio " relictum Altini... adversus classem Ravennatem, nondum defectione eius audita „ (3), e a proposito della defezione di Lucilio Basso, prefetto della squadra Ravennate, fa menzione del presidio di cavalleria stabilito ad Adria (4); ma non aggiunge altro, lasciando che il lettore supplisca alle lacune col suo proprio discernimento. Cosí è certo che Verona, la quale i Flaviani avevano scelto come base d'operazione (5), non poté rimanere indifesa (6). Lo stesso si dica di Bedriaco, e di altri luoghi, non esclusi quelli che, come Vicenza (7), erano stati occupati per ragioni essenzialmente politiche.

Queste osservazioni giovano pure a rendere ragione di altri passi di Tacito, che riescono difettosi per lacune del medesimo genere, quale è ad esempio il racconto dell'avanzata di Vitellio verso Roma, nel secondo libro delle *Storie* (cap. 87), dove lo scrittore assegna al nuovo imperatore appena 60000 uomini, mentre i due eserciti di Cecina e di Valente, aggiuntevi le milizie venute in Italia con lo stesso Vitellio, dovevano sommare a un effettivo molto maggiore. Anche qui si tace dei presidî lasciati in varie parti, i quali non men delle perdite, dei congedi (8) e dei trasferimenti (9), dovevano concorrere ad assottigliare le file dell'esercito avanzante.

Ib. 39,7. *Integris quoque rebus a Caecina et primoribus partium iam Vitellium aspernantibus ambitus abnuere perseveravit.*

Si tratta di Giunio Bleso, che Vitellio fece avvelenare poco

(1) Ib.

(2) A. Stappers, *Les milices locales de l'Emp. rom.*, *Mus. Belge* VII, 303.

(3) III, 6.

(4) Ib. 12.

(5) Ib. 8.

(6) Ib. Si noti che Verona era anche posizione strategica di primo ordine, perché, per dirla con le stesse parole di Tacito, " interiectus exercitus Raetiam Iuliasque Alpes, ne pervium illa Germanicis exercitibus foret, obsaepserat „.

(7) Ib.

(8) Tac. *Hist.* II, 69.

(9) Ib. 66 e 69.

dopo la partenza di Fabio Valente da Roma. *Integris quoque rebus* alla lettera è " ancora in buon essere ", come tradusse il Davanzati. Ma la versione letterale non dà un senso plausibile, anzi può persino lasciar dubbio se l'inciso, come i piú credono, convenga a Vitellio: il Prammer ad esempio opinò che si riferisca invece a Bleso, intendendo " mentre questi non era ancora caduto in sospetto ". Se non che siffatta interpretazione disconviene alla fedeltà pertinace, di cui Bleso è qui elogiato (1), dacché farebbe dire a Tacito che Bleso non diede prova della sua costanza se non mentre godeva ancora la piena fiducia di Vitellio: il che, come ognun vede, rimpicciolisce la lode, o anzi la snatura del tutto.

Probabilmente il Prammer fu tratto a questa interpretazione giudicando che all'inciso *integris quoque rebus*, dove si riferisca a Vitellio, contraddicano le parole seguenti *a Caecina et primoribus partium iam Vitellium aspernantibus*. E contraddizione c'è veramente, se le parole *integris quoque rebus* si prendono alla lettera: come infatti poteva essere tuttavia salda la condizione di Vitellio, quando i capi di parte sua tramavano contro di lui? Ma il senso letterale non è quello che si attaglia al contesto, nel quale dobbiamo ravvisare un esempio della scorrettezza stilistica non rara in Tacito (2), per cui a un concetto specifico vien sostituito un concetto generico piú largo. L'espressione *integris quoque rebus* non significa che la condizione di Vitellio non fosse minacciata né compromessa in alcun modo; del che d'altra parte aveva già avuto qualche sospetto il Ruperti, intendendo che con *integris quoque rebus* Tacito voglia significare soltanto che Vitellio era ancora senza competitori. E questa è in sostanza l'interpretazione della maggior parte dei commentatori (3).

Ma il concetto particolare che qui si richiede non può essere la designazione del momento in cui Vitellio non aveva rivali,

---

(1) Si abbiano presenti anche le parole (*Blaeso super claritatem natalium et elegantiam morum fidei obstinatio fuit*) che immediatamente precedono quelle di cui discorriamo.

(2) Il plurale per il singolare, l'astratto per il concreto, e altrettali frequenti licenze tacitiane procedono dalla stessa tendenza stilistica.

(3) Dico della maggior parte, perché molti sorvolano in silenzio su questo particolare.

perché la proclamazione di Vespasiano avvenne assai per tempo, e prima ancora che Vitellio giungesse a Roma (1). Pertanto (2), se *integris rebus* esprimesse la mancanza di competitori, per quel che è detto dopo (*Caecina et primoribus partium iam Vitellium aspernantibus*) se ne dovrebbe inferire che Cecina cominciò a tentennare durante l'avanzata di Vitellio in Italia, mentre all'opposto sappiamo, per testimonianza esplicita dello stesso Tacito (3), che ciò non accadde se non dopo l'entrata in Roma. Piuttosto è da por mente che, sebbene se ne avesse già precedentemente qualche vago sentore (4), della proclamazione di Vespasiano non pervenne a Roma notizia sicura che relativamente tardi, cioè quando principiò la defezione delle legioni di Mesia (5); e allora soltanto Vitellio provvide ai casi suoi (6). Adunque vi fu un lasso non breve di tempo, durante il quale, benché Vitellio non potesse dirsi realmente senza competitori, non era tuttavia in istato di guerra con nessuno; e a questo periodo appunto vuole riferirsi l'inciso *integris quoque rebus*. Il quale perciò designa il tempo anteriore all'inizio della campagna per parte dei Vitelliani, e non quello, piú breve, che precedette la proclamazione di Vespasiano; ossia significa, in altre parole, non già ' quando Vitellio non aveva rivali ' come solitamente s'interpreta, ma bensí ' quando ancora non si sapeva che avesse rivali '.

---

(1) Vespasiano, a non parlar dell'anteriore tentativo delle legioni di Mesia (Svetonio, *Vesp.* 6), fu proclamato imperatore il 1° luglio; Vitellio entrò in Roma il giorno 18 dello stesso mese.

(2) A nessuno, credo, verrà in mente di supporre che *integris quoque rebus*, anzi che all'episodio di Bleso, sia da rapportare ai fatti esposti nei capitoli precedenti (operazioni di Antonio Primo fino alla caduta di Cremona), perché sarebbe troppo grosso abbaglio di Tacito l'avere dimenticato non solo che l'episodio precede cronologicamente i rovesci vitelliani (cfr. *Hist.* III, 36), ma ancora, e peggio, che Cecina, non che *aspernari* Vitellio, aveva addirittura disertato fin dal principio della campagna (*Hist.* II, 100 sg.; III, 9; 13 sgg.).

(3) *Hist.* II, 93.

(4) Ib. II, 73. Ma non se ne fece caso, dacché, aggiunge Tacito, Vitellio e il suo esercito " ut nullo aemulo saevitia libidine raptu in externos mores proruperant ".

(5) *Hist.* II, 96; cfr. Fabia, *Rev. des ét. anc.* V, 331 sgg.

(6) *Hist.* II, 97.

Per ultimo è d'uopo avvertire che, ad evitare il difetto dianzi notato nell'interpretazione del Prammer, sarà mestieri subordinare *integris quoque rebus* al participio *aspernantibus*, anzi che al verbo principale *perseveravit*: infatti ognuno intende che, non che lode troppo meschina, sarebbe addirittura ironia il dire che Bleso diede prova della sua perseveranza solo quando la fortuna di Vitellio era ancora, o pareva, in buon assetto.

Ib. 44, 4 sgg. *Et Britanniam inditus erga Vespasianum favor, quod illic secundae legioni a Claudio praepositus et bello clarus egerat, non sine motu adiunxit ceterarum* e. q. s.

Pochissimi editori (dei moderni, ch'io sappia, il solo Spooner, dei vecchi il Walther) mantengono *inditus*. L'antica vulgata leggeva *inclitus* con l'edizione Puteolana, Ernesti corresse *insitus*, Haase *vetus*, Meiser *traditus*, Heller *proditus* o *inpense proditus*, Purser *diditus*, H. Schütz *inclinatus*; e questo è l'emendamento ora solitamente preferito. Il Ritter conservò *inditus*, ma premettendovi *olim* (nell'edizione del 1848) o *pridem* (in quella del 1864).

E veramente *inditus*, cosí come si trova nel codice Mediceo, senz'altro complemento od aggiunta, non è lezione che si possa ragionevolmente difendere. Se non che oltre a questa v'ha un'altra difficoltà, di cui la maggior parte degli interpreti non pare aver fatto caso. Perché stando al testo tradizionale il senso del passo dovrebb'essere che i Britanni si schierarono dalla parte flaviana per la simpatia loro inspirata da Vespasiano, allorché si coprí di gloria, al comando della seconda legione, durante la fortunata spedizione di Aulo Plauzio. Ma ognuno intende che non erano le gesta del conquistatore che potessero provocare l'entusiasmo dei vinti; e qui si tratta del favore e dell'adesione della seconda legione, non già del favore della Britannia. Tant'è vero che gli isolani approfittarono del momento, che pareva propizio, per tentare di scuotere il giogo della dominazione romana, come è narrato dallo stesso Tacito nel capitolo susseguente. Del che ben s'avvide l'Urlichs, che con felice congettura traspose le parole *secundae legioni* avanti a *erga Vespasianum*; salvoché lesse a torto *legionis*, che è bensí la scrizione del codice Mediceo, ma con l'*s* finale cancellato di prima mano. Naturalmente presso al genitivo *secundae legionis*

non poteva stare *inditus*, che l'Urlichs sostituí con *insitus* di Ernesti. Ora se all'opposto manteniamo il dativo *legioni*, non solo sarà tolto di mezzo il controsenso dianzi avvertito, ma avremo inoltre nell'inciso *secundae legioni* il complemento necessario a legittimare il sospetto *inditus*. Restituiremo pertanto, modificando in parte l'emendamento dell'Urlichs: *Et Britanniam inditus secundae legioni erga Vespasianum favor, quod illi a Claudio praepositus et bello clarus egerat, non sine motu adiunxit ceterarum* e. q. s. Quanto ad *illi* è chiaro che fu agevolmente corretto in *illic*, quando, avvenuta la trasposizione delle parole *secundae legioni*, non aveva piú ragion d'essere nel contesto. Appena è poi d'uopo avvertire che di *indere* nel significato metaforico di " inspirare „ non mancano altri esempi in Tacito, come *Hist.* IV, 25: *nec terrorem unius militis vincula indiderant*; ib. 34: *inmane quantum suis pavoris et hostibus alacritatis indidit.*

Ib. 55, 1 sgg. *Vitellius ut e somno excitus Iulium Priscum et Alfenum Varum cum quattuordecim praetoriis cohortibus et omnibus equitum alis obsidere Appenninum iubet.*

Poiché le coorti pretorie levate da Vitellio erano sedici (*Hist.* II, 93), e piú innanzi (III, 78) Tacito fa menzione di tre altre coorti vitelliane presenti in Roma al momento dell'assalto del Campidoglio, il Nipperdey congetturò che invece di *quattuordecim* bisogni qui leggere *tredecim*. Infatti delle coorti condotte da Giulio Prisco e Alfeno Varo parte si trasferirono in Campania (III, 58) e parte capitolarono a Narni (III, 63): onde se a Roma ve n'erano in appresso ancora tre, se ne dovrebbe desumere che l'esercito con cui Vitellio tentò di arrestare l'avanzata dei Flaviani comprendesse soltanto tredici coorti pretorie, e non quattordici. Altri pensano che le coorti fossero bensí quattordici, ma che una di esse abbia poi seguito Vitellio, allorché, dopo avere raggiunto l'esercito a Bevagna, " taedio castrorum et audita defectione Misenensis classis „, fece ritorno a Roma (III, 56). Se non che Vitellio nel viaggio di ritorno non aveva affatto bisogno di una speciale coorte di scorta, perché marciò fino a Narni con tutto l'esercito, e di là proseguí con la cavalleria e con le sei coorti destinate a combattere in Campania sotto gli ordini del fratello Lucio (III, 58). Né risulta in alcun modo che una di queste sei coorti siasi fermata a Roma.

Ma c'è veramente contraddizione tra *quattuordecim* del cap. 55, e *tres cohortes* del cap. 78? Per ammetterlo è mestieri supporre che nel cap. 78 si tratti di tre coorti pretorie; se non che siffatta supposizione a sua volta si fonda sull'ipotesi che le coorti di cui si componeva il secondo esercito di Vitellio fossero esclusivamente pretorie. Cosí opinano appunto i commentatori, dimenticando che, ove ciò fosse, contraddizione maggiore si avrebbe coi capp. 41-42, in cui si parla di altre tre coorti precedentemente mandate da Vitellio in soccorso a Valente, e annientate da Cornelio Fusco, prefetto della squadra Ravennate (III, 12). Sommando queste con le quattordici del cap. 55 e le tre del cap. 78 abbiamo un totale di venti coorti, mentre le coorti pretorie reclutate da Vitellio, come si è detto, non erano che sedici. È chiaro adunque che almeno le tre mandate a Valente non dovevano essere coorti pretorie, come bene avvertí, unico tra i commentatori, il Balgarnie; e se queste erano coorti diverse, la sola congettura lecita sarà che Vitellio aveva a sua disposizione, oltre le sedici pretorie, anche altre coorti, tra le quali potranno pure trovar luogo quelle di cui si tratta nel cap. 78.

Del resto che (a tacere della legione II Adiutrice (III, 55) e senza contare le coorti urbane e dei vigili, che in seguito disertarono) il secondo esercito di Vitellio non comprendesse soltanto i pretoriani, si desume ancora da altre prove, e anzitutto dalla testimonianza stessa di Tacito, il quale assevera (II, 100) che quando Cecina partí da Roma alla testa dell'esercito che poi fu sconfitto a Cremona, non aveva con sé che una parte della cavalleria e delle coorti ausiliari. L'altra parte adunque dové restare a Roma con Vitellio. Quanta parte piú precisamente non sappiamo: certo non tanto piccola, perché la cavalleria cooperò largamente a tutte le operazioni di quel miserando scorcio di campagna (1). Né doveva essere di molto minore l'effettivo delle coorti, quantunque parte degli ausiliari fossero stati rimandati ai loro paesi (II, 69), perché al suo ingresso in Roma Vitellio ne aveva ancora trentaquattro (II, 89). Esse esercitarono notevole influenza sugli ultimi avvenimenti (2), e

(1) V. *Hist.* III, 41; 55; 58; 79.

(2) Dopo le trattative corse con Sabino, quando Vitellio aveva pubbli-

furono il principal nerbo dell'estrema difesa di Roma, quando fronteggiarono l'intero esercito flaviano (1) che si avanzava in tre colonne per la via Salaria, per la Flaminia e lungo il Tevere (III, 82). *Miles Vitellianus trinis et ipse praesidiis occurrit*, dice Tacito testualmente (ib.), e non v'ha chi non veda, per tornare un istante al preconcetto dei commentatori, che siffatta difesa (2) non si può neanche immaginare potesse essere affidata a tre sole coorti, le quali, ahimè!, si sarebber trovate nel caso della canzoncina lucchese: — Marciate a quattro a quattro. — Siam tre col tamburin.

Se non che non sarebber neppure bastate per dare l'assalto al Campidoglio, guardato da sette coorti di vigili e da forse piú che altrettante (3) coorti urbane (III, 69). E si rammenti che l'attacco avvenne in tre punti diversi, cioè presso la porta

---

camente deposto l'impero, fu il contegno delle coorti germaniche, come dice Tacito espressamente (III, 69), che provocò il conflitto terminato con l'incendio del Campidoglio. Vero è che i commentatori, fermi nel lor preconcetto, hanno supposto che Tacito abbia dato il nome di *germaniche* alle coorti pretorie, per la ragione che in esse erano stati arruolati legionarî e ausiliari di Germania (II, 94), senza badare che, quando ciò fosse, non s'intenderebbe perché lo scrittore si sia servito di siffatta espressione per contrapporle alle coorti urbane, le quali erano appunto nelle stesse condizioni. D'altra parte che non si tratti di una stranezza di Tacito, ne sono prova Dione e Flavio Giuseppe, i quali parlano l'uno (LXV, 17) di Κελτοί, e l'altro (*B. Iud.* IV, 11, 4) di οἱ ἀπὸ τῆς Γερμανίας. Cfr. anche Tacito III, 34 *obvius e Germanicis militibus* con Dione LXV, 21 Κελτός τις.

(1) È vero che una parte di questo esercito era stata lasciata a Verona (*Hist.* III, 50), ma fu poi richiamata (ib. 60 e 61), e di piú s'aggiunse la legione XI con altre milizie (ib. 50).

(2) Si noti pure che quando i pretoriani si trovavano ridotti all'estremo nel loro campo, gli altri combattevano ancora disperatamente per le vie di Roma, facendo pagar la loro vita (III, 84).

(3) Il numero è dubbio. Vitellio ne arrolò quattro (II, 93); ma non risulta che abbia sciolto le preesistenti, come fece per le coorti pretorie (II, 67). E se le preesistenti, come pare, erano sette (Marquardt-Brissaud, *Organis. milit.* 207), posto che Vitellio le abbia conservate, sarebbero state undici in tutto, alle quali però converrebbe sottrarne almeno una, cioè quella che era stata mandata coi gladiatori di Claudio Giuliano per reprimere la ribellione della squadra Misenate (III, 57). Ma non è escluso che qualche altra coorte urbana si trovasse al seguito di L. Vitellio (III, 58), giacché non sappiamo precisamente quale specie di coorti componessero il piccolo esercito di Campania.

dell'area, ai *centum gradus* e dalla parte del *lucus asyli* (III, 71). Gli è che l'espressione *tres cohortes* del cap. 78 non è da prendere alla lettera (1). Già il Ritter s'avvide che tutto il passo *cuncta ..... ignavia Sabini corrupta, qui sumptis temere armis munitissimam Capitolii arcem et ne magnis quidem exercitibus expugnabilem adversus tres cohortes tueri nequivisset* deve intendersi " rhetorice potius quam ad fidem rerum pronuntiatum ", per cui " ut ..... Antonianae causae defensores rem ultra verum augent, ubi dicunt *munitissimam Capitolii arcem et ne magnis quidem exercitibus expugnabilem,* ita hostium copias minores quam fuere describunt ". E il Ritter ha piena ragione; salvoché occorre aggiungere che l'iperbole trae ragione dall'uso corrente di *tres* quale numerale indefinito ed equivalente di *pauci* (2), che del resto non è senza riscontri nelle stesse lingue moderne (3).

---

(1) Se Stazio dice (*Silv.* V, 3, 197 sg.) *sacrilegis lucent Capitolia taedis Et Senonum furias Latiae sumpsere cohortes*, non è prova che gli assalitori fossero pretoriani, perché il poeta segue manifestamente la tradizione piú diffusa (Tacito, *Hist.* III, 70), secondo la quale l'incendio sarebbe stato causato dai Sabiniani.

(2) V. Otto, *Spichwörter* s. v. *verbum*, p. 366 sg.; Sutphen, *Amer. Journ. of Philol.* XXII, 385 sg.; Egli, *Die Hyperbel in den Komödien des Plautus und in Cic. Briefen an Att.* [Zug 1891], p. 10. Cfr. pure il modo proverbiale δύο ἢ τρεῖς (v. gli esempi presso Radermacher, *Philol.* LXIII, 1 sgg.), che certo aveva riscontro in latino non men che nelle lingue moderne, come mostra ad esempio l'allusione ironica di Persio 1, 3 *vel duo vel nemo.* D'altra banda siffatte locuzioni non sono che derivazioni particolari dell'uso del numerale tre come indefinito generico, di cui ha trattato recentemente e dottamente l'Usener (*Dreiheit*, in *Rhein. Mus.* LVIII; v. specialmente p. 358 sg.).

(3) È appena mestieri rammentare per esempio che anche in italiano diciamo *quattro* allo stesso modo e nello stesso senso.

Suppellettile di una busta da oculista scoperta a Sibari.

Nota del Dr. GIOVANNI CARBONELLI.

(Con una Tavola).

La mia raccolta di antichi istrumenti di chirurgia, si è accresciuta di alcuni pezzi provenienti da Sibari e trovati insieme in una tomba; non sono però in grado di poter dire se siano i soli venuti alla luce da questa tomba, nè quale altra suppellettile abbia potuto trovarsi con questi.

I pezzi sono sei (V. tavola), cioè due pietre (n^{i} 1, 2), tre strumenti in bronzo (n^{i} 3, 5, 6) ed uno in argento (n° 4).

Le due prime, di marmo molto duro, di colore grigio scuro uniforme, differiscono fra loro solo nella forma e volume; la più grande (n° 1) è rettangolare, lunga mm. 82, larga 45, spessa 8; le sue faccie sono levigate e leggermente concave al centro; non vi si trova traccia di lettere. La minore (n° 2) è anch'essa rettangolare, co' suoi quattro orli tagliati obliquamente, risultando perciò di diverse larghezze le due superficie; la superiore, che così si può chiamare come la più usata, misura 60 mm. di lunghezza, 34 di larghezza; la minore ha 52 mm. di lunghezza, per 25 di larghezza; lo spessore delle due pietre è di 9 mm.

Gli strumenti, pel modo di loro costruzione, si possono dividere in due coppie; i numeri 6 e 5 sono molto eleganti, col manico separato dalla spatola da un contorno sagomato in rilievo, con fine scanalatura lungo l'asta, che finisce in un'oliva; il n° 4 in argento ed il n° 3 in bronzo, mancano delle scanalature lungo il manico.

Il n° 6 è una spatola col manico terminato ad oliva, da usarsi come specillo; misura in lunghezza totale mm. 147, dei quali 47 per la spatola e 100 per il manico; la larghezza massima della spatola è di mm. 5.

Il n° 5 è pure una spatola di poco differente dal n° 6, manca dell'estremità olivare rotta, ha mm. 120 in lunghezza,

49 per la spatola, 71 per il frammento di manico, ed è probabile dovesse essere più lunga del n° 6, a giudicare dall'asticella che non accenna a restringersi sull'estremità olivare.

La configurazione di queste due spatole è abbastanza nota, trovandosene delle simili nelle collezioni e nei musei (1).

Il n° 4 è di forma meno nota; misura mm. 105 nella lunghezza totale, è diviso quasi esattamente per metà da un contorno sagomato, terminando da una parte colla solita oliva e dall'altra in una lancia a foglia di salice; questa è lunga 15 mm. ed ha una larghezza massima di mm. 5.

Il metallo raro, per quei tempi, di cui è fatto, e la sua forma esile e sottile, lo dimostrano uno strumento più adatto ad operare in organi delicati, onde è a credere sia stato destinato ad aprire la camera anteriore dell'occhio.

Il n° 3 è in bronzo; anche questo è monco come il n° 5 nella sua estremità olivare, se pure non era a cucchiaio; è una spatola di forma speciale e poco nota; misura in lunghezza mm. 108, che certamente doveva essere molto maggiore nello strumento completo; la spatula misura mm. 60, porta due espansioni angolari vicine alla sua base d'impianto sul manico, con una larghezza di 8 mm., va gradatamente restringendosi fino a mm. 4, per espandersi ancora fino a 5 mm. verso la sua estremità terminata a mezzo cerchio.

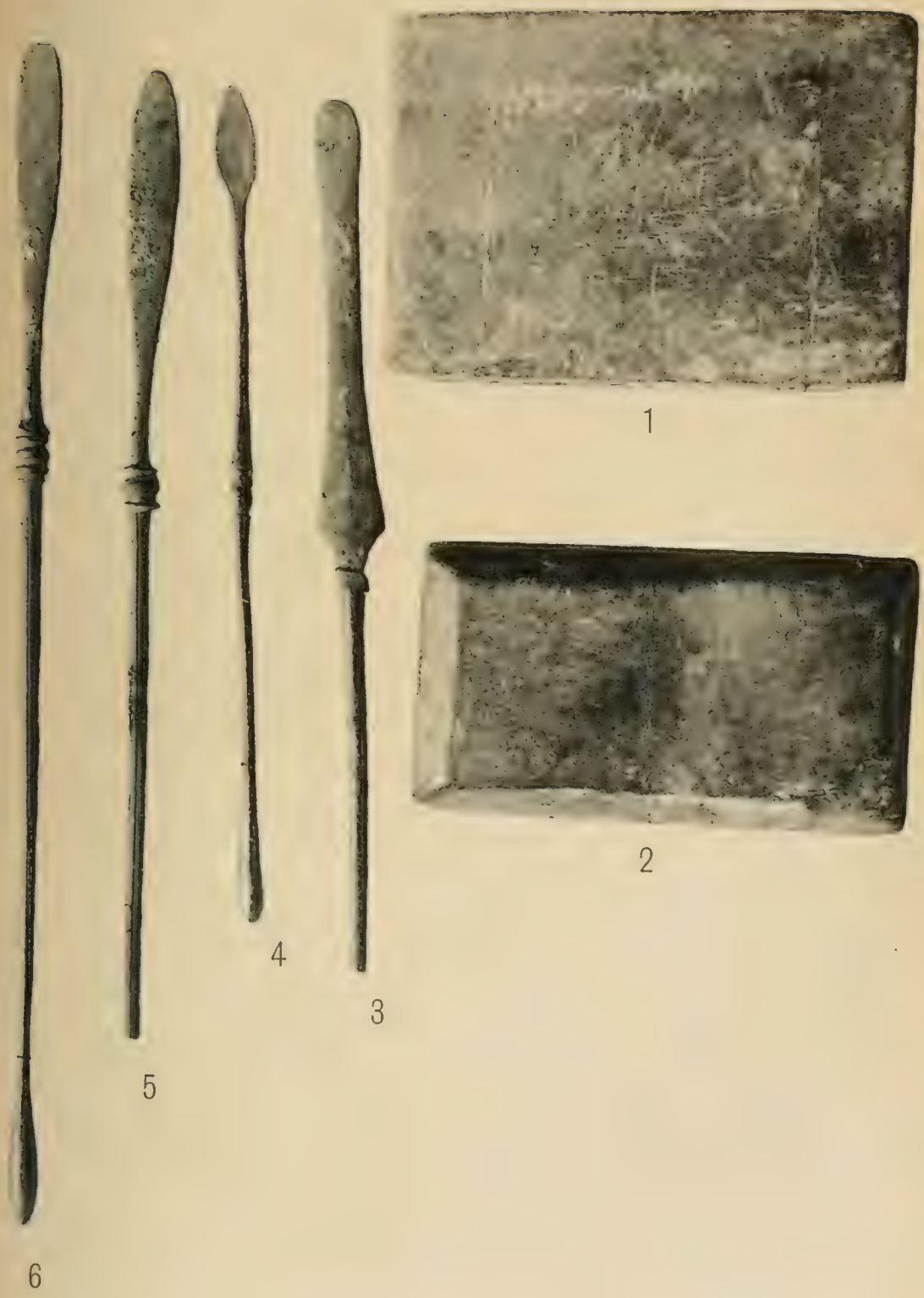
Questi oggetti, consistenti in due pietre minori di quelle destinate alla preparazione degli unguenti ed alla affilatura degli istrumenti, ed in spatole più piccole e delicate di quelle comuni, di cui una d'argento, devono essere i resti di una suppellettile di una busta oculistica. Credo di non errare nell'ammettere che le due pietre siano state usate per prepararvi sopra i collirii.

Sono questi istrumenti di fabbricazione indigena, oppure vennero da fuori?

In nessun modo si può rispondere a ciò; è certo però che la sveltezza e l'eleganza delle loro forme rivelano l'abilità, in sommo grado posseduta da quei meravigliosi artefici fonditori in bronzo che furono gli antichi.

---

(1) Deneffe, *Étude sur la trousse d'un chirurgien Gallo-Romain.* H. Caals, Anvers, 1893, Pl. 8, n° 10; e L. Lindenschmit, *Das Römisch-Germanische Central-Museum etc.*, sohn. Mainz Zabern, Taf. XXII, n° 4, 5, 15.


1
2
3
4
5
6

L'antica ed opulenta Sibari fu distrutta dai Crotoniati nell'anno 510 av. C., nè più risorse dalle sue rovine; una colonia di Ateniesi costrusse molto vicina a queste la città di *Thurium* nel 444 av. C., la quale, caduta a sua volta in potere dei Romani, nel 194 av. C. divenne colonia di questi sotto il nome di *Copia*. A quale di questi tre periodi appartengono questi strumenti? È molto difficile poterlo affermare, non avendo elementi descrittivi della tomba e della suppellettile in essa rinvenuta. Si può congetturare tuttavia che essi, se anche non appartengono al primo periodo, a quello di Sibari propriamente detto, per la loro lavorazione mostrano, a mio avviso, l'influenza della maestria e della genialità greca, e rappresentano certo tipi e modelli, che furono vicini all'epoca di Ippocrate, e di gran lunga anteriori a quella di Celso.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

N. Y. ACADEMY OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Febbraio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Direttore della Classe, Naccari, Jadanza, Spezia, Fileti, Foà, Guidi, Morera, Segre, Mosso, Peano, Parona e Camerano Segretario.

Scusano la loro assenza i Soci Grassi, Mattirolo, Guareschi.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio Mosso ringrazia la Classe delle gentili parole che essa ha voluto indirizzargli nella seduta precedente e del benevolo accoglimento fatto al suo omaggio del 1° volume contenente i lavori del Laboratorio internazionale del Monte Rosa.

Il Presidente si rallegra a nome della Classe col Socio Mosso per la migliorata salute.

Il Presidente presenta il dono del Socio corrispondente Giulio Thomsen del suo libro intitolato: *Systematisk Gennemforte Termokemiske undersgelsers numeriske og teoretiske Resultater*, Copenhague, 1905.

Il Socio Spezia presenta in omaggio a nome del Dr. Roccati le due note seguenti: *Edenite delle Alpi Marittime* e *Massi e ciottoli granitici nel terreno miocenico di Lojano (Appennino bolognese)*.

Viene presentata per l'inserzione negli *Atti* accademici la seguente nota:

Il male di montagna e il vomito, nota del Socio Mosso.

Radunatasi poscia la Classe in seduta privata si raccolgono le proposte per l'elezione di Soci delle diverse categorie.

LETTURE

Il male di montagna ed il vomito.

Nota del Socio ANGELO MOSSO.

§ 1°.

Osservazioni fatte al Col d'Olen (2865 m.) e sugli aereonauti.

All'Albergo del Col d'Olen, che trovasi nel gruppo del Monte Rosa a 2865 m. sul livello di mare, abitandovi spesso intere settimane, ebbi occasione di assicurarmi che lassù il vomito è una cosa frequente e comune assai più che non sia al piano. Potrei ricordare un grande numero di osservazioni che feci in molti anni, ma per brevità accennerò solo all'ultima spedizione del 1903. La mia figliuola, che volle accompagnarmi fino sui ghiacciai, fu molestata nella notte dal vomito, e il prof. Segre, il celebre matematico, segretario dell'Accademia dei Lincei, soffrì il vomito tutta la notte e dopo stette benissimo, fermandosi con noi parecchi giorni nella Capanna Regina Margherita. Questo disturbo non viene per la fatica, o la cattiva digestione, perchè vidi al Col d'Olen delle signore portate a dorso di mulo che stettero male egualmente ed altri, dopo due giorni di riposo, sentii lagnarsi di tale molestia. Gli alpinisti credono sia l'effetto di un imbarazzo di stomaco, o della fatica: una celebre guida mi assicurava che chi soffre le vertigini in montagna, vomita perchè ha paura. In tutte queste affermazioni vi è qualche cosa di vero, e certo le emozioni hanno una grande influenza; qui mi limito a studiare il vomito come effetto della depressione barometrica. Fin dalle prime osservazioni che si tentarono sotto la campana pneumatica per studiare l'azione dell'aria rarefatta si conobbe con quanta facilità rigettino gli uccelli appena diminuisce la pressione barometrica a mezza atmosfera. Le scimmie come l'uomo presentano quest'atto spasmodico ad altitudini mi-

nori che i cani: e ho già riferito l'esempio di una scimmia che cominciò a recere a 3000 metri nella camera pneumatica, dopo che era stata bene a 4560 nella Capanna Regina Margherita (1).

Accennai a questo studio nel mio libro *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi* (nel capitolo XIX, § VI). Ora lo riprendo, aggiungendovi nuove osservazioni ed esperienze. Succede nel male di montagna quanto si verifica negli emetici, coi quali il vomito può aver un' origine centrale od una periferica; essere cioè prodotto da un disturbo nervoso cerebrale, o da un riflesso stomacale. Parecchi rimedii emetici, come l'apomorfina, non producono più il vomito quando siano distrutte certe parti del cervello (2). Che il vomito si produca per un' azione cerebrale senza che venga l'impulso dallo stomaco, si capisce pensando che l'imaginazione, i gusti, gli odori, le emozioni, il mal di mare, l'iperemia e l'anemia del cervello dànno questo disturbo. E si comprende a questo modo l'azione di alcune cause generali che non toccano lo stomaco, come nell'avvelenamento pei vapori del cloroformio, dell'etere o dell'alcool, specialmente nella fatica che, come mostrai, è pure una forma speciale di avvelenamento, perchè il sangue di un cane affaticato produce il vomito e la fatica se viene iniettato ad un altro cane. Le relazioni della fatica col vomito si vedono spesso nelle gare dei velocipedisti, dove nei grandi sforzi è cosa comune il recere. La fatica può essere la causa del vomito, ma ne diviene pure l'effetto; perchè l'abbattimento e la prostrazione delle forze dopo il vomito spontaneo, o l'uso degli emetici, diventano così intensi che toccano il deliquio. Anche il cuore prende parte attiva al recere; parecchi emetici hanno un'azione diretta sul cuore e sempre il ritmo si accelera prima che compaia il vomito. Anche in questo riguardo vi è una corrispondenza fra i sintomi del male di montagna, come accennerò fra poco parlando della pressione sanguigna. I convalescenti e le persone deboli, dopo un intenso lavoro cerebrale sentono talora la nausea e dei turbamenti di stomaco. Ho visto dei cani operati nel cervello e guariti completamente che erano presi da accessi di vomito nelle forti emozioni, come per azzuffarsi con altri cani, o vedendo entrare nella loro stalla un rivale.

---

(1) A. Mosso, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", Vol. XIV.
(2) Th. Openchowski, " Centralblatt für Physiologie ", 1899, N. 1.

I cani, tutti lo sappiamo, vomitano per nulla, meno comune è vedere un gatto che rigetti, rarissimo un cavallo; queste differenze si osservano pure negli animali d'una medesima specie e anche nell'uomo: i bambini rimandano per bocca facilmente, i vecchi quasi mai: anche la stessa persona può essere più o meno disposta, secondo le circostanze. Tutte queste differenze rendono difficile lo studio di questo eccitamento morboso dello stomaco; e per mostrare l'influenza profonda che esercita il sistema nervoso sul vomito, ricorderò aver Grützner (1) dimostrato che basta legare un cane rovesciato col ventre in alto e le gambe distese perchè rimanga senza effetto l'amministrazione degli emetici.

Che la fatica non sia la causa di questo disturbo lo provano le ascensioni aereostatiche. Nel libro celebre di Glaisher si trovano le prime osservazioni intorno al sonno ed al vomito che provano gli aereonauti a grande altezza, e si ha così la prova che il sonno ed il vomito (i due fenomeni caratteristici del male di montagna) non dipendono dalla fatica.

Riferisco alcuni appunti scritti da Glaisher (2) in una delle ascensioni fatte con Coxwell. Il 31 marzo 1863 partirono alle ore 4,7 pom. dal Palazzo di Cristallo presso Londra, e alle 5,27 raggiunsero l'altezza di 9100 m. A questo punto, dove cominciò la discesa, Glaisher aveva le mani azzurre e 97 pulsazioni: alle ore 6,5 cominciò la nausea con vomito nell'altezza di 3100 m., a 2252 m. ebbe nuovamente il vomito. È interessante questo ritardo di 38 minuti, che segna un aggravamento nelle condizioni di Glaisher durante la discesa. È probabile che questo ritardo nel sentire gli effetti della depressione barometrica possa spiegarsi colle osservazioni che feci sulla pressione sanguigna e sulla sospensione del respiro, le quali mostrano un profondo mutamento quando da un regime povero di ossigeno si torna ad un regime più ricco. Il vomito è un fenomeno incostante, e non conosciamo le condizioni che lo producono: nelle mie espe-

(1) Grützner, " Archiv für d. ges. Physiologie „, VII, 529.

(2) J. Glaisher, *An Account of meteorological and physical Observations*, " Report of British Association for the Advancement of Science for 1863 „, p. 439.

rienze lo vidi mancare anche nelle più forti depressioni e la stessa cosa succede agli aereonauti.

Coxwell nella celebre ascensione oltre i 10.000 metri, nella quale perdette la coscienza e rimase paralizzato, non ebbe il vomito (1). Invece il primo scrittore che diede un quadro completo del male di montagna, il gesuita Acosta nella descrizione del viaggio fatto in America nel 1534, disse che temeva di morire in causa del vomito, tanto era violento, rigettando colla bile il sangue.

§ 2°.

Relazione del vomito coi centri respiratorî.

Per comprendere questo sintomo del male di montagna devo ricordare le relazioni dei centri respiratorî colle parti del sistema nervoso centrale donde partono gli stimoli che fanno venire il vomito. Tali rapporti appaiono in modo evidente in una esperienza dell'Hermann, colla quale dimostra che gli emetici impediscono l'apnea. Se la ventilazione abbondante dei polmoni rimane senza effetto, questo prova che l'azione degli emetici si diffonde anche agli organi nervosi che provvedono ai moti del respiro; infatti Hermann e Grimm hanno ammesso che gli emetici producono una forte eccitazione del centro respiratorio. Vedremo questo più chiaramente nei tracciati presi sul cane e sull'uomo sotto l'azione dell'aria rarefatta.

In uno dei primi lavori che feci mentre ero allievo di M. Schiff, studiai l'azione dell'emetico (2) sulla pressione del sangue, e trovai che per l'azione degli emetici la pressione diminuisce e diviene quasi doppia la frequenza dei battiti cardiaci. Quest'azione sul polso è utile ricordarla per mostrare i

---

(1) Come digressione intorno all'argomento dell'aria rarefatta citerò le parole di Glaisher riferentisi al malessere provato da Coxwell: " Egli voleva venirmi vicino, ma non poteva; sentiva crescere l'insensibilità, e provava un desiderio ansioso di aprire la valvola, ma non poteva farlo perchè aveva perduto l'uso delle mani; finalmente afferrò la corda coi denti e inclinando la testa due o tre volte trattenne il pallone e lo fece discendere „.

(2) A. Mosso, *Sull'azione del tartaro emetico,* " Lo Sperim. „, XXIX, 1875.

rapporti che esistono fra il male di montagna e le funzioni del cuore e del respiro nel vomito.

Le ricerche fatte da Galeotti nella Capanna Regina Margherita ci permettono di avvicinarci per altra via alla conoscenza dei mutamenti che succedono nell'eccitabilità dei centri nervosi quando diminuisce la pressione barometrica. Egli trovò che i movimenti della deglutizione sono più rapidi nell'altitudine di 4560 m. La diminuzione del tempo nel quale si compie una deglutizione fu di 39 % nel Prof. Galeotti e del 18,7 % nell'inserviente Magnani (1). Queste differenze provano che non solo il centro del respiro e quello vasale e del cuore, ma anche il centro di deglutizione, subiscono un eccitamento sulle alte montagne.

I rapporti fra la deglutizione ed il respiro furono già studiati da Markwald, il quale mise in evidenza la diffusione dell'azione inibitrice od eccitante che il centro della deglutizione esercita su quello del respiro (2). Riferisco ora qualcuna delle mie esperienze, per stabilire i rapporti del centro del vomito con quelli della respirazione nell'aria rarefatta.

§ 3°.

Osservazioni sui cani col metodo grafico.

Fu colle scimmie che ho fatto un numero maggiore di osservazioni, e di queste parecchie essendo già riprodotte nel mio libro *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, p. 341, e nelle precedenti note (3), mi restringerò a presentare qualche tracciato del respiro, che ho preso sui cani nell'aria rarefatta.

12 Aprile 1901. — Cane del peso di 4200 gr.; esso riceve in dosi ripetute due grammi di cloralio nell'addome e gli si applica una leva sul torace, che scrive i movimenti del respiro (fig. 1); la linea scende nella inspirazione e si alza nella espirazione. Avevo fissato la leva sul torace per mezzo di un tappo

(1) G. Galeotti, " Rendiconti R. Accad. dei Lincei ", vol. XIII, fasc. 4°.
(2) Markwald, " Zeitschrift für Biologie ", 1889, pag. 1.
(3) A. Mosso, " Rendiconti R. Accademia dei Lincei ", vol. XIII.

di sughero, ed un filo passato coll'ago a traverso la pelle faceva combaciare così bene il tappo colla cassa toracica, che la leva scriveva i battiti cardiaci contemporaneamente ai moti del respiro.

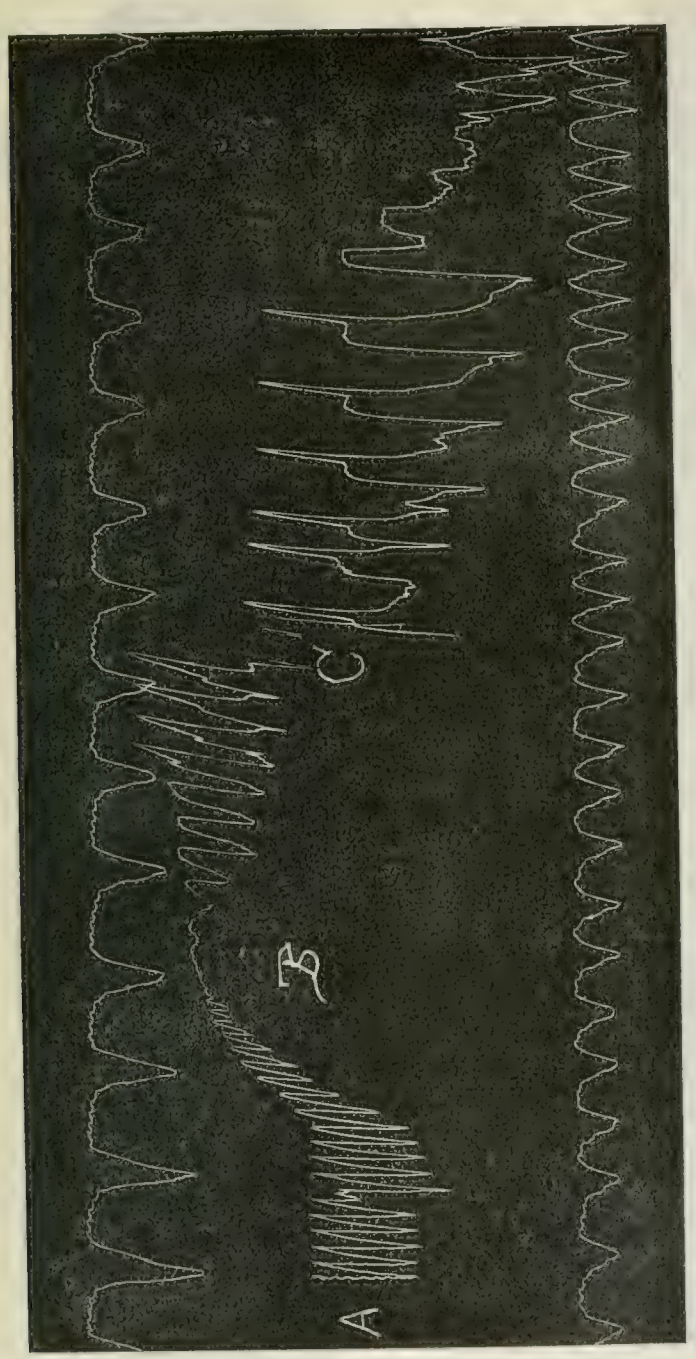


Fig. 1. — Respirazione toracica di un cane nell'aria rarefatta a 360 mm. nella linea 1. Il tracciato continua nella fig. 2. Dopo viene la linea 3 della fig. 1 dove si vede l'accelerramento del respiro che continua nella fig. 3. Nella linea 2 si vedono in *B* i mutamenti del respiro e della tonicità toracica prima che succeda il vomito in *C*.

Dopo aver coperto il cane e l'apparecchio registratore colla grande campana di vetro, facciamo funzionare le pompe. Per economia di spazio tralasciai di riprodurre il tracciato normale.

In principio della linea 1, fig. 1 il manometro segna 360 mm., che corrisponde all'altezza del Cotopaxi, cioè 5900 m. Vediamo che il respiro diviene più piccolo e più frequente.

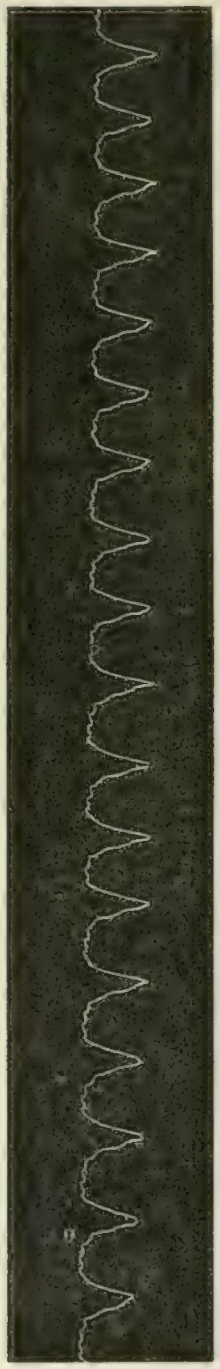


Fig. 2. — Respirazione toracica del medesimo cane dopo 3 minuti che trovasi nella pressione barometrica di 360 mm.

Fig. 3. — Continuazione della figura 2. La respirazione toracica mostra l'acceleramento del respiro che precede il vomito.

La fig. 2 rappresenta il respiro dopo 3 minuti che il cane trovasi sotto questa depressione. Poi, senza causa nota, come si vede nella linea 3 della fig. 1, il respiro diviene più frequente.

La figura 3 è la continuazione di questo tracciato; in esso

il respiro è divenuto cinque volte più frequente che non fosse nella fig. 2. Trascorre circa un minuto e dopo comincia il tracciato della linea 2, fig. 1: il respiro che presentò qualche irregolarità nell'ampiezza delle inspirazioni, lascia pur vedere i moti frequenti della deglutizione, onde concludo che deve essere aumentata la secrezione della saliva. In A alla quinta respirazione si vede che il cane deglutisce; poi succede una rapida diminuzione di tonicità dei muscoli respiratorî, e il torace si accascia; i moti del respiro diventano progressivamente più piccoli in B, poi si arrestano, quindi si rallentano, divengono più forti e finalmente in C succede uno sforzo di vomito. La tonicità del torace continua a crescere oltre il normale, ma il respiro è più lento, e forte l'espirazione attiva colla contrazione dei muscoli addominali.

In questo tracciato appare così evidente la relazione fra la depressione barometrica, l'eccitazione dei centri respiratorî ed il vomito, che sarebbe inutile ogni commento; dirò solo per riepilogare, che la prima modificazione del respiro che precede il vomito compare nel ritmo del respiro che si accelera molto; succede quindi una diminuzione nella tonicità dei muscoli che muovono il torace; mentre questa persiste si rallenta il ritmo del respiro e dopo compare il vomito; poi il ritmo si rallenta di più, diviene evidente l'espirazione attiva e la tonicità dei muscoli respiratorî cresce oltre il normale.

§ 4°.

Osservazioni sull'uomo.

Gli stessi mutamenti nei centri respiratorî ebbi occasione di osservarli nell'uomo quando si produsse la nausea per azione dell'aria rarefatta. Il dott. Ernesto Bertarelli, che quando era allievo nel mio Laboratorio all'età di 25 anni, si sottopose parecchie volte a forti depressioni nella camera pneumatica, senza mai soffrire, ebbe invece una volta a lagnarsi di una sensazione di nausea con tendenza al vomito, per una depressione corrispondente all'altezza del Monte Bianco.

24 Aprile 1896. — Dopo essersi riposato 15 minuti stando seduto sotto la campana pneumatica, la frequenza del respiro

era 17 a 18 nel minuto. Si produce una rapida depressione barometrica diminuendo l'accesso dell'aria, e alle ore

10,20′ il manometro segna 420 mm., che è l'altezza del Monte Bianco, il respiro è divenuto meno profondo e si è rallentata la frequenza del respiro; dopo, senza alcuna causa nota, si è considerevolmente accresciuta, mentre la profondità degli atti respiratorî divenne meno regolare di prima.

Ore 10,30′. La frequenza del respiro sale a 28 invece da 14 al minuto che era prima; e giunge fino a 30 quando mi fa segno che sta male ed apre lui stesso il robinetto interno per avere una corrente più forte di aria. Scendiamo rapidamente alla pressione normale e solleviamo la campana per sentire cosa era successo. Egli dice di aver avuto un senso di nausea con tendenza al vomito, ed una leggera vertigine.

In una prossima nota riferirò dei tracciati presi in simili condizioni nell'uomo, quando comparvero i sintomi del vomito per azione dell'aria rarefatta; basta intanto l'esposizione sommaria di questa esperienza fatta sul Dott. Bertarelli per conchiudere, che anche nell'uomo la depressione barometrica, quando produce la nausea con tendenza al vomito, agisce sul ritmo della respirazione, che si accelera del doppio; ed il respiro diviene irregolare.

§ 5°.

Osservazioni fatte sull'uomo per mezzo del contatore.

Mi capitò un'altra volta di misurare i mutamenti che succedono nel volume dell'aria inspirata quando si produsse la nausea per effetto della depressione barometrica.

26 marzo 1903. — Giuseppe Gay, ragazzo del Laboratorio, ha 15 anni. Gli applichiamo sulla faccia una maschera di guttaperca modellata espressamente per lui, che chiude in modo perfetto, adoperando un po' di vasellina per fare meglio il contatto sulla pelle. Due valvole di Müller servono per dirigere l'aria inspirata verso un contatore Riedinger e farla uscire dopo respirata per mezzo di un grosso tubo di vetro a forchetta impiantato nella cupola della maschera in corrispondenza della bocca. La resistenza del contatore è di 5 mm. di acqua, fu rettificato

prima dell'esperienza, ed ogni giro della sfera più lunga corrisponde a litri 2,52. Pressione barometrica 745 mm. Temp. 15°,5.

Ore 2,7′. Si siede sotto la campana e comincia l'osservazione. Le pompe producono una corrente di aria abbondante. Aspettiamo che si abitui a respirare a traverso il contatore.

Ore 2,17′. Polso 70. Scrivo ogni minuto il valore delle singole inspirazioni, che sono 20 al minuto.

Ore 2,20′. Quando dopo 13 minuti che continua a respirare nel contatore credo che siasi abituato, scrivo il valore di ogni inspirazione e faccio dopo le correzioni riducendole in centimetri cubici.

Ore 2,20′. — 652 - 504 - 630 - 705 - 630 - 554 - 604 - 655 - 655 - - 604 - 630 - 680 - 655 - 554 - 655 - 554 - 504 - 655 - 655.

Ore 2,22′. — 504 - 630 - 630 - 604. 655 - 554 - 453 - 554 - 655 - - 529 - 579 - 554 - 630. 579 - 554 - 604 - 655 - 630 - 655 - 655.

Nel primo minuto respirò litri 14,600,
nel secondo minuto solo „ 12,096.

Alle ore 11,18′ la pressione è da circa 10 minuti a 450 mm. corrispondente all'altezza di 4100 m.; il respiro è un poco più frequente di prima; sono 24 respirazioni al minuto, invece che prima erano solo 20. Alle ore 11,19′ il respiro si accelera: fa 26 respirazioni al minuto; ma le inspirazioni sono meno ampie, così che nel minuto passa la stessa quantità d'aria nei polmoni, cioè litri 12,852.

Ore 11,20′. — 630 - 428 - 327 - 504 - 378 - 756 - 504 - 378 - 504 - - 630 - 630 - 630 - 504 - 504 - 504 - 554 - 579 - 504 - 630 - 378 - 378 - - 504 - 504 - 378 - 579 - 302.

Ore 11,22′. — 630 - 554 - 504 - 453 - 756 - 428 - 579 - 428 - 327 - 756 - 630 - 504 - 378 - 504 - 504 - 554 - 529 - 428 - 453 - 579 - 579 - - 453 - 378 - 378 - 378.

Anche qui si vede che la frequenza del respiro è cresciuta: sono 25 respirazioni al minuto e respira litri 16,380; poco dopo G. Gay fa segno di sentirsi male e si leva la maschera dalla faccia. Facciamo subito crescere la pressione dando l'aria in maggior quantità, fermando le pompe e tornando alla pressione di 745 mm. Alzata la campana pneumatica, ci dice che aveva sentito nausea e che quasi vomitava. La frequenza del respiro era scesa a 19 nell'aria normale.

In queste misure dell'aria inspirata vediamo ripetersi quanto osservammo nel dott. Bertarelli scrivendo il respiro; quando compare la nausea per effetto della depressione barometrica, succede un aumento della frequenza, i moti del respiro diventano irregolari e meno profondi; ma cresce ciò nullameno il volume dell'aria inspirata.

Anche P. Bert (1) provò ripetutamente la nausea a depressioni poco considerevoli, stando immobile nel suo apparecchio: una volta ebbe la nausea nella camera pneumatica a 450 mm., precisamente come nel caso soprariferito di G. Gay.

Conclusioni.

Le osservazioni fatte al Col d'Olen nell'altitudine di 2865 m. provano che il vomito non è probabilmente un effetto dovuto alla mancanza di ossigeno. Essendo il nostro organismo più sensibile al difetto dell'anidride carbonica nel sangue, che non alla deficienza dell'ossigeno, è probabile che il vomito quando compare a depressioni barometriche inferiori ai 3000 metri (escluse le cause generalmente note) sia prodotto dall'acapnia.

Studiando le relazioni del vomito coi centri respiratorî si vide che precede un aumento nella frequenza e una diminuzione dell'ampiezza dei movimenti respiratorî; che essi diventano alquanto irregolari, e che parecchio tempo prima del vomito succede una diminuzione di tonicità nei muscoli della cassa toracica. Questi fenomeni che osservammo nel cane si producono in modo eguale nell'uomo.

Per mezzo del contatore si misurò il volume dell'aria inspirata in un giovane nella camera pneumatica: giunta la rarefazione dell'aria ad un valore corrispondente a 4100 m., il respiro divenne più frequente, e benchè fosse diminuita l'ampiezza delle inspirazioni era cresciuta la quantità dell'aria inspirata ad ogni minuto e quindi comparve la nausea con tendenza al vomito.

Da queste osservazioni risulta che la depressione barometrica produce il vomito nella forma dell'acapnia ed in quel periodo che vi è una eccitazione dei centri respiratorî che accelera il ritmo e diminuisce la profondità delle inspirazioni, come ab-

(1) P. Bert, *Pression barométrique*, pag. 351.

biamo veduto nei cani per mezzo dell'iniezione di idrato di sodio nel sangue (1). Sebbene il vomito possa prodursi dall'anossiemia, è probabile che nel male di montagna dipenda dall'acapnia, perchè nelle piccole altezze dove si osserva il vomito, mancano i sintomi della cianosi, del sonno, della stanchezza, dei disturbi della vista, della palpitazione ed altri fenomeni caratteristici dell'anossiemia. Un' altra prova che l'acapnia possa produrre il vomito l'abbiamo nella efficacia pronta e benefica che ha la somministrazione dell'anidride carbonica, come ho dimostrato in una precedente nota per mezzo degli studî fatti sul Monte Rosa (2).

(1) A. Mosso, " Archives ital. de Biologie „ tome XLII, pag. 186.
(2) A. Mosso, " Rendiconti R. Acc. dei Lincei „.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 26 Febbraio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pezzi, Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Pizzi, Chironi, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Manno, Allievo, Carutti.

L'atto verbale dell'adunanza antecedente, 12 febbraio 1905, è approvato.

Il Presidente fa omaggio d'un opuscolo del Conte Gioachino Toesca di Castellazzo, *Commemorazione del generale Luigi Palma di Cesnola*, Torino, Candeletti, 1905.

Il Socio Ruffini offre con parole di vivo elogio le seguenti pubblicazioni del prof. Silvio Pivano: 1° *Cartario dell'Abazia di Rifreddo*, Pinerolo, 1902; 2° *Contratti agrari in Italia nell'alto Medio Evo*, Torino, 1904; 3° *Stato e Chiesa negli statuti comunali italiani*, Torino, 1904.

Del medesimo dott. Pivano il Socio Ruffini presenta per l'inserzione nelle *Memorie* una dissertazione intitolata: *Lineamenti storici e giuridici della cavalleria medioevale*. Il Presidente designa a riferire il Socio Ruffini unitamente al Socio Cipolla.

Il Socio Cipolla, incaricato col Socio Graf di riferire in-

torno alla Memoria del prof. Wendelin Foerster dell'Università di Bonn, *Sull'autenticità dei codici d'Arborea*, legge la relazione, che è approvata dalla Classe e compare negli *Atti*. Quindi la Classe, presa notizia dello scritto, ne dichiara con votazione segreta unanime l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Dichiarando per lettera il Socio Allievo di ritirarsi dalla Commissione designata a giudicare della Memoria del prof. Bellotti su *Empedocle*, il Presidente invita a sostituirlo il Socio Chironi, che formerà la Commissione col Socio De Sanctis.

LETTURE

Relazione intorno alla memoria del Prof. Wendelin Foerster, intitolata: *Sull'autenticità dei codici d'Arborea.*

Un lavoro dell'illustre Prof. di Bonn, W. Förster, non può non riuscire gradito alla nostra Accademia. E più gradita ancora sarà questa monografia, perchè essa si occupa di un argomento che non le è estraneo, quello dell'autenticità o meno delle Carte di Arborea. Un chiarissimo membro di quest'Accademia, Carlo Baudi di Vesme, impegnò, molti anni or sono, una vigorosa lotta scientifica in difesa di quelle carte. Il Förster ora sostiene l'opinione contraria, ma con ragioni in parte dissimili da quelle che il Vesme combatteva. La nostra Accademia, che altro non ricerca se non la verità, deve veder con piacere tale dibattito, sostenuto con piena serenità scientifica.

La Memoria del prof. Förster si divide in due parti, che hanno per origine due comunicazioni fatte nella primavera del 1903 al Congresso Storico internazionale, radunatosi allora in Roma.

Gli studi del Förster sulle carte di Arborea principiano dalla visita ch'egli fece alla Biblioteca di Cagliari nel 1886. Appena egli ebbe a mano quei mss., trovò che qualcuno fra essi presentava caratteri paleografici e diplomatici affatto diversi dagli altri. Passando poi dall'esame paleografico ed esterno all'esame del contenuto, vide che quest'ultima ricerca confermava nei suoi risultati la prima. Le carte che sollevarono tanto scalpore, per le straordinarie scoperte alle quali aprivano l'adito, erano appunto quelle che anche per ragioni esterne si dimostravano false. E queste ragioni esterne diventavano ora chiare ed evidenti mercè il confronto coi documenti autentici, in parte coesistenti insieme coi falsi. Avendo il Förster, per mezzo dei professori Rajna e Pullè, estese le sue indagini anche ai codici arboreesi di Firenze e di Siena, giunse alla condanna anche di questi due ultimi. Tale è sommariamente il contenuto della I parte. Nella II parte il Förster si propone di far conoscere i mezzi tecnici di cui il falsario si servì. Egli adoperò sempre materiali pergamenacei e cartacei veramente antichi, scrivendo sulle pa-

gine lasciate originariamente in bianco. Così, mescolando il vero col falso, rendeva credibile anche quest'ultimo. Ma non potè sopperire all'inchiostro. Nè badò ad adottare un carattere che rassomigliasse a quello veramente in uso, e preferì invece di scrivere con lettere e sigle di difficilissima interpretazione.

Un documento palinsesto che, a primo aspetto, sembrerebbe di buona lega, venne studiato a parte dal Federici, il cui lavoro uscì a Firenze nel 1904, con prefazione del Förster stesso. Il Federici ne prova la falsità, sia in base al contenuto, sia in considerazione della forma esterna. Qui il Förster introduce qualche leggera modificazione a ciò ch'egli avea detto nell'indicata prefazione.

In tal modo il Förster crede di poter concludere dicendo che lo studio separato dei caratteri intrinseci e dei caratteri estrinseci delle carte arboreesi, ne dimostra nuovamente, per vie diverse, e in modo più certo che prima non fosse, la non autenticità.

Un solo documento non rientra in tutto e per tutto entro tale schema di dimostrazione. Esso può provarsi falso sia per la lingua (che è un catalano sgrammaticato), sia per il contenuto; ma l'aspetto esterno appena potrebbe dar luogo a sospetti.

Il Förster tocca solo di sfuggita la questione riguardante gli autori della falsificazione, poichè il nome del reo non ha, egli pensa, interesse per la scienza. Ma egli cerca di provare che la falsificazione è moderna, e fu fatta da chi conosceva gli studî storico-archeologici del Manno, del Lamarmora, dello Spano, ed era informato della coltura filologica, propria della prima metà del sec. XIX.

Il lavoro del Förster è serio, è quale potevamo aspettarcelo da un uomo di tal valore. Non è agevole il dire se dopo della presente dissertazione si possano credere ormai terminati gli studi sulle carte arboreesi, ma ben si può asserire che questa monografia reca ad essi un ottimo contributo di osservazioni nuove, desunte dall'esame diretto dei documenti. Essa è quindi, a parere dei sottoscritti, meritevolissima di essere letta alla Classe.

A. Graf,
C. Cipolla, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Marzo 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Jadanza, Spezia, Guidi, Foà, Fileti, Morera, Segre, Guareschi, Mattirolo, Parona e Camerano Segretario. — Scusano la loro assenza i Soci Salvadori, Peano, Grassi e Mosso.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

1° Il Presidente presenta a nome del Socio nazionale non residente senatore Vito Volterra cinque volumi di opere del defunto Socio corrispondente dell'Accademia Prof. Alfredo Cornu. I volumi vengono mandati in dono all'Accademia dalla signora Cornu.

Il Presidente legge le parole seguenti del Socio Volterra:

Ho l'onore di presentare all'Accademia, a nome della vedova Signora Cornu, cinque volumi di opere del Prof. Alfredo Cornu di Parigi, che fu nostro socio corrispondente fino dal 1881.

Le memorie di questa collezione sono quelle che la Signora Cornu potè amorosamente raccogliere delle molte pubblicazioni di suo marito per farne omaggio alla nostra Accademia.

Mi permetto di accennare a ciò che si trova nei detti volumi, i quali offrono un chiaro saggio della importante opera compiuta da questo eminente scienziato.

Il primo volume contiene Memorie di ottica, acustica, astronomia e fisica terrestre.

A tutti è noto che il Cornu ha dedicato gran parte della sua attività scientifica alla teoria della luce, ramo della fisica per cui sentiva particolare predilezione. La teoria della riflessione cristallina, le misure classiche sulla velocità della luce, le ricerche sulla spettroscopia, sono rappresentate da numerosi lavori raccolti in questo volume. Accennerò ancora che vi si trova il celebre studio geometrico sulla diffrazione, la cui utilità accoppiata ad una estrema eleganza non può esser sfuggita a chiunque si sia occupato di questa dottrina; ed infine quella scoperta del nostro Autore sul fenomeno di Zeemann che iniziò quella serie di esperienze le quali indussero Lorentz a modificare la sua primitiva teoria.

Le ricerche di acustica riguardano gl'intervalli musicali e le vibrazioni circolari delle corde, ricerche a cui il fine, anzi straordinario orecchio musicale dell'Autore, fu di grande aiuto.

Le osservazioni relative al passaggio di Venere, ai satelliti di Giove, agli spettri stellari, le misure sulla densità della terra, ottenute perfezionando il metodo di Cavendish, formano l'argomento delle principali altre memorie del primo volume.

Nel secondo volume si trova lo studio sulla parte ultravioletta dello spettro solare, e la bella memoria in cui è esposto l'ingegnosissimo metodo per distinguere nello spettro solare le strie di origine tellurica da quelle d'origine solare.

Vi si trovano pure le misure fatte nell'occasione del passaggio di Venere, le quali hanno condotto il Cornu a creare metodi nuovi pratici per misure di prove fotografiche e l'importante lavoro sulla sincronizzazione dei pendoli.

Il Cornu era membro del *Bureau des Longitudes* fino dal 1886. Alla interessante raccolta degli articoli di indole popolare da lui pubblicati nell'Annuario del detto Ufficio è consacrato il terzo volume.

I volumi quarto e quinto contengono articoli di varia indole pubblicati in diverse riviste e periodici, e conferenze e discorsi letti in varie occasioni. L'illustre fisico era anche un eccellente conferenziere scientifico, piacevole e profondo nello stesso tempo, e a questo proposito mi basta ricordare la splendida allocuzione da lui letta a Cambridge nella occasione delle feste celebrate pel giubileo di Stokes, la quale in poche pagine accoglie un mirabile riassunto storico sulla teoria delle onde luminose ed

un saggio della importanza filosofica e pratica della dottrina ondulatoria. Questo discorso è inserito alla fine del quarto volume.

Sono certo che l'Accademia accoglierà di buon grado il dono prezioso della Signora Cornu, ricordo caro ed utile di un Collega altamente stimato e di una esistenza consacrata agli studii.

2° Un opuscolo del prof. C. Klein: *Ueber Theodolithgoniometer;*

3° Il Socio Jadanza presenta l'*Annuario astronomico pel 1905 dell'Osservatorio di Torino.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

1° Dr. E. Ferrero e M. Nozari: *Sullo spettro di assorbimento delle soluzioni di allume di Cromo,* dal Socio Naccari;

2° Dr. Galeazzo Piccinini: *Azione del bromo sopra alcuni derivati non saturi.* Nota 1ª, dal Socio Guareschi.

Il Socio Mattirolo, a nome anche del Socio Camerano, legge la relazione intorno alla memoria del Dr. G. Gola intitolata: *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile.*

La Classe approva ad unanimità la relazione, che è favorevole, e pure ad unanimità con votazione segreta la stampa della memoria del Dr. Gola nel volume delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Naccari a nome dei Colleghi della Classe rivolge al Presidente prof. Enrico D'Ovidio i più vivi rallegramenti per la recente sua nomina a senatore del Regno, nomina che venne accolta con grande compiacimento, poichè tutti da lungo tempo hanno imparato ad apprezzare le alte sue doti di mente e di cuore.

Il Presidente senatore D'Ovidio ringrazia il prof. Naccari e tutti i Colleghi, ricorda che da trentatre anni che è in mezzo a loro ha potuto apprezzarne l'alto sapere e l'elevato carattere, che quando cominciò a studiare lo fece senza pensare se la via potesse condurre a ricchezza o ad onori, e che l'alta distinzione che il Governo di Sua Maestà ha voluto conferirgli torna, più

che a lui stesso, ad onore dell'Accademia, poichè sono i Colleghi che l'hanno colla loro benevolenza designato.

Ai Soci Volterra, Righi e Fergola, che pure alla nostra Accademia a vario titolo appartengono, nominati contemporaneamente senatori, manda i più vivi rallegramenti, e crede in ciò d'interpretare il pensiero della Classe. Un saluto in particolar modo egli invia al suo vecchio ed illustre maestro il prof. Fergola, dal quale imparò a porre innanzi a tutto il sentimento del dovere e la dignità del carattere.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata procede alla elezione di Soci nazionali residenti, Soci nazionali non residenti, stranieri e Soci corrispondenti.

Riescono eletti, salvo l'approvazione sovrana, a Soci nazionali residenti i signori:

Nob. Carlo Somigliana, professore di fisica-matematica nella R. Università di Torino;

Romeo Fusari, professore di anatomia umana descrittiva e topografica nella R. Università di Torino.

A Socio nazionale non residente:

Cav. Giuseppe Lorenzoni, professore di astronomia nella R. Università di Padova.

A Socio straniero:

Giacomo Enrico van't Hoff, professore di chimica nella R. Università di Berlino.

A Soci corrispondenti:

Nella sezione di matematiche applicate, astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare:

Simone Newcomb, professore emerito di matematica e di astronomia nell'Università di Baltimora;

Guglielmo Ritter, professore di statica grafica e di costruzioni nella Scuola politecnica di Zurigo.

Nella sezione di chimica generale ed applicata:

Guglielmo Ostwald, professore di chimica nell'Univ. di Lipsia;

Svante Augusto Arrhenius, direttore dell'Istituto fisico-chimico dell'Università di Stoccolma;

Walter Nernst, professore di fisica chimica nell'Univ. di Gottinga.

Nella sezione di mineralogia, geologia e paleontologia:

Michele Levy dell'Istituto di Francia, professore di mineralogia all'Università di Parigi;

Viktor Goldschmidt, professore di mineralogia nell'Università di Heidelberg;

Francesco Edoardo Suess, professore di mineralogia nell'Imp. Università di Vienna;

Emilio Haug, professore di geologia nell'Università di Parigi.

Nella sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata:

Augusto Weisman, professore di zoologia nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden);

Edwin Ray Lankester, direttore del *British Museum of natural history* in Londra;

Teodoro Guglielmo Engelmann, professore di fisiologia nell'Università di Berlino;

A. Dastre, prof. di fisiologia nell'Università di Parigi.

LETTURE

Sullo spettro di assorbimento delle soluzioni di allume di cromo.

Nota di E. FERRERO e M. NOZARI.

(Con una Tavola).

È nota la proprietà delle soluzioni acquose di allume di cromo di trasformarsi da violetto-rossastre in verdi, quando vengono riscaldate.

Quale modificazione chimica avvenga fu stabilito con metodi termochimici dal Recoura, il quale trovò che in una soluzione di solfato cromico modificata esiste dell'acido solforico libero; che cioè sotto l'azione del calore il solfato cromico si sdoppia in acido solforico e in solfato basico verde (1).

Questa produzione di acido solforico libero si accorda con la diminuzione di resistenza studiata dal Monti (2).

Che anche l'attrito interno diminuisca col cambiamento di colore, lo dimostrano le esperienze del D'Arcy (3), dello Sprung (4), e quelle che uno di noi eseguì (5) per determinare più precisamente a quale temperatura questa diminuzione abbia luogo.

Ma il cambiamento di colore è accompagnato da un mutamento dello spettro di assorbimento; e difatti lo spettro di assorbimento della soluzione azzurra, esaminato con piccola dispersione, presenta una banda nera, il cui bordo più deviato è sfumato, mentre quello meno deviato è netto e reciso; diventando verde la soluzione, il bordo meno deviato si avvicina al rosso.

(1) " Ann. de Chim. et Phys. ", 1895, vol. I, pag. 494.
(2) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1894-95.
(3) D'Arcy, " Phyl. Mag. ", S. 5, ottobre 1889.
(4) Sprung, " Pogg. Ann. ", 159, 1876.
(5) " Nuovo Cimento ", serie V, vol. 1°, aprile.

Scopo delle esperienze sulle quali qui riferiamo, è stato di determinare come questo mutamento dipenda dalla temperatura.

Abbiamo per questo preparato diverse soluzioni di allume di cromo, delle quali abbiamo esaminato lo spettro di assorbimento alla temperatura ordinaria; le abbiamo portate successivamente alle temperature di 46°, 50°, 55°, ecc., e dopo averle raffreddate ogni volta alla temperatura dell'ambiente, ne abbiamo esaminato di nuovo lo spettro di assorbimento. Per evitare che le soluzioni potessero in alcun modo alterarsi, le conservavamo entro provette piuttosto grosse chiuse da un tappo attraversato da due tubi: l'uno pescava fino in fondo alla provetta ed esternamente si ripiegava in basso; l'altro sporgeva pochissimo sotto il tappo; soffiando in questo, la soluzione usciva dall'altro tubo, e così si faceva per togliere quei 3 o 4 cm^3 che occorrevano ogni volta per fare l'esame spettroscopico. Sulla soluzione era stato versato uno strato di olio di vaselina. La soluzione veniva scaldata ponendo la provetta entro un bagno d'acqua, di cui si aumentava gradatamente la temperatura: un termometro e un agitatore di vetro attraversavano ancora il tappo e servivano durante il riscaldamento.

Per le nostre esperienze ci siamo serviti di uno spettroscopio di Krüss munito di doppia fenditura di Vierordt ad apertura simmetrica (1). La soluzione contenuta entro un vasetto prismatico di vetro a pareti piane e parallele con prisma di Schulz (2), veniva posta tra la fenditura e una fiamma a petrolio, oppure un becco Auer, in modo che il punto di separazione delle due fenditure coincidesse con la superficie di separazione della soluzione e del prismetto di vetro. Lo spessore dello strato assorbente era di 1 cm. Nel campo dell'oculare era posta la solita fenditura ad apertura variabile, la quale serviva a limitare la regione d'osservazione dello spettro. Era stata costruita la curva dello strumento: in tal modo si poteva avere volta per volta la lunghezza d'onda media della regione nella quale si osservava.

(1) G. e H. Krüss, *Kolorimetrie und Quantitative Spektralanalyse*. Hamburg, 1891, pag. 79

(2) Ibid., pag. 82.

Il metodo d'osservazione è quello descritto dal Vierordt (1): tenevamo fissa la larghezza l_s della fenditura superiore (posta davanti alla soluzione) e regolavamo la larghezza l_i della inferiore, in modo da non riscontrare, osservando nell'oculare, differenza d'intensità luminosa fra la parte superiore e l'inferiore dello spettro. Dal rapporto $J = \frac{l_i}{l_s}$ calcolavamo il coefficiente di estinzione $a = -\log J$, e quindi conoscendo la concentrazione c (cioè il peso della sostanza disciolta in 100 cm³ di soluzione) il rapporto di assorbimento:

$$(\alpha) \qquad A = \frac{c}{a} = \frac{c}{-\log J}$$

Le variazioni di A sono appunto quelle che interessano nel nostro studio.

La seguente discussione sulla formula (α) ci permetterà di dedurre quali sono le migliori condizioni per l'esatta determinazione di A.

Supposto di fare un errore ΔJ nella determinazione sperimentale di J, l'errore ΔA che ne risulta, è dato da:

$$(\beta) \qquad A + \Delta A = \frac{c}{-\log(J + \Delta J)}$$

e ponendo:

$$\delta J = \frac{\Delta J}{J} \qquad \delta A = \frac{\Delta A}{A}$$

e dividendo membro a membro la (β) per la (α) si ha:

$$(\gamma) \qquad \delta A = \frac{\log(1 + \delta J)}{\log J + \log(1 + \delta J)},$$

la quale ci permette di calcolare l'errore relativo δA, corrispondente a un errore relativo δJ fatto nel determinare sperimentalmente J.

Purchè le condizioni sperimentali siano buone, δJ è un numero assai piccolo, quindi piccolo è il numeratore del secondo

(1) K. Vierordt, *Anwendung des Spektralapparates zur Photometrie u. zur quantitativen Analyse.* Tübingen 1873.

membro: però esso cresce col diminuire di J, perchè in ogni misura l'errore relativo diventa tanto maggiore quanto più piccola è la grandezza da misurare. Il denominatore cresce in valore assoluto col diminuire di J, perchè J è compreso fra zero e l'unità: δA diminuirà dunque col diminuire di J se l'aumento del denominatore avrà la prevalenza sull'aumento dovuto al δJ del numeratore; crescerà in caso contrario.

Nella seguente tabella abbiamo calcolato i valori di δA corrispondenti a diversi valori di J e δJ.

J	δJ	δA	J	δJ	δA
0,80	0,02	0,097	0,20	0,06	0,038
0,60	0,02	0,040	0,10	0,06	0,026
0,40	0,02	0,022	0,60	0,08	0,177
0,80	0,04	0,213	0,40	0,08	0,092
0,60	0,04	0,083	0,30	0,08	0,068
0,40	0,04	0.045	0,20	0,08	0,050
0,30	0,04	0,034	0,10	0,08	0,035
0,20	0,04	0,025	0,50	0,10	0,159
0,60	0,06	0,129	0,30	0,10	0,086
0,40	0,06	0,068	0,20	0,10	0,063
0,30	0,06	0,051	0,10	0,10	0,043

L'esame di questa tabella ci mostra come nella determinazione di A è molto meno sentito un errore di J del 10 %, quando J è compreso fra 0,30-0,10 circa, che un errore del 2 % quando J ha valori prossimi a 0,80. E siccome con la disposizione del Vierordt anche ad un occhio molto esercitato da lunga esperienza è pressochè impossibile garantire che l'errore di J sia inferiore al 2 % (tanto più nelle regioni estreme dello spettro), dovendosi determinare A per una certa soluzione e per tutte le regioni dello spettro, sarà impossibile far ciò con una sola soluzione (a meno che essa presenti un assorbimento pressochè uniforme), ma bisognerà scegliere diverse soluzioni diversamente concentrate, e limitare per ciascuna di queste l'esame a quelle regioni dello spettro per le quali J è compreso fra 0,10-0,30 circa: dal complesso di questi risultati si può poi dedurre il valore di A per tutto lo spettro.

E viceversa: dovendosi, conosciuto A, determinare c mediante l'osservazione spettrofotometrica (e su questo si fonda l'analisi spettrale quantitativa), converrà scegliere per l'esame spettroscopico quelle regioni, nelle quali l' assorbimento corrisponde ad un valore di J compreso fra gli stessi limiti.

Questo principio noi abbiamo applicato in questo lavoro sperimentale.

Non riportiamo qui i risultati ottenuti esaminando le prime soluzioni osservate, perchè quelle esperienze servirono più che altro ad abituare l'occhio nostro a simile genere di osservazioni. E questa educazione dell'occhio è certamente necessaria, se si vuole ottenere risultati attendibili, perchè molte sono le cause che possono rendere incerta la misura anche ad un occhio esercitato.

Anche adoperando il prisma di Schulz è molto difficile che sia netta la separazione fra la parte superiore ed inferiore dello spettro (1).

Per quanto le fenditure dell'apparecchio di Krüss siano ad apertura simmetrica, quando la fenditura inferiore è sensibilmente più stretta della superiore, il colore varia leggermente, sicchè in sostanza si deve, in questo genere di osservazioni, giudicare dall'uguaglianza d'intensità luminosa di due striscie sovrapposte, non nettamente separate l'una dall'altra e non perfettamente dello stesso colore. Si capisce quindi quanto sia necessaria una buona educazione dell'occhio per tali esperienze.

Riportiamo invece i risultati ottenuti esaminando le tre ultime soluzioni, che avevano le seguenti concentrazioni: gr. 1,496 % cm^3, gr. 4,654 % cm^3, gr. 10,000 % cm^3.

Lo spettro d'assorbimento di una soluzione di allume di cromo presenta un assorbimento crescente dal rosso verso il giallo, nella quale regione esso è massimo; l'assorbimento va

(1) Vierordt faceva senz'altro coincidere il punto di divisione delle due fenditure col menisco della soluzione in esame, dimodochè i raggi superiormente, entravano direttamente nello spettroscopio, mentre nella parte inferiore attraversavano la soluzione. È inutile osservare quanto meno adatte siano queste condizioni sperimentali, per il disturbo recato dal menisco nell'osservazione.

poi diminuendo verso il verde, per crescere di nuovo e diventare grandissimo nella regione violetta dello spettro.

La soluzione meno concentrata ha servito per esaminare l'assorbimento nella regione gialla, nella quale essa ha il massimo valore; la soluzione più concentrata per lo stesso esame nel rosso e nel verde dove l'assorbimento è assai più piccolo; la terza per le regioni intermedie.

I risultati ottenuti sono riferiti nella tabella in fine: in essa ogni valore di J è la media di almeno dieci osservazioni fatte in ugual numero da ciascuno di noi; e questo è utile fare per togliere l'errore personale che potrebbe esservi se le osservazioni fossero fatte da una sola persona. Da J è stato calcolato il coefficiente di estinzione a e da questo il rapporto di assorbimento A mediante la formula $A = \frac{c}{a}$. I numeri romani segnati accanto a ciascun valore di J servono a indicare con quale delle tre soluzioni (I: $c=1,496$; II: $c=4,654$; III: $c=10,000$) essi sono stati determinati.

Nella prima colonna è segnata la lunghezza d'onda media corrispondente alla regione dello spettro alla quale si riferiscono le relative osservazioni.

Le curve che si possono costruire per ogni temperatura prendendo come ascisse le lunghezze d'onda e come ordinate i corrispondenti valori di A, hanno il seguente andamento:

Partendo dalla regione meno deviata dello spettro, esse presentano tutte un tratto discendente (al quale corrisponde un assorbimento sempre più crescente) fino nell'intorno di $\lambda = 580$: le varie curve però differiscono per una diversa inclinazione di questo tratto, e precisamente la inclinazione diminuisce in modo appena percettibile per le curve corrispondenti a temperature inferiori a 67°, mentre per questa temperatura la diminuzione si osserva in modo assai netto e visibile. A temperature superiori l'inclinazione rimane qual'è a 67°.

Dopo questo primo tratto discendente le curve presentano tutte un tratto ascendente, il quale, raggiunta la massima altezza, torna a piegarsi verso il basso. Nella tavola sono appunto disegnate le curve nella regione corrispondente a questo massimo. Per economia di spazio, l'origine delle ordinate di ciascuna curva è stata spostata in alto di un centimetro per ri-

spetto alla precedeute. L'esame di queste curve dimostra che il massimo (a cui corrisponde un minimo d'assorbimento) si ha per le soluzioni bleu in corrispondenza di $\lambda = 489$ circa: portando la soluzione a temperature successivamente crescenti, il massimo si sposta verso la regione meno deviata dello spettro; però possiamo dire che per temperature inferiori ai 55° circa questo spostamento è appena percettibile, se pure non è dubbio; ma esso si manifesta in modo netto e deciso al disopra di questa temperatura fin verso i 67°: per questa e per temperature superiori la posizione del punto massimo della curva corrisponde presso a poco a $\lambda = 497$ circa. Del resto queste cose appariscono chiaramente se si osserva la linea che unisce i punti massimi delle varie curve.

La leggera diminuzione nell'inclinazione della curva in corrispondenza della regione meno deviata dello spettro, e il leggero spostamento del massimo, che già si verificano a temperature inferiori ai 55°, lasciano presumere che già a queste temperature incominci la trasformazione per cui la soluzione bleu diventa verde; ad ogni modo dobbiamo ritenere che questa trasformazione si faccia nel modo più completo tra i 55° e i 67° circa, dal momento che la curva corrispondente a questa temperatura non differisce sensibilmente da quelle a temperature superiori.

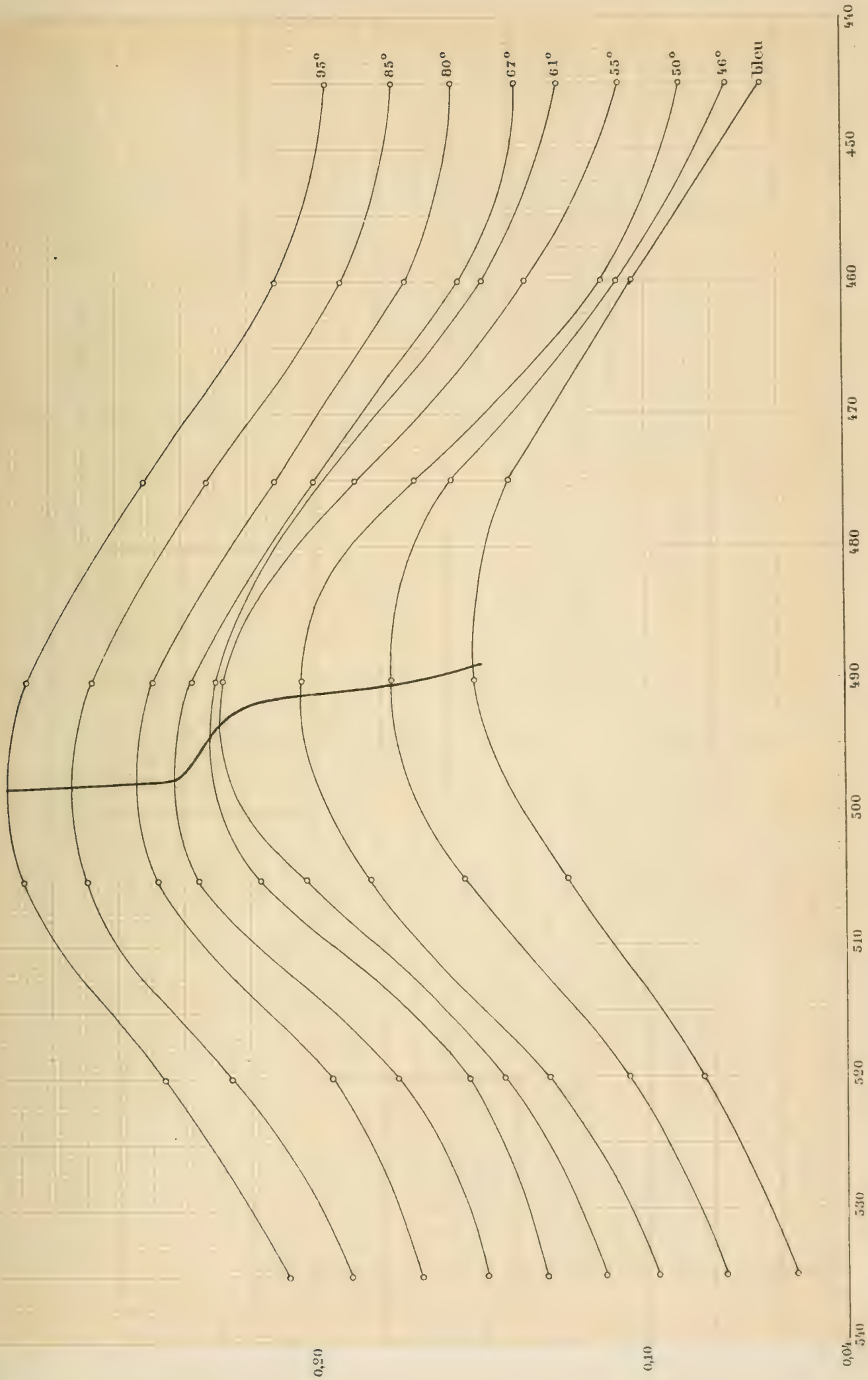
Questo lavoro venne eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Torino, diretto dal Ch.mo Prof. A. Naccari, al quale porgiamo i nostri vivi ringraziamenti.

Torino, Gennaio 1905.

λ	Soluzione bleu			Soluzione portata a 46°			Soluzione portata a 50°		
	J	*a*	*A*	*J*	*a*	*A*	*J*	*a*	*A*
685	III 0,315	0,5017	0,199	III 0,285	0,5452	0,183	III 0,255	0,5935	0,169
670	III 0,205	0,6882	0,145	III 0,165	0,7825	0,128	III 0,170	0,7695	0,130
655	III 0,100	1,000	0,100	III 0,094	1,027	0,097	III 0,092	1,036	0,097
640	III 0,048	1,319	0,076	II 0,303	0,5186	0,090	II 0,170	0,7695	0,061
625	II 0,208	0,6819	0,068	II 0,169	0,7721	0,060	II 0,082	1,086	0,043
610	II 0,130	0,8861	0,053	II 0,102	0,9914	0,047	I 0,415	0,3819	0,039
595	II 0,075	1,125	0,041	I 0,359	0,4449	0,034	I 0,380	0,4089	0,037
580	I 0,428	0,3686	0,041	I 0,359	0,4449	0,034	I 0,365	0,4377	0,034
570	I 0,421	0,3757	0,040	I 0,353	0,4522	0,033	I 0,365	0,4377	0,034
560	II 0,074	1,131	0,041	I 0,375	0,4260	0,035	I 0,409	0,3883	0,039
550	II 0,096	1,018	0,046	I 0,427	0,3696	0,040	I 0,434	0,3625	0,041
535	II 0,149	0,8268	0,056	II 0,151	0,8210	0,057	II 0,157	0,8041	0,058
520	II 0,276	0,5591	0,083	II 0,286	0,5436	0,086	II 0,305	0,5157	0,090
505	III 0,157	0,8041	0,124	III 0,183	0,7376	0,136	III 0,203	0,6925	0,144
490	III 0,220	0,6576	0,152	III 0,230	0,6383	0,157	III 0,246	0,6091	0,164
475	III 0,195	0,7099	0,141	III 0,190	0,7213	0,139	III 0,170	0,7695	0,130
460	II 0,352	0,4535	0,103	II 0,296	0,5287	0,088	II 0,231	0,6364	0,073
445	II 0,187	0,7282	0,064	II 0,143	0,8447	0,055	II 0,110	0,9586	0,049

λ	Soluzione portata a 55°			Soluzione portata a 61°			Soluzione portata a 67°		
	J	*a*	*A*	*J*	*a*	*A*	*J*	*a*	*A*
685	III 0,230	0,6383	0,157	III 0,217	0,6635	0,151	III 0,141	0,8508	0,118
670	III 0,157	0,8041	0,124	III 0,141	0,8508	0,118	III 0,090	1,046	0,096
655	II 0,303	0,5186	0,090	II 0,283	0,5482	0,085	II 0,244	0.6126	0,076
640	II 0,193	0,7144	0,065	II 0,184	0,7352	0,063	II 0,130	0.8861	0,053
625	II 0,094	1,027	0,045	I 0,440	0,3565	0,042	I 0,403	0,3946	0,038
610	II 0,056	1,252	0,037	I 0,359	0,4449	0,034	I 0,359	0,4449	0,034
595	I 0,409	0,3883	0,038	I 0,321	0,4935	0,030	I 0,315	0,5017	0,030
580	I 0,409	0,3883	0,038	I 0,309	0,5100	0,029	I 0,306	0,5143	0,029
570	I 0,409	0,3883	0,038	I 0,296	0,5287	0,028	I 0,303	0.5186	0,029
560	I 0,434	0,3625	0,041	I 0,334	0,4763	0,031	I 0,353	0,4522	0,033
550	II 0,066	1,180	0,039	I 0,409	0,3883	0,039	I 0,375	0,4260	0,035
535	II 0,136	0,8665	0,054	II 0,124	0,9066	0,051	II 0,110	0,9586	0,049
520	II 0,273	0,5638	0,083	II 0,236	0,6271	0,074	II 0,242	0,6162	0,076
505	III 0,200	0,6990	0,143	III 0,187	0,7282	0,137	III 0,185	0,7328	0,136
490	III 0,246	0,6091	0,164	III 0,215	0,6676	0,150	III 0,189	0,7235	0,138
475	III 0,165	0,7825	0,128	III 0,141	0,8508	0,118	III 0,100	1,000	0,100
460	II 0,244	0,6126	0,076	II 0,210	0,6778	0,069	II 0,148	0,829	0,056
445	II 0,103	0,9872	0,047	II 0,096	1,018	0,046	II 0,063	1,201	0,039

λ	Soluzione portata a 80°			Soluzione portata a 85°			Soluzione portata a 95°		
	J	*a*	*A*	*J*	*a*	*A*	*J*	*a*	*A*
685	III 0,122	0,9136	0,109	III 0,122	0,9136	0,109	III 0,120	0,9208	0,109
670	III 0,070	1,155	0,087	III 0,070	1,155	0,087	III 0,070	1,155	0,087
655	II 0,246	0,6091	0,076	II 0,204	0,6904	0,067	II 0,170	0,7696	0,060
640	II 0,116	0,9356	0,050	II 0,141	0,8508	0,055	II 0,095	1,022	0,046
625	I 0,371	0,4306	0,035	I 0,384	0,4157	0,036	I 0,415	0,3820	0,039
610	I 0,338	0,4711	0,032	I 0,315	0,5017	0,030	I 0,359	0,4449	0,034
595	I 0,303	0,5186	0,030	I 0,306	0,5143	0,029	I 0,321	0,4935	0,030
580	I 0,290	0,5376	0,028	I 0,290	0,5376	0,028	I 0,321	0,4935	0,030
570	I 0,286	0,5436	0,028	I 0,296	0,5287	0,028	I 0,338	0,4711	0,032
560	I 0,330	0,4815	0,031	I 0,340	0,4685	0,032	I 0,365	0,4377	0,034
550	I 0,384	0,4157	0,036	I 0,365	0,4377	0,034	I 0,403	0,3946	0,038
535	II 0,114	0,9431	0,049	II 0,115	0,9393	0,050	II 0,113	0,9469	0,049
520	II 0,242	0,6162	0,076	II 0,287	0,5421	0,086	II 0,287	0,5421	0,086
505	III 0,165	0,7825	0,128	III 0,168	0,7747	0,129	III 0,165	0,7825	0,128
490	III 0,168	0,7747	0,129	III 0,164	0,7852	0,127	III 0,162	0,7905	0,127
475	III 0,082	1,086	0,092	III 0,085	1,071	0,093	III 0,080	1,097	0,091
460	II 0,130	0,8861	0,052	II 0,124	0,9066	0,051	II 0,124	0,9066	0,051
445	II 0,060	1,222	0,038	II 0,050	1,301	0,036	II 0,045	1,347	0,036



Lit. Salussolia, Torino.

Azione del bromo sopra alcuni derivati non saturi.

Nota 1ª del Dr. GALEAZZO PICCININI.

Sono già note numerose sostanze non sature stabili o indifferenti verso il bromo. In questi corpi gli atomi di carbonio, uniti per doppio legame, sono attaccati generalmente a gruppi elettronegativi energici.

Per sè stesso un doppio legame contribuisce a dare un carattere negativo agli atomi di carbonio che lo comprendono; l'essere poi questi stessi atomi di carbonio uniti a gruppi elettro negativi, ne esalta ancor più il carattere negativo. Tali atomi di carbonio godono in genere di proprietà particolari, e presentano un comportamento anormale.

Il comportamento anormale consiste in fondo in un potere di saturazione più basso verso certi elementi, fatto non strano, che si riscontra assai spesso nelle combinazioni inorganiche.

Il potere di saturazione minore di tali atomi di carbonio verso atomi o radicali negativi fu spiegato dalla maggior parte degli autori, attribuendone la causa ai gruppi elettronegativi uniti ai carbonii etilenici. Entrano in giuoco qui dunque più che altro i rapporti elettrochimici qualitativi fra i gruppi addendi e gli atomi di carbonio uniti per doppio legame. Generalmente si nota che atomi dotati di polarità elettriche uguali, addizionandosi o sostituendosi in composti di questo genere, tendono ad allontanarsi più che è possibile gli uni dagli altri, in modo che il composto, che si può generare, sia, per le condizioni d'equilibrio, il più stabile.

Hinrichsen (1) osservando che tutti gli elementi nelle com-

(1) " Ann. d. Ch. ", 336, pag. 172.

binazioni in cui si mostrano più negativi, mostrano anche la valenza minima, si domanda se non sia il caso di sostituire alla concezione antica dei doppi e tripli legami un concetto più razionale, supponendo che in essi il carbonio funzioni da bi- e trivalente, come funziona in altri composti ben noti.

Si sono trovate però anche sostanze contenenti doppi legami, per le quali la negatività dei gruppi uniti agli atomi di carbonio etilenici non era più sufficiente a spiegare questo mancante potere d'addizione del bromo. E il Biltz (1) a questo proposito nota che mentre il tetrafeniletilene

$$(C_6H_5)_2 - C = C - (C_6H_5)_2$$

non addiziona il bromo si hanno esempi di derivati, come:

$$(C_6H_5)_2 - C = C - Cl_2 \qquad C_6H_5 - CH = CCl_2$$

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ Cl \end{matrix}\!\!>C = CCl_2$$

che, pur contenendo legami etilenici compresi fra atomi di carbonio, le cui affinità disponibili sono saturate da elementi o gruppi fortemente negativi, possono benissimo dare composti d'addizione col bromo.

Il Biltz crede necessaria in questi casi un' ipotesi, che cioè in composti come il tetrafeniletilene venga a mancare intorno agli atomi di carbonio etilenici lo spazio necessario all'addizione di atomi aventi un volume atomico elevato; ma l'ipotesi sembra gratuita. Piuttosto questi fatti dimostrano quanto peso abbiano le influenze costitutive in queste reazioni d'addizione, e dimostrano anche che le teorie finora esposte non sono suscettibili di generalizzazione, essendosi, in studi di tali reazioni, tenuto ben poco conto, in genere, delle influenze perturbatrici del fenomeno, dovute a determinati gruppi uniti agli atomi di carbonio etilenici e mancando uno studio metodico di intiere serie di sostanze a tipo più semplice.

Tuttavia è certo che, se nei casi notati dal Biltz si ha addizione di bromo anche a doppi legami compresi fra atomi di

(1) " Ann. d. Ch. ", 296, pag. 233-234, 263.

carbonio influenzati negativamente dai gruppi vicini, è anche vero che in quasi tutti i composti non saturi, in cui questa addizione manca, gli atomi di carbonio etilenici sono uniti a gruppi o radicali elettro negativi.

Di più, mentre taluni di questi derivati sono indifferenti al bromo, possono addizionare non solo idrogeno, ma anche gruppi a carattere elettro positivo spiccato, come l'etilato di sodio.

Ciò fu notato dal Liebermann (1), il quale anzi, a meglio dimostrare quanto peso abbiano i rapporti elettrochimici dei gruppi uniti ai carbonii etilenici, in queste reazioni d'addizione cita l'esempio dell'acido benzalmalonico e del suo etere dietilico. Il primo

$$C_6H_5 - CH = C\begin{cases} COOH \\ COOH \end{cases}$$

contiene un doppio legame assai resistente all'azione del bromo, come fu già notato dal Claisen (2), nel secondo, venendo a mancare il carattere negativo dei carbossili per l'eterificazione, si ha addizione di bromo normalmente nel doppio legame.

Liebermann estende questa proprietà di non addizionare il bromo in genere agli acidi non saturi della serie degli alchilidenmalonici e degli acidi cianacrilici che contengono i gruppi I e II.

I. $$R - CH = C\begin{cases} COOH \\ COOH \end{cases}$$

II. $$R - CH = C\begin{cases} CN \\ COOH \end{cases}$$

Io avevo già notato in altro lavoro che l'amide metilendiossifenil-α-cianacrilica

$$(CH_2O_2) . C_6H_3 - CH = C\begin{cases} CN \\ CONH_2 \end{cases}$$

dà col bromo un derivato di sostituzione monobromurato. Avendo a mia disposizione amidi analoghe, ottenute nella reazione di Guareschi, dalle aldeidi vanillica e protocatechica, e due eteri cianacrilici sostituiti in β dai residui delle aldeidi veratrica e

(1) " Berichte ", 28, pag. 143.
(2) " Ann. d. Ch. ", 218, pag. 140.

cinnamica, ho esteso lo studio dell'azione del bromo anche a questi composti.

L'esperienza dimostra che queste sostanze aventi i gruppi

$$R - CH = C\begin{cases} CN \\ CONH_2 \end{cases} \quad o \quad R - CH = C\begin{cases} CN \\ CO_2C_2H_5 \end{cases}$$

reagiscono col bromo, ma solo formando derivati di sostituzione. Il bromo entra nel residuo R e il doppio legame rimane inalterato.

L'etere cinnamenil-α-cianacrilico, sebbene contenga due doppii legami addiziona solamente due atomi di bromo; la costituzione di questo bibromo derivato, enunciato già dal Bechert (1), che per il primo l'ha studiato, è stata confermata mediante ricerche dirette ed è rappresentata dalla formula:

$$C_6H_5 - CHBr - CHBr - CH = C\begin{cases} CN \\ CO_2C_2H_5 \end{cases}$$

Thiele (2) in alcune osservazioni su sostanze a doppi legami coniugati, notava che l'acido fenilcimnamenilacrilico

$$C_6H_5 - CH = CH - CH = C\begin{cases} C_6H_5 \\ COOH \end{cases}$$

addiziona 2 atomi di bromo in posizione 1,4, con spostamento di un doppio legame che verrebbe a trovarsi perciò in posizione 2,3

$$C_6H_5 - \underset{\underset{Br}{|}}{CH} - CH = CH - \underset{\underset{Br}{|}}{C}\begin{cases} C_6H_5 \\ COOH \end{cases}$$

Hinrichsen (3) ha osservato, che quando a sostanze, contenenti due doppi legami coniugati, si addizionano due atomi o gruppi atomici uguali, i derivati più stabili e che si formano di

(1) " I. f. Prakt. Ch. ", *50*, pag. 15-18.
(2) " Ann. d. Ch. ", *306*, pag. 201.
(3) " Ann. d. Ch. ", *336*, pag. 187.

preferenza sono quelli in cui i gruppi sono entrati in posizione 1,4; aventi cioè la costituzione

$$R - CHX - CH = CH - CX\begin{matrix}/R'' \\ \backslash R'\end{matrix}$$

Tuttavia lo stesso autore rileva anche che il bromo non s'addiziona mai a un atomo di carbonio in cui sieno già attaccati due gruppi negativi. Egli ha riscontrato che la formula di Thiele per l'etere bibromofenilcinnamenilacrilico è errata; il bromo in questo composto assume la posizione 3-4 corrispondente dunque a quella dell'etere bibromocinnamenil α-cianacrilico (1).

Confrontiamo questo stesso etere cinnamenil-α-cianacrilico colle amidi e cogli eteri da me studiati:

$$R - CH = C\begin{matrix}/CN \\ \backslash CONH_2\end{matrix} \qquad R - CH = C\begin{matrix}/CN \\ \backslash CO_2C_2H_5\end{matrix}$$

$$C_6H_5 - CH = CH - CH = C\begin{matrix}/CN \\ \backslash CO_2C_2H_5\end{matrix}$$

Una parte della molecola, è a comune e gode della stessa proprietà, cioè l'indifferenza verso il bromo ed è quello che resta a destra della linea tratteggiata nella formula dell'etere cinnamenil-α-cianacrilico.

In qualunque caso il bromo si porta sempre lontano dal gruppo cianogeno; altre considerazioni porterebbero a credere che il cianogeno avesse un' influenza quasi di repulsione e d'allontanamento verso gli atomi a carattere negativo.

L'amide metilendiossifenilcianacrilica dà un bromoderivato, che, per ebollizione con soda caustica in corrente di vapore, genera il bromopiperonalio.

L'etere dimetossifenil-α-cianacrilico dà pure un bromoderivato che nelle stesse condizioni genera l'aldeide bromoveratrica.

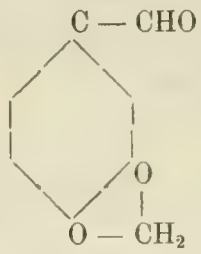
---

(1) Le mie ricerche su questi bromoderivati di composti non saturi datano già dal gennaio 1904; nell'ultimo lavoro di Hinrichsen citato trovo accennata la costituzione dell'etere bibromocinnamenil α-cianacrilico. Io la stabilii indipendentemente dalle ricerche di Hinrichsen e sono contento che le mie conclusioni concordino con quelle di questo autore.

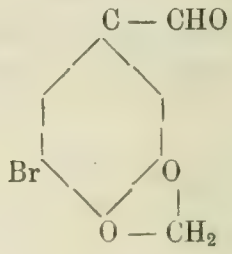
Ora, tanto il bromopiperonalio, quanto l'aldeide bromoveratica così ottenuti sono identici al bromopiperonalio e alla bromoveratraldeide, che si hanno bromurando direttamente le aldeidi.

La posizione che assume il bromo nel nucleo è la stessa. I punti di fusione di queste bromoaldeidi, assai più elevati di quelli delle aldeidi non bromurate, portano a supporre che l'entrata del bromo abbia contribuito a dare alla molecola un grado di simmetria molto più grande.

L'ipotesi quindi che può subito farsi è che il bromo sia entrato in posizione 5, e cioè dal composto I si sia passati al composto II:

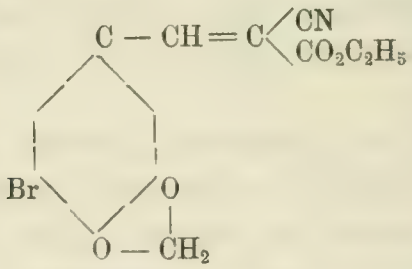


I



II

ma se esaminiamo la formula del composto



si vede che il bromo in essa assume appunto la posizione più lontana rispetto al cianogeno.

Con questo io non voglio venire alla conclusione che il cianogeno eserciti un'azione particolare; tale conclusione sarebbe arrischiata e non sufficientemente provata dai pochi casi da me studiati.

Inoltre non mi nascondo che vi sono molti composti, in cui l'alogeno è unito allo stesso atomo di carbonio, a cui si trova attaccato il gruppo — CN e questo dice già quanto potrebbe essere fallace una tale conclusione.

Di più queste considerazioni ch'io ho portate potrebbero non sembrare esatte, se si prende la questione partendo da un altro punto di vista.

Il fatto, cioè, che questa amide, quanto l'etere bromurato già accennati, contengono il bromo nella stessa posizione, come lo contengono le aldeidi bromurate, ottenute per l'azione del bromo direttamente sul piperonalio e l'aldeide veratrica, potrebbe dimostrare anche che la posizione del bromo nel nucleo è determinata esclusivamente dai gruppi già esistenti in questo, indipendentemente dal carattere o dalla lunghezza della catena laterale.

Inoltre, le esperienze di Riedel (1) dimostrano che l'etere dell'acido p-ossi-α-cianocinnamico e il suo derivato acetilico non addizionano il bromo; le esperienze di Frost (2), di Bistrzycki e Stelling (3) condotte sui cianuri, che si formano per condensazione delle aldeidi aromatiche col cianuro di benzile, provano abbastanza chiaramente che in questa serie di composti gli ossidrili, in posizione *para*, o *meta-para* nel caso di derivati diossifenolici, hanno un' influenza notevole nel determinare l'entrata del bromo nel nucleo benzenico, rimanendo sempre intatto il doppio legame. E non mancano esempi di sostanze della stessa natura aventi un ossidrile in posizione orto- o meta, nelle quali si ha una normale addizione di bromo al doppio legame. Cosicchè, se l'etere più semplice, cioè il fenil-α-cianacrilico preparato da Carrik (4) non addiziona per nessun verso nè bromo, nè idrogeno (e qui non si hanno gruppi sostituenti nel nucleo aromatico, che possano agire come cause perturbatrici) nella maggior parte dei casi la costituzione e la posizione dei sostituenti nel nucleo ha un peso notevole in queste reazioni d'addizione.

Dunque appare chiaro che tutte queste condizioni, cioè la negatività del cianogeno e una certa tendenza a tener lontani i gruppi negativi, la facile bromurazione del nucleo aromatico agiscono in accordo; il composto che si forma, sebbene ancora

(1) " I. f. Prak. Ch. ", 54, pag. 533.
(2) " Ann. d. Ch. ", 250, pag. 157.
(3) " Berichte ", 34, pag. 3081.
(4) " I. f. Prak. Ch. ", 45, pag. 504-505.

non saturo, sarà tanto più stabile poi verso gli agenti negativi, perchè gli atomi di carbonio etilenici avranno acquistato un carattere di negatività maggiore, essendosi esaltato questo carattere in uno dei gruppi uniti ad essi atomi.

Ricordo poi che questi doppi legami così stabili al bromo, sono molto deboli verso gli alcali caustici anche diluiti e l'ebollizione di tali sostanze non sature con soda o potassa caustica già al 2 o 3 % basta a decomporle, per un processo d'idratazione in aldeidi e derivati dell'acido malonico:

$$R.CH:C\begin{cases}CN\\CO_2C_2H_5\end{cases} + H_2O = R.CHO + CH_2\begin{cases}CN\\CO_2C_2H_5\end{cases}$$

Debbo ancora accennare a due cose che risultano da questo breve lavoro.

È noto e si suol portare anzi come prova, che i derivati alogenati della serie aromatica sono decomposti dalle soluzioni acquose o alcooliche di potassa caustica se l'alogeno è nella catena laterale; se invece l'alogeno è nel nucleo, allora esso entra in reazione solo nel caso che esso alogeno sia vicino a un gruppo *nitro*.

Ora, ho notato che il bromopiperonalio e l'aldeide bromoveratrica si trovano nelle stesse condizioni dei nitrobromoderivati, perchè anche queste aldeidi diossigenate per ebollizione con soda caustica acquosa anche diluita (10 %) cedono facilmente il loro bromo.

Se veramente la decomposizione non è proceduta tanto oltre da esser totale nelle mie esperienze, ciò dipende certamente dalle condizioni di tempo e d'esperienza, ch'io non ho studiato più minutamente per ora, non essendo ciò nell'indole di questo lavoro.

È da aspettarsi, e a maggior ragione, che i derivati alogenati aromatici, contenenti due o più ossidrili fenolici liberi, si comporteranno in modo analogo.

Per riguardo ai punti di fusione dei bromoderivati delle amidi studiate, si nota la solita regolarità, che cioè il loro punto di fusione è più elevato dei punti di fusione dei composti corrispondenti non bromurati.

$CH_2O_2—C_6H_3—CH=C\begin{cases}CN\\CONH_2\end{cases}$ f. 212°-213° $CH_2O_2C_6H_2Br—CN=C\begin{cases}CN\\CONH_2\end{cases}$ f. 245°

$\begin{matrix}CH_3O\\HO\end{matrix}\rangle C_6H_3—CH=C\begin{cases}CN\\CONH_2\end{cases}$ f. 210°-210°,5 $\begin{matrix}CH_3O\\HO\end{matrix}\rangle C_6H_2Br—CH=C\begin{cases}CN\\CONH_2\end{cases}$ f. 234°-235°

$(HO)_2C_6H_3—CH=C\begin{cases}CN\\CONH_2\end{cases}$ f. 232° $(HO)_2—C_6H_2—Br—CH=C\begin{cases}CN\\CONH_2\end{cases}$ f. 260°

E si nota anche, che le differenze nei punti di fusione di questi bromoderivati tra loro si mantiene quasi costante.

Viceversa l'etere bromometilendiossifenil-α-cianacrilico e bromo-dimetossifenil-α-cianacrilico hanno un punto di fusione uguale o quasi uguale a quello delle aldeidi bromurate, a cui possono dare origine per decomposizione:

$CH_2O_2-C_6H_2—Br—CH=C\begin{cases}CN\\CO_2C_2H_5\end{cases} \Rightarrow C_6H_2O_2—C_6H_2BrCHO$

f. 131° f. 131°

$(CH_3O)_2—C_6H_2—Br—CH=C\begin{cases}CN\\CO_2C_2H_5\end{cases} \Rightarrow (CH_3O)_2—C_6H_2—Br—CHO$

f. 154° f. 151°

Ciò sembrerebbe dimostrare che la lunghezza o il carattere della catena laterale non avesse influenza sensibile sul punto di fusione di tali sostanze.

Mi riserbo di estendere le ricerche su varie serie di tali derivati non saturi, per potere trarre qualche conclusione definitiva sulle cause che possono rendere così stabili questi doppi legami.

I. — *Azione del bromo sulla amide metilendiossifenil-α-cianacrilica.*

In una nota precedente, a proposito della condensazione del piperonalio con etere cianacetico e ammoniaca concentrata, accennai ad un composto che si formava in piccolissima quantità e i cui caratteri corrispondevano a quelli di un'amide *metilendiossifenil-α-cianacrilica*:

$$CH_2O_2 — C_6H_3 — CH = C(CN)CONH_2.$$

Studiandone il comportamento verso il bromo, osservai che sia per azione dei vapori di bromo, sia per azione del bromo direttamente, si formava un monobromoderivato, al quale assegnai la formula:

$$CH_2O_2 — C_6H_3 — CBr = C(CN)CONH_2,$$

in base al carattere ch'esso presentava di decomporsi per azione degli alcali, anche diluiti, bollenti, formando bromuro alcalino.

Avendo allora piccole quantità di sostanza a disposizione, giacchè nella reazione generale di Guareschi, se ne formano solo piccolissime quantità, non potei proseguire lo studio del bromoderivato.

L'amide suaccennata si prepara facilmente e presto, condensando il piperonalio e la cianacetamide mediante l'acido acetico glaciale, o l'ammoniaca acquosa al 15 %.

Rendimento quasi teorico. La sostanza pura fonde a 212°-213° e non a 209°, come notai in altro lavoro, in cui accennai anche alla difficoltà di separarla completamente dagli altri prodotti. È in cristalli lamellari piccolissimi, splendenti, di color giallo oro. È quasi insolubile in acqua, solubile in acetone a caldo, in acido acetico e molto nell'alcool concentrato a caldo.

All'analisi:

I. gr. 0,1338 di sostanza diedero cc. 15,7 di N a 18° e 749^{mm}:

	trovato	calcolato
N %	13.24	12.99

Si noti che l'amide messa in presenza di un'altra molecola di cianacetamide e ammoniaca al 23 %, reagisce nel senso della reazione Guareschi, formando il sale ammonico della γ-piperonil-ββ'-dicianglutaconimide e l'amide satura:

$$CH_2O_2 - C_6H_3 - CH_2 - CH\begin{cases} CN \\ CONH_2 \end{cases}$$

fondente a 186°. Questo dimostra indirettamente che l'amide non satura è capace d'addizionare due atomi di idrogeno.

Bromoderivato $C_{11}H_7BrN_2O_3$.

Si ottiene lasciando l'amide sotto l'azione dei vapori di bromo per varii giorni; seccando il prodotto greggio all'aria e ricristallizzandolo dall'alcool a 90 %.

Se invece si sospende l'amide in cloroformio, in vaso chiuso, e si aggiunge alla miscela una soluzione di bromo in cloroformio, anche in grande eccesso, la bromurazione non è completa neppure dopo un mese e mezzo di dimora.

Il bromoderivato puro è in fogliette brillanti di color giallo oro, piccole, solubili in alcool concentrato e caldo, poco in acetone, cloroformio, etere; quasi niente in acqua. Fonde a 245°, subendo però già prima una decomposizione.

La potassa e la soda caustica al 10 % bollenti sottraggono del bromo al composto; ciò indurrebbe a credere il bromo sostituito nella catena.

Un'esperienza molto semplice decide la questione.

L'amide metilendiossifenil-α-cianacrilica per ebollizione con alcali in corrente di vapore si sdoppia in piperonalio e derivati dell'acido malonico. Se si sottopone allo stesso trattamento il bromoderivato, si otterrà bromopiperonalio, nel caso che il bromo sia sostituito nel nucleo, mentre si avrà piperonalio, e un bromuro alcalino nel caso che il bromo sia nella catena laterale. Siccome il bromopiperonalio è volatile col vapor d'acqua come il piperonalio, distillando in corrente di vapore si potrà facilmente separare il prodotto che si forma.

Nelle esperienze fatte, adoperando soda caustica al 5 % e in eccesso, dopo $^1/_4$ d'ora d'ebollizione passa nel distillato una sostanza cristallina bianca, che raccolta, seccata e ricristallizzata dall'alcool fonde a 131° costantemente.

Le proprietà e l'analisi di questo composto mostrano trattarsi del bromopiperonalio ottenuto da Fitting e Mielck decomponendo l'acido bromopiperico e da Oelker (1) per bromurazione diretta del piperonalio.

All'analisi il prodotto puro diede:

gr. 0,1987 diedero gr. 0,1630 di AgBr

	trovato	calcolato per $C_8H_5BrO_3$
Br %	34.87	34.93

Oelker dà come punto di fusione 129°. La sostanza analizzata e pura da me ottenuta fonde costantemente a 131° (term. immerso).

Non si ottiene in queste operazioni tutto il bromopiperonalio richiesto dalla teoria. La perdita è dovuta in parte alla solubilità del bromopiperonalio in acqua, in parte alla scomposizione, che subisce il bromopiperonalio per ebollizione cogli alcali. Infatti nel liquido alcalino ottenuto dalla decomposizione di gr. 3,515 di bromoderivato fu trovato, mediante l'analisi, gr. 1,236 di AgBr, e cioè il 54,71 % della sostanza primitiva si decompone mettendo in libertà il bromo. Potendo questo fatto essere spiegato anche in modo diverso, mi sono accertato anche con una prova diretta, che realmente il bromo, che passa nella soluzione alcalina, è dovuto alla decomposizione del bromopiperonalio che prima si forma. Infatti, facendo bollire il bromopiperonalio con potassa o soda caustica (soluzione al 10 % e anche al 5 %) per 3-4 ore, la decomposizione raggiunge il 75 % della sostanza totale.

Tralascio per brevità i dati analitici.

Resta dunque così definitivamente stabilito che il derivato bromurato contiene l'atomo di bromo nel nucleo aromatico e cioè ha la costituzione:

$$CH_2O_2 — C_6H_2—Br—CH = C(CN)CONH_2.$$

Non si ha dunque, per nessuna condizione, l'addizione del bromo al doppio legame.

---

(1) " Berichte ", 24, pag. 2593.

Il Bechert (1) in un suo lavoro sulla condensazione delle aldeidi con etere cianacetico, descrive un etere metilendiossifenil-α-cianacrilico, che per trattamento con bromo in soluzione acetica dà un derivato monobromurato, fondente a 131°, al quale egli attribuisce la formula:

$$CH_2O_2—C_6H_3—CBr = C(CN)CONH_2.$$

In fine al suo lavoro Bechert dice che, se nell'etere α-cianocinnamico $C_6H_5 — CH = C(CN)CO_2C_2H_5$ si sostituisce il fenile con un radicale p-metossifenilico o col radicale del furfurolo o del piperonalio, si ottengono dei composti, coi quali il bromo entra facilmente in reazione. Prima, per rottura del doppio legame, si forma un prodotto d'addizione, che poi, per eliminazione di HBr e nuova formazione del doppio legame dà luogo a composti di sostituzione.

Le esperienze di Frost (2), di Bistrzycki e Stelling (3), e di Riedel (4), di cui ho già accennato innanzi, sembrano dimostrare quasi positivamente che in questi acidi p-ossi-α-cianocinnamici o nitrili o eteri di questi acidi, l'ossidrile in posizione *para-* sia libero che eterificato impedisce in qualunque modo l'addizione del bromo nel doppio legame e ne permette solo talvolta l'entrata nel nucleo.

Cosicchè si può considerare, come molto dubbia l'esistenza di un derivato d'addizione del bromo all'etere p-metossifenil-α-cianacrilico, e all'etere furfur-α-cianacrilico, tanto più in quanto che il Bechert non ha potuto ottenere tali derivati d'addizione; ma ha supposto che si formassero, non potendosi egli spiegare forse la ragione dello stato di saturazione di un doppio legame verso il bromo.

Per me era interessante verificare l'esattezza dell'ipotesi del Bechert riguardo all'azione del bromo sull'etere metilendiossifenil-α-cianacrilico; essendo essa in contradizione colle mie esperienze, condotte sull'amide derivante da questo etere.

---

(1) " I. fur. Prak. Ch. „, 50, pag. 15-18.
(2) " Ann. der Ch. „, 250, pag. 157.
(3) " Berichte „, 34, pag. 3081.
(4) " I. fur. Prak. Ch. „, 54, pag. 533.

Nella preparazione di questo etere ho seguìto il metodo descritto dall'A.; senonchè debbo notare che nella condensazione fra piperonalio, etere cianacetico ed etilato di sodio si forma dapprima una sostanza, che raccolta e seccata non fonde veramente, ma subisce una decomposizione verso 210°. La sostanza così ottenuta, ben cristallizzata, lascia per riscaldamento su lamina di platino, un residuo di carbone e di carbonato di sodio. Probabilmente nella reazione si forma dapprima un prodotto d'addizione con l'etilato di sodio; prodotto, che, per ricristallizzazione dall'alcool a 90 % si decompone dando origine all'etere:

$$CH_2O_2 — C_6H_3 — CH = C(CN)CO_2C_2H_5$$

fondente a 110° e non a 106°, come trova il Bechert.

Bromurando questo etere in soluzione acetica ho ottenuto il bromoderivato fondente a 131°.

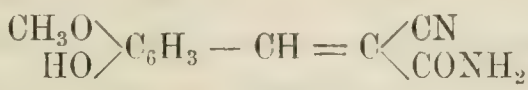
Questo bromoderivato fatto bollire con soda caustica al 10 %, in condizioni analoghe a quelle già esposte per la amide metilendiossifenil-α-cianacrilica, si decompone come questa e dopo pochi minuti passa nel distillato una sostanza bianca cristallina, che, ricristallizzata, presenta tutti i caratteri di solubilità e di reazioni del bromopiperonalio e fonde come questo a 131°.

Cosicchè le conclusioni del Bechert non sono esatte e la formula vera di questo derivato bromurato deve essere corretta così:

$$CH_2O_2 — C_6H_2Br — CH = C(CN)CO_2C_2H_5.$$

Concludendo, se l'etere metilendiossifenil-α-cianacrilico e la sua amide si comportano come saturi verso il bromo, non si può ammettere, che ugual comportamento abbia il doppio legame verso elementi o gruppi meno elettronegativi, perchè l'amide suddetta può, per idrogenazione, trasformarsi in amide satura e l'etere preparato dal Bechert deve assai probabilmente dare un composto d'addizione coll'etilato di sodio. Cosicchè il comportamento verso il bromo è particolare.

II. — *Azione del bromo sull'amide m-metossi-para-ossifenil-α-cianacrilica.*



Questa amide si ottiene assai facilmente condensando la vanillina con etere cianacetico o cianacetamide molecola a molecola in presenza di ammoniaca acquosa al 15 %, e lavando il prodotto greggio con pochissimo acido nitrico diluito per neutralizzare l'eccesso di ammoniaca e togliere così la causa, per la quale il prodotto greggio divien bruno.

Si ricristallizza poi dall'alcool a 90 %.

Ho fatto reagire il bromo su questa amide adoperando quantità di bromo variabili da 2 atomi ad 8 per una molecola di amide e servendomi talvolta della soluzione di bromo in cloroformio, talvolta di quella in acido acetico glaciale.

L'operazione si fa in vasetto chiuso; la reazione dura qualche volta a lungo; in genere per 1 gr. di amide sono necessarî 10-12 giorni, acciocchè la bromurazione si effettui regolarmente.

Si sviluppa sempre in abbondanza acido bromidrico. Il prodotto greggio insieme al cloroformio si lascia all'aria, finchè tutto il cloroformio sia scacciato e il residuo sia secco. Secco è di color giallo vivo. Seguita a sviluppare acido bromidrico per qualche tempo, il che tenderebbe a far credere a un prodotto intermedio instabile di addizione; ciò in realtà non è.

Il bromo derivato ricristallizzato dall'alcool a 90 % si ottiene in fogliette brillanti piccole gialle, che anche nel vuoto non perdono più acido bromidrico. Sono solubili in acido acetico a caldo, in alcool concentrato, poco o niente in acqua. Fondono costantemente a 234°-235°, decomponendosi e dando un liquido schiumeggiante nerastro.

Il prodotto ottenuto è sempre identico anche quando lo si ottenga da soluzioni cloroformiche o acetiche contenenti un forte eccesso di bromo.

All'analisi:

gr. 0,2616 di sostanza secca diedero gr. 0,1633 di AgBr.

	trovato	calcolato per $C_{11}H_9N_2O_3Br$
Br %	26.55	26.93

Corrisponde dunque a un derivato monobromurato. Il derivato greggio per essiccamento all'aria e nel vuoto perde un poco di acido bromidrico. Temendo si potesse formare prima un derivato d'addizione instabile, decomponibile per ricristallizzazione, ho analizzato il prodotto ottenuto in altre condizioni.

Il bromoderivato greggio asciutto all'aria, è sospeso in poca acqua e ben lavato con acqua fredda ripetutamente, indi con alcool a 60 %, poi con alcool a 90 %, sino a che nel filtrato non si avesse più reazione di acido bromidrico. Il bromoderivato così ottenuto, seccato nel vuoto non perde acido bromidrico, fonde a 234-235° decomponendosi.

All'analisi questo campione ha dato:

gr. 0,3756 di sostanza diedero gr. 0,2315 di AgBr.

	trovato	calcolato
Br %	26.49	26.93

Infine ho sottoposto 2 gr. di amide alla bromurazione aggiungendo una quantità di soluzione cloroformica di bromo corrispondente a 8 atomi di bromo per una molecola di amide; ho lasciato a sè 10 giorni. Il prodotto ottenuto secco all'aria fonde a 229-230°. È diviso in tre parti: una di queste si lascia asciugare lungo tempo all'aria. Il punto di fusione non varia.

Un'altra si essicca in acido solforico nel vuoto, si elimina, nel vuoto, un poco di acido bromidrico, ma il bromoderivato finale secco ha lo stesso punto di fusione del prodotto primitivo.

Queste due parti analizzate mostrarono contenere l'una il 25,11, l'altra il 25,04 % di bromo.

La terza porzione fu ricristallizzata dall'alcool a 90 %. Si ottennero le solite lamelle brillanti fondenti con decomposizione a 234-235°. Queste all'analisi diedero:

gr. 0,2134 di sostanza secca diede gr. 0,1315 di AgBr.

	trovato	calcolato
Br %	26.21	26.93

La conclusione di queste varie prove è che il prodotto greggio in genere contiene ancora un poco di amide indecomposta.

In nessun caso si verificò che il prodotto greggio desse una percentuale di bromo maggiore a quella che si calcola per il derivato monobromurato.

Colle soluzioni di soda caustica al 10 % e anche al 5 % bollenti, il bromoderivato si scompone.

Infatti gr. 0,2210 di bromoderivato fatti bollire per 4 ore ½ con cc. 30 di NaOH al 10 % in un matraccio munito di refrigerante a ricadere, diedero un liquido, in cui all'analisi fu trovato gr. 0,0551 di Br. Per una decomposizione totale si sarebbero dovuti ottenere gr. 0,0594 di bromo. La decomposizione raggiunge circa il 92,7 % della sostanza totale.

Gr. 0,5441 di bromoderivato sono fatti bollire per ore 7 con forte eccesso di NaOH al 5 %. Nel liquido si trovarono gr. 0,0999 di bromo, mentre il bromo totale è gr. 0,1465. La decomposizione dunque rappresenta il 68,2 % del composto primitivo.

Per decidere se il bromo sia contenuto nella catena laterale o nel nucleo ho sottoposto il bromo-derivato all'ossidazione, scaldando gr. 1 di sostanza con un po' meno della quantità teorica di acido cromico, sciolto in acido acetico concentrato, a b. m. a 95-100°. L'ossidazione avviene con un poco di difficoltà. Distilstillata la maggior parte dell'acido acetico si tratta il residuo con potassa caustica sino a reazione alcalina. Il liquido filtrato alcalino è estratto con etere. La soluzione acquosa è acidulata con acido solforico diluito, e la sostanza che si precipita è lavata con acqua calda e ricristallizzata dall'acqua. Così ottenuta e secca fonde verso 160°. È una sostanza bromurata che reagisce colla fenilidrazina, dando un idrazone poco solubile in forma di masse cristalline, e riduce la soluzione di nitrato d'argento ammoniacale. I caratteri di solubilità, il punto di fusione e le reazioni fan supporre che si tratti della bromovanillina. Non ho potuto determinare la composizione della sostanza coll'analisi, perchè non mi è riuscito ottenerla in quello stato di purezza, che si richiede.

Tuttavia questa prova insieme alle considerazioni già esposte di analogia con altri derivati aventi costituzione simile, dimostra che il bromoderivato da me ottenuto nelle varie esperienze, contiene l'atomo di bromo sostituito nel nucleo, e la sua formula di costituzione può essere rappresentata così:

$$\begin{matrix} CH_3O \\ HO \end{matrix}\!\!>C_6H_2Br - CH = C\!<\!\begin{matrix} CN \\ CONH_2 \end{matrix}$$

giacchè in caso contrario nell'ossidazione si sarebbe dovuto ottenere vanillina e acido bromidrico. E nel liquido acetico dopo l'ossidazione non fu trovata traccia di acido bromidrico.

Probabilmente la decomposizione del bromoderivato per ebollizione con alcali caustici diluiti è preceduta dalla scissione in aldeide bromovanillica e acido malonico:

$$\begin{matrix} CH_3O \\ HO \end{matrix}\!\!>C_6H_2B_2 - CH = C\!<\!\!\begin{matrix} CN \\ CONH_2 \end{matrix} + 4H_2O =$$

$$= \begin{matrix} CH_3O \\ HO \end{matrix}\!\!>C_6H_2Br - CHO + CH_2\!<\!\!\begin{matrix} COOH \\ COOH \end{matrix} + 2NH_3$$

e la bromovanillina deve subire poi la stessa decomposizione, che si verifica per il bromopiperonalio e per l'aldeide bromoveratrica.

Con ciò resta spiegato il comportamento di questo bromo derivato verso la soda caustica bollente.

III. — *Azione del bromo sull'amide diossifenil-α-cianacrilica.*

$$(HO)_2 - C_6H_3 - CH = C\!<\!\!\begin{matrix} CN \\ CONH_2 \end{matrix}$$

Gr. 0,5 di amide sono trattati con 7 cc. di una soluzione cloroformica di bromo (contenente gr. 5,86 di Br. in 100 cc.). I rapporti sono di 2 at. di bromo per 1 mol. di amide. Si lascia a sè 6 giorni. Aprendo il vasetto si nota sviluppo di acido bromidrico. Il liquido, in cui è sospeso il bromoderivato, è incoloro. Si evapora all'aria il cloroformio e la sostanza greggia, che, anche seccata nel vuoto, non sviluppa più acido bromidrico, è ricristallizzata dall'alcool diluito.

Il bromoderivato puro fonde verso 260°, ma già prima di questa temperatura a 230-235° subisce una decomposizione e annerisce notevolmente.

Lasciato a sè all'aria questo composto, che è giallo, assume un colore ranciato tendente al bruno.

All'analisi diede:

gr. 0,1464 di sostanza diedero gr. 0,0970 di AgBr.

	trovato	calcolato per $C_{10}H_7N_2O_3Br$
Br %	28.14	28.26

Contiene dunque un solo atomo di bromo; anche in questo caso il bromo si sostituisce, il doppio legame rimane inalterato.

La costituzione di questo composto può essere rappresentata con la formula:

$$(HO)_2 - C_6H_2Br - CH = C(CN)CONH_2.$$

Trattato con potassa caustica diluita si scioglie e dà un liquido colorato in un bel rosso carminio, che per ebollizione passa al giallo; nella soluzione dopo l'ebollizione si nota presenza di bromuro alcalino. Tutto ciò è in perfetto accordo con l'analogo comportamento degli altri derivati simili studiati.

IV. — *Azione del bromo sull'etere 3-4-dimetossifenil-α-cianacrilico.*

$$(CH_3O)_2 - C_6H_3 - CH = C\begin{cases} CN \\ CO_2C_2H_5 \end{cases}$$

Gr. 1 di questo etere è trattato in vasetto chiuso con 12 cc. di soluzione cloroformica di bromo corrispondentemente a 2 at. di bromo per 1 mol. di etere. Si lascia a sè 8 giorni. Si sviluppa abbondantemente acido bromidrico; il liquido limpido in questo tempo si decolora; si aggiungono allora altri 12 cc. della stessa soluzione di bromo. Dopo 10 giorni di riposo non si osserva alcuna decolorazione.

Ripetuta l'esperienza aggiungendo subito una quantità di bromo corrispondente a 6 atomi di bromo, si nota lo stesso fenomeno. Risultato e rendimento uguali.

Si evapora il cloroformio all'aria; il prodotto greggio secco all'aria fonde a 148°. Ricristallizzato dall'alcool a 90 °/₀ si presenta in fogliette minute, brillanti, di color giallo chiaro fondenti costantemente a 154°.

È solubile bene in alcool a caldo, in benzene e in acetone a caldo, assai meno a freddo. Quasi insolubile in etere e acqua. Si scioglie all'ebollizione nelle soluzioni alcaline.

All'analisi:

gr. 0,2283 di sostanza diedero gr. 0,1281 di AgBr.

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{12}NO_4Br$
Br °/₀	23.87	23.53

Bollendo questo bromoderivato con soda o potassa caustica anche diluita, il vapor d'acqua trasporta una sostanza che distilla e si depone cristallina sulle pareti fredde del recipiente.

Si ha qui una decomposizione, o, per meglio dire, un'idratazione analoga a quella osservata per l'amide metilendiossifenil-cianacrilica.

Potendo questo carattere decidere se il bromo è contenuto realmente nel nucleo o nella catena laterale, ho fatto un'esperienza in condizioni uguali a quelle che ho già riferite a proposito della amide metilendiossifenil-cianacrilica.

Nell'ebollizione con soda caustica al 10 %, solo il 10 % della sostanza primitiva resta decomposta eliminando bromo; la maggior parte si scinde al punto del doppio legame formandosi aldeide bromoveratrica, volatile col vapor d'acqua, e acido malonico:

$$(CH_3O)_2C_6H_2Br—CH = C(CN)CO_2C_2H_5 + 4H_2O =$$
$$= (CH_3O)_2C_6H_3Br — CHO + C_3H_4O_4 + NH_3 + C_2H_5OH$$

Si ottiene perciò nel distillato una sostanza bianca cristallina pochissimo solubile in acqua a freddo. Dall'acqua bollente cristallizza in aghi sottilissimi incolori lunghi e bellissimi.

Secca fonde a 151° costantemente.

A 16° 1000 p. di acqua sciolgono solo gr. 0,045 di sostanza.

Reagisce colla fenilidrazina dando un fenilidrazone di color giallo, che si depone prima oleoso poi in cristalli microscopici.

Riduce il nitrato d'argento ammoniacale.

Col bisolfito di sodio apparentemente non reagisce; probabilmente si forma un derivato bisolfito solubile.

Il modo di formazione e queste reazioni dimostrano il carattere aldeidico della sostanza.

All'analisi:

gr. 0,2006 diedero gr. 0,1536 di AgBr

trovato Br % 32.58.

Per l'aldeide bromoveratrica $(CH_3O)_2 — C_6H_2Br — CHO$ si calcola:

Br % 32.65.

Aldeide bromoveratrica. — Non essendo nota questa aldeide bromurata, per caratterizzarla più sicuramente, l'ho preparata anche per altra via, cioè bromurando direttamente l'aldeide veratrica.

Gr. 1,75 di aldeide fondente a 42-43° sono trattati con bromo in soluzione cloroformica in quantità corrispondente esattamente a 2 atomi di bromo.

Dalla soluzione limpida rossa si depositano a poco a poco cristallini a rosetta assai belli. Dopo 12 giorni d'azione, il cloroformio è quasi incoloro. Riaprendo il vasetto si notano fumi abbondanti di acido bromidrico. Si evapora il cloroformio all'aria e il residuo secco è ricristallizzato dall'alcool a 70 %.

Si ottiene infine una sostanza avente aspetto identico al composto già descritto e fondente come questo costantemente a 150-151°.

All'analisi la sostanza secca diede:

gr. 0,2377 diedero gr. 0,1823 di AgBr.

	trovato	calc. per $(CH_3O)_2-C_6H_2Br-CHO$
Br %	32.63	32.65

Det. del peso molecolare. Apparecchio Raoult. Solv. Benzene. Sostanze gr. 0,1556. Benzene gr. 10,86. $\Delta = 0°,295$.

Pm trovato 242.8 Pm calcolato = 245

Non v'è dubbio dunque che questa sostanza non sia realmente aldeide bromoveratrica; ciò dimostra indirettamente che l'etere *bromo 3.4 dimetossifenil-α-cianacrilico* contiene il bromo sostituito nel nucleo, potendo dare per decomposizione l'aldeide bromoveratrica.

La sua costituzione sarà dunque:

$$(CH_3O)_2 - C_6H_2Br - CH = C(CN)COOC_2H_5.$$

Ho accennato che, nella decomposizione di questo bromoderivato con soda caustica in corrente di vapor d'acqua, una parte dell'etere si decompone più profondamente e nel liquido alcalino si trova all'incirca il 10 % del bromo totale esistente nel composto. Questo fatto è dovuto alla decomposizione che

subisce l'aldeide bromoveratrica in presenza di soda anche diluita per lunga ebollizione. Infatti, facendo bollire per 6 ore gr. 0,2377 di aldeide bromoveratrica con forte eccesso di NaOH al 10 %, si trova nel liquido alcalino gr. 0,0425 di bromo, ciò che rappresenta il 54,9 % del bromo totale contenuto nella sostanza.

E bisogna aggiungere, che la decomposizione, effettuata in un matraccio munito di refrigerante a ricadere, non può essere totale, perchè una parte del composto, che si volatilizza insieme al vapor d'acqua, resta condensato nel refrigerante. Operando in tubi chiusi si deve ottenere una decomposizione totale.

Si deve concludere da questo che, se il bromo entra facilmente nel nucleo, vi si trova però in una condizione di poca stabilità, bastando agenti relativamente deboli per staccarnelo.

V. — *Azione del bromo sull' etere cinnamenil-α-cianacrilico.*

$$C_6H_5 - CH = CH - CH = C\begin{cases} CN \\ CO_2C_2H_5 \end{cases}$$

Questo etere già ottenuto da Fiquet (1) e dal Bechert (2) si prepara facilmente e rapidamente condensando l'aldeide cinnamica (1 mol.) con l'etere cianacetico (1 mol.) mediante l'ammoniaca acquosa al 10 %. Si agita, il liquido si emulsiona, si fa giallo, poi si rapprende in una massa solida gialla, che raccolta alla pompa e lavata bene con acqua si ricristallizza dall'alcool.

Adoperando, invece dell' ammoniaca al 10 %, l'ammoniaca concentrata al 23 %, la reazione va in altro senso come ho accennato in un altro lavoro.

Il bromoderivato è preparato seguendo quanto consiglia il Bechert. Ricristallizzato dall' alcool è in cristalli riuniti a rosetta splendenti, che fondono a 100° e non a 95° come dà il Bechert.

(1) " Ann. de Chim. et Phys. ", serie 6ª, vol. 29, pag. 495.
(2) Loco citato.

All'analisi:

gr. 0,3474 diedero gr. 0,3361 di AgBr.

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{13}NO_2Br_2$
Br %	41.18	41.34

È un composto, che si decompone assai facilmente con la soda caustica bollente al 5 %. Gr. 0,4384 di sostanza fatti bollire con 20 cc. NaOH al 5 % per 6 ore diedero gr. 0,4325 di AgBr:

trovato Br % 41.86

e per una decomposizione totale si calcola:

Br % 41.34.

Anche l'ebollizione con acqua, per quanto il composto vi sia poco solubile, dà luogo a formazione di acido bromidrico.

Ho determinato il peso molecolare di questo composto (per essere sicuro non trattarsi di un derivato polimero) servendomi del metodo crioscopico e del benzene come solvente.

	p	P	c	Δ	Pm	Pm calcolato
I	0,1482	19.606	0,755	0°,10	378	
II	0,3625	„	1.84	0°,245	377,4	386
III	0,7230	„	3.68	0°,48	384	

È esclusa dunque la possibilità di forme polimere.

Per fissare definitivamente, in quale dei due doppi legami il bromo si sia fissato, ho sottoposto questo bromoderivato all'ossidazione con acido cromico in soluzione acetica. L'ossidazione si effettua facilmente. Aggiungo acido cromico in difetto, il liquido rimane di un bel colore verde smeraldo. Nel liquido non si nota presenza di HBr. Alcalinizzato, viene estratto con etere per separare un poco di sostanza inalterata. Il liquido alcalino, acidulato con acido solforico, precipita lentamente una piccola quantità di una sostanza cristallina, in fogliette brillanti, che ricristallizzata fonde a 199°.

I caratteri di solubilità, il punto di fusione, il suo modo di formazione, insieme con l'analisi, che mostra trattarsi di un bromoderivato a carattere acido, si accordano con le proprietà dell'acido 1-2bibromo-2fenilpropionico, che fonde tra 195-201°:

$$C_6H_5 - CHBr - CHBr = COOH.$$

Questo dimostra che l'etere bibromocinnamenil-α-cianacrilico ha la costituzione:

$$C_6H_5 - CHBr - CHBr - CH = C\begin{cases} CN \\ CO_2C_2H_5 \end{cases}$$

già ammessa dal Bechert per altre considerazioni; giacchè, diversamente, l'ossidazione avrebbe dovuto portare ad acido fenilbromoacetico, se due atomi di bromo fossero stati in posizione 1-4 e ad acido benzoico se l'addizione fosse avvenuta nella posizione 2-3.

Dunque si nota anche qui un'azione che tende ad allontanare gli atomi di bromo dai gruppi negativi.

Notevole è che questo etere cinnamenil-α-cianacrilico addiziona due soli atomi di bromo, in conformità al comportamento di molti altri derivati cinnamenilici. Un doppio legame resta quindi inalterato.

Torino, Dicembre 1904.

Laboratorio di Chim. Farm. e Toss. della R. Università.

Relazione intorno alla Memoria presentata dal Dr. Giuseppe Gola, dal titolo: *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile.*

L'Autore si occupa della interessante proprietà che presentano alcuni semi, i quali, collocati nell'acqua e tenutivi per un tempo lunghissimo, determinato per dati sperimentali sino a 3 anni, e per dati di osservazione sino a 3 secoli, rimangono inalterati senza rigonfiarsi e tanto meno germinare.

Sopra questa proprietà le cognizioni che si avevano erano molto scarse. L'Autore si è occupato di studiare:

1° La frequenza di questo fenomeno in alcune famiglie;

2° In quali condizioni si stabilisca la permeabilità nei semi originariamente impermeabili;

3° L'attività respiratoria dei semi impermeabili;

4° La struttura anatomica dei tegumenti seminali, onde spiegare il meccanismo della permeabilità e della impermeabilità.

Questi quattro argomenti, formano oggetto di quattro distinti capitoli.

Nel primo di essi l'A. ha studiato i semi delle *Leguminose*, *Cistacee* e *Malvacee*. Eseguendo esperienze sopra circa 300 specie, l'A. ha potuto così fornire dei dati, quali ancora non si avevano nella scienza sulla estensione di questa proprietà dei semi.

Le numerose esperienze eseguite sopra semi appartenenti alla medesima specie, alla medesima pianta, al medesimo frutto, studiati in condizioni diverse di maturità, hanno permesso all'A. di conchiudere che la proprietà della impermeabilità è strettamente legata al grado di maturazione del seme; cioè si verifica nel breve periodo che corre tra l'inizio della maturità germinativa dei semi e la perfetta maturità dei frutti.

Allorchè in tale periodo i semi, per cause diverse, vengono ad essere staccati dalla pianta madre, essi rimangono impermeabili; ed in natura si verificano queste condizioni: 1° in con-

seguenza di rapido essiccamento del terreno al momento della maturazione dei frutti (regioni delle steppe; regioni mediterranee); 2° per diminuzione di illuminazione, del riscaldamento, e della ventilazione durante il medesimo periodo (sostituzione della foresta alla boscaglia).

La impermeabilità che sottrae gran parte di semi alla germinazione, sarebbe senza dubbio di grave danno alla diffusione della specie, se in qualche modo non venissero a cessare in natura le condizioni che trattengono tali semi in uno stato di inerzia.

L'A. ha sottoposto circa 300 specie di semi a variazioni di temperatura e di umidità, in condizioni analoghe a quelle che si verificano in natura; ed ha potuto mettere in evidenza, che i semi impermeabili, rimasti a lungo in un ambiente asciutto, perdono facilmente la loro impermeabilità allorchè vengono di nuovo posti in presenza di acqua.

L'elevazione della temperatura ha poca influenza su questo fatto (almeno quando si accompagna all'essiccamento); mentre un po' maggiore è la influenza del gelo.

L'A. raffronta queste condizioni di esperimento, con quelle che si verificano nelle regioni aride sopra menzionate e nelle foreste.

È ovvio, che se le variazioni di umidità e di temperatura sono annuali nelle regioni steppiche e mediterranee, queste nel folto delle foreste divengono sensibili solo di rado, ad intervalli lunghissimi, compresi tra la comparsa e la distruzione della foresta.

Sono appunto i semi che stanno inalterati per lungo tempo nel terreno, che hanno indotto l'A. a studiare i rapporti tra la longevità e l'attività respiratoria.

Recenti ricerche hanno messo in evidenza che nello studio di questa attività va tenuto conto della ricchezza in acqua dei semi.

In quei semi quindi nei quali pur col variare dell'umidità ambiente, non varia il contenuto in acqua, era naturale prevedere come dovesse essere lenta e costante l'attività respiratoria, a differenza di quanto si sarebbe potuto osservare nei semi permeabili, nei quali a periodi di secchezza e di debole attività respiratoria sarebbero succeduti periodi di grande umidità legati ad intensi scambi gazosi.

Questo l'A. è riescito a dimostrare pienamente valendosi di semi di Leguminose impermeabili, e controllando i risultati su semi permeabili di differentissime famiglie.

Da queste determinazioni e da altre sulla igroscopicità dei semi stessi, l'A. ha potuto dedurre una spiegazione fisiologica di quanto ha osservato il De Candolle sulla longevità dei semi delle differenti famiglie.

Nell'ultimo capitolo, occupandosi della struttura anatomica che permette l'impermeabilità e più tardi la permeabilità dei semi, l'A. indica quali sono i punti nei quali ha luogo il mutamento di condizioni che permettono l'ingresso all'acqua, e come avviene che le cellule malpighiane possano vincere il mutuo contrasto che le rende inaccessibili all'acqua.

In tal modo l'A. in questa Memoria ha potuto dimostrare come l'impermeabilità del tegumento, la debole attività respiratoria che rende più a lungo possibile lo stato di vita latente; la capacità nei semi di imbibirsi in condizioni climatiche ed igrometriche ben determinate, costituiscono un gruppo di disposizioni altamente utili alle piante che ne sono fornite, sia per adattabilità e condizioni climatiche speciali, sia per la conservazione della specie attraverso a lunghissime sfavorevoli condizioni d'ambiente.

Il lavoro è ben fatto, condotto con criterii critici eccellenti; deduce da esperienze esatte i risultati che risolvono una questione assai importante per la fisiologia e la biologia dei semi, intorno alla quale pochissimo era ancora noto.

Adempiamo adunque ben volontieri all'onorevole incarico affidatoci dall'Accademia, proponendo la pubblicazione delle ricerche del Dottor Giuseppe Gola nei volumi delle Memorie accademiche.

Torino, 1° Marzo 1905.

L. Camerano,
O. Mattirolo, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 12 Marzo 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Pezzi, Carle, Graf, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Vice Presidente Boselli.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 28 febbraio 1905.

Il Direttore della Classe Socio Ferrero presenta al Presidente, in nome proprio e della Classe intera, vivissime congratulazioni per la sua recente nomina a Senatore del Regno. La Classe si associa plaudendo. Il Presidente ringrazia con parole affettuose. Il Vice Presidente Boselli ha inviato le sue congratulazioni per lettera.

Il Socio Savio fa omaggio di un volumetto del prof. Vincenzo Strazzulla: *I Persiani d'Eschilo ed il Nomo di Timoteo volgarizzato in prosa con introduzione storica.* Messina, 1904.

In adunanza privata della Classe si raccolgono le proposte per la nomina di due Soci nazionali residenti e di uno nazionale non residente.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Marzo 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Jadanza, Guidi, Morera, Foà, Segre, Grassi, Guareschi, Parona e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente. — Scusano la loro assenza i Soci Naccari e Salvadori.

Il Presidente comunica le lettere di ringraziamento per le congratulazioni inviate dalla Classe in occasione della nomina a Senatore dei Soci Righi, Volterra e Fergola.

Comunica pure le lettere dei proff. Dr. V. Goldschmidt, Weismann e Ostwald i quali ringraziano per la nomina a Soci corrispondenti.

Il Presidente presenta un numero del giornale *L'Ora* di Palermo, nel quale si rende conto delle onoranze tributate al compianto professore Gemmellaro, alle quali l'Accademia era rappresentata dal Rettore dell'Università di Palermo.

Il Presidente presenta l'opera seguente del Dr. Giovanni Carbonelli, che l'autore manda in dono all'Accademia: *Atlas d'Anatomie obstétricale*, Paris, J. B. Ballière.

Il Socio Jadanza presenta in dono all'Accademia, a nome dell'autore prof. Paolo Pizzetti, l'opera seguente: *Trattato di Geodesia teoretica*, Bologna, Zanichelli.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Dr. Giacomo Issoglio, *Ossipiridine isomere da β dichetoni,* dal Socio Guareschi;

2° Ing. Michele Greco, *Sul calcolo della sezione e delle armature di una trave in cemento armato sottoposta a flessione retta semplice,* dal Socio Guidi;

3° Il Socio Grassi, a nome anche del Socio Naccari, legge la relazione intorno alla nota del sig. Niccolò Pizzarello tenente del Genio militare, stata presentata alla Presidenza nella seduta del 5 febbraio 1905 per l'inserzione negli *Atti.* La relazione conclude favorevolmente.

Il Socio Parona, a nome del Socio Mattirolo, presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie*, il lavoro seguente del prof. G. Martel, *Contribuzione all'Anatomia del fiore delle Ombellifere.* Il Presidente incarica i Soci Mattirolo e Parona di riferire intorno a detta Memoria in una prossima adunanza.

Il Socio Guareschi presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie* il suo lavoro intitolato: *Sintesi di composti piridinici dagli eteri chetonici coll'etere cianacetico in presenza dell'ammoniaca e delle amine;* Memoria II.

La Classe con votazione segreta all'unanimità accoglie la Memoria del Socio Guareschi per la stampa nel volume delle *Memorie.*

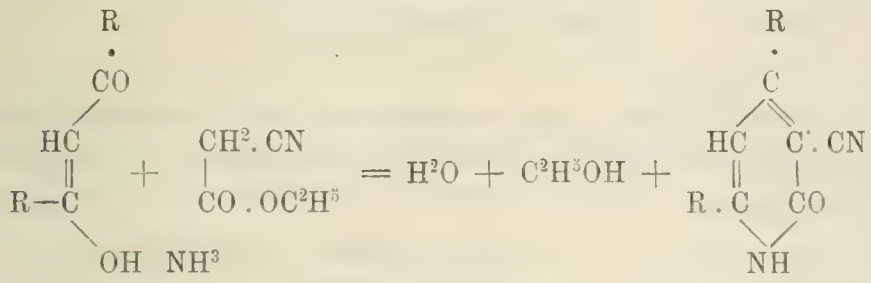
LETTURE

Ossipiridine isomere dai β dichetoni.

Nota del Dott. GIOVANNI ISSOGLIO.

I β dichetoni in presenza dell'ammoniaca si condensano coll'etere cianacetico in modo da formare dei *cianpiridoni* (1).

Una molecola del dichetone entra in reazione con una molecola di etere; rappresentando il β dichetone nella sua forma enolica, la reazione generale si può esprimere nel modo seguente:



Osservando questa reazione, si vede facilmente, come uno dei gruppi carbossilici CO< reagisca e si condensi coll'etere cianacetico per eliminazione di acqua; come l'altro invece porga il suo ossigeno all'ammoniaca per dare luogo ad un anello piridico contenente i radicali, che prima facevano parte del dichetone.

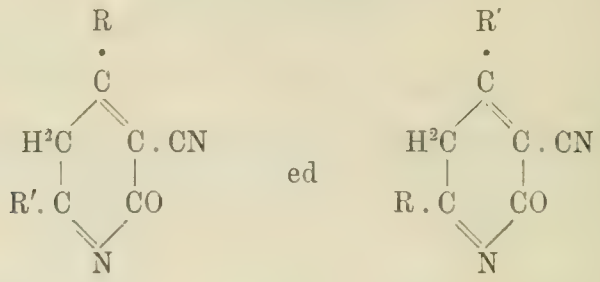
Ora i radicali condensati possono essere o tutti identici, oppure diversi.

Se sono identici, non si ottiene, che un unico composto a caratteri ben definiti.

Se invece sono diversi, dalla reazione soprascritta si pos-

(1) I. Guareschi, *Ossipiridine dai β dichetoni*, " Atti della R. Acc. delle Scienze ", T. 34.

sono avere due isomeri dipendenti dalla diversa posizione, che possono prendere i gruppi carbonilici CO< nella condensazione:



Distillando questi composti colla polvere di zinco ho potuto stabilire la costituzione degli isomeri, che si formano condensando il benzoilacetone e l'acetilmetilessilchetone coll'etere cianacetico.

I. — Benzoilacetone.

$C^6H^5.CO.CH^2.CO.CH^3$.

Il benzoilacetone che ho adoperato proviene dalla nota fabbrica Kahlbaum, fonde a 60°-61° ed ha tutti i caratteri di un prodotto puro.

Mescolai gr. 10 di benzoilacetone (1 mol.) con gr. 6,85 di etere etilcianacetico (1 mol.) ed aggiunsi in seguito 16 cm^3 di ammoniaca al 20 % (3 mol.).

Appena avvenuta la miscela, si sviluppa calore ed istantaneamente si forma una massa bianca solida; agitando fortemente per aumentare il contatto intimo delle sostanze reagenti, osservai che la massa ridiventava alquanto fluida, per risolidificarsi nuovamente in un tutto duro e compatto, che lasciai a sè per 24 ore.

La rapidità con cui avviene la reazione impedisce all'ammoniaca di poter compenetrare bene tutta la sostanza reagente e cagiona un minor rendimento nella quantità di prodotto.

Lo si accresce quando si ecceda un poco nella quantità di ammoniaca; la quale, anzichè agire ancora attivamente nella reazione, favorisce l'intimo contatto del benzoilacetone coll'etere cianacetico.

Lavai con molta acqua il prodotto ottenuto, lo raccolsi alla

pompa e lo asciugai fra carta, poi sull'acido solforico. La sostanza secca pesa gr. 11,2.

Le acque madri, per eliminazione di ammoniaca, depositano altra sostanza cristallizzata, che aggiunsi alla prima. Quando vengono evaporate, dànno, come residuo, del benzoilacetone.

Il prodotto secco e polverizzato estrassi più volte con etere, fino a che l'etere evaporato non lasciò più alcun residuo.

L'estratto etereo era costituito da benzoilacetone e da una sostanza bianca che si presentava in laminette bianche e lucenti.

Dopo varie cristallizzazioni dall'alcool diluito, ottenni dei bei cristalli trasparenti, che fondevano a 143°-144°.

Gr. 0,1892 di sostanza diedero gr. 0,017 di N.

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{11}NO$
N %	8,93	8,70

Dai caratteri fisici e dall'analisi risulta che questi sono i cristalli monoclini (1) della *benzoilacetonamina* o *benzoilacetonimide*, che si forma per azione dell'ammoniaca sul benzoilacetone.

Rimangono indisciolti dall'etere gr. 10,2 di una polvere bianca, che si riscontra essere una miscela di due sostanze isomere, cioè della β*cian*-γ*fenil*-α'*metil*-α*ossipiridina* e della β*cian*-γ*metil*-α'*fenil*-α*ossipiridina*.

A. β CIAN-γ FENIL-α' METIL-α OSSIPIRIDINA.

Questi due isomeri non sono ugualmente solubili nei solventi ordinarii, perciò posso separarli l'uno dall'altro.

Il prodotto sopra accennato trattai con molta acqua bollente, per raffreddamento si separò una sostanza bianca in aghi finissimi, inquinata da minute lamelle pesanti. Rimaneva indisciolta una sostanza difficilmente solubile nell'acqua, il cui punto di fusione era superiore a quello della sostanza cristallizzata dall'acqua bollente.

In questo modo per ripetute cristallizzazioni ho potuto se-

(1) Muthmann, B. 20-2180.

parare i due isomeri. Però osserverò, che l'acqua bollente conviene poco per la loro separazione, perchè la solubilità dei due isomeri è debolissima in questo solvente.

Più presto si fa la separazione esaurendo la miscela con alcool concentrato (al 90 od al 95 %) e bollente.

L'alcool estrae la β *cian*-γ*fenil*-α'*metilossipiridina* e lascia indietro insolubile la massima parte della β *cian*-γ *metil*-α'*fenil-ossipiridina.*

Ho ripetuto parecchie volte queste estrazioni e per raffreddamento dell'alcool si osservavano dei fiocchi bianchi depositarsi sulle pareti del cristallizzatore.

Quando non apparivano più questi aghi leggeri era segno evidente, che tutta la sostanza solubile era stata estratta e che il residuo non ne conteneva più traccia.

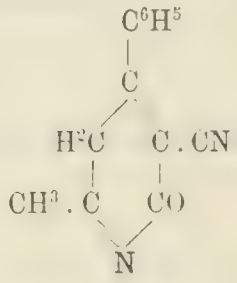
I fiocchi bianchi, deposti, raccolsi alla polpa e cristallizzai più volte dall'alcool concentrato e bollente, fino a che il suo punto di fusione rimanesse costante a 263°-264°. Si presenta in bellissimi aghi anidri, molto leggeri, bianchi.

I. Gr. 0,0900 di sostanza diedero gr. 0,2468 di CO^2 e gr. 0,0402 di acqua.

II. Gr. 0,1100 diedero a 724^{mm}, 1 ed a 17° cm^3 12,9 di azoto:

	trovato	
	I	II
C =	74,76	—
H =	4,95	—
N =	—	13,18

L'analisi elementare, il modo di formazione ed il prodotto, che si ottiene distillando questo composto colla polvere di zinco, mi dicono, che questa sostanza è la *diidro*-α'*metil*-γ*fenil*-β*cian*-α*ossipiridina*:



Per la quale si calcolano i seguenti numeri:

C = 74,28 %
H = 4,76 „
N = 13,33 „

La *diidro-α′metil-γfenil-βcian-αossipiridina* è quasi insolubile in acqua, in alcool ed etere a freddo, poco solubile in acetone, anche a caldo, discretamente solubile in alcool concentrato e bollente.

La solubilità in acqua bollente è molto piccola: cm^3 25 di soluzione satura lasciano gr. 0,0174 di residuo. Cioè un grammo di sostanza si scioglie in 1440 parti di acqua bollente.

Per determinare la solubilità di questa sostanza nell'alcool bollente al 90 % ho adoperato l'apparecchio Pawlewski (1).

Solvente: gr. 6,4872 residuo a 100° gr. 0,1462

1 gr. di sostanza si scioglie in 44,3 gr. di alcool bollente al 90 %.

Non ho potuto determinare il peso molecolare di questa sostanza, come sarebbe stato mio desiderio, per la sua debole solubilità in tutti i solventi.

Noto a questo punto che l'acetone, benchè sciolga poco questa sostanza, può tuttavia servire per separarla dal suo isomero, che è pochissimo solubile in acetone.

Più tardi dirò, come si comporta la *diidro-α′metil-γfenil-cianossipiridina* coi varii reattivi.

B. β CIAN-γ METIL-α′ FENIL-α OSSIPIRIDINA.

Ho accennato, come esaurendo con alcool concentrato e bollente il prodotto della reazione fra il benzoilacetone e l'etere cianacetico si ottenesse, come residuo, una sostanza, che fonde a temperatura piuttosto elevata e che costituisce il 75 % del rendimento totale.

Questa sostanza ho cristallizzato più volte dall'alcool concentratissimo e si presenta in lamelle lucenti, madreperlacee, bianche, con una leggera fluorescenza azzurra.

Purissima fonde a 310°.

---

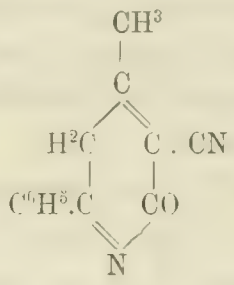
(1) " Ber. „, 32. 1040.

I. Gr. 0,1583 di sostanza diedero gr. 0,4330 di CO^2 e gr. 0,0676 di acqua.

II. Gr. 0,1240 di sostanza diedero cm^3 14,2 di azoto a $730^{mm},8$ ed a 15°.

	trovato	
	I	II
C =	74,59	—
H =	4,74	—
N =	—	13,05

Studiando la *metilfenilpiridina*, che si ottiene distillando questa sostanza colla polvere di zinco, ed appoggiandomi sulla proprietà chetonica dei gruppi carbonilici del benzoilacetone, ho potuto concludere che il composto che ho analizzato è la *diidro-γmetil-α′fenil-β cian-α ossipiridina.*



per la quale si calcola:

C = 74,28
H = 4,76
N = 13,33

Questa sostanza è quasi insolubile nell'acqua, nell'alcool, nell'etere, nell'acetone e nella benzina a freddo.

Si scioglie poco a caldo nell'alcool concentrato e pochissimo nell'acqua bollente.

25 cm^3 di acqua bollente sciolgono 0,0077 di sostanza; 1 gr. si scioglie in 3246 cm^3 di acqua bollente.

Coll'apparecchio di Pawlewski ho determinato la solubilità in alcool bollente al 90 %.

Solvente gr. 9,8408 — Residuo a 100° gr. 0,0344

1 p. si scioglie in 285 p. di alcool bollente, al 90 %.

Tanto la γ*fenil*-α′*metil*-β*cian*-α*ossipiridina*, quanto la γ*metil*-α′*fenil*-β*cian*-α*ossipiridina* sono solubili negli idrati alcalini diluiti senza sviluppo di ammoniaca.

Acidulando la soluzione alcalina con un acido anche debole, riprecipitano le ossipiridine.

Trattate con permanganato potassico riducono profondamente il reattivo e sviluppano acido cianidrico. Scaldate con polvere di zinco svolgono delle basi alcaline, che hanno odore di basi piridiniche.

La *diidro*-γ*metil*-α′*fenilcianossipiridina* dà per distillazione con polvere di zinco in corrente di idrogeno la γ*metil*-α′*fenilpiridina*.

Di questa tratterò in una prossima nota.

II. — Acetilmetilessilchetone.

$CH^3 . CO . CH^2 . CO . C^6H^{13}$.

Per consiglio del prof. Guareschi ho ripetuto la condensazione dell'acetilmetilessilchetone coll'etere cianacetico per tentare la separazione dei due isomeri, che si formano e che si rendono palesi, sia per l'esame microscopico, sia per l'incostanza del punto di fusione del prodotto che ne deriva (1).

Mescolai cm^3 9,9 di acetilmetilessilchetone con 6 cm^3 di etere etilcianacetico ed aggiunsi alla miscela 13 cm^3 di ammoniaca al 20 %. Dopo aver agitato alcune ore con una turbina Rabe, si depose la massa cristallina lievemente gialla, che conteneva interposto una parte del chetone, non entrato in reazione. Ho spremuto fra carta questa massa cristallina per purificarla, ed il prodotto essiccato pesava gr. 10,4. Lo polverizzai finamente e lo mescolai con 20 volte il suo peso di alcool al 60 %, mantenendo la miscela per circa un'ora alla temperatura di 50°.

Ho filtrato poi a caldo, conservando il filtro alla stessa temperatura. In questo modo ho potuto ottenere due sostanze distinte; l'una poco solubile, che rimase sul filtro, ed era in minore quantità, l'altra solubile in queste condizioni, che si depose cristallizzata per raffreddamento.

---

(1) Guareschi, luogo citato.

Ripetendo parecchie volte questa cristallizzazione sulla sostanza solubile, mantenendomi sempre alla stessa temperatura, sono riuscito a separare le due sostanze isomere, cioè la α′ *metil*-γ *essil*-β *cian*-α *ossipiridina* e la α′ *essil*-γ *metil*-β *cian*-α *ossipiridina*.

La separazione di questi due isomeri è tutt'altro che facile, e bisogna attenersi scrupolosamente alle citate condizioni di temperatura e di concentrazione dell'alcool per avere dei buoni risultati.

Infatti, se si aumenta la temperatura, cresce anche la solubilità dei due isomeri, per cui è impossibile separarli l'uno dall'altro.

Di più se la concentrazione dell'alcool è maggiore di quella da me adoperata, diventa anche più grande la solubilità dei due isomeri.

Più difficile ancora è la purificazione delle sostanze, perchè occorrono più cristallizzazioni prima di ottenere dei composti veramente puri. Bisogna poi valersi di molti caratteri per poter essere sicuri della loro purezza.

Non basta il punto di fusione, poichè una traccia di uno degli isomeri può dare per l'altro dei dati erronei e molto lontani dal vero.

Più esatto è l'esame microscopico, perchè può svelare i due isomeri aventi forma cristallina del tutto diversa. Macroscopicamente, chi ha conoscenza dei due corpi, può subito distinguere se sono puri o mescolati.

Io credo che l'acetone, convenientemente diluito con acqua, possa servire anche bene a separare i due isomeri.

A. α′ METIL-γ ESSIL-β CIAN-α OSSIPIRIDINA.

Per la cristallizzazione frazionata del prodotto ottenuto dalla reazione fra l'acetilmetilessilchetone e l'etere cianacetico, ho ottenuto questo bel composto, che si presenta in larghe lamine bianche, splendenti, untuose al tatto, che fondono a 108° in un liquido limpido.

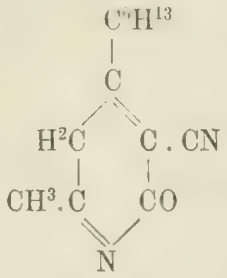
Esaminato al microscopio, presenta delle lamine molto larghe, che devono essere esenti da sostanza cristallizzata in aghi.

I. 0,1340 di sostanza diedero gr. 0,3505 di CO^2 e gr. 0,0983 di acqua.

II. Gr. 0,1244 diedero cm^3 14,5 di N a $728,8^{mm}$ ed a 15°.

	trovato	
	I	II
C =	71,31	—
H =	8,01	—
N =	—	13,24

La formula di struttura di questo composto la deduco, sia dallo studio della metilossipiridina, che ho ottenuto distillando questa sostanza con polvere di zinco, sia dalle analogie, che passano fra il modo di formazione di questa sostanza e quello della α′metil-γfenilcianossipiridina. Questa sostanza è la *α′metil-γessil-βcian-αossipiridina* ed ha la seguente struttura:



per la quale formola si calcolano i seguenti numeri:

C = 71,55
H = 8,28
N = 12,86.

Determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico (Apparecchio Beckmann):

Benzene = gr. 13,278 Sostanza = gr. 0,2380

Δ = 0,38

	trovato	calcolato
P. M.	231	218

È insolubile nell'acqua anche bollente, nella quale fonde; è molto solubile nell'alcool concentrato e diluito; solubile in etere, in acetone, in benzene.

Avendo adoperato l'alcool al 60 % alla temperatura di 50° per separare i due isomeri, ho voluto determinare esattamente la volubilità di questo composto nelle stesse condizioni, adoperando l'apparecchio di Pawlewski:

Sostanza: gr. 0,2926 Solvente: gr. 5,2678
Solubilità nell'alcool al 60 % a 50° — 1 : 18.

B. α′ ESSIL - γ METIL - β CIAN - α OSSIPIRIDINA.

La miscela dei due isomeri, che si ottengono dall'acetilmetilessilchetone, come ho ricordato, si fa digerire per un'ora circa a 50° nell'alcool al 60 %, e si ottiene, come residuo, una sostanza bianca leggera. Raccolta ed essiccata pesa gr. 2. Questa sostanza si può anche separare dal suo isomero sciogliendo la loro miscela nell'alcool al 60 % e lasciando raffreddare la soluzione lentamente. Se si osserva attentamente la cristallizzazione, si arriva ad un punto in cui si formano degli aghetti bianchi finissimi; allora si filtra rapidamente e si raccoglie il prodotto, che si ricristallizza dall'alcool diluito. Bisogna ripetere più volte la cristallizzazione sino a che gli aghi finissimi, che si ottengono, fondano costantemente a 193°-194°.

È da notare in questo caso, che bastano delle traccie dell'isomero, che fonde più basso (108°), per ottenere un punto di fusione molto minore del vero (130°-135°).

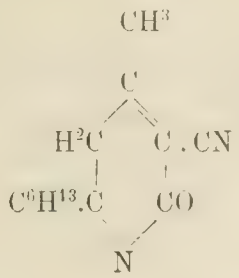
Questo fenomeno si incontra spesso nella chimica organica, massimamente quando si tratta, come in questo caso, di isomeri a caratteri consimili.

I. Gr. 0,1148 di sostanza diedero gr. 0,3014 di CO^2 e gr. 0,0857 di acqua.

II. Gr. 0,0932 di sostanza diedero cm^3 10,4 di azoto a $730^{mm},9$ ed a 15°,5.

	trovato		calcolato per $C^{13}H^{18}N^2O$
	I	II	
C =	71,60	—	71,51
H =	8,28	—	8,21
N =	—	12,68	12,86

Avendo stabilito la formula del suo isomero, deduco che la composizione di questa sostanza deve essere la seguente:



Quindi si potrà denominare: α′ *essil*-γ *metil*-β *cian*-α *ossipiridina*.

È poco solubile nell'acqua bollente, in cui a differenza del suo isomero non fonde, quando è purissima, si scioglie nell'alcool, nell'etere, nell'acetone; a freddo è poco solubile in benzina, ma si scioglie molto bene a caldo.

Determinazione della solubilità nell'alcool al 60 $^0/_0$ alla temperatura di 50° coll'apparecchio di Pawlewski:

Sostanza gr. 0,0230 Solvente gr. 3,313

Solubilità = 1 : 144.

Quando viene triturata in un mortaio si elettrizza facilmente, ciò che la distingue dal suo isomero.

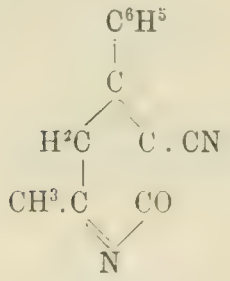
Per rispetto ai reagenti chimici si comporta, come il suo isomero e come le fenilmetilcianossipiridine; ossia trattate con permanganato potassico svolgono acido cianidrico e riducono profondamente il reattivo stesso.

Si sciolgono negli alcali e riprecipitano per aggiunta di un acido debole. Scaldate in un tubo da saggio mandano odore di grasso decomposto. Scaldate colla polvere di zinco svolgono vapori alcalini, che hanno forte odore di basi piridiche.

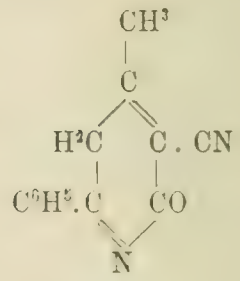
In un' altra nota tratterò della distillazione del composto più solubile (l'α *metil*-γ *essilcianossipiridina*) con polvere di zinco.

Riassumo in un quadro i caratteri fisici delle quattro sostanze studiate ed il quantitativo di formazione, che è impor-

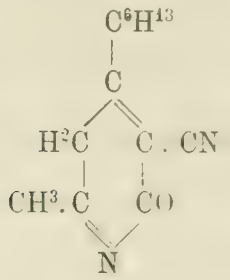
tante per stabilire l'energia di reazione dei due gruppi carbonilici dei β dichetoni:



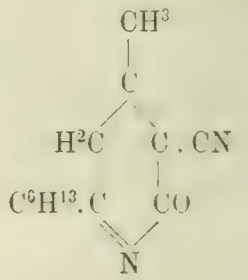
α′ METIL-γ FENIL-β CIAN-α OSSIPIRIDINA
Rendimento = 25 %
pf. 263° sol. alcool conc. bol. 1 : 44,3



α′ FENIL-γ METIL-β CIAN-α OSSIPIRIDINA
Rendimento = 75 %
pf. 310° sol. alcool. conc. bol. 1 : 285



α′ METIL-γ ESSIL-β CIAN-α OSSIPIRIDINA
Rendimento = 80 %
pf. 108° sol. alcool 60 % T. 50° 1:18



α′ ESSIL-γ METIL-β CIAN-α OSSIPIRIDINA
Rendimento = 20 %
pf. 193°-194° sol. alcool a 60 % T. 50° 1:144

Da questa tabella e dal complesso delle mie ricerche risulta:

1° che dai β dichetoni con due radicali diversi si hanno contemporaneamente due isomeri ben definiti;

2° che il punto di fusione e la solubilità di questi composti è tanto maggiore, quanto è più prossimo all'azoto il radicale a peso molecolare elevato;

3° che a parità del numero di atomi di carbonio le ossipiridine più idrogenate presentano un punto di fusione assai minore;

4° che prendendo in considerazione la quantità di sostanza, che rispettivamente si forma in ogni condensazione, ne risultano delle conclusioni importantissime per stabilire il carattere chetonico dei carbonili dei due β dichetoni.

Infatti nel benzoilacetone:

$$CH^3 . CO . CH^2 . CO . C^6H^5$$

si osserva che il gruppo $CO . CH^3$ è quello che ha più facilità a reagire ed a condensarsi coll'etere cianacetico, essendo pure quello che reagisce più facilmente coi bisolfiti, colla fenilidrazina, ecc. ecc.

Nel mio caso la *α' fenil-γ metilcianossipiridina* è sempre in gran preponderanza, come quella che deriva direttamente dall'unione del gruppo $CO . CH^3$ coll'etere cianacetico.

La *α' metil-γ fenilcianossipiridina* invece è in piccolissima quantità, perchè il gruppo $CO . C^6H^5$ ha debole carattere chetonico.

Già Guareschi aveva notato, come assai difficilmente reagisse il *metilfenilchetone* $C^6H^5.CO . CH^3$ coll'etere cianacetico ed ancora meno il *benzofenone* $C^6H^5. CO . C^6H^5$.

La cosa avviene altrimenti per l'*acetilmetilessilchetone*:

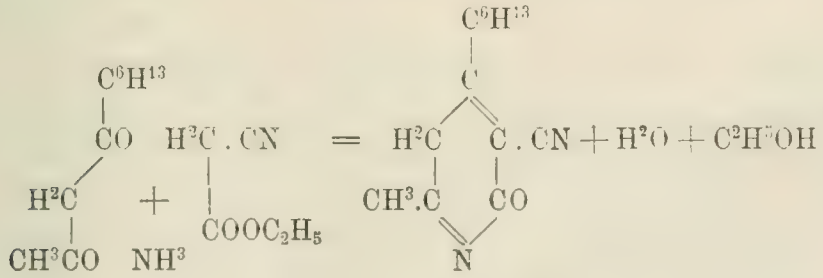
$$CH^3. CO . CH^2. CO . C^6H^{13},$$

poichè dalle numerose ricerche che sono state fatte sulla condensazione dell'etere cianacetico coi chetoni, pare che aumenti la quantità di prodotto col prolungarsi della catena normale di uno dei radicali alcoolici.

Così il *metilnonilchetone* $CH^3. CO . C^9H^{19}$ reagisce più facilmente degli acetoni a 4 a 5 atomi di C.

Nel caso del dichetone acetilmetilessilico il gruppo $CO.C^6H^{13}$ avrebbe più tendenza a reagire coll'etere cianacetico, come quello contenente un radicale alcoolico grasso a maggior numero di atomi di C.

Ed infatti la *γ essil-α' metilcianossipiridina* è sempre in prevalenza sul suo isomero nei prodotti di condensazione:



Che il gruppo $CO . C^6H^{13}$ abbia più carattere chetonico del gruppo $CO . CH^3$, anche relativamente ai bisolfiti, alla idrossilamina, alla fenilidrazina, ecc.?

Ciò non voglio affermare recisamente, tanto più che trovai alcuni autori non ben certi sulla costituzione dei corpi, che si ottengono condensando i dichetoni coi bisolfiti, colla idrossilamina e colla fenilidrazina.

Ora sta il fatto, che il potere reagente relativamente all'etere cianacetico è maggiore per quel carbonile, che sta attaccato al radicale alcoolico grasso a catena normale contenente un maggior numero di atomi di carbonio.

Laborat. chim. farm. e toss. R.ª Università. Torino, 1905.

Sul calcolo della sezione e delle armature di una trave in cemento armato sottoposta a flessione retta semplice.

Nota dell'Ing. MICHELE GRECO
Assistente nella R. Scuola di Applicazione di Palermo.

1. — Le diverse teorie sulle strutture in cemento armato e le formole relative ci dànno in generale il modo di verificare la stabilità di una costruzione esistente o di cui si conoscano le dimensioni assegnate a priori in base a criteri più o meno pratici, ma esse non rispondono perfettamente allo scopo, quando si vogliano determinare direttamente e senza ricorrere a diversi tentativi le dette dimensioni ed in ispecie le sezioni delle armature.

Nel primo studio di una costruzione in cemento armato può avvenire quindi che si assegnino alle sbarre metalliche delle sezioni insufficienti a resistere agli sforzi che vi si sviluppano, o talmente in eccesso, che quando nel cemento si è raggiunto il massimo sforzo di compressione ammissibile, il ferro non lavori che ad una tensione unitaria molto bassa.

In entrambi i casi si dovrebbero ripetere i calcoli facendo variare opportunamente le sezioni assegnate, ma nel secondo di essi, che è il più comune, si adotta quasi sempre la sezione in eccesso, la qual cosa è certamente contraria al buon impiego del materiale.

Ad ovviare questo inconveniente non sembra quindi inopportuno il ricavare delle formole, le quali in base alle condizioni di stabilità ed al principio economico generale, col quale si cerca sempre di mettere a profitto tutta la resistenza possibile del materiale impiegato, diano subito in funzione di certi elementi noti quali sezioni debbano assegnarsi alle armature.

Un tale studio, condotto in generale, riesce certamente difficile e di poca utilità per la pratica, ed è perciò che nella presente nota mi sono proposto di risolvere il problema limi-

tandomi a considerare il caso delle travi rette sollecitate a flessione semplice, ed in ispecie quelle a sezione rettangolare o a T diritto che più comunemente si incontrano nelle costruzioni.

Questa ricerca mi ha dato anche l'occasione di vedere in quali casi può essere utile l'armatura nella zona compressa e quando sia lecito invece di sopprimerla.

In quanto alla resistenza a trazione del cemento ho seguito le idee più comunemente accettate, ho supposto cioè ch'essa si sviluppi secondo il noto diagramma di Considère.

Ho quindi ricavato le formole nel caso più generale in cui si ammetta una *resistenza di plasticità* t, cioè nel caso della *teoria intermedia,* che indicherò brevemente in seguito col simbolo (TM), e da queste poi, ponendo $t = 0$, ho dedotto quelle che si riferiscono al caso particolare in cui si trascuri nel cemento qualunque resistenza alla trazione, cioè al caso della *teoria limite superiore,* che indicherò col simbolo (TS).

Ho cercato infine di chiarire con qualche esempio numerico l'impiego delle formole ottenute.

Trave a sezione rettangolare.

2. — Si consideri una trave a sezione rettangolare $ABCD$ (fig. 1) con doppia armatura, e siano:

h l'altezza della sezione ed e la larghezza,

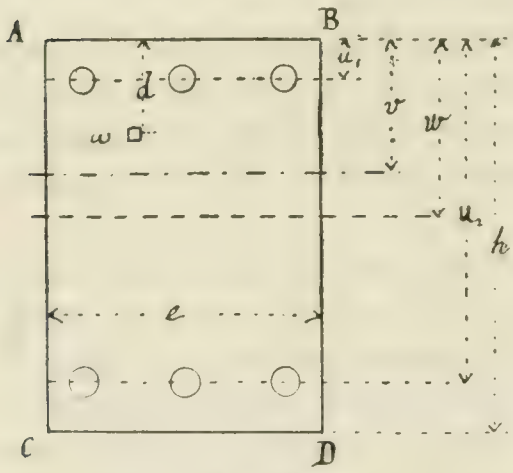


Fig. 1.

Ω_1 e Ω_2 le aree complessive delle sezioni delle armature poste rispettivamente nella zona compressa e in quella tesa, e che chiameremo brevemente armatura superiore ed inferiore,

u_1 ed u_2 le distanze dei baricentri di queste armature dallo spigolo superiore AB,

σ_1 e σ_2 gli sforzi unitari che sopportano le dette armature,

ω l'area di un elemento di calcestruzzo posto alla distanza d dallo spigolo AB,

σ_c lo sforzo unitario in detto elemento,

p lo sforzo di compressione massimo, cioè quello che si verifica nei punti dello spigolo AB,

v la distanza dell'asse neutro dal detto spigolo AB,

w la distanza dell'asse delle fibre, dove la tensione del cemento nell'ipotesi della (TM) raggiunge il valore limite, al di là del quale, lo sforzo si mantiene costante ed eguale a t,

m il rapporto fra i coefficienti di elasticità del ferro e del cemento,

M il momento flettente o momento delle forze esterne.

Per l'equilibrio si deve avere:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum\limits_0^w \sigma_c \omega + \sigma_1 \Omega_1 - t \sum\limits_w^h \omega - \sigma_2 \Omega_2 = 0\,, \\ \sum\limits_0^w \sigma_c \omega (v-d) + \sigma_1 \Omega_1 (v-u_1) + t \sum\limits_w^h \omega (d-v) + \sigma_2 \Omega_2 (u_2 - v) = M, \end{cases}$$

e, per l'ipotesi che la sezione resti piana dopo la deformazione:

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma_c = \frac{p}{v}(v-d), \quad t = \frac{p}{v}(w-v), \\ \sigma_1 = m\frac{p}{v}(v-u_1), \quad \sigma_2 = m\frac{p}{v}(u_2 - v). \end{cases}$$

Sono queste in ogni caso le equazioni fondamentali che permettono di risolvere il problema della flessione retta semplice. Dati infatti gli elementi della sezione, cioè a dire, l'altezza h e la larghezza e, le aree Ω_1 e Ω_2 colle relative distanze u_1, u_2, nonchè il coefficiente di plasticità t, il rapporto m, e il momento flettente M, le sei equazioni (1) e (2) sono sufficienti a determinare le sei incognite:

$$v,\ w,\ \sigma_c,\ p,\ \sigma_1,\ \sigma_2,$$

di cui solo le ultime tre formano comunemente l'oggetto speciale della ricerca.

Ma per lo studio che mi sono qui proposto, interessa specialmente di considerare Ω_1 e Ω_2 come incognite e ricavarle in modo che siano ben utilizzate le resistenze dei due materiali associati, introducendo qualche altra condizione dipendente da questo principio di economia.

3. — Affinchè si possa dire che la sezione sia stata ben calcolata occorre che lo sforzo unitario massimo tanto nel ferro che nel cemento raggiunga il limite dei carichi ammissibili, sicchè, tenuto conto della diversa natura dei due materiali, bisogna:

1° Che le due tensioni σ_2 e p stiano fra di loro in un rapporto prestabilito n, cioè:

$$\frac{\sigma_2}{p} = n, \tag{4}$$

in maniera che quando p raggiunge il suo valore massimo compatibile colla resistenza del calcestruzzo alla compressione, avvenga lo stesso per lo sforzo di trazione σ_2 del ferro.

2° Che i due sforzi σ_1 e σ_2 siano eguali fra di loro, cioè:

$$\sigma_1 = \sigma_2. \tag{5}$$

Queste due condizioni sono però fra di loro incompatibili, difatti da esse si ricava:

$$\frac{\sigma_1}{p} = n, \tag{6}$$

e, detto inoltre σ_{1c} lo sforzo di compressione di una fibra cementizia adiacente all'armatura Ω_1, si ha:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{1c}} = m, \quad \sigma_{1c} < p, \quad \frac{\sigma_1}{p} < \frac{\sigma_1}{\sigma_c},$$

e quindi:

$$\frac{\sigma_1}{p} < m,$$

cioè, per la (6), $n < m$, il che è impossibile, perchè mentre il valore di m si aggira sempre attorno a 10, quello di n, per il buon impiego del materiale non dovrebbe essere inferiore a $\frac{700}{30} = 23{,}3$.

Non si può quindi ottenere contemporaneamente che il rapporto $\frac{\sigma_2}{p}$ si mantenga eguale ad un numero prestabilito n e che le armature di ferro lavorino entrambe allo stesso sforzo unitario, perchè da questa condizione resta pure stabilito il suddetto rapporto.

Bisogna pertanto attenersi all'una o all'altra di queste condizioni ed io credo che sia più conveniente attenersi alla prima, sia perchè essa è più generale, nel senso che può riferirsi anche al caso in cui manchi l'armatura superiore, sia perchè ci permette di utilizzare nel miglior modo possibile il materiale metallico nella funzione principale ch'esso è chiamato ad esplicare (*).

Fra le sei incognite (3) occorre quindi sopprimere p e σ_2 che si intendono date a priori e bisogna sostituire invece Ω_1 ed Ω_2, con che il problema resta, come prima, pienamente determinato.

Dalla quarta delle (2) si ricava:

$$\frac{\sigma_2}{p} = m \frac{u_2 - v}{v},$$

e per la (4):

$$n = m \frac{u_2 - v}{v},$$

donde:

$$v = \frac{m}{m+n} u_2 = k u_2. \tag{7}$$

Il rapporto

$$k = \frac{m}{m+n} \tag{8}$$

dipende unicamente dalle proprietà di elasticità e di resistenza dei due materiali e deve quindi essere stabilito a priori, u_2 differisce poco dall'altezza h della trave e può essere dato insieme ad essa; sicchè per mezzo della (7) resta fissata la posizione dell'asse neutro indipendentemente dalle equazioni (1) di stabilità, e queste non serviranno ad altro che a determinare le sezioni delle armature in maniera che la posizione dell'asse neutro risulti quella già fissata in base alla (7), e che lo sforzo unitario

(*) Se si volesse seguire il secondo di questi due criterî dalla condizione $\sigma_1 = \sigma_2$, coll'aiuto delle (2) si ricaverebbe:

$$v = \frac{u_1 + u_2}{2},$$

cioè a dire, l'asse neutro dovrebbe passare o per il baricentro della sezione geometrica (nel caso di $u_2 + u_1 = h$) o molto vicino ad esso. Ora, affinchè ciò sia possibile, bisogna dare all'armatura tesa (specialmente nel caso di $t = 0$) una sezione molto grande con evidente spreco di materiale.

di compressione nel cemento raggiunga il massimo valore ammissibile, con che avverrà lo stesso dello sforzo di trazione dell'armatura tesa.

4. — Passiamo ora intanto a sviluppare i calcoli.

Le (1) per mezzo delle (2) diventano:

$$\sum_0^v \omega(v-d) + m\Omega_1(v-u_1) - (w-v)\sum_w^h \omega - m\Omega_2(u_2-v) = 0,$$

$$\sum_0^v \omega(v-d)^2 + m\Omega_1(v-u_1)^2 + (w-v)\sum_w^h \omega(d-v) + m\Omega_2(u_2-v)^2 = \frac{v}{p}M,$$

e, dividendo ogni termine per e, si possono anche scrivere brevemente:

$$(9) \qquad \begin{cases} (v-u_1)\gamma_1 + (v-u_2)\gamma_2 = \alpha \\ \frac{(v-u_1)^2}{v}\gamma_1 + \frac{(v-u_2)^2}{v}\gamma_2 = \beta, \end{cases}$$

dove si è posto rispettivamente:

$$(10) \qquad \gamma_1 = \frac{m\Omega_1}{e}, \quad \gamma_2 = \frac{m\Omega_2}{e},$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{e}\sum_0^w \omega(v-d) + \frac{1}{e}(w-v)\sum_w^h \omega, \\ \beta = \frac{M}{ep} - \frac{1}{ve}\sum_0^v \omega(v-d)^2 - \frac{1}{e}\frac{w-v}{v}\sum_w^h \omega(d-v). \end{cases}$$

Invece di Ω_1 ed Ω_2 preferisco assumere come incognite le γ_1 e γ_2 definite dalle (10); ciascuna di esse ci rappresenta *l'area della sezione trasformata dell'armatura corrispondente, riferita all'unità di larghezza della sezione.* Conosciute quindi le γ_1 e γ_2 si possono ricavare le Ω_1 ed Ω_2 mediante le

$$(12) \qquad \Omega_1 = \frac{e\gamma_1}{m}, \quad \Omega_2 = \frac{e\gamma_2}{m}.$$

Le formole che danno γ_1 e γ_2 si ottengono dalla risoluzione delle equazioni (9), esse sono cioè:

$$(13)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{v}{(v-u_1)(u_2-u_1)}\left(\beta - \dfrac{v-u_2}{v}\,\alpha\right), \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{v}{(u_2-v)(u_2-u_1)}\left(\beta - \dfrac{v-u_1}{v}\,\alpha\right), \end{cases}$$

ma sotto questa forma non sono certamente adatte nè ai calcoli pratici, nè alle discussioni che verranno in seguito, perchè occorre prima calcolare le quantità α e β date simbolicamente dalle (11).

Intanto per la sezione rettangolare si ricava facilmente:

$$\alpha = h(w - v) - \frac{1}{2}\,w^2,$$

e, per la seconda delle (2):

$$(14)\qquad \alpha = hv\,\frac{t}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2 v^2.$$

Chiamando inoltre μ il rapporto $\frac{M}{e}$, cioè *il momento flettente riferito all'unità di larghezza della sezione*, si ha:

$$\beta = \frac{\mu}{p} + \frac{1}{6}\,\frac{w^3}{v} - \frac{1}{2}\,w^2 + wh - vh,$$

e per la seconda delle (2):

$$(15)\qquad \beta = \frac{\mu}{p} + hv\,\frac{t}{p} - \frac{1}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2 \frac{2p-t}{p}\,v^2.$$

Ottenute così le espressioni di α e β in funzione di elementi noti, è facile calcolare le quantità:

$$\left(\beta - \frac{v-u_2}{v}\,\alpha\right), \qquad \left(\beta - \frac{v-u_1}{v}\,\alpha\right),$$

che entrano nelle (13), e, così facendo si ottiene infine:

$$(16)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{v}{(v-u_1)(u_2-u_1)}\left[\dfrac{\mu}{p} + hu_2\dfrac{t}{p} + \dfrac{v}{6}\left(\dfrac{t+p}{p}\right)^2\left(\dfrac{t+p}{p}\,v - 3u_2\right)\right], \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{v}{(u_2-v)(u_2-u_1)}\left[\dfrac{\mu}{p} + hu_1\dfrac{t}{p} + \dfrac{v}{6}\left(\dfrac{t+p}{p}\right)^2\left(\dfrac{t+p}{p}\,v - 3u_1\right)\right], \end{cases}$$

e, nell'ipotesi della (TS) $(t=0)$,

$$(17)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{v}{(v-u_1)(u_2-u_1)}\left[\dfrac{\mu}{p}+\dfrac{v}{6}(v-3u_2)\right], \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{v}{(u_2-v)(u_2-u_1)}\left[\dfrac{\mu}{p}+\dfrac{v}{6}(v-3u_1)\right]. \end{cases}$$

Queste sono le formole generali che ci dànno γ_1 e γ_2, sia nell'ipotesi della (TM), che in quella della (TS).

Occorre però vedere se esse sono sempre applicabili o se invece possano subire delle limitazioni, e ciò formerà oggetto della ricerca seguente (*).

5. — *Discussione delle formole precedenti.* — Osserviamo anzitutto che se si attribuisce al cemento una resistenza di plasticità t, i valori di γ_1 e γ_2 a parità degli altri elementi dipendono da t, cioè ad ogni valore che si dà a t corrisponde una coppia di valori per γ_1 e γ_2.

Limitandoci a considerare per ora la prima delle (16), osserviamo che la quantità $\frac{t+p}{p} - 3u_2$ è essenzialmente negativa, perchè si ha sempre:

$$3u_2 > \frac{t+p}{p}\, v.$$

Ne viene che è tutta la quantità:

$$(18)\qquad hu_2\,\frac{t}{p} + \frac{v}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left(\frac{t+p}{p}\,v - 3u_2\right) \lesseqgtr 0\,,$$

secondo che è:

$$hu_2\,\frac{t}{p} \lesseqgtr \frac{v}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left(3u_2 - \frac{t+p}{p}\,v\right),$$

(*) Forse facendo uso delle (16) o delle (17) si potrebbe, nel caso che fosse necessaria l'armatura superiore (e noi vedremo fra breve quando ciò si verifica) determinare v colla condizione che la somma $\gamma_1+\gamma_2$ sia un minimo, e ciò è possibile, perchè, come si vede facilmente, per i valori estremi di $v=u_1$ e $v=u_2$ questa somma diventa infinita, ma anche nel caso più semplice delle (17) una tale ricerca porta a calcoli molto complicati, che si riducono infine alla risoluzione di una equazione di 5° grado completa in v.

ed il valore t_1 di t che separa questi due stati della quantità (18) è quello che la rende nulla, cioè che soddisfa all'equazione:

$$(19) \qquad hu_2 \frac{t}{p} - \frac{v}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left(3u_2 - \frac{t+p}{p}v\right) = 0.$$

Secondo si ha $t \lesseqgtr t_1$ la quantità (18) risulta quindi negativa o positiva.

L'equazione (19) ridotta ed ordinata rispetto all'incognita $\frac{t}{p}$, che denoteremo brevemente con x, diventa:

$$vx^3 - 3(u_2 - v)x^2 + \frac{3}{v}(2hu_2 + v^2 - 2vu_2)x - (3u_2 - v) = 0$$

e, facendo in questa $v = ku_2$, e (come praticamente si può ritenere) $h = 1{,}08u_2$, essa diventa:

$$(20) \quad x^3 - 3\frac{1-k}{k}x^2 + \frac{3}{k^2}(2{,}16 + k^2 - 2k)x - \frac{3-k}{k} = 0\,,$$

e dà per x, e quindi per t_1 un valore indipendente dall'altezza della sezione. Ponendo, p. es., $m = 10$, $n = \frac{700}{30}$, per cui $k = 0{,}3$, l'equazione precedente diventa:

$$x^3 - 7x^2 + 55x - 9 = 0,$$

e risolta dà:

$x = 0{,}167$, cioè $t_1 = 0{,}167$, $\quad p = 0{,}167 \times 30 = 5$ kg. p. cm. q.

Ciò posto, assegnato un valore a k, per ogni valore di t minore di t_1 esiste in conseguenza un valore μ_1 di μ che rende nullo γ_1, e questo è dato dall'equazione:

$$(21) \qquad \frac{\mu}{p} + hu_2\frac{t}{p} - \frac{v}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left(3u_2 - \frac{t+p}{p}v\right) = 0\,,$$

dalla quale si ricava:

$$\mu_1 = \frac{pv}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left(3u_2 - \frac{t+p}{p}v\right) - htu_2.$$

Per tutti i valori di $\mu < \mu_1$, risulta $\gamma_1 < 0$.

In questi casi non è necessaria quindi l'armatura superiore, essa costituisce uno spreco di materiale, basta la sola armatura

inferiore, la quale va calcolata colla seconda delle (9), che si riduce a:

$$\frac{(v-u_2)^2}{v}\,\gamma_2 = \frac{\mu}{p} + hv\frac{t}{p} - \frac{1}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2 \frac{2p-t}{p}\,v^2,$$

e dà:

$$(23)\qquad \gamma_2 = \frac{v}{(v-u_2)^2}\left[\frac{\mu}{p} + hv\frac{t}{p} - \frac{1}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2 \frac{2p-t}{p}\,v^2\right],$$

dove al posto di v bisogna mettere il valore ku_2 nel caso che sia $\mu = \mu_1$, o il valore che si ricava dall'equazione (21), quando $\mu < \mu_1$. Quest'ultima, ordinata rispetto a v, diventa:

$$(24)\qquad v^2 - 3u_2\frac{p}{t+p}\,v + 6\left(\frac{p}{t+p}\right)^3\left(\frac{\mu}{p} + hu_2\frac{t}{p}\right) = 0,$$

e si può risolvere facilmente.

È chiaro che quanto ora si è detto vale anche nell'ipotesi della (TS) $(t = 0)$; in questo caso le (22), (23), (24) si semplificano e diventano rispettivamente:

$$(25)\qquad \mu_1 = \frac{vp}{6}(3u_2 - v),$$

$$(26)\qquad \gamma_2 = \frac{v}{(v-u_2)^2}\left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{3}v^2\right),$$

$$(27)\qquad v^2 - 3u_2 v + 6\frac{\mu}{p} = 0.$$

Nel caso di $\mu < \mu$, il valore di v ricavato dalla (24) o dalla (27) oltre di servire alla determinazione di γ_2, permette anche di far conoscere il lavoro unitario del ferro. Basta a tal fine calcolare colla

$$(7)\qquad v = \frac{m}{m+n}\,u_2$$

il valore di n e da questo ricavare poi σ_2.

E siccome il valore di σ_2 così trovato deve necessariamente risultare inferiore al limite dei carichi ammissibili, si può in questo caso, per utilizzare meglio il materiale, diminuire l'altezza della trave, ovvero la larghezza in modo da far crescere il valore di μ, e raggiungere quindi in ogni modo la condizione $\mu = \mu_1$.

Potrebbe quindi convenire qualche volta di proporsi il seguente problema:

Dato il momento flettente M *cui deve resistere la sezione di una trave in cemento armato, determinarne l'altezza in modo che basti soltanto l'armatura superiore.*

Limitandoci a considerare il caso più semplice della (TS) e chiamando η il rapporto $\frac{e}{h}$ fra la larghezza e l'altezza della sezione, si ha:

$$\mu = \frac{M}{e} = \frac{M}{\eta h} = \frac{M}{1{,}08 u_2 \eta},$$

quindi, per la (25) e la (7):

$$\frac{M}{1{,}08 u_2 \eta} = \frac{k u_2^2 p}{6}(3 - k),$$

donde infine:

$$u_2 = \sqrt[3]{\frac{6M}{1{,}08\, \eta p k (3 - k)}}. \tag{28}$$

6. — Le equazioni (16) possono anche subire un'altra limitazione; scriviamole brevemente sotto la forma:

$$\gamma_1 = \frac{v}{u_2 - u_1} \frac{1}{v - u_1}\left(\frac{\mu}{p} + q_2\right),$$

$$\gamma_2 = \frac{v}{u_2 - u_1} \frac{1}{u_2 - v}\left(\frac{\mu}{p} + q_1\right),$$

e chiamiamo μ_2 il valore speciale di μ che rende $\gamma_1 = \gamma_2$, cioè a dire, che soddisfa all'equazione:

$$\frac{1}{v - u_1}\left(\frac{\mu}{p} + q_2\right) = \frac{1}{u_2 - v}\left(\frac{\mu}{p} + q_1\right). \tag{29}$$

È chiaro che se, mantenendo fermi tutti gli altri elementi, facciamo crescere o diminuire μ_2 della quantità $\Delta\mu_2$, il primo ed il secondo membro della suddetta eguaglianza cresceranno o diminuiranno insieme rispettivamente delle quantità $\frac{\Delta\mu_2}{p(v-u)_2}$ e $\frac{\Delta\mu_1}{p(u_2-v)}$ e, siccome è sempre $v - u_1 < u_2 - v$ e quindi:

$$\frac{\Delta\mu_2}{p(v - u_1)} > \frac{\Delta\mu_1}{p(u_2 - v)},$$

il primo membro diverrà in corrispondenza maggiore o minore del secondo, cioè risulterà $\gamma_1 \gtrless \gamma_2$.

E poichè μ_2 varia con t, si può dire che ad ogni valore di t corrisponde un valore di μ_2 tale, che le due armature risultano eguali e per tutti gli altri valori di μ, l'armatura tesa risulta più grande o più piccola di quella compressa secondo che è $\mu \lesseqgtr \mu_2$.

Il valore di μ_2 si può ricavare dall'equazione (29) ponendo al posto di q_2 e q_1 le espressioni che esse rappresentano.

Così facendo si ottiene:

$$(30) \qquad \mu_2 = \frac{vp}{6(u_2+u_1-2v)}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left[\left(\frac{t+p}{p}v-3u_1\right)(v-u_1)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{t+p}{p}v-3u_2\right)(u_2-v)\right]+\frac{ht}{(u_2+u_1-2v)}[u_1(v-u_1)-u_2(u_2-v)],$$

e nell'ipotesi della (TS) $(t=0)$:

$$(31) \qquad \mu_2 = \frac{vp}{6(u_2+u_1-2v)}[2v^2-4v(u_2+u_1)+3(u_2^2+u_1^2)].$$

Se il momento flettente μ fosse maggiore di μ_2, si potrebbe aumentare la larghezza della sezione o l'altezza (*) in modo da rendere $\mu = \mu_2$; ed assegnare così alle due armature la stessa sezione.

Anche qui si può quindi presentare il problema di *determinare l'altezza della trave in modo che l'armatura superiore non risulti più grande di quella inferiore.* Per risolverlo, volendo limitarci al caso più semplice e più comune delle (TS) basta ricavare u_2 dalla (31). Ponendo in questa, come già si è fatto precedentemente,

$$\mu_2 = \frac{M}{1{,}08\,u_2\eta}, \quad v = ku_2, \quad u_1+u_2 = h,$$

e quindi $u_1 = 0{,}08u_2$, si ricava:

$$(32) \qquad u_2 = \sqrt[3]{\frac{6(1{,}08-2k)M}{1{,}08\eta pk(2k^2-4{,}32k+3{,}019)}}.$$

(*) È facile vedere, sostituendo nella (30) o nella (31) a v l'espressione equivalente ku_2, che μ_2 cresce con u_2.

Da qualche calcolo numerico che si può eseguire, e che per brevità omettiamo, si vede che μ_2 diminuisce al crescere di t; detto quindi t_2 il valore di t che annulla μ_2, esso deve soddisfare all'equazione:

$$(33)\quad \frac{v}{6}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2\left[\left(v\frac{t+p}{p}-3u_1\right)(v-u_1)-\left(v\frac{t+p}{p}-3u_2\right)(u_2-v)\right]$$
$$+h\frac{t}{p}\left[u_1(v-u_1)-u_2(u_2-v)\right]=0,$$

la quale, trasformata secondo le solite sostituzioni:

$$v=ku_2,\quad h=1{,}08u_2,\quad u_1=0{,}08u_2,$$

ed ordinata rispetto all'incognita $\frac{t}{p}$, che denoteremo brevemente con x, diventa:

$$(34)\quad k^2(2k-1{,}08)x^3+3k(2k^2-2{,}16k+1{,}0064)x^2$$
$$+6(k^3-1{,}62k^2+2{,}1728k-1{,}0869)x+k(2k^2-4{,}32k+3{,}0192)=0$$

e dà per x, e quindi per t_2, un valore indipendente dall'altezza della sezione. Ponendo, come sopra, $p=30$ kg. p. cmq. e $k=0{,}3$, essa diventa:

$$x^3-11{,}21x^2+76{,}92x-13{,}21=0\,,$$

e risolta dà:

$x=0{,}176$, cioè $t_2=0{,}176$, $p=0{,}176\times 30=$ kg. 5,28 p. cmq.

Quando il valore di t eguaglia o supera quello di t_2, qualunque sia il momento μ, risulterà sempre l'armatura superiore più grande di quella inferiore.

7. — *Conclusione.* Riassumendo quanto sopra si è detto, possiamo venire alle conclusioni seguenti:

a) Se ammettiamo che nel cemento vi sia una resistenza di plasticità t e vogliamo nello stesso tempo che tanto il cemento alla compressione che il ferro alla trazione lavorino ciascuno ad uno sforzo unitario prestabilito, nel caso che t sia eguale o maggiore del valore di t_1 ricavato dalla equazione (20),

è sempre necessaria l'armatura superiore. Se poi t è pure maggiore del valore di t_2 ricavato dalla equazione (34), l'area dell'armatura compressa supera sempre quella dell'armatura tesa; e ciò avviene qualunque sia il momento flettente μ.

Ora abbiamo visto che i valori di t_1 e t_2, purchè vengano rispettati certi rapporti pratici, sono indipendenti dall'altezza della trave, e sono funzioni soltanto di k, cioè a dire del rapporto n fra il lavoro alla tensione del ferro e quello alla compressione del calcestruzzo.

Nel quadro seguente si trovano calcolati i valori dei rapporti $\frac{t_1}{p}$ e $\frac{t_2}{p}$, e quindi di t_1 e t_2, corrispondenti ad un valore di $p = 30$ kg. p. cmq. ed a valori di k che vanno da $k = 0{,}2$ a $k = 0{,}5$:

σ_2	k	$\frac{t_1}{p}$	$\frac{t_2}{p}$	t_1	t_2
1200	0,2	0,104	0,107	3,12	3,21
700	0,3	0,167	0,176	5,01	5,28
450	0,4	0,237	0,311	7,11	9,33
300	0,5	0,313	0,500	9,39	15,00

Si vede che t_2 supera sempre t_1, e che d'altra parte il valore di t_2 corrispondente a $\sigma_2 = 700$ kg. p. cmq., cioè a $k = 0{,}3$, è molto basso ed inferiore a quello che si ammette ordinariamente come resistenza di plasticità (da 8 a 12 kg. p. cmq.).

Ne segue che, non volendo in tal caso assegnare all'armatura superiore una sezione maggiore di quella inferiore, bisogna contentarsi di far lavorare l'armatura tesa ad uno sforzo unitario più basso (circa 450 kg. p. cmq. o meno) e fare quindi le due armature eguali, ovvero sopprimere completamente l'armatura superiore. Volendo adottare il primo di questi ripieghi, si risolve la (29) rispetto a v e si calcola poi γ_1 e γ_2 con una delle (16), volendo invece adottare il secondo, si fa uso della (23),

che è la seconda delle (9) e la prima di esse, che in questo caso si riduce a

$$(v - u_2)\gamma_2 = hv\frac{t}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{t+p}{p}\right)^2 r^2,$$

serve alla determinazione di v. È evidente che eliminando fra queste due equazioni γ_2 si ricade sempre nella (24).

Da quel che precede si rileva quindi quanto sia necessario conoscere con esattezza la resistenza di plasticità del conglomerato di cemento che devesi impiegare e sino a che punto possa farsi affidamento su di essa. La maggior parte degli autori ritiene a questo proposito che sia meglio trascurarla, anche perchè le variazioni di volume dovute al fenomeno della presa e dell'indurimento ed allo stato igrometrico dell'aria possono alle volte determinare delle fenditure, le quali, per quanto siano capillari, vengono sempre ad interrompere la continuità della massa. Qui sarà facile mostrare che il volerne tener conto non va certamente a vantaggio dell'economia.

Supponiamo infatti di aver calcolato una sezione colla sola armatura inferiore in modo che questa lavori al massimo sforzo ammissibile e senza tener conto della resistenza di plasticità t.

Se ora, ferma restando ogni cosa, ad una fibra di ferro di sezione ω, che lavori allo sforzo unitario σ_2, vogliamo sostituire una fibra di cemento Ω, che lavori allo sforzo t, occorre che sia:

$$\omega\,\sigma_1 = t\Omega.$$

I prezzi del ferro tolto e del cemento aggiunto stanno come $\omega s : \Omega S$, se s ed S sono rispettivamente i prezzi unitari dei due materiali, ed è facile vedere che:

$$\omega s = \frac{t}{\sigma_1}\Omega s < \Omega S$$

perchè anche nel caso di $t = 10$ kg. p. cmq. è sempre $\frac{10}{700}s < S$ (*).

b) Se poi trascuriamo del tutto la resistenza alla trazione

(*) Infatti si può assumere in media $s =$ £ 2800, $S =$ £ 60.

del calcestruzzo di cemento, finchè μ è eguale od inferiore al valore μ_1 dato dalla

$$\mu_1 = \frac{vp}{6}(3u_2 - v) \tag{25}$$

basta la sola armatura inferiore che si calcola colla:

$$\gamma_2 = \frac{v}{(v-u_2)}\left(\frac{\mu}{p} - \frac{1}{3}v^2\right) \tag{26}$$

dove al posto di v si mette il valore ku_2, se $\mu = \mu_1$ ed il valore ricavato dall'equazione:

$$v^2 - 3u^2 v + 6\frac{\mu}{p} = 0, \tag{27}$$

se è $\mu < \mu_1$. In quest'ultimo caso si può anche ridurre l'altezza della trave colla formola:

$$u_2 = \sqrt[3]{\frac{6M}{1{,}08\eta pk(3-k)}}, \tag{28}$$

e calcolare poi γ_2 colla (26) mettendo ku_2 al posto di v.

Se poi è $\mu > \mu_1$, occorre anche l'armatura superiore, le due armature in questo caso si calcolano colle formole:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{v}{(v-u_1)(u_2-u_1)}\left[\frac{\mu}{p} + \frac{v}{6}(v-3u_2)\right], \\ \gamma_2 &= \frac{v}{(u_2-v)(u_2-u_1)}\left[\frac{\mu}{p} + \frac{v}{6}(v-3u_1)\right], \end{aligned}\right. \tag{13}$$

e ciò finchè μ non superi il valore di μ_2 dato dalla

$$\mu_2 = \frac{vp}{6(u_2+u_1-2v)}\left[2v^2 - 4v(u_2+u_1) + 3(u_2^2+u_1^2)\right]. \tag{31}$$

Se $\mu > \mu_2$, si determina prima l'altezza colla

$$u_2 = \sqrt[3]{\frac{6(1{,}08-2k)M}{1{,}08\eta pk(2k^2-4{,}32k+3{,}019)}}, \tag{32}$$

e si fanno le due armature eguali calcolandole con una delle (13).

Sezione a T diritto.

8. — La sezione a T diritto si può ricondurre a quella rettangolare mediante le seguenti considerazioni.

Siano e ed s (fig. 2) rispettivamente la larghezza e lo spessore della soletta, e_1 la larghezza del gambo e si considerino i due casi in cui l'asse neutro coincide col lembo inferiore della soletta, o cade al di sotto di esso (*).

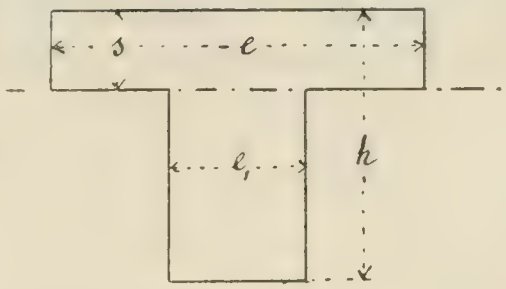


Fig. 2.

1° *Caso* (fig. 2). — Se calcolando v colla formola

$$v = \frac{m}{m+n} u_2 \tag{7}$$

risulta $v = s$, o tale che si possa praticamente dare alla soletta uno spessore eguale a v, si può considerare la sezione come se fosse rettangolare di larghezza e e di altezza h, purchè al valore reale di t si sostituisca un valore fittizio t' dato dalla equazione:

$$te_1 = t'e,$$

donde:

$$t' = \frac{e_1}{e} t.$$

In seguito si possono calcolare le armature come nel caso della sezione rettangolare, applicando anche qui tutte le considerazioni fatte in proposito ai n^i 6 e 7.

2° *Caso.* — Se calcolando v colla (7), risulta $v > s$ e la differenza non è molto grande, si può usare ancora il metodo precedente, che in questo caso è soltanto approssimato, perchè vengono ad introdursi nella sezione (fig. 3) i due rettangoli tratteggiati; siccome però questi sono molto vicini all'asse neutro, reagiscono con sforzi così piccoli, che la loro azione è quasi nulla.

(*) Non si considera il caso in cui l'asse neutro tagli la soletta, perchè non dovrebbe verificarsi mai nella pratica.

Se invece v è molto più grande di s (fig. 4), vediamo se è possibile trasformare l'area $ABDFHGEC$ corrispondente alla soletta ed alla porzione del gambo che si trova al di sopra dell'asse neutro in un'altra rettangolare $A'B'H'G'$ di larghezza e', la quale, supposto che lo sforzo unitario del calcestruzzo rimanga in ogni punto lo stesso di prima, fornisca in grandezza e posizione la stessa risultante molecolare.

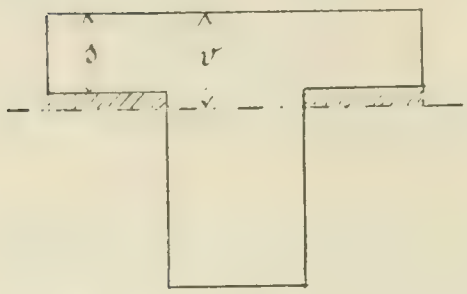


Fig. 3.

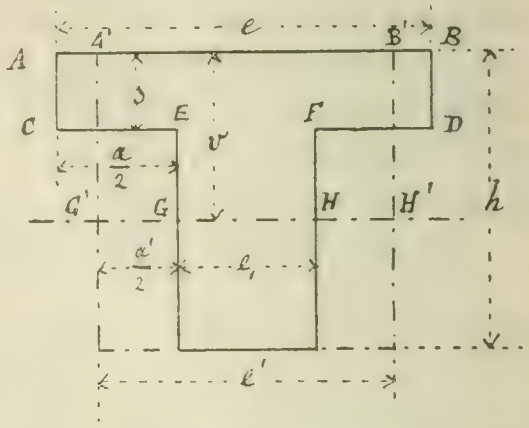


Fig. 4.

Affinchè ciò sia possibile occorre che siano verificate contemporaneamente le due equazioni:

$$\frac{1}{2}(e - e_1)(v - s)(2v - s) = \frac{1}{2}(e' - e_1)v^2$$

$$\frac{1}{3}(e - e_1)[v^3 - (v - s)^3] = \frac{1}{3}(e' - e_1)v^3$$

che, secondo le notazioni segnate nella fig. 4, si possono anche scrivere più brevemente:

$$(35) \qquad \begin{cases} a(v - s)(2v - s) = a'v^2, \\ a[v^3 - (v - s)^3] = a'v^3 \end{cases}$$

quindi s non può essere qualunque, ma deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{v^3 - (v - s)^3}{(v - s)(2v - s)} = v$$

la quale, posto $\frac{v - s}{v} = \lambda$, diventa:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

e risolta dà $\lambda = 0{,}5437$, donde infine:

$$s = (1 - \lambda)v = 0{,}4563v.$$

La trasformazione suddetta perciò è possibile solo quando sia $s = 0{,}4563v$, ed in tal caso dalla prima delle (35) si ricava:

$$a' = a\lambda(1 + \lambda),$$

cioè:

$$a' = 0{,}8393a, \quad e' = e_1 + a' = e_1 + 0{,}8393a,$$

donde infine:

$$e' = 0{,}1607e_1 + 0{,}8393e. \tag{36}$$

Si considera allora tutta la sezione come rettangolare di altezza h e larghezza e' e ad essa si applicano le formole e le considerazioni esposte nei n^i 6 e 7, sostituendo però alla resistenza di plasticità t un valore fittizio t' ricavato dalla equazione:

$$te_1 = t'e',$$

donde, per la (36):

$$t' = \frac{t}{0{,}1607 + 0{,}8393\frac{e}{e_1}}.$$

Se lo spessore s non è esattamente eguale al valore di $0{,}4563v$, e non è possibile renderlo tale, si può sempre, purchè la differenza non sia molto grande, adottare lo stesso procedimento, il quale sarà allora soltanto approssimato.

Applicazioni.

9. — Crediamo utile di applicare le formole trovate alla risoluzione di un problema pratico, anche perchè avremo così l'occasione di chiarire qualche altro punto della teoria.

Supponiamo adunque di voler determinare le dimensioni delle sezioni e delle armature da assegnare ad una trave retta in cemento armato della portata di m. 8 liberamente appoggiata agli estremi e destinata a sopportare un peso uniformemente distribuito di 1000 kg. per metro lineare.

Il massimo momento flettente M, cui la trave deve resistere è:

$$M = \frac{1}{8} \times 10 \times \overline{800}^2 = 800\,000 \text{ kg. cm.}$$

Volendo che la sezione sia di forma rettangolare, cerchiamo prima quale deve essere l'altezza da assegnarle, affinchè basti la sola armatura inferiore.

Dalla (28) facendo $\eta = 0{,}5$ e poi $p = 30$ kg. per cmq. e $\sigma_2 = 700$, con che risulta $k0{,}3$, si ricava:

$$u_2 = \sqrt[3]{\frac{4\,800\,000}{1{,}08 \times 0{,}5 \times 30 \times 0{,}3 \times 2{,}7}} = \text{cm. } 71{,}5\,,$$

e quindi:

$$h = 1{,}08\, u_2 = 1{,}08 \times 71{,}5 = \text{cm. } 77{,}2\,,$$

ed

$$e = \frac{77{,}2}{2} = \text{cm. } 38{,}6.$$

Procediamo al calcolo dell'armatura. Si ha:

$$\mu = \frac{M}{e} = \frac{800\,000}{38{,}6} = 20724\,, \quad v = k u_2 = 0{,}3 \times 71{,}5 = 21{,}4\,,$$

e quindi per la (26):

$$\gamma_2 = \frac{21{,}4}{(7{,}15 - 21{,}4)^2} \left(\frac{20724}{30} - \frac{1}{3}\, \overline{21{,}4}^2 \right) = 4{,}614.$$

Sicchè per la (12) la sezione complessiva dell'armatura è:

$$\Omega_2 = \frac{4{,}614 \times 38{,}6}{10} = \text{cmq. } 17{,}81\,,$$

e può essere fornita da tre ferri tondi del diametro di mm. 28 ciascuno.

10. — Supposto che la trave si costruisca secondo le dimensioni calcolate ed immaginando che si sviluppi una resistenza di plasticità t, vediamo come vengono a variare le tensioni unitarie del ferro e del cemento.

A tal fine si dovrebbero adoperare le equazioni (9) che in questo caso si riducono a:

$$(9^{bis})\quad \begin{cases} (v-u_2)\gamma_1 = hv\dfrac{t}{p} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t+p}{p}\right)^2 v^2, \\ \dfrac{(v-u_2)^2}{v}\gamma_2 = \dfrac{\mu}{p} + hv\dfrac{t}{p} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{t+p}{p}\right)^2 \dfrac{2p-t}{p} v^2, \end{cases}$$

e da queste ricavare p e v, per potere poi determinare σ_2 colla quarta delle (2):

$$(2)\qquad \sigma_2 = m\frac{p}{v}(u_2 - v).$$

Ma il calcolo così condotto sarebbe molto laborioso, è preferibile quindi assegnare un valore al rapporto $\frac{t}{p}$ e ricavare in corrispondenza dalla prima della (9bis) il valore di v, dalla seconda quello di p ed infine dalla (2) il valore di σ_2.

Facendo, p. es., $\frac{t}{p} = 0{,}01$, dalla prima delle (9bis) si ricava l'equazione di 2° grado:

$$0{,}51v^2 + 3{,}84v - 329{,}9 = 0,$$

che risolta, dà: $v = 22$ cm.

Si vede quindi che l'asse neutro si avvicina verso la zona tesa, il che era da prevedersi. Con questo valore di v dalla seconda delle (9bis) si ricava:

$$\frac{\mu}{p} = 659,$$

donde $p =$ kg. 31,4 per cmq., ed infine dalla (2) $\sigma_2 =$ kg. 719 per cmq.

Il valore di t implicitamente ammesso, è in questo caso $t = 0{,}01 \times 31 =$ kg. 0,3 p. cmq.

Con un calcolo analogo si può vedere che facendo $\frac{t}{p} = 0{,}1$ si trova:

$v = 26$ cm.,
$p = 50$ kg. p. cmq.,
$\sigma_2 = 860$ kg. p. cmq.,
$t = 5$ kg. p. cmq.

Si vede quindi che ammettendo che si sviluppi una certa resistenza di plasticità crescono tanto lo sforzo di compressione del calcestruzzo che quello di tensione del ferro, e non appena t raggiunge il valore di 5 kg. p. cmq., il primo sale già a 50 kg. p. cmq., cioè a dire, supera di molto il limite comunemente ammesso.

Sicchè il trascurare la resistenza di plasticità del cemento in una trave calcolata in modo da utilizzare tutta la resistenza del calcestruzzo alla compressione e del ferro alla tensione, potrebbe tornare a danno della stabilità, quando quella resistenza effettivamente si sviluppasse. In tal caso conviene quindi fare uso di un carico di sicurezza molto basso per il cemento, ovvero armare anche la zona compressa, perchè in questo modo una parte della maggiore reazione molecolare di compressione viene sopportata dalle armature di ferro, le quali ordinariamente lavorano ad uno sforzo unitario molto più basso di quelle tese.

11. — Supponiamo ora che la trave così calcolata riesca troppo alta per l'uso cui deve servire, sicchè sia necessario diminuirne l'altezza. Calcoliamo quindi anzitutto l'altezza limite al di sotto della quale occorre che l'armatura superiore sia più grande di quella inferiore.

Serve a tal fine la (32), la quale, mettendo sempre per η, p, k gli stessi valori, dà:

$$u_2 = \sqrt[3]{\frac{6(1{,}08 - 0{,}6)800\,000}{1{,}08 \times 0{,}5 \times 30 \times 0{,}3(0{,}18 - 1{,}296 + 3{,}019)}} = 63 \text{ cm.}$$

Ritenendo allora $h = 1{,}08 \times 63 = 68$ cm., adottiamo le due armature e calcoliamo γ_1 o γ_2 con una qualunque delle (13). Facendo in esse $v = 0{,}3 \times 63 =$ cm. 18,9, $\mu = \frac{800\,000}{34}$ ed $u_1 = h - u_2 = 5$ cm., si trova:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 5{,}86.$$

Sicchè per la sezione complessiva di un'armatura si ha:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{5{,}86 \times 34}{10} = \text{cmq. } 19{,}92,$$

e può essere fornita da tre ferri tondi, ciascuno del diametro di 29 mm.

12. — Se si vuol dare alla trave un'altezza ancora minore conviene meglio adoperare la sezione a T diritto, assegnando alla soletta uno spessore eguale a v ed una larghezza calcolata in modo che il momento μ risulti eguale a μ_1 o a μ_2, secondo che si vuole adoperare l'armatura semplice o l'armatura doppia.

Supponiamo quindi di voler fare $h = 60$ cm. e consideriamo separatamente i due casi.

1° *Caso: armatura semplice.* — Per $h=60$ cm., è $u_2=\frac{60}{1,08}=55,5$ e $v = 16,6$. Dalla (25) si ricava:

$$\mu_1 = \frac{16,6 \times 30}{6}(166 - 16,6) = 12400,$$

e volendo che sia $\mu = \frac{M}{e} = \mu_1$, bisogna fare:

$$e = \frac{800\,000}{12400} = \text{cm. } 64,5.$$

Dalla (26) poi si ricava:

$$\gamma_2 = \frac{16,6}{\overline{38,9}^2}\left(\frac{12400}{30} - \frac{1}{3}\overline{16,6}^2\right) = 3,52,$$

quindi la sezione complessiva dell'armatura è:

$$\Omega_2 = \frac{3,52 \times 64,5}{10} = \text{cmq. } 22,7$$

e può essere fornita da tre ferri ciascuno di 31 mm. di diametro. Al gambo si può dare la larghezza di 28 cm.

2° *Caso: armatura doppia.* — Dalla (31) si ricava:

$$\mu_2 = \frac{16,6 \times 30}{6(60-33,2)}\left[2 \times \overline{16,6}^2 - 4 \times 16,6 \times 60 + 3(\overline{55,5}^2 + \overline{4,5}^2)\right] = 18170,$$

quindi:

$$e = \frac{800\,000}{18\,170} = 44 \text{ cm.},$$

e con una qualunque delle (13), p. es. colla prima si trova:

$$\gamma_1 = \frac{16,6}{12,1 \times 51}\left[\frac{18170}{30} + \frac{16,6}{6}(16,6 - 166)\right] = 5,17,$$

epperò:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{5{,}17 \times 44}{10} = \text{cmq. } 22{,}75\,,$$

cioè ciascuna armatura può essere formata da tre ferri tondi del diametro di mm. 31. Il gambo si può fare anche qui largo cm. 28.

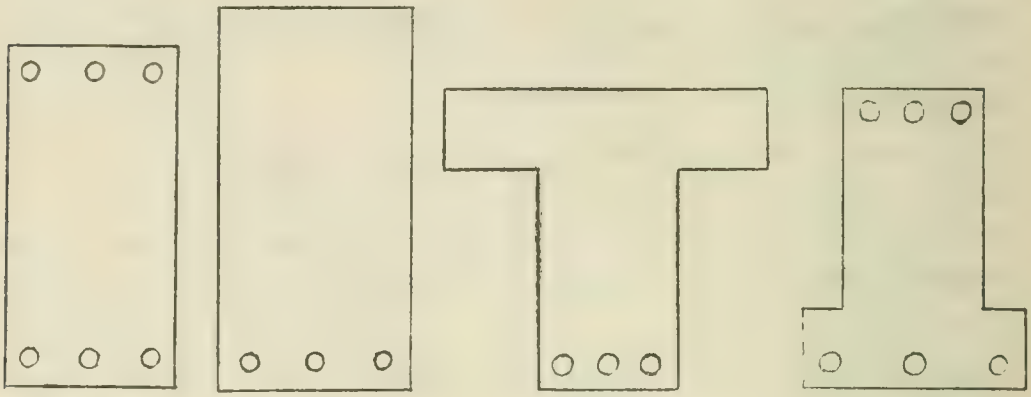


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

Le figure 5, 6, 7, 8 mostrano alla stessa scala i tipi calcolati ai n^i 9, 11, 12. Da un breve calcolo comparativo si ricaverebbe facilmente che i tipi più leggeri ed economici sono quelli a T e fra questi quello della fig. 7 con sola armatura inferiore.

Palermo, marzo 1905.

Su alcune esperienze di trasmissione senza fili di segnali a distanza.

Comunicazione del sig. NICCOLÒ PIZZARELLO
Tenente del Genio militare.

Ho l'onore di esporre a cotesta Rispettabilissima Accademia un esperimento che ho eseguito nel Gabinetto di Fisica del R. Liceo Leopardi di Macerata durante alcuni miei studî di trasmissioni senza fili di segnali a distanza ottenuti usando nella stazione trasmittente una macchina elettrostatica Wimshurst con dischi del diametro di quaranta centimetri e nella stazione ricevente un *coherer* con relativo *relais*.

Nella trasmissione di tali segnali alcuni sostengono che il mezzo in cui avviene la propagazione sia l'aria, altri la terra; certo che da tutti si è constatato che quest'ultima ha una grandissima importanza perchè la trasmissione di segnali avvenga. Questo forse perchè nel circuito in cui avviene la trasmissione è più importante la parte terra che la parte aria, ciò che potrebbe essere dimostrato dal fatto che senza un' ottima terra, anche con stazioni potentissime, non si riesce a trasmettere che a distanze molto piccole.

La disposizione che ho usato nella trasmissione di segnali a distanze variabili fra i dieci ed i cinquanta metri fu la seguente: uno degli elettrodi della macchina Wimshurst poteva o no essere munito di punta; l'altro era posto vicino ad una sfera in diretta comunicazione col suolo e da esso facevo scoccare la scintilla direttamente su tale sfera. Usando tale disposizione con scintillette piccolissime, talora della lunghezza inferiore al millimetro, l'apparato ricevente segnalava regolarmente ogni scintilla che scoccava. Invece se la scintilla, lunga anche qualche centimetro, scoccava fra i due elettrodi, di cui uno era in comunicazione con la terra e l'altro con una punta (che poteva anche non esservi, come nel caso sopradetto) l'apparato ricevente non dava alcun segnale.

Il *coherer* dell'apparato ricevente era da una parte congiunto a terra e dall'altra ad una punta o conduttore qualunque anche non perfettamente isolato.

Mentre però la punta della stazione trasmittente non aumentava nè diminuiva l'effetto, essa od il conduttore erano necessarì nella stazione ricevente perchè si avesse una regolarità perfetta e cioè perchè ad ogni scintilla della macchina elettrostatica si avesse un colpo all'apparato ricevente.

Tale regolarità per piccole distanze esisteva anche facendo funzionare la macchina elettrostatica senza bottiglie di Leyda.

Però la brevità del tempo che ebbi disponibile, e cioè un mese di licenza, non mi ha permesso di spingere le osservazioni a distanze superiori ai cinquanta metri, nè di constatare se la suddetta esperienza di gabinetto, eseguita in una serie di locali dello stesso fabbricato, ciò che potrebbe far ritenere trattarsi di un fenomeno di influenza, riesca anche a distanze maggiori e quando le stazioni trasmittente e ricevente siano in fabbricati diversi.

Quando mi sarà possibile ritornerò ad occuparmi del fenomeno osservato ed al quale giunsi perchè, essendomi dedicato a tali studì, ero partito dall'ipotesi che la trasmissione abbia la sua massima estrinsecazione nel mezzo terra.

Per il momento mi limito a segnalare il fenomeno stesso a cotesta Rispettabilissima Accademia, essendomi sembrato che possa avere una qualche importanza il fatto che una scintilletta di lunghezza inferiore al millimetro, prodotta da una macchina elettrostatica nelle condizioni e disposizioni suddette, possa aver azione su di un *coherer* grossolano e quindi non facilmente influenzabile, e ciò alla discreta distanza di circa cinquanta metri.

NICCOLÒ PIZZARELLO
Tenente del Genio militare.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 26 Marzo 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Pezzi, Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier, Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 12 marzo 1905.

Il Socio Cipolla chiedendo la parola sull'atto verbale, manifesta il suo rincrescimento per non aver potuto prendere parte all'ultima adunanza e porge ora personalmente le sue congratulazioni al Presidente per la nomina a Senatore del Regno. Il Presidente ringrazia.

Il Presidente fa omaggio d'un volume intitolato: *Mezzo secolo di vita della Unione tipografico-editrice torinese (già ditta Pomba e C.), 1855-1904,* Torino, 1905.

Il Direttore della Classe Ferrero, offre con parole di elogio un volume del prof. Paolo Revelli, *Il comune di Modica, descrizione fisico-antropica*, Milano-Palermo, Sandron, 1904.

Per gli *Atti* è presentata dal Socio De Sanctis una nota di Angelo Taccone, *Le fonti dell'episodio di Paride ed Enone in Quinto Smirneo.*

Raccoltasi quindi la Classe in adunanza privata, procede all'elezione di Socii e riesce eletto a Socio nazionale non residente, salvo l'approvazione sovrana, il sig. cav. Michele Kerbaker professore di storia comparata delle Lingue classiche e neo-latine, nella R. Università di Napoli.

LETTURE

Le fonti dell'episodio di Paride ed Enone in Quinto Smirneo (*Postom.*, X, vv. 259-489).

Nota di ANGELO TACCONE.

Intorno alle fonti dell'episodio di Paride ed Enone in Quinto Smirneo vennero emesse dagli studiosi, che ebbero ad occuparsi dell'argomento, opinioni e disparate ed incompiute: passare brevemente in rassegna le precedenti ipotesi, confutandole all'uopo, e metterne poscia innanzi una mia, il più che mi sia possibile intera, è il fine del presente lavoretto.

In una lunga nota del suo capitale lavoro sul romanzo greco (1) il Rohde sostenne che la trattazione particolareggiata dell'episodio di Enone Quinto la dedusse da uno speciale componimento alessandrino, ed abbastanza senza criterio. Come prova della affermazione sua arrecò, " oltre allo sproporzionato svolgimento di queste scene affatto secondarie nel poema di Quinto, la strana profezia di Hera e delle Moire (vv. 343 sgg.). Colà si predicono futuri avvenimenti d'ogni sorta (nozze di Elena e di Deifobo, ira di Eleno, ratto del Palladio), i quali poi, abbastanza bizzarramente, nel corso del poema di Quinto non s'incontrano affatto. Gli editori hanno cercato di spiegare in vario modo questa irregolarità (v. Tychsen, p. XLIII, Köchly, p. XXXI sg.); ma non si potrebbe spiegare nel modo più semplice così, ammettendo che questo tratto di una profezia del futuro da parte degli dei, tanto comune presso poeti alessandrini, sia stato da Quinto tolto da quel componimento poetico da cui egli tolse tutto l'episodio di Enone, senza ch'ei pensasse che una tale profezia, acconcia assai in una compiuta narrazione speciale come accenno a quanto

(1) *Der griechische Roman und seine Vorläufer* (Leipzig, 1876), p. 110, n. 5.

sarebbe accaduto dopo, era invece assolutamente assurda nel suo poema e non lo dispensava punto dalla minuta narrazione degli avvenimenti in essa preannunziati? „. La confutazione di questo specioso argomento del Rohde apparirà da quanto verrassi esponendo più tardi.

Contro l'ipotesi del Rohde levossi il Kehmptzow nelle pagine 38 e 39 della sua dissertazione *De Quinti Smyrnaei fontibus ac mythopoeia* (Kiliae, 1891), osservando che Quinto non avrebbe avuto affatto bisogno d'inspirarsi, come in realtà fece, per qualche punto dell'episodio suo ad Apollonio Rodio, se avesse così supinamente attinto ad una fonte alessandrina svolgente in modo particolareggiato la favola di Paride e d'Enone. Avvertiva ancora il giovane scrittore tedesco che la specie di morte che Enone incontra in Quinto è ben diversa da quella che ci vien riferita in tutte le narrazioni alessandrine a noi arrivate, e che, mentre in queste Paride invia alla sposa tradita un κῆρυξ, presso il poeta smirneo invece Paride stesso si reca a lei. Egli pertanto stimava " Quintum fontem mythographicum secutum exornasse narrationem pulcherrimis illis descriptionibus, quas apud Apollonium Rhodium invenisset „, anzi non si peritava d'affermare " Hunc vero (*scil.* Apollonium) cum aperte [Quintus] sequatur, probabile mihi fit eum nullum alium poeticum fontem inspexisse „. L'ipotesi del Kehmptzow, vera in parte, era, come vedremo, sotto un altro rispetto troppo esclusiva.

Una terza opinione sulle origini del nostro episodio, degna di essere più attentamente ancora delle altre ed esaminata e discussa, perchè passa ora per la più accettabile (1), è quella che manifestò Ferdinando Noack in un lavoro (2) cui diede occasione lo scritto del Kehmptzow, e che è ad un tempo recensione e rifacimento di esso con viste spesse volte assai differenti e con aggiunte molto considerevoli. Quivi, a p. 792, il Noack crede col Kehmptzow che Quinto non siasi inspirato, nel comporre il bell'episodio, ad una minuziosa trattazione alessandrina, sibbene ad un qualche brano poetico che descrivesse *similem*

(1) L'accoglie senz'altro anche l'autore del più recente studio sul nostro poeta, George Washington Paschal, *A study of Quintus of Smyrna* (Chicago, 1904), p. 77.

(2) *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1892, sem. 2°, nr. 20, pp. 769-812.

rem (Apollonio Rodio): discorda però dal precedente scrittore stabilendo che la materia della leggenda il poeta smirneo la conobbe non da sorgente mitografica, ma dall'*Alessandra* di Licofrone e dallo scoliaste dell'oscuro poemetto. Infatti, egli dice, la materia che a un dipresso Quinto poteva trovare in un manuale mitografico, ci è rispecchiata dalle narrazioni di Conone, di Apollodoro e di Partenio (che derivò da Nicandro): della favola di Enone d'Ellanico sappiamo troppo poco per occuparcene. Ma tutti i racconti dei tre mentovati scrittori offrono gravi differenze dalla versione seguìta da Quinto. E per vero ecco in qual modo si esprime Conone, *narr.* 23: .... ὕστερον δ' Ἀλέξανδρος ἐν τῇ πρὸς Ἀχαιοὺς ὑπὲρ Τροίας μάχῃ τρωθεὶς ὑπὸ Φιλοκτήτου, καὶ δεινῶς ἔχων δι' ἀπήνης ἐκομίζετο πρὸς τὴν Ἴδην. καὶ προεκπέμψας κήρυκα, ἐδεῖτο Οἰνώνης· ἡ δὲ ὑβριστικῶς μάλα τὸν κήρυκα διωσαμένη, πρὸς Ἑλένην ἰέναι Ἀλέξανδρον διωνείδιζε· καὶ Ἀλέξανδρος μὲν κατὰ τὴν ὁδὸν ὑπὸ τοῦ τραύματος τελευτᾷ· τὴν δὲ μήπω πεπυσμένην τὴν τελευτήν, μετάμελος ὅμως δεινῶς εἶχε· καὶ δρεψαμένη τῆς πόας, ἔθει φθάσαι ἐπειγομένη. ὡς δ' ἔμαθε παρὰ τοῦ κήρυκος ὅτι τεθνήκοι, καὶ ὅτι αὐτὴ αὐτὸν ἀνήρηκεν, ἐκεῖνον μὲν ἀντὶ τῆς ὕβρεως λίθῳ τὴν κεφαλὴν κατάξασα, ἀναιρεῖ, τῷ δ' Ἀλεξάνδρου νεκρῷ περιχυθεῖσα, καὶ πολλὰ τὸν κοινὸν ἀμφοῖν καταμεμψαμένη δαίμονα, ἑαυτὴν ἀνήρτησε τῇ ζώνῃ. Qui le differenze dalla narrazione quintiana sono evidenti e gravi assai: troviamo un κῆρυξ, che corre molte e varie peripezie, tanto da diventare un personaggio assai importante nell'azione, ed Enone poi muore non arsa sul rogo dello sposo, ma per strangolamento. — A sua volta Apollodoro, *Bibliot.*, III, 12, 6, racconta: .....τοξευθέντα (*scil.* Ἀλέξανδρον) ὑπὸ Φιλοκτήτου τόξοις Ἡρακλείοις, πρὸς Οἰνώνην ἐπανελθεῖν εἰς Ἴδην. ἡ δὲ μνησικακοῦσα θεραπεῦσαι οὐκ ἔφη. Ἀλέξανδρος μὲν οὖν εἰς Τροίαν κομιζόμενος ἐτελεύτα· Οἰνώνη δὲ μετανοήσασα τὰ πρὸς θεραπείαν φάρμακα ἔφερε· καὶ καταλαβοῦσα αὐτὸν νεκρὸν ἑαυτὴν ἀνήρτησεν. Qui pure, secondo il Noack, si riscontrerebbe un grave distacco dalla versione seguìta da Quinto in quanto Enone si strozza e non si lancia sulla pira. — Partenio infine, *narr.* 4ª (= Nicandro ἐν τῷ περὶ ποιητῶν), riferisce: .....ὁ δὲ (*scil.* Ἀλέξανδρος) .....διατοξευόμενος Φιλοκτήτῃ, τιτρώσκεται· ἐν νῷ δὲ λαβὼν τὸ τῆς Οἰνώνης ἔπος, ὅτε ἔφατο αὐτὸν πρὸς αὐτῆς μόνης οἷόν τε εἶναι ἰαθῆναι, κήρυκα πέμπει, δεησόμενον, ὅπως ἐπειχθεῖσα ἀκέσηταί τε αὐτόν, καὶ τῶν παρερ-

χομένων λήθην ποιήσηται, ἅτε δὲ κατὰ θεῶν βούλησίν τε ἀφικόμενον· ἡ δὲ αὐθαδέστερον ἀπεκρίνατο, ὡς χρὴ παρ' Ἑλένην αὐτὸν ἰέναι κἀκείνης δεῖσθαι· αὐτὴ δὲ μάλιστα ἠπείγετο ἔνθα δὲ ἐπέπυστο κεῖσθαι αὐτόν· τοῦ δὲ κήρυκος τὰ λεχθέντα παρὰ τῆς Οἰνώνης θᾶττον ἀπαγγείλαντος, ἀθυμήσας ὁ Ἀλέξανδρος ἐξέπνευσεν. Οἰνώνη δέ, ἐπεὶ νέκυν ἤδη κατὰ γῆς κείμενον ἐλθοῦσα ἴδεν, ἀνώμωξέ τε. καὶ πολλὰ κατολοφυραμένη διεχρήσατο αὐτήν. Quest'ultimo racconto, sebbene meno dramatico di quello di Conone per quanto riguarda il personaggio del κῆρυξ e meno determinato sulla specie di morte che si dà la Ninfa, si differenzia tuttavia assai dalla versione quintiana. — Vediamo per contro, continua il Noack, i versi di Licofrone in cui Cassandra profetizza la fine della misera sposa di Paride: vv. 61 sgg.:

αὐτὴ δὲ φαρμακουργός, οὐκ ἰάσιμον
ἕλκος δρακοῦσα τοῦ ξυνευνέτου λυγρόν,
γιγαντοραίστοις ἄρδισιν τετρωμένου
πρὸς ἀνθοπλίτου, ξυνὸν ὀγχήσει μόρον,
πύργων ἀπ' ἄκρων πρὸς νεόδμητον νέκυν
ῥοιζηδὸν ἐκβράσασα κύμβακον δέμας·
πόθῳ δὲ τοῦ θανόντος ἠγκιστρωμένη,
ψυχὴν περισπαίροντι φυσήσει νεκρῷ.

Vediamo ancora lo scoliaste del poemetto ai vv. 60 e 65. Al v. 60: φασὶν ὅτι βουλομένη τὸν Ἀλέξανδρον ἡ Οἰνώνη θεραπεῦσαι ἐκωλύθη ἐκ τοῦ πατρός· τελευτήσαντος δὲ ὕστερον προσενεγκοῦσα τὰ φάρμακα εὗρεν ἤδη ἐκπεπνευκότα. E al v. 65: τρωθέντα τὸν Ἀλέξανδρον ὑπὸ Φιλοκτήτου δυναμένη διὰ φαρμάκων τὸ ἕλκος ἰάσασθαι οὐκ ἰάσατο· τεθνηκότος δὲ αὐτοῦ, τῷ πόθῳ τῷ πρὸς αὐτὸν κατακρημνίσασα ἑαυτὴν συναπώλετο τῷ ἀνδρί. Orbene, ragiona il Noack, dai versi del poeta e dalle chiose dello scoliaste risulta chiaro che secondo la loro versione Enone vide Paride due volte, e precisamente la prima volta lo vide ferito d'insanabile piaga e la seconda morto: ciò appunto accade in Quinto. Ancora, secondo quella versione, il rifiuto della sposa tradita a guarire il moribondo marito che a lei ricorreva, provenne più che da malo animo di lei, dalla volontà del padre: or che tale sia stato a un dipresso anche il pensiero di Quinto lo mostra, sempre secondo il Noack, il primo emistichio del v. 435 del libro X delle *Postomeriche*: " ἄζετο γὰρ πατέρα σφόν ". Ancora,

il κῆρυξ manca sia nella narrazione di Quinto sia in quella di Licofrone e dello scoliaste. Da ultimo, ciò che più importa secondo il Noack (e sarebbe in realtà la prova più convincente se le cose stessero davvero com'egli le presenta), la fine di Enone è quasi uguale in Quinto e nel racconto del poeta alessandrino e del suo chiosatore. Ed infatti in Quinto Enone, appena può sperare di non venir più osteggiata dai suoi, che dormono, nell'esecuzione del disegno che ha maturato, si slancia fuori dalla casa paterna colla velocità di un turbine, nè frappongono indugio alla sua corsa paura di belve od asprezze di terreno o corsi d'acqua, ma ella corre dritto dritto al luogo ove a Paride sono venute meno le forze: ciò appunto, stando al Noack, è significato nel racconto di Licofrone dalle parole πύργων ἀπ' ἄκρων πρὸς νεόδμητον νέκυν | ῥοιζηδὸν ἐκβράσασα κύμβακον δέμας e nella chiosa dello scoliaste dall'espressione κατακρημνίσασα ἑαυτήν. In Quinto poi Enone si getta sulla pira di Paride: la differenza tra Quinto e Licofrone, crede il Noack, risulta tuttavia qui più leggera di quanto parrebbe a prima vista, se si considerano gli ultimi due degli addotti versi: πόθῳ δὲ τοῦ θανόντος ἠγκιστρωμένη, | ψυχὴν περισπαίροντι φυσήσει νεκρῷ: infatti secondo Licofrone la sposa di Paride giunge semplicemente un istante prima che il cadavere del marito sia collocato sulla pira e muore su di esso di desiderio e di disperazione.

Esposta così ed illustrata minuziosamente l'ipotesi del Noack, fino ad oggi creduta definitiva, rileviamone le gravi mende. Anzitutto non è difficile rilevare come il ravvicinamento dei due racconti di Licofrone e di Quinto per quanto riguarda la fine di Enone non sia gran che felice. E per vero nè sul significato di κατακρημνίσασα ἑαυτήν nè su quello di πύργων ἀπ' ἄκρων..... | ῥοιζηδὸν ἐκβράσασα κύμβακον δέμας vi può essere dubbio alcuno: tanto le parole del chiosatore quanto quelle del poeta indicano all'evidenza che il mezzo scelto da Enone per metter fine a' suoi giorni è quello di buttarsi giù da un luogo elevato. Onde perfettamente a ragione il von Holzinger (1) in nota al v. 66 paragonava col passo di Licofrone l'imitazione di

(1) *Lycophronis Alexandra.* Griechisch und deutsch mit erklärenden Anmerkungen. Leipzig, Teubner, 1895.

Museo, vv. 339-40 (Hero si precipita dall'alto sul cadavere di Leandro):

ῥοιζηδὸν προκάρηνος ἀπ' ἠλίβάτου πέσε πύργου
κάδ δ' Ἡρὼ τέθνηκεν ἐπ' ὀλλυμένῳ παρακοίτῃ.

Tutto quanto si può concedere al Noack nell'interpretazione di questo passo è che i πύργοι ἄκροι di Licofrone non designino una costruzione dovuta alla mano dell'uomo, sibbene i dirupati fianchi d'una montagna. Sulla fine di Enone adunque non quasi perfetto accordo, ma pieno disaccordo sussiste fra le versioni del poeta smirneo e dell'alessandrino.

Altri due dei quattro argomenti del Noack si abbattono con poco stento: il κῆρυξ, che manca tanto in Quinto quanto in Licofrone e nel suo scoliaste, non s'incontra nemmeno in Apollodoro, secondo la narrazione del quale accade pure che Enone, come in Quinto, vegga due volte Paride, ferito di piaga insanabile la prima, morto la seconda. Per tre pertanto dei quattro punti messi in rilievo dal Noack corrono tra Quinto ed Apollodoro le stesse relazioni che tra Quinto e Licofrone, e sono in due casi relazioni di perfetta somiglianza, anzi d'identità, nel terzo relazioni di contrasto.

Resta solo a vantaggio dell'ipotesi del Noack il parallelo che egli ha stabilito fra le parole dello scoliaste ἐκωλύθη ἐκ τοῦ πατρός ed il primo emistichio del v. 435 in Quinto ἅζετο γὰρ πατέρα σφόν. Ma anche questo ha la sua principale ragion d'essere solo nel preconcetto del Noack. E per vero, se, invece di togliere da un contesto quelle parole che da sole facevano bensì al caso suo, ma potevano anche rendere un pensiero non conforme alla realtà, il Noack avesse aggiunto anche le parole che più da vicino circondano quell'emistichio quintiano, l'idea del poeta smirneo sarebbe apparsa ben differente da quella dello scoliaste Licofrone. Quinto infatti ne dice che Enone

κουριδίοιο δ' ἀναπλήσαντος ὄλεθρον
μνωομένη, ἅτε κηρὸς ὑπαὶ πυρὶ τήκετο λάθρῃ
— ἅζετο γὰρ πατέρα σφὸν ἰδ' ἀμφιπόλους ἐυπέπλους —

Non era dunque *timore* dell'intervento dell'autorità del padre che provava l'eroina di Quinto, la quale autorità le impedisse

di portar soccorso a colui che il dignitoso vecchio riputavane indegno; era *vergogna* di mostrare alle persone che vivevano con lei sull'Ida, e cioè tanto al padre quanto alle ancelle, e non al padre in particolar modo, quel sentimento di compassione, che la misera giudicava debolezza non confacente colla severità dianzi dimostrata allo sposo; ed a cagion di essa vergogna dapprima *nascondevasi* per piangere e struggersi come cera al fuoco al pensiero che l'infelice Paride correva a gran passi verso la morte, e più tardi, quando nessuno sguardo canzonatore poteva più scorgerla, volava sulle orme dello sposo per recargli la medicina nota a lei sola. Il concetto di Quinto adunque fu molto diverso da quello dello scoliaste di Licofrone. Resta tuttavia, e su ciò avrebbe forse potuto più legittimamente il Noack insistere, la menzione del padre dell'eroina comune a Quinto ed allo scoliaste, il quale attribuisce al vecchio un carattere identico a quello che risulta delineato dal v. 59 del poeta alessandrino (episodio di Corito - πατρὸς μομφαῖσιν ἠγριωμένη). Ma ciò non turba minimamente la conclusione a cui io credo si debba venire. Come in numerosi altri casi (e l'hanno dimostrato abbastanza bene il Kehmptzow ed il Noack) Quinto prese la materia delle sue leggende da un manuale mitografico, così pure fece a proposito della favola di Paride e di Enone, e la fonte mitografica a cui attinse fu a un dipresso quella che a noi giunse in Apollodoro. Ma poichè non sarebbe proprio niente assurdo ammettere che Quinto conoscesse anche l'*Alessandra* di Licofrone, così potè avvenire che il nostro poeta, nello svolgere il suo episodio con finezza d'osservazione psicologica tanto superiore a quella di cui per lo più è capace, si ricordasse della figura del padre di Enone in Licofrone, e per effetto di quel ricordo ne inserisse nel proprio racconto, sebbene con tinte diverse, la menzione. Dico *potè avvenire*, e lo dico per fare all'ipotesi del Noack il massimo possibile delle concessioni; perchè, a mio modo di vedere, a dar motivo all'accenno di Quinto al padre della Ninfa dovette bastare una notizia del genere di quella che troviamo in Apollodoro " Ἀλέξανδρος δὲ [γαμεῖ] Οἰνώνην τὴν Κεβρῆνος τοῦ ποταμοῦ θυγατέρα „ od un' altra ben poco più particolareggiata. Quanto alla specie di morte che Enone si dà presso Quinto, non occorre grande acume per scorgere che la versione del nostro poeta, diversa da tutte le altre, ha la sua

origine nella fantasia di lui: a questa ipotesi è valido sostegno la menzione che Quinto, abbastanza ingenuamente, fa ai vv. 480 sgg. della fine di Evadne sulla pira dello sposo Capaneo (1), facendo per tal modo sfoggio di erudizione mitologica, ma dimostrando nel medesimo tempo la poca originalità del suo volo inventivo.

Infine, acciocchè non si possa muovere a noi l'accusa che facemmo ad altri, di non aver recato sulle fonti dell'episodio quintiano un giudizio completo, ci resta ad esprimere la nostra opinione su quei versi 332-360 che i filologi considerarono generalmente come intrusi. Già vedemmo da principio di che essi trattino e come il Rohde pensasse che le cose in essi narrate fossero state da Quinto senza criterio alcuno accolte nel suo episodio, laddove avrebbero dovuto esserne escluse. Il Köchly (2) dapprima pensò che dopo il libro XI fossero caduti due libri, ove il poeta dovea aver narrato distesamente le vicende accennate come future nel colloquio di Hera con le Ore, o che (la qual cosa torna lo stesso) Quinto, non avendo composto i libri del suo poema l'un dopo l'altro, ma saltuariamente, fosse poi stato dalle vicende della sua vita o dalla morte impedito di aggiungere *eas duas rhapsodias*. Il Kehmptzow (3) accettò quest'ipotesi del Köchly, riducendo però ad un libro la supposta lacuna, poichè " uno libro illae res satis verbose explicari potuerunt ", ed inveì violentemente contro quella seconda opinione messa innanzi dal Köchly, in una parte della quale io sono per contro fermamente persuaso che stia la verità. Scriveva infatti il Köchly a p. XXXII dei citati *Prolegomeni*: " Etenim cum fabula illa de Heleno Argivorum adiutore aeque atque altera de Palladii inexpugnabili tutela non solum ab Homero prorsus esset aliena, sed etiam, illa quidem fabula Calchanti omnia huiuscemodi suadenti, haec Neoptolemo et Philoctetae coniunctim Trojae expugnandae paribus repugnare quodammodo videretur, cum porro

(1) Apollodoro, *Bibliot.*, III, 7, 1, 3: τῆς Καπανέως δὲ καιομένης πυρᾶς, Εὐάδνη, ἡ Καπανέως μὲν γυνὴ θυγάτηρ δὲ Ἴφιος, ἑαυτὴν ἐμβαλοῦσα συγκατεκαίετο.

(2) Cfr. *Prolegg.* all'ed. maggiore di Q. (Lipsia, Weidmann, 1850), pp. XXXI-II.

(3) Diss. cit., p. 40.

ad eas fabulas prolixe enarrandas vix similia ex Homero peti possent, omittere ea homo diligens aut noluit ut nimis pervagatas, aut non potuit ut conjunctas cum Deiphobi et Helenae nuptiis, quas noverat Homerus. Itaque mediam quandam excogitavit viam, ut has res necessario cum Paridis morte conjunctas Deum reginae ori inderet, ex qua commemoratione eas certissime suo tempore factas esse lectori credendum reliquit „. D'accordo col Kehmptzow che il pensare che Quinto tralasciasse di narrare distesamente certe vicende soltanto perchè nessun accenno neppure lontano ad esse aveva trovato in Omero, sia supposizione assurda, che poteva venire in mente al Köchly solo posto il suo preconcetto che Quinto da nessun'altra fonte avesse attinto se non dai poemi omerici; d'accordo pure che assurde sono le altre due ragioni speciali, sottoposte a questa prima, addotte dal Köchly; ma la verità intorno alla presenza di questi versi 332-360, che a prima vista ci fan l'effetto di roba come staccata dal contesto e campata in aria, sta proprio in ciò che, trattandosi per una parte di notizie che correvano nei racconti della caduta d'Ilio, e per l'altra di vicende che Quinto non credette opportuno narrare distesamente, egli si attenne appunto ad una via di mezzo ed imaginò questa scena, conforme al gusto della poesia alessandrina, di Hera che discorre brevemente con le Ore di alcuni fatti i quali avverranno in conseguenza della morte di Paride (nozze di Elena e Deifobo, ira di Eleno), ed ai primi due fece poi che la dea aggiungesse un accenno al terzo (ratto del Palladio) sia perchè nella fonte mitografica cui qui attinse lo trovò accennato di seguito agli altri due, sia anche perchè esso connettevasi abbastanza logicamente col secondo: infatti i Greci si accinsero all'impresa di rapire il Palladio per aver udito dalla bocca dell'irato vate troiano che fino a quando quel simulacro divino fosse rimasto in Troia, essa non avrebbe potuto essere presa dai nemici. Per convincersi della verità di coteste mie ipotesi, che modificano alquanto la seconda opinione espressa dal Köchly, basta dare un' occhiata alla narrazione dell'*Epitoma Vaticana* e dei *Frammenti Sabbaitici* (1). Non differendo qui la seconda fonte dalla prima se non per inezie di nessun conto, mi limito a rife-

(1) Vedi Wagner, *Mythographi Graeci*, vol. I, pp. 201-208.

rire il testo di quella: τούτου (*scil.* Ἀλέξάνδρου) δὲ ἀποθανόντος εἰς ἔριν ἔρχονται Ἕλενος καὶ Δηίφοβος ὑπὲρ τῶν Ἑλένης γάμων. προκριθέντος δὲ τοῦ Δηιφόβου Ἕλενος ἀπολιπτὼν Τροίαν ἐν Ἴδῃ διετέλει. εἰπόντος δὲ Κάλχαντος Ἕλενον εἰδέναι τοὺς ῥυομένους τὴν πόλιν χρησμούς, ἐνεδρεύσας αὐτὸν Ὀδυσσεὺς καὶ χειρωσάμενος ἐπὶ τὸ στρατόπεδον ἤγαγε· καὶ ἀναγκαζόμενος ὁ Ἕλενος λέγει πῶς ἂν αἱρεθείη ἡ Ἴλιος, [καὶ] πρῶτον μὲν....., τρίτον εἰ τὸ διιπετὲς παλλάδιον ἐκκλαπείη· τούτου γὰρ ἔνδον ὄντος οὐ δύνασθαι τὴν πόλιν ἁλῶναι..... Ὀδυσσεὺς δὲ μετὰ Διομήδους παραγενόμενος νύκτωρ εἰς τὴν πόλιν Διομήδην μὲν αὐτοῦ μένειν εἴα, αὐτὸς δὲ ἑαυτὸν αἰκισάμενος καὶ πενιχρὰν στολὴν ἐνδυσάμενος, ἀγνώστως εἰς τὴν πόλιν εἰσέρχεται ὡς ἐπαίτης. γνωρισθεὶς δὲ ὑπὸ Ἑλένης δι' ἐκείνης τὸ παλλάδιον ἐκκλέψας καὶ πολλοὺς κτείνας τῶν φυλασσόντων ἐπὶ τὰς ναῦς μετὰ Διομήδους κομίζει (1).

Riassumendo, ecco adunque la mia opinione sulle fonti della *materia* dell'episodio: fonte precipua un manuale mitografico, a cui Quinto attinse anche per i famosi vv. 332-360, e che dovette rassomigliare assai alla *Biblioteca* d'Apollodoro, pur essendo molto probabilmente più ampia; forse, per un piccolo punto, l'*Alessandra* di Licofrone; infine, per la specie di morte che Enone s'infligge, la fantasia del poeta aiutata da una reminiscenza mitologica.

Rimane a dire qualche cosa intorno ai modelli ai quali il poeta smirneo inspirossi nello svolgimento dei particolari dell'episodio.

Già il Köchly, a proposito di Enone che come turbine esce dalla casa paterna ed impavida corre al luogo ove giace lo sposo, chiosava fuggevolmente (2): " In his et sqq. ante oculos habuisse videtur Medeam domo prorumpentem apud Apoll. Rhod. IV, 40 sqq. ", e poco più sotto (3): " Etiam hanc Lunae

---

(1) Quinto mette in luce nel racconto del ratto del Palladio un particolare che qui manca (v. 352) o, meglio, è indicato vagamente, senza determinazione di nomi, con le parole πολλοὺς κτείνας τῶν φυλασσόντων. La fonte mitografica di Quinto era su questo punto più precisa di quella giunta a noi. Del resto nessuna meraviglia, perchè questa non è se non un sunto di un lavoro che, a sua volta, era certamente sunto di altra opera più ampia.

(2) Ed. maggiore, n. al v. 440.

(3) Nota al v. 454.

mentionem mutuatus esse videtur ab Apoll. Rhod. IV, 54-65, ubi ab illa Endymionis memoria diserte recolitur. Sed discrimen in eo est, quod Luna Apollonii deridet, Luna Quinti miseratur amore afflictam „. Il Kehmptzow ricordava i raffronti del Köchly ed aggiungeva come l'accenno ad Endimione fosse in entrambi i poeti (1): Ap. R., IV, 58 sg.

οὐ δ' οἴη καλῷ περιδαίομαι Ἐνδυμίωνι
μνησαμένη φιλότητος

e Quinto, X, 455

μνησαμένη κατὰ θυμὸν ἀμύμονος Ἐνδυμίωνος.

Il Noack limitavasi a far menzione dei raffronti del Köchly e del Kehmptzow.

Qualche determinazione maggiore a proposito del parallelo Q., X, 440 sgg. — Ap. R., IV, 40 sgg., sarà più opportuna del fuggevole tocco dei precedenti studiosi del nostro argomento. Nell'andamento generale le due scene si rassomigliano assai, nei particolari sono talvolta identiche, tal altra invece opposte, ma anche in questo secondo caso si vede che Quinto ebbe presente il pensiero di Apollonio ed espresse proprio il contrario di quello perchè s'avvide quanto bene esso si adattasse alla propria eroina mossa da sentimenti in parte identici, ma in parte disparatissimi da quelli dell'eroina d'Apollonio. Entrambe infatti sono agitate da veemente amore, onde tanto l'una quanto l'altra corre celerissima per raggiungere al più presto l'oggetto amato: Ap. R., v. 43

γυμνοῖσιν δὲ πόδεσσιν ἀνὰ στεινὰς θέεν οἴμους,

v. 47

καρπαλίμως δ' ἀίδηλον ἀνὰ στίβον.....

v. 66

τὴν δ' αἶψα πόδες φέρον ἐγκονέουσαν,

e Q., v. 440

φέρον δέ μιν ὠκέα γυῖα,

(1) Diss. cit., pp. 30-31.

v. 446

ῥίμφα θέουσα διήνυε μακρὰ κέλευθα,

vv. 448-9

οὐδέ τί οἱ κάμε γούνατ' ἐλαφρότεροι δ' ἐφέροντο
ἐσσυμένης πόδες αἰέν.

Per contro, mentre Medea, fanciulla che fugge dalla casa paterna per gettarsi nelle braccia di uno straniero, essendo conscia di non compiere un'azione del tutto lodevole, teme (cfr. vv. 47-8

ἔκτοθι πύργων
ἄστεος εὐρυχόροιο φόβῳ ἵκετ',

e v. 53

τρομερῷ δ' ὑπὸ δείματι πάλλετο θυμός),

Enone invece, donna che quasi prevede di non giungere più in tempo a salvare lo sposo odiato sì in quanto infedele, ma, fatta astrazione dall'infedeltà, adoratissimo, uscita dalla casa paterna non deve temere di nulla, di nulla fuorchè d'un ritardo alla sua corsa, onde vola senza pensare alle belve che potrebbero farlesi incontro, senza neppur badare al roccioso terreno che le rompe i piedi, ed alle acque dei torrenti che potrebbero trascinarla via: vv. 450 sgg.

οὐδέ τι θῆρας ἐδείδιε λαχνήεντας
ἀντομένους ὑπὸ νύκτα, πάρος μέγα πεφρικυῖα·
πᾶσα δέ οἱ λασίων ὀρέων ἐστείβετο πέτρη
καὶ κρημνοί, πᾶσαι δὲ διεπρήσσοντο χαράδραι.

Ma ben più che ad Apollonio Rodio il nostro poeta, nel trattare i particolari dell'episodio presente, attinse inspirazione all'inesauribile fonte omerica, della quale a gran torto non tennero conto alcuno il Kehmptzow ed il Noack, e troppo poco lo stesso Köchly (1).

---

(1) Egli limitossi infatti a confrontare Q., vv. 378-9 e Ω, 245 sg.; Q., v. 395 e υ, 63 sgg., 77, 79 (dietro la scorta del Heyne); Q., 408 sgg. e Τ, 301-2.

E per vero la scena che segue ai vv. 369 sgg. è al tutto ricalcata da quella che viene descritta ai vv. 720 sgg. dell'ultimo libro dell'Iliade. In Omero piangono il morto Ettore gli ἀοιδοί, le donne, e poi specialmente la moglie, la madre, Elena. Agli ἀοιδοί omerici corrispondono in Quinto le Ninfe (v. 459), alle donne le donne (vv. 407 sgg.), alla madre la madre (vv. 372-384), alla moglie la seconda consorte Elena: più tardi la prima consorte, Enone, non si limita alle querele, ma fa sul cadavere dell'infedele e pur amato sposo il sacrifizio della vita. Nè è difficile riscontrare, per quanto il carattere di Paride ben diverso da quello d'Ettore lo poteva permettere, accordo tra i due poeti nei singoli pensieri. Che se poi dalla citata scena omerica passiamo a considerare altri luoghi dei due grandi poemi epici, l'imitazione omerica da parte del poeta smirneo appare ancora più evidente. Recherò esempi dell'uno e dell'altro caso. — In Omero Ettore è il più caro dei figli che Ecuba abbia partorito (v. 748): analogo concetto in Quinto, ove Paride, dopo la morte di Ettore, è per Ecuba πολὺ φέρτατος ἄλλων | παίδων (vv. 374-5). — Le sventure che sono piombate sulla casa di Priamo non vennero senza il volere degli dei (Q., v. 377): nell'ἀναγνωρισμὸς Ὀδυσσέως ὑπὸ Πηνελόπης (vv. 210 sgg.)

θεοὶ δ' ὤπαζον ὀιζύν,
οἳ νῶιν ἀγάσαντο παρ' ἀλλήλοισι μένοντε
ἥβης ταρπῆναι καὶ γήραος οὐδὸν ἱκέσθαι.

— Ecuba vorrebbe non aver visto λοίγια ἔργα dell'Αἶσα, e preferirebbe essere morta prima (Q., vv. 378-9): così pure Priamo in Ω, 244 sgg.

αὐτὰρ ἐγώ γε,
πρὶν ἀλαπαζομένην τε πόλιν κεραϊζομένην τε
ὀφθαλμοῖσιν ἰδεῖν, βαίην δόμον Ἄιδος εἴσω.

— Ecuba si aspetta, dopo la morte di Paride, mali ancor maggiori di quelli che già l'hanno colpita, e cioè la presa d'Ilio, l'uccisione di tutti i suoi difensori e la schiavitù delle donne e dei fanciulli (Q., vv. 380 sgg.): tali sciagure appunto si attende Andromaca dopo l'uccisione di Ettore (vv. 728 sgg.). — Mentre Ecuba sta facendo amari lamenti sulla recente morte di Paride,

Priamo, che nulla ancora sa della funebre novella, continua a struggersi di dolore sulla tomba del prode Ettore:

τὸν γὰρ δὴ τεκέων περὶ πάντων τῖε μάλιστα,
οὕνεκ' ἄριστος ἔην καὶ ἐρύετο δούρατι πάτρην·
τοῦ πέρι πευκαλίμας ἀχέων φρένας οὔ τι πέπυστο

(Q., vv. 385 sgg.). Tale condotta del vecchio re troiano appare evidentemente inspirata a quei versi omerici ove (Ω, 248 sgg.) Priamo rimprovera i nove figli che gli rimangono e mostra che sarebbe lieto se invece di Ettore essi tutti quanti giacessero morti presso le navi nemiche. — Presso Quinto Elena dice di Paride:

ἐμοὶ καὶ Τρωσὶ καὶ αὐτῷ σοὶ μέγα πῆμα (v. 392):

il poeta smirneo si è qui ricordato senza dubbio dei rimbrotti di Ettore (vv. 326 sgg.) e di Elena (vv. 350 sgg.) al rispettivo fratello e marito nel libro sesto dell' Iliade. — L'augurio che Elena fa a se stessa nei vv. 395-6 di Quinto fu dal nostro poeta preso da quello ch'ella medesima si fa in Z, vv. 345 sgg., o dall'altro che Penelope si ripete due volte in υ, 63 sgg. — Le donne troiane, che mentre piangono Paride si ricordano ciascuna de' proprî affanni (Q., 408 sgg.), richiamano alla memoria le donne che in T., vv. 301-2

ἐπὶ... στενάχοντο.....
Πάτροκλον πρόφασιν, σφῶν δ' αὐτῶν κήδε' ἑκάστη.

— Infine anche Enone si trova, come Penelope (vedi i vv. 210 sgg. di ψ dianzi addotti), delusa nella speranza, che avea nutrito un tempo, di arrivare in compagnia dell'amato sposo

βιότου κλυτὸν οὐδὸν.....
αἰὲν ὁμοφρονέσυσα· θεοὶ δ' ἑτέρωσε βάλοντο.

Con tali miei abbastanza numerosi raffronti fra Quinto Smirneo ed i poemi omerici spero di aver rivendicato a questi la importanza che ebbero come fonti dei singoli particolari nello svolgimento dell'episodio di Paride ed Enone presso il nostro poeta.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Aprile 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, JADANZA, SPEZIA, GUIDI, MORERA, SEGRE, PEANO, GRASSI, GUARESCHI, PARONA, MATTIROLO, FOÀ e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica le lettere dei signori A. DASTRE, G. HAUG, M. LÉVY, W. ENGELMANN, S. ARRHENIUS, E. RAY LANKESTER, W. RITTER, E. SUESS, i quali ringraziano per la nomina a Socii corrispondenti dell'Accademia.

Il Presidente annunzia la morte del Socio corrispondente Ing. prof. Pietro TACCHINI e pronunzia parole di vivo compianto per la perdita dell'illustre consocio.

Il Presidente comunica l'invito dell'Unione Zoologica italiana al convegno che si terrà nell'isola d'Elba e delega i Soci SALVADORI e CAMERANO a rappresentare l'Accademia.

Il Presidente comunica pure l'invito al Congresso botanico che si terrà a Vienna nel giugno 1905 e delega il Socio MATTIROLO a rappresentare l'Accademia.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° E. E. LEVI, *Sulla struttura dei gruppi finiti e continui*, presentata dal Socio SEGRE a nome del Socio nazionale non residente prof. Luigi BIANCHI;

2° Dott. P. L. Prever, *Sulla fauna nummulitica della scaglia nell'Appennino centrale,* dal Socio Parona;

3° F. Castellano, *Il birapporto di quattro punti nello spazio con applicazioni alla Geometria del Tetraedro,* dal Socio Peano.

Il Socio Mattirolo a nome anche del Socio Parona, legge la relazione intorno alla memoria del prof. E. Martel, intitolata: *Contribuzione all'anatomia del fiore delle Ombrellifere.* La Classe all'unanimità approva la relazione favorevole e a voti segreti pure alla unanimità approva la stampa della memoria del prof. Martel nel volume delle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Sulla struttura dei gruppi finiti e continui.

Nota di EUGENIO ELIA LEVI.

1. — Nelle pagine seguenti mi propongo di dimostrare il teorema:

Ogni gruppo G *che non sia semisemplice nè integrabile si scompone in un gruppo invariante integrabile ed in un gruppo semisemplice.*

Questo teorema fu enunciato dal Killing (1) nelle sue memorie sulla composizione dei gruppi. La dimostrazione del Killing però si fonda, come notò il Cartan (2), sopra un teorema inesatto. Nella tesi del Cartan, in cui si trovano le dimostrazioni rigorose di gran parte dei risultati del Killing, questo teorema non si trova dimostrato che in un caso particolare. Noi lo dimostreremo in generale partendo dai risultati ottenuti dal Killing e dal Cartan (3).

2. — Preciserò anzitutto l'enunciato medesimo richiamando in pari tempo alcuni risultati noti dei due autori citati.

Osserviamo col Cartan che se un gruppo G non è semisemplice e non è integrabile possiede *un massimo sottogruppo invariante integrabile* Γ; cui è associato un gruppo semisemplice $g = \frac{G}{\Gamma}$ meriedricamente isomorfo al gruppo G (4). Il determinante caratteristico di G rispetto ad una operazione qualunque contiene quale fattore il determinante caratteristico di g rispetto

(1) W. Killing, *Zusammensetzung von Transformationsgruppen*, " Math. Annalen ", Bd. 34, pag. 107. Le altre memorie del Killing sono nei volumi 31, 33, dei " Math. Annalen ". — Secondo il Killing un gruppo è detto semisemplice quando è composto di più gruppi semplici a due a due permutabili.

(2) Cartan. Thèse. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, pag. 115, p. 128.

(3) Mi riferirò per solito al Cartan, rimandando ad esso per la terminologia usata e per le ulteriori citazioni delle memorie del Killing.

(4) Cartan, pag. 97, teorema I.

all'operazione corrispondente; questa osservazione serve al Cartan per distinguere le radici non nulle dell'equazione caratteristica di G rispetto ad una data operazione in due specie: 1° *radici principali* che appartengono all'equazione caratteristica di g rispetto alla operazione corrispondente; 2° *radici secondarie* che non appartengono a tale equazione [1].

Tutte le operazioni infinitesime di G che, nella forma ridotta rispetto ad una operazione generica ordinatrice, appartengono alle radici secondarie, appartengono a Γ. Di più poichè le radici dell'equazione caratteristica di un gruppo semisemplice sono tutte semplici [2], se una radice ω_α è multipla secondo m_α, alla radice ω_α appartengono $m_\alpha - 1$ operazioni infinitesime indipendenti appartenenti a Γ. Tutte le rimanenti operazioni appartenenti a ω_α sono combinazioni lineari di una operazione di G non di Γ appartenente ad ω_α e di queste $m_\alpha - 1$ operazioni di Γ.

L'analogo si può dire delle operazioni corrispondenti alla radice 0, che formano un gruppo che chiameremo col Cartan gruppo γ [3]: se m_0 è la multiplicità della radice 0, l il rango del gruppo semisemplice g, esisteranno $m_0 - l$ operazioni comuni a Γ e γ; ed una qualunque altra operazione appartenente a γ si otterrà come combinazione lineare di queste $m_0 - l$ di Γ e γ e di altre l indipendenti.

Con ciò è ben evidente che il nostro teorema esprime che *si possono sempre scegliere* l *operazioni nel gruppo* γ *ed una corrispondentemente a ciascuna radice principale non nulla per modo che esse formino le operazioni generatrici di un gruppo semisemplice oloedricamente isomorfo al gruppo* g, l indicando come sempre il rango di g.

Le operazioni di G saranno tutte congrue all'operazioni di questo sottogruppo rispetto al gruppo Γ come modulo: onde si avrà la voluta decomposizione.

3. — Per le proprietà dei gruppi semisemplici le radici principali sono a due a due uguali ed opposte: alternando due

(1) Cartan, pag. 99.

(2) I risultati relativi ai gruppi semplici e semisemplici sono contenuti in Cartan, cap. IV e V: essi saranno sovente necessari in seguito.

(3) Cartan, pag. 34, teorema VII, e pag. 38, n. 11.

operazioni appartenenti a due radici uguali opposte si ha una operazione appartenente alla radice 0, e viceversa una qualunque operazione appartenente alla radice 0 in un gruppo semisemplice è una combinazione lineare di operazioni che si possono ottenere quali alternate di operazioni appartenenti a radici opposte. Quindi se noi avremo scelto in G le operazioni appartenenti alle varie radici principali non nulle con cui vogliamo costruire il sottogruppo semisemplice, quelle appartenenti a γ saranno completamente determinate.

D' altra parte il Cartan ha dimostrato [1] che se ω_α e $\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha$ sono due radici principali uguali opposte della equazione caratteristica di G e se X_α è una operazione arbitraria appartenente alla radice ω_α e non appartenente a Γ, si può sempre associare ad X_α una operazione $X_{\alpha'}$ appartenente alla radice $-\omega_\alpha$ (e necessariamente non a Γ) tale che, posto $(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha$, ($Y_\alpha$ sarà una operazione di γ e non di Γ) si abbia:

$$(Y_\alpha X_\alpha) = a_{\alpha\alpha} X_\alpha \quad (Y_\alpha X_{\alpha'}) = -a_{\alpha\alpha} X_{\alpha'}$$

$a_{\alpha\alpha}$ essendo il valore di ω_α corrispondentemente ad Y_α assunta come operazione ordinatrice. Di più $X_{\alpha'}$ è completamente determinata quando sia fissata arbitrariamente X_α, e quindi è pure determinata Y_α.

Per dimostrare il nostro assunto convien dimostrare che, se $\pm\omega_\alpha, \pm\omega_\beta \ldots$ sono le radici principali dell'equazione caratteristica di G, si possono prendere le operazioni $X_\alpha X_\beta \ldots$ in modo che, determinate $X_{\alpha'} X_{\beta'} \ldots$ e quindi $Y_\alpha Y_\beta \ldots$ nel modo sopradescritto, e detto col Cartan [2] $a_{\alpha\beta}$ il valore di ω_α relativo alla operazione Y_β di γ, si abbia:

$$(Y_\beta X_\alpha) = a_{\alpha\beta} X_\alpha \quad (Y_\beta X_{\alpha'}) = -a_{\alpha\beta} X_{\alpha'}$$

e che:

$$(X_{\alpha'} X_{\beta'}),\ (X_\alpha X_{\beta'}),\ (X_{\alpha'} X_\beta),\ (X_{\alpha'} X_{\beta'}),\ (Y_\alpha Y_\beta) \ldots$$

siano combinazioni lineari di X_α, $X_{\alpha'}$, $Y_\alpha \ldots$

---

[1] Cartan, pag. 99-103; vi è supposto $\omega_\alpha = 2$. Confronta specialmente l'enunciato di pag. 103 in cui risulta che X_α è arbitraria. Che fissata X_α sia determinata $X_{\alpha'}$ risulta dalle equazioni della fine di pag. 102.

[2] Cartan, pag. 55, formula (6).

Quest'ultima condizione possiamo a sua volta semplificare ricorrendo all'isomorfismo fra g e G. Se ω_α ed ω_β sono radici dell'equazione caratteristica di g (e quindi radici principali di G) e se Ξ_α, Ξ_β sono le operazioni corrispondenti di g, l'alternata $(\Xi_\alpha \Xi_\beta)$ è nulla se $\omega_\alpha + \omega_\beta$ non è radice, ed è l'operazione $\Xi_{\alpha+\beta}$ di g appartenente ad $\omega_\alpha + \omega_\beta$ se questa è radice [1]. L'isomorfismo fra G e g trasporta queste conclusioni nelle seguenti: $(X_\alpha X_\beta)$ appartiene a Γ se $\omega_\alpha + \omega_\beta$ non è radice principale; è fuori di Γ ed appartiene ad $\omega_\alpha + \omega_\beta$ se $\omega_\alpha + \omega_\beta$ è radice principale. Se quindi $\omega_\delta = \omega_\alpha + \omega_\beta$ è radice principale e se si immaginano già determinate $X_\alpha X_\beta$ occorrerà scegliere — per soddisfare alle condizioni esposte — $X_\delta = (X_\alpha X_\beta)$; e ci resterà a provare che le $X_{\alpha'} X_{\beta'} X_{\delta'}$ che sono completamente determinate quando siano date $X_\alpha X_\beta X_\delta$, soddisfanno le equazioni $X_{\delta'} = (X_{\alpha'} X_{\beta'})$; e che, se si ha pure $\omega_\delta = \omega_{\alpha_1} + \omega_{\beta_1}$, è $(X_\alpha X_\beta) = a(X_{\alpha_1} X_{\beta_1}) = X_\delta$. Infine se $\omega_\alpha + \omega_\beta$ non è radice principale si dovrà fare in modo che $(X_\alpha X_\beta) = 0$.

La dimostrazione del nostro teorema è quindi ridotta a mostrare che la scelta delle operazioni X_α fuori di Γ appartenenti alle radici principali ω_α può farsi in tal modo che, determinate le operazioni $X_{\alpha'}$ ed Y_α appartenenti alle radici $\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha$ ed al gruppo γ nel modo detto al principio del presente numero:

a) Si abbia:

$$(Y_\beta X_\alpha) = a_{\alpha\beta} X_\alpha, \; (Y_\beta X_{\alpha'}) = -a_{\alpha\beta} X_{\alpha'}$$

donde poi segue immediatamente per l'identità Jacobiana che l'alternata di due $(Y_\alpha Y_\beta)$ è nulla:

$$(Y_\beta Y_\alpha) = (Y_\beta (X_\alpha X_{\alpha'})) = ((Y_\beta X_\alpha) X_{\alpha'}) - ((Y_\beta X_{\alpha'}) X_\alpha) =$$
$$= a_{\alpha\beta}(X_\alpha X_{\alpha'}) + a_{\alpha\beta}(X_{\alpha'} X_\alpha) = 0\,;$$

b) Se ω_α, ω_β ed $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\delta$ sono radici principali e se si pone $X_\delta = (X_\alpha X_\beta)$ ed $X_{\delta'} = (X_{\alpha'} X_{\beta'})$, quando sia:

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha, \; (Y_\alpha X_\alpha) = a_{\alpha\alpha} X_\alpha, \; (Y_\alpha X_{\alpha'}) = -a_{\alpha\alpha} X_{\alpha'}\,,$$
$$(X_\beta X_{\beta'}) = Y_\beta, \; (Y_\beta X_\beta) = a_{\beta\beta} X_\alpha, \; (Y_\beta X_{\beta'}) = -a_{\beta\beta} X_{\beta'}\,,$$

[1] Cartan, pag. 41, teorema XI.

si abbia pure:

$$(X_\delta X_{\delta'}) = Y_\delta,\ (Y_\delta X_\delta) = a_{\delta\delta} X_\delta,\ (Y_\delta X_{\delta'}) = -\, a_{\delta\delta} X_{\delta'}\ ;$$

c) Se ω_α ed ω_β sono radici principali e non lo è $\omega_\alpha + \omega_\beta$ o, più generalmente, se le operazioni Ξ_α, Ξ_β di g corrispondenti a tali radici sono permutabili, sia pure:

$$(X_\alpha X_\beta) = (X_{\alpha'} X_\beta) = 0\,;$$

d) Se $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_{\alpha_1} + \omega_{\beta_1} = \omega_\delta$ dove $\omega_\alpha\ \omega_\beta\ \omega_{\alpha_1}\ \omega_{\beta_1}\ \omega_\delta$ sono radici principali sia:

$$(X_\alpha X_\beta) = a(X_{\alpha'} X_{\beta'}) = X_\delta$$

dove a è una costante.

4. — Le condizioni *a) b) c)* sono identicamente soddisfatte quando le X siano scelte nel modo detto in principio del precedente numero e cioè tali che:

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha,\ (Y_\alpha X_\alpha) = a_{\alpha\alpha} X_\alpha,\ (Y_\alpha X_{\alpha'}) = -\, a_{\alpha\alpha} X_{\alpha'}.$$

Cominciamo dalla *a)*.

Sia ω_α una radice principale, $X_\alpha\ X_{\alpha'}\ Y_\alpha$ le operazioni relative. Sia ω_β un'altra radice principale: o $a_{\beta\alpha} = 0$, oppure una almeno delle due espressioni $\omega_\beta + \omega_\alpha$ $\omega_\beta - \omega_\alpha$ è radice [1]. Se nè $\omega_\beta + \omega_\alpha$ nè $\omega_\beta - \omega_\alpha$ sono radici, si ha quindi $(X_\alpha X_\beta) = (X_{\alpha'} X_\beta) = 0$, onde

$$(Y_\alpha X_\beta) = ((X_\alpha X_{\alpha'}) X_\beta) = (X_\alpha (X_{\alpha'} X_3)) - (X_{\alpha'} (X_\alpha X_\beta)) = 0.$$

Nel caso contrario sia radice $\omega_\beta - h'\omega_\alpha$ (h' intero ≥ 1) [2] e non $\omega_\beta - (h'+1)\,\omega_\alpha$.

Sia ora una almeno delle espressioni $\omega_\beta + \omega_\alpha$ ed $\omega_\beta - \omega_\alpha$ radice, più in generale supponiamo che siano h ed h' i massimi interi per cui $\omega_\beta + h\omega_\alpha$ ed $\omega_\beta - h'\omega_\alpha$ e tutte le radici intermedie sono ancora radici.

---

[1] Cartan, pag. 56, teorema VI: questo teorema è qui applicato al gruppo semisemplice g.

[2] Nell'ipotesi che qualche espressione delle forme $\omega_\beta \pm \mu\omega_\alpha$ sia radice, si può sempre supporre che il segno sia precisamente —, bastando al bisogno scambiare α ed α'.

Premettiamo l' osservazione seguente: Supponiamo che $\omega_\beta + \mu\omega_\alpha$ sia una radice multipla dell'equazione caratteristica di G, e che $X_{\beta+\mu\alpha,1}\, X_{\beta+\mu\alpha,2} \ldots X_{\beta+\mu\alpha,i}$ appartengano ad essa e siano tali che:

$$(Y_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,1}) = (a_{\beta\alpha} + \mu a_{\alpha\alpha})\, X_{\beta+\mu\alpha,i} + X_{\beta+\mu\alpha,i-1}$$

$$(Y_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i-1}) = (a_{\beta\alpha} + \mu a_{\alpha\alpha})\, X_{\beta+\mu\alpha,i-1} + X_{\beta+\mu\alpha,i-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(Y_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,1}) = (a_{\beta\alpha} + \mu a_{\alpha\alpha})\, X_{\beta+\mu\alpha,1}.$$

Supponiamo in altri termini che rispetto all'operazione Y^α l'operazione $X_{\beta+\mu\alpha 1}$ sia di *primo genere* e le altre, siano di *2° genere* (1). Poniamo:

$$(X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha 1}) = X_{\beta+(\mu+1)\alpha,1},\ (X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,2}) = X_{\beta+(\mu+1)\alpha,2},\ \ldots$$
$$(X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i}) = X_{\beta+(\mu+1)\alpha i}$$

sarà:

$$(Y_\alpha X_{\beta+(\mu+1)\alpha,i}) = (Y_\alpha(X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i})) = ((Y_\alpha X_\alpha) Y_{\beta+\mu\alpha,i}) + \\ + (X_\alpha(Y_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i})) =$$

$$= a_{\alpha\alpha}(X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i}) + (a_{\beta\alpha} + \mu a_{\alpha\alpha})\,(X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i}) + (X_\alpha X_{\beta+\mu\alpha,i-1}) =$$
$$= [a_{\beta\alpha} + (\mu+1) a_{\alpha\alpha}]\, X_{\beta+(\mu+1)\alpha,i} + X_{\beta+(\mu+1)\alpha,i-1},$$

$$(Y_\alpha X_{\beta+(\mu+1)\alpha,i-1}) = [a_{\beta\alpha} + (\mu+1) a_{\alpha\alpha}]\, X_{\beta+(\mu+1)\alpha,i-1} + X_{\beta+(\mu+1\alpha,i-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(Y_\alpha X_{\beta+(\mu+1)\alpha,1}) = [a_{\beta\alpha} + (\mu+1) a_{\alpha\alpha}]\, X_{\beta+(\mu+1)\alpha,1}.$$

Premesso ciò, supponiamo che sia $X_{\beta-h'\alpha,1}$ una operazione appartenente ad $\omega_\beta - h'\omega_\alpha$ di primo genere rispetto ad Y_α;

$$(Y_\alpha X_{\beta-h'\alpha,1}) = (a_{\beta\alpha} - h' a_{\alpha\alpha})\, X_{\beta-h'\alpha,1} \qquad (a_1)$$

Poichè $\omega_\beta - (h'+1)\omega_\alpha$ non è radice, sarà:

$$(X_{\alpha'} X_{\beta-h'\alpha,1}) = 0 \qquad (b_1)$$

---

(1) Cartan, pag. 100. Ragionamenti simili a quelli del presente n. sono usati dal Cartan nelle pag. 100-105.

e quindi per l'identità Jacobiana applicata alle tre operazioni $X_\alpha X_{\alpha'} X_{\beta-h'\alpha,1}$, posto:

$$(X_{\alpha'} X_{\beta-h'\alpha,1}) = X_{\beta-(h'-1)\alpha,1} \qquad (c_1)$$

si dedurrà:

$$(X_{\alpha'} X_{\beta-(h'-1)\alpha,1}) = -(a_{\beta\alpha} - h' a_{\alpha\alpha}) X_{\beta-h'\alpha,1}. \qquad (b_2)$$

Quindi si dedurrà che $X_{\beta-(h'-1)\alpha,1} \neq 0$, tranne quando $a_{\beta\alpha} - h' a_{\alpha\alpha} = 0$. E dall'osservazione precedente si avrà:

$$(Y_\alpha X_{\beta-(h'-1)\alpha,1}) = (a_{\beta\alpha} - (h'-1) a_{\alpha\alpha}) X_{\beta-(h'-1)\alpha,1}. \qquad (a_2)$$

Quindi ancora, posto:

$$(X_\alpha X_{\beta-(h'-1)\alpha,1}) = X_{\beta-(h'-2)\alpha,1} \qquad (c_2)$$

si dedurrà dall'identità Jacobiana applicata a X_α, $X_{\alpha'}$ $X_{\beta-(h'-1)\alpha,1}$:

$$(X_{\alpha'} X_{\beta-(h'-2)\alpha,1}) = -[2a_{\beta\alpha} - (2h'-1) a_{\alpha\alpha}] X_{\beta-(h'-1)\alpha,1} \qquad (a_3)$$

e quindi sarà:

$$X_{\beta-(h'-2)_\alpha,1} \neq 0$$

se non è:

$$2a_{\beta\alpha} - (2h'-1) a_{\alpha\alpha} = 0.$$

Così procedendo da una operazione appartenente ad $\omega_\beta - h'\omega_\alpha$ di primo genere rispetto ad Y_α si deducono, alternando successivamente con X_α, operazioni appartenenti ad $\omega_\beta - (h'-1)\omega_\alpha \ldots \omega_\beta + h\omega_\alpha$ di primo genere rapporto ad Y_α, dove h è tale che:

$$a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(h' - h) a_{\alpha\alpha}.$$

Questo ragionamento dipende solo dall' essere soddisfatte (a_1) e (b_1); quindi, partendo da qualunque operazione appartenente ad una radice $\omega_\beta - \mu'\omega_\alpha$, di primo genere rispetto ad Y_α, e che soddisfaccia alla (b_1) si dedurranno, alternando coll'operazione X_α, operazioni appartenenti ad $\omega_\beta - (\mu'-1)\omega_\alpha \ldots \omega_\beta + \mu\omega_\alpha$ fino a tale μ che $a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(\mu' - \mu) a_{\alpha\alpha}$.

Ma quello che più importa notare è che dai precedenti ragionamenti si può trarre che non esistono operazioni di secondo

genere rapporto ad Y_α. Infatti sia $\omega_\beta - k'\omega_\alpha$ la radice della forma $\omega_\beta - \mu'\omega_\alpha$ cui appartengono operazioni di secondo genere rapporto ad Y_α per cui μ' ha il massimo valore: esisterà una operazione di secondo genere $X_{\beta-k'\alpha,2}$ tale che

$$(Y_\alpha X_{\beta-k'\alpha,2}) = (a_{\beta\alpha} - k'a_{\alpha\alpha}) X_{\beta-k'\alpha,2} + X_{\beta-k'\alpha,1} \qquad (a_1')$$

dove $X_{\beta-k'\alpha,1}$ è una operazione di primo genere. Se noi aggiungiamo o togliamo una operazione di primo genere ad $X_{\beta-k'\alpha,2}$ si ottiene sempre una operazione di secondo genere che può sostituirsi a $X_{\beta-k'\alpha,2}$: con tale convenzione possiamo dire che si avrà:

$$(X_\alpha X_{\beta-k'\alpha,2}) = 0. \qquad (b_1')$$

Perchè, supponiamo che $(X_{\alpha'} X_{\beta-k'\alpha,2}) = X_{\beta-(k'+1)\alpha,1}$: sarà, per l'ipotesi fatta circa k', $X_{\beta-(k'+1)\alpha,1}$ di primo genere; e quindi l'operazione $(X_\alpha X_{\beta-(k'+1)\alpha,1}) = \overline{X}_{\beta-k'\alpha,1}$ sarà come la $X_{\beta-(k'+1)\alpha,1}$ di primo genere rapporto ad Y_α e si avrà per essa in virtù delle equazioni (b_i), (c_i) precedenti $(X_{\alpha'} \overline{X}_{\beta-k'\alpha,1}) = cX_{\beta-(k'+1)\alpha,1}$; donde segue $(X_{\alpha'}\ cX_{\beta-k'\alpha,2} - \overline{X}_{\beta-k'\alpha,1}) = 0$, talchè si avrà una operazione che soddisfa (b_1') e sostituibile a $X_{\beta-k'\alpha,2}$. Dopo ciò si proceda come abbiamo fatto precedentemente: da (a_1') (b_1') si dedurrà che $(X_\alpha X_{\beta-k'\alpha,2}) = X_{\beta-(k'-1)\alpha,2}$ è una operazione diversa da 0 e di seconda specie: per essa inoltre si avrà:

$$(X_{\alpha'} X_{\beta-(k'-1)\alpha,2}) = -(a_{\beta\alpha} - k'a_{\alpha\alpha}) X_{\beta-k'\alpha,2} - X_{\beta-k'\alpha,1}. \qquad (c_1')$$

E così continuando si otterranno sempre operazioni di secondo genere appartenenti alle radici $\omega_\beta - (k'-1)\ \omega_\alpha, \ldots\ \omega_\beta + k\omega_\alpha$ dove k è tale che $a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(k' - k)a_{\alpha\alpha}$. Per tale valore di k si avrà:

$$(Y_\alpha X_{\beta+k\alpha,2}) = (a_{\beta\alpha} + ka_{\alpha\alpha}) X_{\beta+k\alpha,2} + X_{\beta+k\alpha,1} \qquad (a'_{k+k'})$$

dove:

$$X_{\beta+k\alpha,1} = (X_\alpha(X_\alpha \ldots (X_\alpha X_{\beta-k'\alpha,1})) \ldots) \neq 0.$$

E posto:

$$(X_\alpha X_{\beta+k\alpha,2}) = X_{\beta+(k+1)\alpha} \qquad (b'_{k+k'})$$

si dedurrà come precedentemente, tenuto conto della

$$a_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}(k - k')a_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$(X_{\alpha'} X_{\beta+(k+1)\alpha}) = -cX_{\beta+k\alpha,1} (c = k + k' \neq 0). \qquad (c'_{k+k'})$$

Quindi $X_{\beta+(k+1)\alpha}$ non è nulla.

Partendo da questa operazione ed alternando con X_α non si potrà mai giungere a coefficienti nulli nelle (c') e quindi si dedurranno operazioni appartenenti ad $\omega_\beta + \mu\omega_\alpha$ con μ grande a piacere. Il che è assurdo. Segue quindi che non esistono operazioni di 2° genere rapporto ad Y_α.

In altri termini se:

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha, \qquad (Y_\alpha X_\alpha) = a_{\alpha\alpha} X_\alpha, \qquad (Y_\alpha Y_{\alpha'}) = -a_{\alpha\alpha} X_{\alpha'}$$

presa una qualunque operazione X_β appartenente ad ω_β si ha:

$$(Y_\alpha X_\beta) = a_{\beta\alpha} X_\beta$$

e quindi è soddisfatta la condizione *a)*.

5. — Dal ragionamento del numero precedente si deduce per le (b) e (c) che se ω_β è una radice qualunque ed X_β una operazione che le appartiene, se di più $\omega_\alpha \pm \omega_\beta$ è radice e si ha per esempio:

$$(X_\beta X_\alpha) = X_{\alpha+\beta},$$

si ha pure:

$$(X_{\alpha+\beta} X_{\alpha'}) = cX_\beta$$

dove c è una costante. Ne viene che le operazioni appartenenti alle radici della forma $\omega_\beta \pm \mu\omega_\alpha$ si possono ordinare, partendo per es. dalle operazioni per cui:

$$(X_{\beta+\mu\alpha} X_\alpha) = 0,$$

in catene di operazioni appartenenti alle radici $\omega_\beta + (\mu - 1)\omega_\alpha, \ldots$ $\omega_\beta - \mu'\omega_\alpha$ ottenute alternando queste con $X_{\alpha'}$: partendo da una qualunque delle operazioni così dedotte ed alternando con X_α si ottengono tutte le operazioni precedenti ed infine quella da cui si è partiti.

In particolare si ottiene che secondo che X_β è o no di Γ, $(X_\beta X_\alpha) = X_{\beta+\alpha}$ è o non è di Γ. Infatti se X_β è di Γ a causa dell'essere Γ invariante in G anche $X_{\beta+\alpha}$ è di Γ; e se $X_{\beta+\alpha}$ è di Γ lo è pure $X_\beta = \frac{1}{c}(X_{\alpha'} X_{\beta+\alpha})$ per la stessa ragione. Segue di qui che la condizione *c)* è anch'essa soddisfatta; poichè se si ha $(\Xi_\alpha \Xi_\beta) = 0$, $(X_\alpha X_\beta)$ sarà nullo oppure sarà di Γ in virtù dell'isomorfismo meriedrico fra g e G; ma per quanto precede se X_α od X_β non sono di Γ, $(X_\alpha X_\beta)$ non è di Γ e quindi sarà necessariamente $(X_\alpha X_\beta) = 0$.

6. — Infine giungiamo alla condizione *b)*. Consideriamo:

$$Y_{\alpha+\beta} = ((X_\alpha X_\beta)(X_{\alpha'} X_{\beta'})).$$

Si avrà per l'identità Jacobiana:

$$Y_{\alpha+\beta} = (((X_\alpha X_\beta) X_{\alpha'}) X_{\beta'}) + (X_{\alpha'}((X_\alpha X_\beta) X_{\beta'})).$$

Ma pel n. 5 si ha:

$$((X_\alpha X_\beta) X_{\alpha'}) = b X_\beta \qquad ((X_\alpha X_\beta) X_{\beta'}) = c X_\alpha$$

quindi:

$$Y_{\alpha+\beta} = b Y_\beta - c Y_\alpha .$$

E quindi ancora:

$$b(Y_\beta X_{\alpha'+\beta'}) - c(Y_\alpha X_{\alpha'+\beta'}) = [-b a_{\alpha+\beta,\beta} + c a_{\alpha+\beta,\alpha}] X_{\alpha'+\beta'} =$$
$$= - a_{\alpha+\beta\,\alpha+\beta} X_{\alpha'+\beta'}$$

e similmente:

$$(Y_{\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta}) = a_{\alpha+\beta\,\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta}.$$

Resta così dimostrato che anche *b)* è soddisfatta.

E noi possiamo quindi conchiudere, secondo quanto s'era detto in principio del n. 4, che le condizioni *a) b) c)* sono soddisfatte in conseguenza delle ipotesi:

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha, \qquad (Y_\alpha X_\alpha) = a_{\alpha\alpha} X_\alpha, \qquad (Y_\alpha X_{\alpha'}) = - a_{\alpha\alpha} X_{\alpha'}.$$

7. — Non ci resta quindi ormai che a mostrare che si possono scegliere le operazioni $X_\alpha X_\beta \ldots$ in modo che anche la condizione *d)* rimanga soddisfatta. Ma perciò basterà dimostrare che essa è soddisfatta quando le radici principali $\omega_\alpha \omega_\beta \omega_{\alpha_1} \omega_{\beta_1}$ $\omega_\delta = \omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_{\alpha_1} + \omega_{\beta_1}$ appartengono ad uno stesso dei gruppi semplici che compongono il gruppo semisemplice g. Infatti qualora ω_α ed ω_β appartenessero a due diversi gruppi semplici del gruppo semisemplice le operazioni $\Xi_\alpha \Xi_\beta$ del gruppo g corrispondenti sarebbero permutabili (nota 1, pag. 1), e per *c)* si avrebbe $(X_\alpha X_\beta) = 0$.

Siano dunque le radici principali appartenenti ad uno stesso gruppo semplice. Prendiamo un sistema di radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ indipendenti e tali che ogni altra radice si possa sempre porre sotto la forma $\omega_\alpha = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_l\omega_l$ dove le h sono interi positivi o negativi. Questo sarà sempre possibile: p. es. con uno di quei sistemi di radici che il Cartan chiama *fondamentali* (¹).

Il numero $h = \sum_1^l |h_i|$ si dirà *base della radice* ω_α. Associamo alle radici fondamentali altrettante operazioni $X_1 X_2, \ldots, X_l$ non appartenenti a Γ ed alle radici uguali opposte a queste le operazioni $X_{1'}, X_{2'}, \ldots, X_{l'}$ ad esse corrispondenti secondo il n. 3. Diremo queste operazioni *fondamentali*, e *base di un'operazione* appartenente ad una radice la base della radice.

Osserviamo allora che noi otterremo operazioni appartenenti ad una radice principale qualunque, facendo l'alternata di due operazioni fondamentali, indi l'alternata di una delle operazioni così ottenute con una operazione fondamentale e così via. Anzi ad una radice ω_α di base h si potrà giungere applicando $h - 1$ volte almeno questo processo, e viceversa scegliendo opportunamente le operazioni fondamentali cui il processo si applica, si giungerà certamente ad una operazione di base h mediante $h - 1$ volte alternate. Infatti consideriamo la radice $\omega_\alpha = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_l\omega_l$: tra i numeri $a_{i\alpha}$ $(i = 1 \ldots l)$ ve n'è certamente almeno uno diverso da 0; poichè altrimenti

(¹) Cartan, pag. 65. Vedi anche le particolari strutture dei gruppi semplici, che saranno richiamate anche in seguito, a pag. 71, in cui appunto tutte le radici sono espresse per sistemi fondamentali di radici.

sarebbe $a_{\alpha\alpha} = \Sigma h_i a_{i\alpha} = 0$ [1]; assurdo. Sia $a_{1\alpha} \neq 0$ sarà pure $a_{1'\alpha} = -a_{1\alpha} \neq 0$. E supponiamo che h_1 sia, per es., positivo. Allora facciamo l'alternata di una operazione X_α colla operazione $X_{1'}$, pei ragionamenti del n. 4 essa non sarà nulla e sarà una operazione X_{α_1} appartenente ad $\omega_{\alpha_1} = (h_1 - 1)\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_l\omega_l$. E viceversa X_α si otterrà, come si osservò al n. 5, quale alternata di X_{α_1} e di X_1. Ed ω_{α_1} sarà di base $h-1$. Ripetiamo ora questo ragionamento su X_{α_1} e così proseguiamo, giungeremo ad una operazione di base 1 e quindi differente da una operazione fondamentale X_i per una operazione di Γ. Partendo da X_i si otterrà per la via inversa una operazione diversa da X_α solo per operazioni di Γ.

Ciò posto deduciamo da $X_1 X_2 \ldots X_l$ e dalle loro associate $X_{1'} X_{2'} \ldots X_{l'}$ col processo descritto delle operazioni appartenenti ad una qualunque radice del gruppo, queste operazioni saranno per *b)* a due a due accoppiate nel modo detto nel n. 3. E non ci resterà a dimostrare se non che:

1° Alternando due operazioni $X_\alpha X_\beta$ così ottenute ed appartenenti a radici $\omega_\alpha \omega_\beta$ tali che $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\delta$ sia ancora una radice principale, si giunge ad operazioni non diverse da quelle cui si giunge applicando il nostro processo fondamentale, o a loro combinazioni lineari.

2° Osservato che ad una radice si può giungere per più vie, anche applicando il nostro processo fondamentale — (per esempio si può giungere alla radice ω_i fondamentale o lasciandola tale e quale, oppure, supposto $a_{ji} \neq 0$, alternando l'operazione che le appartiene con quella appartenente ad ω_j, poi con quella appartenente ad $\omega_{j'}$ od anche per vie più complicate) — per una qualunque di queste vie si giunge sempre ad una operazione medesima.

Quanto al primo punto esso risulta evidente in virtù dell'identità Jacobiana. Supponiamo infatti X_α di base qualunque h, supponiamo che la cosa sia dimostrata quando X_β sia di base $k-1$, e dimostriamola nel caso in cui X_β è di base k. Siccome la cosa è vera se X_β è di base 1, poichè allora fare l'alternata $(X_\alpha X_\beta)$ sarà applicare una volta di più il nostro processo fondamentale, la cosa sarà così dimostrata in generale.

[1] Cartan, pag. 60.

Ora, essendo X_β di base k, possiamo porre $X_\beta = (X_{\beta_1} X_i)$ essendo X_{β_1} di base $k-1$. Ma allora:

$$(X_\alpha X_\beta) = (X_\alpha (X_{\beta_1} X_i)) = ((X_\alpha X_{\beta_1}) X_i) - ((X_\alpha X_i) X_{\beta_1}).$$

Ora $(X_\alpha X_i)$ è una operazione ottenuta come X_α mediante il processo fondamentale: quindi per l'ipotesi fatta $((X_\alpha X_i) X_{\beta_1})$ è pure una combinazione di tali operazioni: analogamente per l'ipotesi fatta è $(X_\alpha X_{\beta_1})$ una combinazione lineare di operazioni ottenute col processo fondamentale, quindi lo è pure $((X_\alpha X_{\beta_1}) X_i)$; e quindi ancora lo è $(X_\alpha X_\beta)$, c. v. d.

Quanto al secondo punto conviene ricorrere alla considerazione delle composizioni dei varii gruppi semplici. Ma questo esame è semplificato dalle seguenti osservazioni.

Ogni passo del nostro processo fondamentale porta solo da operazioni di base h ad operazioni di base $h-1$ o di base $h+1$. Talchè se $X_\delta = (X_{\delta_1} X_i)$ e X_δ è di base h, X_{δ_1} è di base $h+1$ od $h-1$.

In principio di questo numero abbiamo mostrato che ad una radice si può sempre giungere in uno o più modi passando per sole radici di base minore. Supponiamo dimostrato che per tal modo si giunga sempre alle stesse operazioni appartenenti alle varie radici: ne viene che anche passando per radici di base maggiore si giunge sempre alle stesse operazioni. In altri termini se X_{δ_1} è di base maggiore di X_δ che si suppone determinata in modo unico giungendovi per sole operazioni di base minore e se $(X_{\delta_1} X_i)$ è una operazione appartenente ad ω_δ, questa coincide colla X_δ. Infatti $(X_\delta X_i)$ dà allora una operazione di ω_{δ_1} la quale coincide con X_{δ_1} perchè ottenuta partendo da una radice di base minore. Quindi dal n. 5 si deduce $(X_{\delta_1} X_i) = a X_\delta$, c. v. d.

Applicando ripetutamente questo ragionamento la dimostrazione di questa ultima parte si riduce a dimostrare che col nostro processo si giunge sempre — a meno di un fattore costante — ad una stessa operazione, in qualsiasi modo si proceda, partendo da operazioni fondamentali e passando per sole operazioni di base minore.

È quanto noi dimostreremo nel n. seguente partitamente per ogni tipo di gruppo semplice.

8. — Prenderemo come radici fondamentali le radici $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_l$ che usa il Cartan a pag. 71 nel descrivere i varii gruppi semplici.

Tipo A). Evidentemente si giunge alle varie radici per una sola via.

Tipo B). Si giunge per una sola via alle radici $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_l - \omega_i)$, $\pm(\omega_i - 2\omega_l)$.

Non così per l'ultimo tipo di radici $\pm(\omega_i + \omega_j - 2\omega_l)$. Si consideri per esempio $\omega_i + \omega_j - 2\omega_l$; ad essa si giunge o dalla radice $\omega_i - 2\omega_l$ o da quella $\omega_j - 2\omega_l$: si deve dunque dimostrare che $(X_{i-2l} X_j)$ ed $(X_{j-2l} X_i)$ non differiscono che per un fattore costante. Notiamo che X_{i-2l} ed X_{j-2l} sono unici e che precisamente:

$$X_{i-2l} = ((X_i X_{l'}) X_{l'}) \qquad X_{j-2l} = ((X_j X_{l'}) X_{l'}).$$

Si ha quindi per l'identità Jacobiana, osservando che $((X_i X_{l'}) X_j) = ((X_j X_{l'}) X_i) = 0$ perchè $\omega_i + \omega_j - \omega_l$ non è radice:

$$(X_{i-2l} X_j) = (((X_i X_{l'}) X_{l'}) X_j) = ((X_i X_{l'})(X_j X_{l'})) = (X_i (X_{l'} (X_{l'} X_j))) =$$
$$= (X_i X_{j-2l}) = -(X_{j-2l} X_j).$$

Quindi è dimostrato completamente il teorema pel caso del tipo B).

Tipo C). Analogamente $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i - \omega_l)$, $\pm(\omega_l - 2\omega_i)$ si ottengono in un sol modo. Non così $\omega_i + \omega_j - \omega_l$ che deriva da $\omega_i - \omega_l$ e da $\omega_j - \omega_l$. Si deve mostrare che $(X_{i-l} X_j)$ ed $(X_{j-l} X_i)$ non differiscono che per un fattore costante. Si ha:

$$X_{i-l} = (X_i X_{l'}) \qquad X_{j-l} = (X_j X_{l'}).$$

Quindi, poichè $\omega_i + \omega_j$ non è radice,

$$(X_{i-l} X_j) = ((X_i X_{l'}) X_j) = (X_i (X_{l'} X_j)) = (X_{j-l} X_i).$$

Analoga trattazione si usa pei tipi *D) E) F) G).* Si può osservare che nel tipo *G)* tutte le radici hanno generazione unica. Noteremo ancora che bisognerà esaminare le varie radici suc-

cessivamente dopo averle disposte secondo le basi crescenti: così per esempio si dovrà scrivere il tipo *F)* nel modo seguente:

$$\pm\omega_i,\ \pm\omega_l,\ \omega_i-\omega_j,\ \pm(\omega_i-\omega_\lambda),\ \omega_\lambda-\omega_\mu,\ \pm(\omega_i-2\omega_\lambda),$$
$$\pm(\omega_1-\omega_3-\omega_4),\ \pm(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4),\ \pm(\omega_1+\omega_2-2\omega_\lambda),$$
$$\pm(\omega_1+\omega_2-2\omega_\lambda-\omega_\mu),\ \pm(\omega_1+\omega_2-2\omega_3-2\omega_4),$$
$$\pm(2\omega_i+\omega_j-2\omega_3-2\omega_4)\qquad (i\neq j\ \lambda\neq\mu\ i,j=1,2\ \lambda,\mu=3,4).$$

In generale il diverso modo di giungere ad una radice dipenderà dal fatto che due diverse radici di base minore da cui essa deriva, si ottengono scambiando due indici che in essa compaiono simmetricamente e che non compaiono insieme nelle sue radici di base minore. Così nei due esempi sopra trattati si comportano gli indici i e j. La dimostrazione è allora identica alla precedente.

Leggermente diverso è il caso della radice $\omega_1+\omega_2-2\omega_\lambda-\omega_\mu$ di *F)* che può provenire da $\omega_1+\omega_2-\omega_\lambda-\omega_\mu$ e da $\omega_1+\omega_2-2\omega_\lambda$. Si dovrà dimostrare che $(X_{1+2-\lambda-\mu}X_{\lambda'})$ e $(X_{1+2-2\lambda}X_{\mu'})$ non sono differenti. Ammettiamo che sia già dimostrato che unica è la determinazione di $X_{1+2-\lambda-\mu}$ ed $X_{1+2-2\lambda}$ di base minore. Poniamo:

$$X_{1+2-\lambda-\mu}=(((X_1X_{\mu'})X_{\lambda'})X_2)\qquad X_{1+2-2\lambda}=(((X_2X_{\lambda'})X_{\lambda'})X_1).$$

Quindi poichè $\omega_1-\omega_\mu-2\omega_\lambda$ e $\omega_2-\omega_\mu-2\omega_\lambda$ non sono radici:

$$(X_{1+2-\lambda-\mu}X_{\lambda'})=((((X_1X_{\mu'})X_{\lambda'})X_2)X_{\lambda'})=(((X_1X_{\mu'})X_{\lambda'})X_{2-\lambda})=$$
$$-((X_1X_{\mu'})(X_{2-\lambda}X_{\lambda'}))+a(X_{1+2-\lambda-\mu}X_{\lambda'})=$$
$$=-(X_{\mu'}(X_{2-2\lambda}X_1))+a(X_{1+2-\lambda-\mu}X_{\lambda'})=(X_{1+2-2\lambda}X_{\mu'})+$$
$$+a(X_{1+2-\lambda-\mu}X_{\lambda'}).$$

Donde segue che $(X_{1+2-\lambda-\mu}X_{\lambda'})$ ed $(X_{1+2-2\lambda}X_{\mu'})$ non differiscono che per un fattore.

Un caso analogo si ha nel tipo *E)* per le radici di base 12.

Sulla fauna nummulitica della scaglia nell'Appennino centrale.

Nota del Dr. PIETRO LODOVICO PREVER.

(Con una Tavola).

Per consiglio del prof. Parona, che qui mi è grato ringraziare, ho esaminato una serie di campioni di rocce, raccolte e comunicate dall'Ing. B. Lotti, del R. Ufficio Geologico, assai interessante, perchè, mentre gli strati da cui provengono, per situazione stratigrafica e, per qualcuno di essi, anche per l'aspetto litologico, si direbbero appartenenti alla *scaglia* e al *calcare rosato* della Creta, a cagione invece della ricca fauna a *foraminiferi* di tipo eocenico che contengono, con esclusione di forme di tipo cretaceo, risulterebbero spettanti all'*Eocene*. Vista la singolarità del fatto, credo opportuno di esporre in questa Nota le conclusioni del mio studio, prendendo in speciale considerazione le *Nummulites*, le *Orbitoides* e le *Alveolina*. I campioni fossiliferi provengono da parecchie località dell'Abruzzo, dai territorî compresi nelle tavolette di Leonessa e di Terentillo, e da località umbre. Tali località più precisamente sarebbero: Monte Tilia (Leonessa), sommità di Monte Massa (Leonessa), Campi sopra Costa d'Aprile, vicino a Trivio (Leonessa), Monte Jazzo (Posta), podere Rivo e sopra podere Rivo (Piediluco), Monte tre Vescovi (Sibilla), Monte Alto (Gubbio), Cerreto presso Arrone (Umbria). Essi sono costituiti da calcari e da brecciole nummulitiche assai ricche in *Nummulites*, *Orthophragmina*, *Alveolina* e altri *Foraminiferi*, e da due campioni di scaglia rosata contenenti *Nummulites*, *Orthophragmina* e *Alveolina*, oltre ad altri *Foraminiferi*, e dei quali quello che ne contiene in numero grandissimo alterna con strati di calcare anch'esso nummulitico (Monte Tilia).

L'importanza a questi campioni viene dalle constatazioni: 1° Che alcuni di essi appartengono a strati di scaglia rosata i quali non contengono affatto *Nummulites*, *Orthophragmina*, *Alveolina*, ma alternano con calcari che ne sono provvisti in abbondanza; 2° Che alcuni altri di essi appartengono a calcari num-

mulitici alternanti con strati di scaglia privi di cotesti fossili; 3° Che altri infine appartengono alla scaglia rosata e contengono *Nummulites*, *Orbitoides*, *Alveolina* e alternano con calcari bianchi rassomiglianti indiscutibilmente a calcari eocenici, frequenti lungo l'Appennino, a Macereto per esempio, a Visso, Forca di Presta, Potenza, alla loro volta provvisti di questi fossili. Questi fossili, come è noto, si ritengono caratteristici dell'Eocene, le *Orthophragmina* e le *Alveolina* specialmente, come le *Lepidocyclina* (= *Orbitoides sensu strictu auct.*) lo sono specialmente degli ultimi orizzonti cretacei, e le *Orbitolina* lo sono della serie Infracretacea e di buona parte della Sopracretacea. È degno di nota il fatto che in tutti questi campioni fossiliferi mancano poi completamente, oltre le *Lepidocyclina* e le *Orbitolina* suaccennate, gli altri generi pur caratteristici della Creta, e cioè *Silvestrina*, *Meandropsina*, *Spirocyclina*, *Dicyclina*, *Calcarina*, *Cyclopsina*, *Fallotia*, *Praesorites*, *Broeckina*, ecc., che si sviluppano negli orizzonti superiori a quelli in cui si trovano le *Orbitolina*, e cioè nel Turoniano e nel Senoniano. Quindi la scaglia rosata, ed i calcari bianchi che con essa alternano, a motivo delle *Nummulites*, *Orthophragmina*, *Alveolina* che contengono, e dell'assenza dei generi caratteristici proprii del Sopracretaceo, dovrebbero riferirsi all'Eocene, oppure, qualora coi risultati del rilevamento geologico e con altri dati paleontologici risultassero sicuramente di età cretacea la scaglia ed il calcare rosato colle rocce nummulitifere connesse, bisognerebbe ammettere la precomparsa e la diffusione dei tre sopracennati generi durante il cretaceo.

Già il Villa (1) segnalò la concomitanza di *Inocerami*, *Belemmiti*, ecc. e *Nummuliti* nella scaglia della Brianza; più tardi altri Autori, come Taramelli (2) e De Alessandri (3), Canavari (4)

---

(1) Villa A. e G., *Memoria geologica sulla Brianza*. Nel giornale " Lo Spettatore industriale „. Milano, 1844. — G. B. Villa, *Escursioni geologiche nella Brianza*, " Atti Soc. Ital. Sc. Nat. „, vol. XXVI. Milano, 1883. — *Rivista geologica dei terreni della Brianza*, " Id. „, vol. XXVIII, Milano, 1885.

(2) Taramelli T., *Geologia delle provincie venete*, " R. Accad. dei Lincei „. Roma, 1882. — *Spiegazione della carta geologica del Friuli*. Pavia, 1881.

(3) De Alessandri G., *Osservazioni geologiche sulla Creta e sull'Eocene della Lombardia*, " Atti Soc. Ital. Sc. Nat. „, vol. XXXVIII. Milano, 1889.

(4) Canavari M., *I terreni del Terziario inferiore e quelli della Creta superiore nell'Appennino centrale*, " Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. „, vol. VIII. Pisa, 1892.

e Mariani (1), accennarono a strati di scaglia eocenica nelle Prealpi venete e lombarde e nell'Appennino centrale; altri per contro, quali Lotti e Bonarelli, ritengono ora quella dell'Appennino centrale assolutamente tutta cretacea, e, come il Villa, ammettono che le *Nummuliti* fossero già comparse avanti il periodo eocenico.

L'Ing. Lotti (2), ad esempio, che riescì pure a dimostrare la presenza di *Inocerami* nell'Eocene, e che insieme al Moderni raccolse i campioni in esame, ad eccezione di quello di Monte Tre Vescovi appartenente alla collezione Canavari, ritiene trattarsi di giacimenti appartenenti indiscutibilmente alla Creta, anzi egli privatamente informa, e il Moderni ne scriverà a lungo, che nei dintorni di Leonessa le *Nummuliti* si trovano non solo nella scaglia rossa senoniana, ma pur nel sottostante calcare rosato, che va, a sovrapporsi, a luoghi, come ad esempio nei prossimi dintorni di Terentillo, direttamente e con continuità e concordanza, sugli scisti a *fucoidi* dell'Aptiano.

Egli si appoggia nel suo asserto sui fossili (specialmente *Echinidi*) studiati da Zittel, Bonarelli e da altri, provenienti dalla stessa scaglia. Perciò, non solamente non troverebbe difficoltà ad ammettere la promiscuità di queste *Nummuliti* coi fossili cretacei, ma la troverebbe una necessità, non potendo ammettere che i detti *Foraminiferi* siano nati d'un colpo all'alba dell'Eocene mentre le condizioni di deposito rimanevano le stesse.

All'obiezione poi, che sinora veramente i detti fossili cretacei non furono rinvenuti mai nella stessa località e negli stessi strati della scaglia nummulitifera, o che alternano coi calcari nummulitici, il Lotti fa osservare che, prima di tutto, non ne fu fatta accurata ricerca, e poi che la località principale (Visso), dove furono raccolti (e non erratici) i fossili senoniani studiati da Bonarelli, dista non più di 30 chilometri da quella dove trovansi le *Nummuliti*; e la scaglia è litologicamente la stessa. Oltredichè ricorda, in una sua lettera al prof. Parona, che gli

(1) M. Mariani, *Fossili miocenici del Camerinese*, " Rivista Italiana di Paleont. ", vol. VI. Bologna, 1900.

(2) Lotti B., *Inocerami nella scaglia cinerea senoniana presso Titignano (Orvieto)*, " Boll. Comit. geol. ", Roma, 1902, e altri lavori in questo indicati.

Inocerami di Titignano (Umbria), studiati dal prof. Di Stefano, egli li trovò nella scaglia cinerea, cioè sopra alla scaglia rossa, e quindi in strati più giovani di quelli nummulitiferi di Leonessa. Però dice di non poter dare un gran valore cronologico a questi fossili, primieramente, perchè sono specie nuove, in secondo, perchè *Inocerami* furono da lui rinvenuti anche nell'Eocene nei dintorni di Firenze, nel Casentino e presso Barigazzo nell'Appennino settentrionale, e questo fatto fu confermato dal De Stefani (1) e dal Dainelli (2). Osserva finalmente che la scaglia dell'Appennino non si può dividere in due parti, una eocenica, l'altra cretacea, perchè i fossili senoniani si rinvennero nella scaglia rossa subito sopra il calcare rosato e i banchi nummulitici si trovarono in tutta la formazione, cioè nella scaglia cinerea, nella scaglia rossa e nel calcare rosato sottostante. Questo il fatto. È questa la difficoltà per la risoluzione della questione, soggiungo io, chè, senza volere parteggiare piuttosto per l'una che per l'altra delle due opinioni, debbo però constatare il fatto di avere fossili eocenici, una parte dei quali (le *Nummulites* e le *Alveolina*) è eguale a quelli dei più bassi strati dell'Eocene di Potenza, in tipi di rocce che litologicamente si dovrebbero attribuire alla scaglia, e che geologi consumati, quali il Lotti appunto, ve li attribuiscono. Anche il Dr. Bonarelli, che pure conosce molto bene la geologia dell'Appennino centrale, ha testè a Roma, in occasione della riunione invernale della Società Geologica Italiana, fatta una comunicazione in cui, constatato il fatto, si schiera col Lotti nel ritenere che tale scaglia, e quindi le sue *Nummuliti* e quelle dei calcari con cui alterna, siano da ascriversi alla Creta. Verbalmente, in occasione d'una sua venuta al Museo Geologico di Torino, mi comunicava le sue impressioni e le sue opinioni, e mi faceva osservare che in tutto l'Appennino centrale, dal suo principio al nord sin presso Roma, che egli ha percorso, salvo qualche disturbo stratigrafico locale o qualche eccezione, la serie stratigrafica risulta, dall'alto al basso, costituita da:

---

(1) De Stefani C., *Osservazioni geologiche sul terremoto di Firenze del 18 maggio 1895*, " Ann. Ufficio centrale di meteorologia ", vol. XVII. Roma, 1897.

(2) G. Dainelli, *Appunti di stratigrafia sulla valle del Mugnone*, " Processi verbali Soc. Toscana Sc. Nat. ". Pisa, 1903.

Eocene Flysch marnoso arenaceo;
Bisciaro (Daniano?);
Scaglia cinerea (Senoniano sup.);
Scaglia rosata (Senoniano sup.) con fossili caratteristici della Creta;
Calcare rosato senza noduli selciosi (Senon. inf. e Tur. sup.);
Scisto nero bituminoso itiolitico (Tur. inf.);
Calcare a *Rudiste* (Cenom.);
Scisti albiani a *fucoidi*;
Maiolica infracretacea.

Le *Nummuliti*, secondo Bonarelli, proverrebbero dalla parte superiore del calcare rosato a contatto colla scaglia rosata; quindi sarebbero di età senoniana. Ad ogni modo risulterebbe in modo indubbio per entrambi questi geologi la presenza delle Nummuliti nella scaglia rosata (parte inferiore, senoniana).

Anch'io sono dell'opinione dell'Ing. Lotti, che le *Nummuliti* non siano comparse d'un colpo all'alba dell'Eocene. Come noi abbiamo delle *Nummuliti* ancora viventi, come lo comprovano i lavori del Brady (1), del Fichtel e Moll (2), così pure ne abbiamo altre che precedettero in terreni secondari quelle dei terreni terziari eocenici. Lasciando in disparte la *Nummulite* dal Brady (3) erroneamente ritenuta del Carbonifero (4), abbiamo sempre la *Numm. antiquior* Rouill e Vos. degli strati carboniferi a *Fusulina* della Russia (5), la *Numm. suprajurensis* Alth. (6),

(1) Brady, *Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger, etc.*, " Zoology „, vol. IX. Londra, 1884.

(2) Fichtel L. e Moll P. C. J., *Testacea microscopica, etc.* Vienna, 1803.

(3) Brady, *On a true carboniferous Nummulite*, " Ann. a. Mag. of Nat. Hist. „, serie IV, vol. XIII. Londra, 1874.

(4) Van Den Broek, *Une vraie Nummulite carbonifère*, " Soc. Malac. de Belg. „. Bruxelles, 1874. — *Quelques considérations sur la découverte dans le calcaire carbonifère de Namur d'un fossile microscopique nouveau appartenant au genre Nummulite*, " Ann. Soc. Géol. Belge „, vol. I. Bruxelles.

(5) Rouiller e Vosinsky, *Études progressives sur la géologie de Moscou*, " Bull. Soc. Imp. des Natur. de Moscou „, vol. XXII. Mosca, 1849. — Müller V., *Die spiral-gewundenen Foraminiferen des russischen Kohlenkalks*, " Mém. de l'Acad. Imp. des Sc. „, serie VII. St.-Petersbourg, 1878.

(6) Alth A., *Die Versteinerungen des Nizniower Kalksteims*, " Beitr. z. Paläont. Oesterr.-Ungarns u. d. Orients „, vol. I. Vienna, 1882.

la *Numm. jurassica* Gümb. (1), la *Numm. Humbertina* Buv. dell'Astartiano della Mosa (2), la *Numm. variolaria*? var. *prima* e la *Numm. cretacea* ambedue del Fraas e provenienti dalla Creta della Palestina (3).

Però queste forme nummulitiche sono rarissime nella roccia che li contiene ed anche raramente si rinvengono in questi orizzonti, più vecchi di quelli eocenici. Qui al contrario noi abbiamo uno stato di cose che non pare localizzato, ma sembra interessi tutta l'Italia se fu rilevato dal Canavari nel Camerinese, dal Lotti e dal Moderni nell'Umbria e negli Abruzzi, dal Taramelli nel Veneto (nord di Belluno; Erto; molino Robanis di Meduno; dintorni di Segusino e di Possagno) e dal Villa per la Lombardia. Inoltre in questi calcari che alternano colla scaglia, e talora nella scaglia stessa, le *Nummulites* non vi sono rarissime, al contrario, vi sono abbondanti, talora copiosissime, e con esse vi ha un complesso di fauna nummulitica a spiccatissima fisionomia eocenica, talchè se la lista di questa fauna fosse comunicata a qualche studioso di *Foraminiferi* o di terreni terziarî, non esiterebbe a dichiararla proveniente da qualche orizzonte del Luteziano inferiore. Poichè è noto che le *Alveolina*, così abbondanti nel Luteziano medio e inferiore e nell'Ipresiano, non scendono oltre il Tanetiano, almeno per quanto risulta sinora, e le *Orthophragmina* anch'esse non si spingono più giù del Tanetiano stesso, mentre la Creta superiore è caratterizzata dalla presenza di forme di *Lepidocyclina* (*Lep. socialis* — *gensacica*, ecc.), e dalle forme del genere *Silvestrina* (*Silv. apiculata*, — *mamillata*). Invece qui le *Alveolina* sono abbastanza ben rappresentate (*Alv.* cfr. *ovolum*, — *decipiens*, — *oblonga*, — *frumentisformis*).

Il Dr. Bonarelli, cercando di farsi una ragione della presenza delle *Nummuliti* nella Creta, si domanda se non potrebbe qui applicarsi, estendendolo maggiormente, il concetto che riguardo alle differenze e analogie fra le formazioni nummulitiche dei bacini mediterraneo e parigino io già espressi nella mia nota

(1) Gümbel C. W., *Ueber zwei jurassischer Vorläufer des Foraminiferen-Geschlectes Nummulina und Orbitulites*, " Neues Jahr. f. Miner. ", 1872.

(2) Buvignier A., *Statistique géologique du département de la Meuse*. Parigi, 1852.

(3) Fraas O., *Geologisches aus dem Orient*, " Wurtembergische naturw. Jahreshefte ". Stuttgart, 1867.

Considerazioni sullo studio delle Nummuliti (1), affermando che le *Nummuliti* comparvero prima nel bacino mediterraneo e di qui migrarono poi nel bacino parigino. Certamente questo concetto inteso in senso più largo ancora di quanto l'intesi io stesso, quando lo formulai, può servire benissimo a spiegare la presenza di *Nummuliti* nella Creta, in prossimità dell'Eocene, ma non ne spiega certamente la grande abbondanza: e, anche passando sopra a questo punto, calcolando che l'abbondanza è forse più di individui che di forme, non può spiegare la presenza delle *Alveolina*, delle *Orthophragmina*, ove dovrebbero trovarsi delle *Lepidocyclina*, delle *Silvestrina*. Sarebbe abbastanza strano che nel mare cretaceo di questa regione in cui vivevano così bene rappresentati questi generi di tipo eocenico, non vivessero pure quegli altri su accennati di tipo cretaceo.

Ma mi fermo ora su questa via; il mio scopo è solo quello di render nota la fauna che in cotesti campioni ho potuto rinvenire e far risaltare, ove ciò sia possibile, la sua analogia o le sue differenze da quelle di qualche altra località cognita. Per l'appunto a questo proposito osserverò che questa fauna parzialmente è eguale a quella studiata qualche anno fa nei calcari dei dintorni di Potenza (2). A N-E. di Potenza affiora l'Eocene in parte asportato, in modo che si possono vedere le sottostanti rocce cretacee che si mostrano, come ce lo fa sapere il Dr. Capeder (3), colla medesima *facies* caratteristica delle regioni circostanti, ove compare questo terreno, cioè di calcari bianchi o rosei privi di fossili. Negli strati più bassi dell'Eocene di Potenza io avevo trovato tra le altre forme nummulitiche la *Brugmina Virgilioi*, la *Brug. Ficheuri*, la *Brug. laevigata*, la *Brug. Heilprini*, la *Laharpeia Benoisti*, la *Laharp. Defrancei*, ecc., assieme a delle *Orthophragmina* e a numerose *Alveolina* (*Alv. oblonga*, — *frumentisformis*, — cfr. *ovulum*, — *decipiens*). Gli strati

(1) Prever P. L., *Considerazioni sullo studio delle Nummuliti*, " Boll. Soc. Geol. Ital. ", vol. XXII. Roma, 1903.

(2) Prever P. L., *Le Nummuliti della Forca di Presta nell'Appennino centrale e dei dintorni di Potenza nell'Appennino meridionale*, " Mém. Soc. Pal. Suisse ", vol. XXIX. Ginevra, 1902.

(3) Capeder G., *Appunti geologici sui dintorni di Potenza*, " Boll. Soc. Geol. Ital. ", vol. XX. Roma, 1901.

calcarei contenenti queste *Nummulites*, *Orthophragmina*, *Alveolina*, io sono sempre stato d' opinione dovessero essere riferiti a terreni più vecchi dell' Ipresiano, il quale è caratterizzato dalla *Brug. elegans-planulata*. Siccome io sono pure d'avviso che le *Brug. bolcensis-spileccensis* provengano esse pure da terreni più vecchi dell'Ipresiano, si potrebbe inferirne che cotesti calcari di Potenza, e le formazioni vicentine a *Brug. bolcensis-spileccensis*, si debbano ascrivere al Tanetiano, o per lo meno allo Sparnaciano. D'altronde già nel Belgio e altrove fu accennato, sfortunatamente con dati troppo incerti, a sabbie con piccole *Nummuliti* che sottosterebbero all'orizzonte caratterizzato dalla *Brug. planulata-elegans*. Appunto per questo ultimo fatto, e rammentando a proposito la precedenza di apparizione delle *Nummuliti* nel bacino mediterraneo, io non sarei affatto restio ad ammettere che le formazioni calcari eoceniche più antiche di Potenza, contenenti la suddetta fauna nummulitica, appartengano al Tanetiano, cioè al primo piano dell'Eocene inferiore, che dovrebbe perciò essere a contatto colla scaglia cretacea. Appunto la fauna nummulitica propria di questo piano sarebbe in tutto eguale a quella dei calcari intercalati alla scaglia e alla scaglia nummulitica di cui ci occupiamo. Si diminuirebbero così le distanze cronologiche fra queste due formazioni a fauna identica, per quelli che ritenessero le *Nummuliti* della scaglia di origine cretacea. Un' altra analogia, anch'essa certamente non priva di importanza, mi resta ancora a far notare, che passa fra le due faune nummulitiche in discorso. Nei calcari alternati colla scaglia, e in questa, quando è nummulitica, io ho rinvenute le *Brug. Virgilioi; — sub Virgilioi; — Ficheuri; — subFicheuri; — laevigata; — Heilprini;* le *Laharp. Benoisti; — Defrancei;* la *Gümb. parva*, le *Paronaea eocenica-subeocenica*, ritrovando cioè in queste località (e suppongo lo stesso si possa dire della scaglia e calcari alternanti con essa nel Camerinese, nel Veneto e nella Lombardia) le medesime forme degli strati eocenici più vecchi di Potenza non solo, ma altre forme che completano per l'appunto queste, poichè rappresentano di esse l'omologa a micro o a megalosfera.

Passiamo ora a vedere le forme che ho potuto determinare nei campioni di ciascuna località.

Monte Tilia (Leonessa): Strati nummulitici nella scaglia rossa, e scaglia rossa nummulitifera (1):

Bruguierea Virgilioi n. f.
„ *subVirgilioi* Prev.
„ *Ficheuri* n. f. —
„ *subFicheuri* Prev.
„ *subHeilprini* Prev.
Laharpeia subBenoisti Prev.
„ *Defrancei* d'Arch.
Paronaea Heeri de la Harpe.
„ *eocenica* n. f.
„ *subeocenica* Prev.
Orthophragmina Marthae Schlumb.
„ *discus* Rut. sp.
„ *Pratti* Mich.
„ cf. *Chudeaui* Schlumb.
„ *dispansa* Sow.
„ *patellaris* Schlot.
„ *sella* d'Arch.
„ *Taramellii* Mun-Ch.
Alveolina oblonga d'Orb.
„ *frumentisformis* Schwag.
„ cf. *ovolum* Stache.
Operculina complanata Defr.
„ *ammonea* Leym.

Globigerina sp., *Orbulina* sp., *Biloculina* sp., *Carpenteria* sp., *Textularia* sp., *Nodosaria* sp., *Pullenia* sp., *Pulvinulina* sp., *Clavulina* sp., *Idalina* sp.

Campi sopra Costa d'Aprile — Trivio (Leonessa). Scaglia rossa con nummulitidi:

Bruguierea Virgilioi n. f.
„ *subVirgilioi* Prev.
„ *subFicheuri*
„ *laevigata* Brug. giovane.
„ *subTaramellii* Prev.
„ *subHeilprini* Prev.

(1) La fauna è assolutamente eguale nei calcari e nella scaglia, quindi per non fare inutili ripetizioni unisco queste due rocce.

Paronaea Airaghii Prev.
Alveolina sp.
Operculina sp.
Orthophragmina discus Rut.
„ *dispansa* Sow.

Globigerine numerose e meno sviluppate in generale che nelle altre località, più: *Orbulina* sp., *Pullenia* sp., *Pulvinulina* sp., sp.

Monte Jazzo (Posta). Banchi nummulitici intercalati alla scaglia rossa ad est del M. Jazzo:

Bruguierea Ficheuri n. f.
„ *subFicheuri* Prev.
„ *subVirgilioi* Prev.
„ *subCapederi* Prev.
„ *subTaramellii* Prev.
Gümbelia subOosteri De La Harpe.
Orthophragmina Pratti Mich.
„ *Marthae* Schlumb.
„ *nummulitica* Gümb.
„ *Taramellii* Mun-Ch.
Alveolina cfr. ovolum Stache.
„ *decipiens* var. *dolioliformis* Schwag.,
Amphistegina sp., *Nodosaria* sp., *Polymorphina* sp.

Cerreto, Arrone (Umbria). Brecciola nummulitica in strati fra la scaglia cinerea, a contatto colla scaglia rossa e sotto le marne con selce nera eoceniche:

Bruguierea subVirgilioi Prev. var.
„ *laevigata* Brug.
Laharpeia subBenoisti Prev.
Paronaea eocenica n. f.
„ *Beaumonti* D'Arch.
„ *Heeri* De la Harpe.
Orthophragmina Pratti Mich.
„ *Archiaci* Schlumb.
„ *nummulitica* Gümb.
„ *radians* D'Arch.

Orthophragmina aspera Gümb.
„ *strophiolata* Gümb.
„ *Taramellii* Mun-Ch.
„ *stella* D'Arch.

Globigerina sp., sp., *Orbulina* sp., *Cristellaria* sp., *Truncatulina* sp., *Lithothamninum* sp.

Sommità del Monte Massa (Leonessa). Calcare nummulitico intercalato al calcare rosso:

Bruguierea subVirgilioi Prev.
Laharpeia subBenoisti Prev.
Orthophragmina discus Rut.
„ *Marthae* Schlumb.
„ *Archiaci* Schlumb.
Globigerina sp., *Orbulina* sp., *Discorbina* sp., *Pulvinulina* sp., *Rupertia* sp.

Monte Massa. Scaglia contenente il calcare nummulitico:

Nodosaria sp., *Cristellaria* sp., *Pulvinulina* sp., *Rupertia?* sp., *Orbulina* sp., *Globigerina* sp.

Tra Monte Boragine e Monte della Nocella. Tra il calcare rosso:

Bruguierea subVirgilioi Prev.
„ *subHeilprini* Hanth.
Laharpeia subBenoisti Prev.
Orthophragmina Pratti Mich.
„ *Marthae* Schlumb.
Pulvinulina sp., *Globigerina* sp.

Monte Tre Vescovi (Camerino). Calcare rosato contenente interstratificato il calcare nummulitico:

Discorbina sp., *Textularia* sp., *Bolivina* sp., *Nodosaria* sp., *Gaudryna* sp., *Sphaeroidina* sp., *Pullenia* sp., *Globigerina* sp., *Rupertia* sp.

Sopra il podere Rivo (Piediluco). Scaglia rosata:

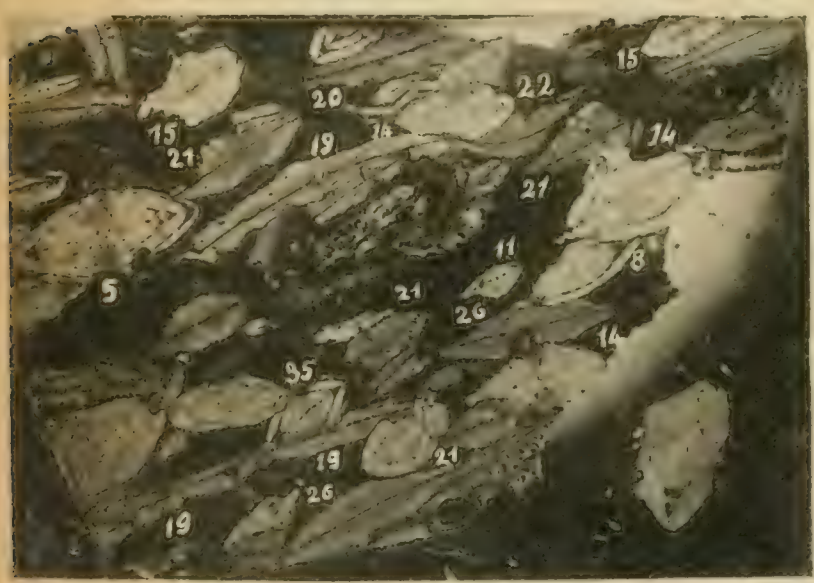
Spicule di *spugne* (frammenti): *Orbulina* sp., *Globigerina* sp., *Nodosaria* sp., *Bolivina* sp., *Gaudryna* sp., *Polymorphina* sp., *Cristellaria* sp., *Discorbina* sp., *Pulvinulina* sp.

Fatta eccezione delle *Nummulites*, delle *Orthophragmina*, delle *Alveolina* ed *Operculina*, mi sono limitato, per il resto delle forme, alla determinazione generica: primo, perchè non sempre avrei potuto arrivare alla specifica; secondo, perchè lo scopo principale del lavoro era lo studio dei primi generi, certamente di gran lunga più importanti di tutti gli altri; mentre questi ultimi li elencai per le diverse rocce onde far vedere come essi siano ripartiti egualmente nella scaglia e calcare nummulitiferi e nella scaglia non nummulitifera.

Museo Geologico di Torino.

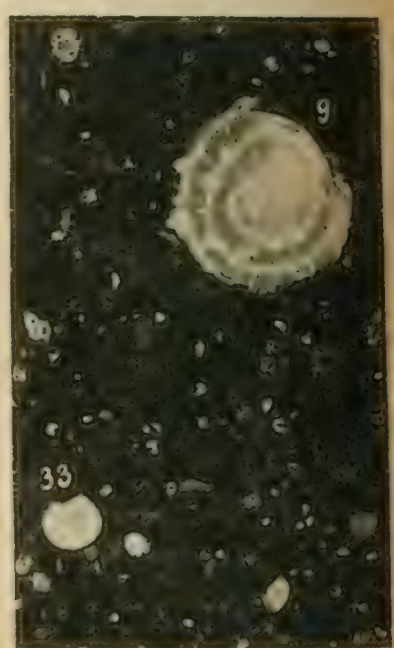
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

1. *Bruguierea Virgilioi* Prev.
2. „ *subVirgilioi* Prev.
3. „ *subFicheuri* Prev.
4. „ *Heilprini* Prev.
5. „ *subHeilprini* Hanth.
6. „ *subTaramellii* Prev.
7. „ *laevigata* Brug. *mutazione*
8. *Laharpeia subBenoisti* Prev.
9. „ *Benoisti* Prev.
10. *Gümbelia parva* Prev.
11. *Paronaea Heeri* de la Harpe
12. „ *Airaghii* Prev.
13. „ *subAiraghii* Prev.
14. „ *eocenica* Prev.
15. „ *subeocenica* Prev.
16. „ *subBeaumonti* de la Harpe.
17. *Orthophragmina Archiaci* Schlumb.
18. „ *Pratti* Mich.
19. „ *discus* Rutim.
20. „ *Marthae* Schlumb.
21. „ *dispansa* Sow.
22. „ *sella* d'Arch.
23. „ *radians* d'Arch.
24. „ *aspera* Gümb.
25. „ *varians* Kaufm.
26. „ *nummulitica* Gümb.
27. „ *patellaris* Schloth.
28. „ *stellata* d'Arch.
29. „ *aprutina* Prev.
30. „ *illyrica* Prev.
31. *Operculina complanata* Defr.
32. „ *ammonea* Leym.
33. „ *pyramidum* Schwag.
34. *Alveolina* cfr. *oblonga* d'Orb.
35. *Bruguierea Ficheuri* Prev.
36. *Orthophragmina Chudeaui* Schlumb.



10

7

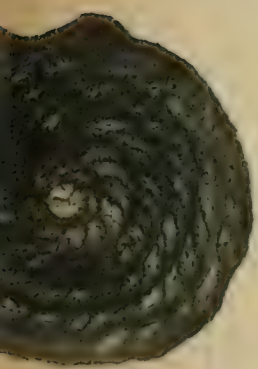


Forma Fot.

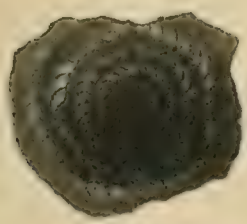
5
5
31
1
6
2
1
32

25
12
19
19
13
26
18
15
14
21
14
5
25
19
2
1

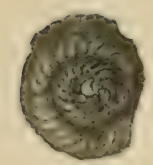
21



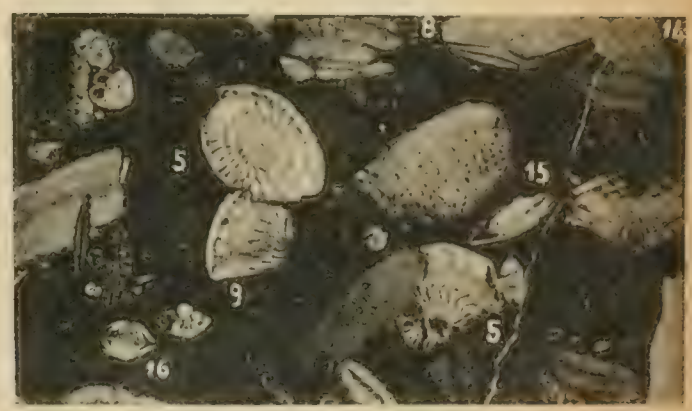
2



14



15


8
5
15
9
5
16

21

14
5
23
19
28
21
31
5
13

18

Il birapporto di quattro punti nello spazio con applicazioni alla Geometria del Tetraedro.

Nota di F. CASTELLANO.

In questa nota mi propongo di definire il rapporto semplice di tre punti ed il birapporto di quattro punti comunque disposti nello spazio, applicando la teoria dei Quaternioni di Hamilton, e di dedurre le principali proprietà.

Una quaterna di punti non complanari determina ventiquattro birapporti corrispondenti all'ordine dei punti stessi, i quali sono in generale tutti disuguali. Essi dipendono da tre argomenti (angoli) e da quattro vettori unità, che sono elementi importanti del tetraedro che ha per vertici i punti del birapporto.

Le relazioni tra i birapporti di quattro punti e la loro interpretazione costituiscono proprietà interessanti la Geometria del tetraedro; lo studio di particolari valori del birapporto permette la considerazione di tetraedri speciali, e facilita il modo di rilevarne le proprietà.

Il rapporto semplice ed il birapporto possono servire come coordinate dei punti e delle rette dello spazio rispetto ad una coppia o ad una terna di punti dati.

La notazione adottata è quella del " Formulaire Mathématique „ di G. Peano, edizione del 1903, * 32, 33, 34, 35.

I.

Rapporto semplice di tre punti.

1. — Siano A, B, C tre punti, e sia B distinto da C; chiamo *rapporto semplice* dei punti A, B, C e lo rappresento con (ABC) il *quaternione* quoziente del vettore $A - C$ pel vettore $B - C$.

·0 $A, B, C \in \mathrm{p} \,.\, B - C \in \mathrm{v} - \iota 0 \,.\supset.$

$(ABC) = (A - C) / (B - C)$ *def.*

·1 $(ABC) \in \mathrm{qtr}$

·2 $(ABC) = \dfrac{(A - C) \times (B - C) + [\,[(B - C)\alpha(A - C)]}{\overline{BC}^2}$ *def. pos.*

Sia u il vettore unità del bivettore $(B - C)\alpha(A - C)$, sarà:

·3 $u = \mathbf{U}\,[\,[B - C)\alpha(A - C)] \,.\supset.$

$(ABC) = \frac{AC}{BC}(\cos \widehat{BCA} + u \operatorname{sen} \widehat{BCA})$ *def. pos.*

·4 $(ABC) = \frac{AC}{BC}\, e^{\widehat{BCA}.u}$ "

·5 $\mathbf{T}(ABC) = Tensor\,(ABC) = mod\,(ABC) = \frac{AC}{BC}$

·6 $\mathbf{U}(ABC) = Versor\,(ABC) = e^{\widehat{BCA}.u}$

·7 $\mathbf{S}(ABC) = Scalar\,(ABC) = real\,(ABC) = \frac{AC}{BC} \cos \widehat{BCA}$

·8 $\mathbf{V}(ABC) = Vector\,(ABC) = Imag\,(ABC) = \frac{AC}{BC} \operatorname{sen} \widehat{BCA} \,.\, u$

·9 $arg\,(ABC) = argomento\,(ABC) = \widehat{BCA} =$ angolo (CB, CA).

Dalla definizione ·0 e dalla relazione vettoriale:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$$

si deducono ancora le seguenti formole:

·10 $A - B,\ B - C,\ C - A \in \mathrm{v} - \iota 0 \,.\supset.$

$(BAC) = (ABC)^{-1}$

·11 $(ACB) = 1 - (ABC)$

·12 $(ABC)(BAC) = (BCA)(CBA) = (CAB)(ACB) = 1$

·13 $(ABC) + (ACB) = (BCA) + (BAC) = (CAB) + (CBA) = 1.$

Queste formole dicono che il rapporto semplice di tre punti A, B, C è un quaternione che ha per modulo il rapporto delle

distanze di C da A e da B; ha per argomento l'angolo di CB con CA; il suo vettore è normale al piano ABC.

Dipende dall'ordine dei punti, e tra i sei rapporti semplici corrispondenti alle sei permutazioni dei punti passano le stesse relazioni che legano i rapporti semplici di tre punti allineati.

Sviluppando le ·13 ed uguagliando gli scalari ed i vettori nei due membri si deducono le formole fondamentali della trigonometria piana.

2. Coordinata-rapporto. — Siano A, B due punti distinti; ad ogni punto P dello spazio corrisponde un quaternione (ABP) il cui vettore è normale ad $A - B$; ad ogni quaternione q diverso da 1, il cui vettore sia normale ad $A - B$, corrisponde un punto P definito dalla relazione:

$$(ABP) = q.$$

Infatti:

·0 $\quad q \in \mathrm{qtr} \,.\, A, B, P. \in \mathrm{p} \,.\, A - B - = 0. \;\; (Vq) \times (A - B) = 0.$

$$q - = 1. \; (ABP) = q \,.\supset.$$

$$(PAB) = (1 - q)^{-1}$$

·1 $\quad P = B + (1 - q)^{-1}(A - B)$

·2 $\quad P = B + [\mathbf{S}(1 - q)^{-1}](A - B) + [[[\mathbf{V}(1 - q)^{-1}]\alpha[A - B]].$

Ne consegue che i quaternioni con vettore normale ad $A - B$ si possono assumere come coordinate dei punti dello spazio rispetto alla coppia di punti A, B. Se q è la coordinata di P rispetto alla coppia A, B, il punto P giace nel piano che contiene A, B ed è normale al vettore di q; il modulo di q ci dà il rapporto delle distanze di P da A e da B; l'argomento di q è l'angolo sotto cui AB è visto da P. Il quaternione $(1 - q)^{-1}$ ci dà le coordinate polari e le cartesiane, come è indicato nelle ·1 e ·2.

Le formole che dànno in questi sistemi di coordinate la distanza di due punti, l'area del tripunto, l'angolo di due rette, le condizioni di allineamento, ecc., si deducono senza difficoltà.

$$r \in (1, \ldots 3) \,.\, A, B, P_r \in \mathrm{p} \,.\, A - B - = 0,$$

$$m_r \in q \,.\, u_r \in \mathrm{v} \,.\, u_r \times (A - B) = 0 \,.\, (P_r AB) = m_r + u = q_r \,.\supset.$$

·3 $\quad P_r = B + q_r(A - B)$

·4 $P_2 - P_1 = (q_2 - q_1)(A - B)$

·5 $\overline{P_1P_2} = \overline{AB}\, mod\,(q_2 - q_1)$; $ang(A - B,\ P_1 - P_2) = arg(q_2 - q_1)$

·6 $(P_1P_2P_3) = (q_1 - q_3)\,(q_2 - q_3)^{-1} = (q_1q_2q_3)$

·7 $P_2\widehat{P_3}P_1 = arg(q_1q_2q_3)$

·8 $[(P_2 - P_3)\,\alpha\,(P_1 - P_3) = \overline{AB}^2\,\mathbf{V}\,[(q_1 - q_3)\,conj\,(q_2 - q_3)]$

·10 $\mathbf{V}\,(P_1P_2P_3) = 0\ .=.\ \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ecc.

La relazione ·6 può servire a determinare tutti gli elementi del triangolo $P_1P_2P_3$, ed alla trasformazione della coordinata-rapporto quando ad una coppia (A, B) di riferimento si voglia sostituire un'altra coppia.

La relazione ·10 ci esprime la condizione di collimazione dei tre punti $P_1P_2P_3$. È suscettibile di questa interpretazione: " Se da un punto si conducono i vettori delle coordinate-rapporto dei punti di una retta, i loro estremi sono allineati ".

Dalla relazione ·4 moltiplicando per $u_2 - u_1$ si deduce:

·11 $(P_2 - P_1) \times (u_2 - u_1) = 0$

cioè: " I vettori delle coordinate-rapporto di due punti dànno sulla loro congiungente ugual proiezione ortogonale ".

Quindi: " I vettori delle coordinate-rapporto dei punti dello spazio rispetto ad una coppia di punti (A, B) sono le velocità dei punti stessi in un moto rotatorio dello spazio rigido intorno ad AB ".

Coordinata-quaternione di una retta. — Sia q un quaternione di scalare m e di vettore (qualunque) u, sia O un punto, I un vettore unità, e sia $A = O + I$. Il vettore $(u \times I)\ I$ è il componente di u parallelo ad I, ed il quaternione:

$$q - (u \times I)\,I + x\left(\frac{u}{I}\right)$$

dove x è un numero reale, ha il vettore normale ad I. Posto:

$$(PAO) = q - (u \times I)\,I + x\left(\frac{u}{I}\right) \qquad (1)$$

si ha una corrispondenza reciproca tra il numero x ed il punto P. Per $x = 0$, si ha:

$$(P_0 A O) = q - (u \times I) I \tag{1'}$$

quindi:

$$\frac{P - P_0}{I} = x \left(\frac{u}{I} \right)$$

da cui:

$$P = P_0 + xu.$$

Variando x il punto P descrive una retta r parallela ad u. Il quaternione q si può assumere come COORDINATA *della retta r rispetto al sistema (O, I).*

Dalla (1') si deduce:

$$P_0 = O + mI + [(u \alpha I) \tag{2}$$

$$P = O + mI + xu + [(u \alpha I). \tag{2'}$$

Il punto P_0 è il punto della retta r più vicino alla retta OA; lo scalare m del quaternione è la proiezione di OP_0 sulla direzione OA; la minima distanza di r da OA è data da $mod(u \alpha I)$.

Posto:

$$q = \rho e^{i\varphi}$$

dove ρ, φ sono numeri reali ed i è un vettore unità, sarà:

$$P_0 = O + (\rho \cos\varphi) I + \rho \operatorname{sen}\varphi \,.\, [(i \alpha I).$$

Se $\rho = 0$, $P_0 = O$, la retta r passa per O ed ha la direzione del vettore i.

Se $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$ la retta r incontra OI nel punto $O \pm \rho$ ed ha la direzione di i.

Se $(i \alpha I) = 0$, la retta r coincide colla retta OI.

La coordinata-quaternione così definita non serve a determinare le rette parallele ad OA; per queste bisogna dare un punto.

Data una retta r non parallela ad OA mediante un suo punto P ed il suo vettore u, è univocamente determinata la sua coordinata-quaternione q. Infatti il vettore di q è u; lo scalare m di q si deduce dalla (2'), ed è espresso da:

$$\frac{(P - O) \alpha u \alpha [(u \alpha I)}{-(u \alpha I)^2} = OP \, \frac{\cos \widehat{POA} - \cos(OP, r) \cos(OA, r)}{\operatorname{sen}^2(OA, r)}.$$

Mi limito in questo mio lavoro ai pochi cenni precedenti sulla coordinata-quaternione della retta; l'analisi completa di questo concetto, lo sviluppo dei calcoli relativi, le applicazioni potranno essere argomento di altre ricerche; a mio avviso anche questa coordinata può essere un istrumento non del tutto inefficace per l'investigazione dello spazio rigato.

II.

Birapporto di quattro punti nello spazio.

1. — Siano A, B, C, D quattro punti distinti; chiamo *birapporto* di questi punti e lo rappresento con $(ABCD)$ il *quaternione* ottenuto moltiplicando (ABC) per il reciproco di (ABD), cioè per (BAD).

$\cdot 0 \quad A, B, C, D \in \mathrm{p}.A-B, A-C, A-D, B-C, C-D, D-B \in \mathrm{v} - \iota 0 . \supset .$

$(ABCD) = (ABC)(ABD)^{-1}$ *def.*

$\cdot 1 \quad (ABCD) = (ABC)(BAD)$ *def. pos.*

$\cdot 2 \quad (ABCD) = (A-C)(B-C)^{-1}(B-D)(A-D)^{-1}$ *def. pos.*

$\cdot 3 \quad (ABCD) \in \mathrm{qtr}$

$\cdot 4 \quad (ABCD) + (ACBD) = 1$

$$\begin{aligned} Dim. (ABCD) + (ACBD) &= (ABC)(BAD) + (ACB)(CAD) \\ &= (ABC)[1 - (BDA)] + (ACB)[1 - (CDA)] \\ &= 1 - (ABC)(BDA) - (ACB)(CDA) \\ &= 1 - [(A-C)(B-C)^{-1}(B-A) + \\ &\qquad + (A-B)(C-B)^{-1}(C-A)](D-A)^{-1} \\ &= 1 - \frac{2}{BC^2}[(A-C)\alpha(C-B)\alpha(A-B)](D-A)^{-1}. \end{aligned}$$

Il trivettore tra [ ] è zero perchè i vettori $A-C$, $C-B$, $A-B$ sono complanari, quindi il 2° membro si riduce ad 1, come si voleva dimostrare.

$\cdot 5 \quad (ABDC) = (ABCD)^{-1}$

$$\begin{aligned} Dim. (ABDC) &= (ABD)(BAC) = (BAD)^{-1}(ABC)^{-1} = \\ &= [(ABC)(BAD)]^{-1} = (ABCD) \ (*). \end{aligned}$$

(*) $a, b \in \mathrm{qtr} - \iota 0 . \supset . a^{-1} b^{-1} = (ba)^{-1}$.

Le formole ·4, ·5 esprimono che scambiando i punti medî il birapporto si cambia nel suo complemento all'1; scambiando i due ultimi punti esso si cambia nel suo reciproco come avviene per punti allineati.

$$\cdot 6 \quad (BADC) - (ABCD) = -2\,]\,[\mathbf{V}(ABC)\alpha\mathbf{V}(BAD)]$$

$$\cdot 7 \quad (BADC) - (ABCD) = \frac{2}{\overline{AD}^2\overline{BC}^2}[(B-A)\alpha(C-A)\alpha(D-A)](B-A).$$

Se i punti non sono complanari il trivettore tra [ ] nella ·7 non è nullo, ed il birapporto si modifica nel suo vettore quando si scambiano fra loro i due primi punti e contemporaneamente i due ultimi.

Ne consegue che: " *I ventiquattro birapporti di quattro punti non complanari corrispondenti alle ventiquattro permutazioni dei punti stessi sono* IN GENERALE *tutti disuguali* ".

2. — Posto:

$$(ABCD) = \rho, \qquad \text{si deduce:} \quad (ACBD) = 1 - \rho$$
$$(ABDC) = \rho^{-1}, \qquad (ACDB) = (1-\rho)^{-1}$$
$$(ADBC) = 1 - \rho^{-1}, \qquad (ADCB) = \rho(\rho - 1)^{-1}.$$

I birapporti ottenuti tenendo fisso il primo punto e permutando gli altri tre hanno vettori paralleli, ed hanno lo stesso verso i tre vettori corrispondenti alle permutazioni cicliche *BCD*, *CDB*, *DBC*; ed hanno il verso contrario i tre vettori corrispondenti alle permutazioni inverse *DCB*, *BDC*, *CBD*.

3. — Posto:

$$(B-A)\alpha(C-A)\alpha(D-A) = 6T = 6\ \textit{Volume}\ \overline{ABCD}$$

sarà:

$$(BADC) = (ABCD) + \frac{12T}{\overline{AD}^2.\overline{BC}^2}(B-A)$$

$$(CDAB) = 1 - (CADB) = 1 - (ACBD) - \frac{12T}{\overline{AD}^2\,\overline{BC}^2}(C-A) =$$
$$= (ABCD) - \frac{12T}{\overline{AD}^2\,\overline{BC}^2}(C-A).$$

Ne consegue che i quattro birapporti:

$$(ABCD),\ (BADC),\ (CDAB),\ (DCBA)$$

che hanno per tensore comune $\frac{AC\,.\,BD}{AD\,.\,BC}$, hanno anche tutti lo stesso scalare e non differiscono che nel vettore, quindi:

" *Gli scalari ed i moduli dei ventiquattro birapporti sono a quattro a quattro uguali* ".

4. Argomenti e versori. — Sia a_1 il vettore unità comune ai birapporti:

$$(ABCD),\ (ACDB),\ (ADBC)$$

e siano φ, ψ, θ i loro argomenti, avremo:

$$(ABCD) = \frac{AC.BD}{AD.BC}\, e^{\varphi a_1} \qquad (ABDC) = \frac{AD.BC}{AC.BD}\, e^{-\varphi a_1}$$

$$(ACDB) = \frac{AD.BC}{AB.CD}\, e^{\psi a_1} \qquad (ACBD) = \frac{AB.CD}{AD.BC}\, e^{-\psi a_1}$$

$$(ADBC) = \frac{AB.CD}{AC.BD}\, e^{\theta a_1} \qquad (ADCB) = \frac{AC.BD}{AB.CD}\, e^{-\theta a_1}.$$

Dalla relazione:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1$$

e dalle altre due analoghe, uguagliando gli scalari ed i vettori nei due membri, si deduce:

$$AC\,.\,BD\cos\varphi + AB\,.\,CD\cos\psi = AD\,.\,BC$$

$$AD\,.\,BC\cos\psi + AC\,.\,BD\cos\theta = AB\,.\,CD$$

$$AB\,.\,CD\cos\theta + AD\,.\,BC\cos\varphi = AC\,.\,BD$$

ed anche:

$$\frac{AB\,.\,CD}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{AC\,.\,BD}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{AD\,.\,BC}{\operatorname{sen}\theta}$$

da cui si deduce:

$$\varphi + \psi + \theta = \pi$$

ossia: " *Gli argomenti* φ, ψ, θ *sono gli angoli di un triangolo ed i prodotti degli spigoli opposti nel tetraedro sono proporzionali ai lati (oppure ai seni degli angoli) di questo triangolo* ".

5. — Tenuto conto delle relazioni trovate potremo scrivere:

$$(ABCD) = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\varphi a_1};\quad (ACDB) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\, e^{\psi a_1};\quad (ADBC) = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\theta a_1}.$$

Ne consegue che $\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}$ sarà il tensore comune dei quaternioni:

$$(ABCD),\ (BADC),\ (CDAB),\ (DCBA)$$

e che φ ne è l'argomento comune, mentre i loro vettori unità saranno generalmente diversi.

Siano a_1, b_1, c_1, d_1, questi vettori unità, siamo in grado di esprimere mediante gli argomenti φ, ψ, θ, ed i vettori a_1, b_1, c_1, d_1 i ventiquattro birapporti.

Eccone il quadro:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll}
(ABCD) = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\varphi a_1}; & (ACDB) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\, e^{\psi a_1}; & (ADBC) = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}\, e^{\theta a_1}; \\
(BADC) = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\varphi b_1}; & (BDCA) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\, e^{\psi b_1}; & (BCAD) = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}\, e^{\theta b_1}; \\
(CDAB) = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\varphi c_1}; & (CABD) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\, e^{\psi c_1}; & (CBDA) = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}\, e^{\theta c_1}; \\
(DCBA) = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\varphi d_1}; & (DBAC) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\, e^{\psi d_1}; & (DACB) = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}\, e^{\theta d_1}.
\end{array}\right.$$

Gli altri dodici birapporti che si deducono scambiando in ciascuno gli ultimi due punti, sono i *reciproci* dei precedenti.

Risulta così dimostrato che: " *I birapporti di quattro punti non complanari dipendono dai tre angoli di un triangolo e da quattro vettori unità* ".

Se i quattro punti sono in un piano, i vettori unità sono uguali e normali al piano dei punti. In questo caso i birapporti sono a quattro a quattro uguali e dipendono da tre angoli di un triangolo; passano tra essi le relazioni che legano i birapporti di quattro punti allineati (*).

(*) Ho avuto occasione di studiare il birapporto di quattro punti di un piano definito intrinsecamente in un mio lavoro: *Baricentro di un sistema piano di punti con masse immaginarie* (" Periodico di Matematica ", Fasc. IV, 1904).

6. — Siano a, b, c, d vettori unità normali alle faccie del tetraedro $ABCD$, e precisamente sia:

$$a = \mathbf{UV}(BCD) = \mathbf{U}\,[\,[(C-D)\alpha(B-D)] = \text{vettore unità di } (BCD)$$

$$b = \mathbf{UV}(CDA)$$

$$c = \mathbf{UV}(DAB)$$

$$d = \mathbf{UV}(ABC).$$

Potremo scrivere:

$$(ABCD) = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{\widehat{BCA}.d}\, e^{-\widehat{ADC}.c}$$

ed analogamente per gli altri. Sostituendo in (1) avremo:

$$(2)\quad \begin{cases} e^{\widehat{BCA}.d}\, e^{-\widehat{ADB}.c} = e^{\varphi a_1}; & e^{\widehat{CDA}.b}\, e^{\widehat{ABC}.d} = e^{\psi a_1}; & e^{-\widehat{DBA}.c}\, e^{\widehat{ACD}.b} = e^{\theta a_1} \\ e^{-\widehat{ADB}.c}\, e^{\widehat{BCA}.d} = e^{\varphi b_1}; & e^{-\widehat{DCB}\,a}\, e^{-\widehat{BAD}.c} = e^{\psi b_1}; & e^{\widehat{CAB}\,d}\, e^{-\widehat{BDC}.a} = e^{\theta b_1} \\ e^{\widehat{DAC}.b}\, e^{-\widehat{CBD}.a} = e^{\varphi c_1}; & e^{\widehat{ABC}.d}\, e^{\widehat{CDA}.b} = e^{\psi c_1}; & e^{-\widehat{BDC}.a}\, e^{\widehat{CAB}.d} = e^{\theta c_1} \\ e^{-\widehat{CBD}.a}\, e^{\widehat{DAC}.b} = e^{\varphi d_1}; & e^{-\widehat{BAD}.c}\, e^{-\widehat{DCB}.a} = e^{\psi d_1}; & e^{\widehat{ACD}.b}\, e^{\widehat{DBA}.c} = e^{\theta d_1} \end{cases}$$

Sviluppando i prodotti indicati nei primi membri ed uguagliando gli scalari dei due membri, si ha:

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \cos\widehat{BCA}\cos\widehat{ADB} + \operatorname{sen}\widehat{BCA}\operatorname{sen}\widehat{ADB}\cos\overline{AB} \\ \quad = \cos\widehat{DAC}\cos\widehat{CBD} + \operatorname{sen}\widehat{DAC}\operatorname{sen}\widehat{CBD}\cos\overline{CD} \\ \quad = \cos\widehat{BCA}\cos\widehat{ADB} + \cos\widehat{DAC}\cos\widehat{CBD} - \cos(AC,BD)\cos(AD,BC) \end{cases}$$

ed altre analoghe per ψ e per θ.

Ne consegue il teorema:

" *In un tetraedro il prodotto dei coseni degli angoli opposti ad uno spigolo più il prodotto dei seni degli stessi angoli per il coseno del diedro corrispondente allo spigolo è* COSTANTE PER DUE SPIGOLI OPPOSTI, *ed è uguale al prodotto dei coseni degli angoli opposti al primo spigolo più il prodotto dei coseni degli angoli opposti al secondo, meno il prodotto dei coseni degli angoli formati dalle altre due coppie di spigoli opposti* ".

Uguagliando i vettori nei due membri di ciascuna delle (2) si hanno tre espressioni per ciascuno dei vettori a_1, b_1, c_1, d_1; quelle relative ad a_1 sono:

$$(4)\quad \begin{cases} a_1 \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\widehat{BCA}\cos\widehat{ADB}\,.\,d - \operatorname{sen}\widehat{ADB}\cos\widehat{BCA}\,.\,c - \\ \qquad\qquad - \operatorname{sen}\widehat{BCA}\operatorname{sen}\widehat{ADB}\,]\,(d\alpha c) \\ a_1 \operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}\widehat{CDA}\cos\widehat{ABC}\,.\,b + \operatorname{sen}\widehat{ABC}\cos\widehat{CDA}\,.\,d - \\ \qquad\qquad - \operatorname{sen}\widehat{CDA}\operatorname{sen}\widehat{ABC}\,]\,(b\alpha d) \\ a_1 \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\widehat{ACD}\cos\widehat{DBA}\,.\,b - \operatorname{sen}\widehat{DBA}\cos\widehat{ACD}\,.\,c - \\ \qquad\qquad - \operatorname{sen}\widehat{ACD}\operatorname{sen}\widehat{DBA}\,]\,(c\alpha b) \end{cases}$$

7. Orientazione reciproca dei vettori a_1, b_1, ..., a, b, ... — Eliminando $e^{-\widehat{ABD}.c}$ tra le due prime equazioni della 1ª colonna delle (2) si ha:

$$e^{-\widehat{BCA}.d}\, e^{\varphi a_1} = e^{\varphi b_1}\, e^{-\widehat{BCA}.d}$$

da cui:

$$e^{\varphi b_1} = e^{-\widehat{BCA}.d}\, e^{\varphi a_1}\, e^{\widehat{BCA}.d}$$

ed anche:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= e^{-\widehat{BCA}.d}\; a_1\, e^{\widehat{BCA}.d} \\ \text{Analogamente:}\quad c_1 &= e^{-\widehat{CAB}.d}\; b_1\, e^{\widehat{CAB}\,d} \\ a_1 &= e^{-\widehat{ABC}.d}\; c_1\, e^{\widehat{ABC}.d} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Le (5) si interpretano semplicemente:

Il vettore b_1 è il vettore a_1 ruotato di $2\widehat{BCA}$ intorno a d

" c_1 " b_1 " $2\widehat{CAB}$ " d

" a_1 " c_1 " $2\widehat{ABC}$ " d

ossia: " *I vettori $a_1 b_1 c_1$ si ottengono l'uno dall'altro ruotando intorno al vettore d di angoli uguali rispettivamente al doppio di ciascuno degli angoli del triangolo ABC* ".

Od anche: " *I vettori a_1, b_1, c_1 fanno angoli uguali col vet-*

tore d, e gli angoli diedri dei piani da_1, db_1, dc_1 *sono rispettivamente uguali ai doppi angoli del triangolo ABC* „.

Nella stessa posizione relativa saranno:

$b_1, c_1, d_1,$	rispetto ad	a	ed alla faccia	BCD
$c_1, d_1, a_1,$	„	b	„	CDA
$d_1, a_1, b_1,$	„	d	„	$DAB.$

Le formole (4) del N° 6 ci esprimono a_1 mediante b, c, d e gli angoli del tetraedro, ma non sono suscettibili di una interpretazione immediata; si raggiunge più direttamente lo scopo operando sulla relazione primitiva:

$$e^{\varphi a_1} = e^{\widehat{BCA}.d}\, e^{-\widehat{ADB}.c}$$

che si può scrivere:

$$e^{\varphi a_1}\, e^{\widehat{ADB}.c} = e^{\widehat{BCA}.d}.$$

Moltiplico per $(A - B)$ vettore che appartiene al campo di variabilità comune ai vettori d, c. Avrò:

$$e^{\varphi a_1}\, e^{\widehat{ADB}.c}\,(A - B) = e^{\widehat{BCA}.d}\,(A - B).$$

Osservo che: $e^{\widehat{BCA}.d}\,(A - B)$ è il vettore $A - B$ ruotato di $\widehat{BCA}$ nel piano ABC, quindi è *anti-parallelo* al lato BC in ABC; $e^{\widehat{ADB}.c}\,(A - B)$ è il vettore *anti-parallelo* al lato BD in ABD; $e^{\varphi a_1}$ è il quoziente di questi vettori, quindi: a_1 è normale alle due *anti-parallele* ai lati BC, BD nei piani ABC ed ABD; φ è l'angolo formato da queste anti-parallele.

Dalla relazione:

$$e^{\psi a_1} = e^{\widehat{CDA}.b}\, e^{\widehat{ABC}.d}$$

si deduce che: a_1 è normale al vettore antiparallelo al lato CD nel piano ACD e che ψ è l'angolo che l'antiparallela al lato CD in ACD fa coll'antiparallela al lato BC in ABC.

Dalla relazione:

$$e^{\vartheta a_1} = e^{-\widehat{DBA}.c}\, e^{\widehat{ACD}.b}$$

si deduce che θ è l'angolo che l'antiparallela al lato BD in ABD fa coll'antiparallela al lato CD in ACD, e si ritrova che a_1 è normale a queste due rette.

Ne consegue che: " *Le anti-parallele ai lati della faccia BCD condotte dal vertice A stanno in un piano, e formano reciprocamente gli angoli* φ, ψ, θ; *il vettore* a_1 *è normale a questo piano* ".

Ma le antiparallele ai lati della faccia BCD rispetto ad A sono normali rispettivamente ai *circumraggi* uscenti da A delle faccie concorrenti in A; ne consegue che il piano da esse determinato, che chiamerò *piano anti-parallelo* alla faccia opposta, è normale al *circumraggio* del tetraedro uscente da A, quindi: " IL VETTORE a_1 È PARALLELO ALLA CONGIUNGENTE IL PUNTO A COL CENTRO DELLA SFERA CIRCOSCRITTA AL TETRAEDRO $ABCD$ ".

Tenendo conto delle altre relazioni che legano i vettori b_1, c_1, d_1 con a, b, c, d possiamo conchiudere che:

" I VETTORI a_1, b_1, c_1, d_1 DEI BIRAPPORTI DI QUATTRO PUNTI A, B, C, D SONO PARALLELI RISPETTIVAMENTE AI CIRCUMRAGGI DEL TETRAEDRO $ABCD$ USCENTI DAI VERTICI CORRISPONDENTI ".

8. — L'analisi precedente per la determinazione dei vettori a_1, b_1, c_1, d_1 ha messo in vista alcune proprietà del tetraedro, che non credo inutile di enunciare. " *Se per un vertice di un tetraedro si conducono le anti-parallele ai lati della faccia opposta, queste stanno in un piano (anti-parallelo alla faccia opposta) che è tangente alla sfera circoscritta al tetraedro. Gli angoli che le tre anti-parallele fanno nel piano da esse determinato sono* COSTANTI *nei quattro piani corrispondenti ai quattro vertici* ".

Aggiungerò che: " *Il piano anti-parallelo ad una faccia, p. es. BCD uscente da A incontra la faccia stessa secondo la retta*

$$\overline{AB}^2 . CD + \overline{AC}^2 . DB + \overline{AD}^2 . BC \text{ ".}$$

Questa retta ha per coordinate (*momenti*) in ciascuna faccia i quadrati delle distanze dei vertici di quella faccia dal vertice opposto.

Le quattro rette così definite in ciascuna faccia, cioè le intersezioni delle faccie stesse coi loro piani anti-paralleli stanno in un piano *solo* nel tetraedro in cui il prodotto degli spigoli opposti sono uguali.

Infatti siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le rette di cui sopra nelle quattro faccie; cioè sia:

$$\alpha = \overline{AB}^2 . CD + \overline{AC}^2 . DB + \overline{AD}^2 . BC$$

$$\beta = \overline{BC}^2 . DA + \overline{BD}^2 . AC + \overline{BA}^2 . CD$$

$$\gamma = \overline{CD}^2 . AB + \overline{CA}^2 . BD + \overline{CB}^2 . DA$$

$$\delta = \overline{DA}^2 . BC + \overline{DB}^2 . CA + \overline{DC}^2 . AB.$$

Calcolando i momenti di α rispetto a β, di β rispetto a γ ecc., si trova:

$$mom(\alpha, \beta) = (\overline{AC}^2 . \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 . \overline{BC}^2) ABCD$$

$$mom(\beta, \gamma) = (\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BD}^2) ABCD$$

ecc.

Se ne deduce che le rette $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono a due a due incidenti *solo quando*:

$$AC . BD = AD . BC = AB . CD$$

e siccome non concorrono in un punto, perchè giacciono nelle faccie del tetraedro, così si deve conchiudere che giacciono in un piano (*).

III.

Coordinata — Birapporto.

1. — Dati tre punti A, B, C non allineati, si può assumere come coordinata di un quarto punto D dello spazio il birapporto $(ABCD)$ sotto la condizione che il vettore del *quaternione*

(*) Si perviene alle stesse conclusioni se nelle espressioni di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ invece di 2 si legge n, essendo n un numero intero positivo o negativo. Se nelle faccie del tetraedro si considerano i punti A^n, B^n, C^n, D^n coincidenti rispettivamente con: $\overline{AB}^n . B + \overline{AC}^n . C + \overline{AD}^n . D$; $\overline{BC}^n . C + \overline{BD}^n . D + \overline{BA}^n . A$; $\overline{CD}^n . D + \overline{CA}^n . A + \overline{CB}^n . B$; $\overline{DA}^n . A + \overline{DB}^n . B + \overline{DC}^n . C$, le rette AA^n, BB^n, CC^n, DD^n concorrono in un punto solo quando nel tetraedro $ABCD$ i prodotti degli spigoli opposti sono uguali. Il punto d'incontro delle rette AA^n, BB^n, CC^n, DD^n in questo caso è il polo del piano delle rette $\alpha^n \beta^n \gamma^n \delta^n$.

che si fa corrispondere a questo rapporto, sia normale alla retta anti-parallela di BC in ABC. Posto:

$$(ABCD) = \rho e^{\varphi a_1} \tag{1}$$

con ρ e φ numeri noti ed a_1 vettore unità normale alla anti-parallela di BC in ABC, il punto D risulta determinato, e risultano determinati di conseguenza tutti gli altri birapporti.

La terna degli argomenti si deduce dalle formole:

$$\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta} = \rho, \quad \psi + \theta = \pi - \varphi.$$

Sia d il vettore unitario noto di (ABC), e siano α, β, γ gli angoli del triangolo ABC ed R il suo circumraggio.

Avremo:

$$\left.\begin{aligned} (BAD) &= \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\, e^{-\gamma d}\, e^{\varphi a_1} \\ (ACD) &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\, e^{\psi a_1}\, e^{-\beta d} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

che determinano le coordinate rapporto di D rispetto alle coppie (A, B) ed (A, C). Ne consegue:

$$\left.\begin{aligned} e^{\widehat{ADB}.c} &= e^{-\varphi a_1}\, e^{\gamma d} \\ e^{\widehat{CDA}.b} &= e^{\psi a_1}\, e^{-\beta d} \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

formole che ci determinano i vettori b, c e quindi la giacitura delle faccie ABD, CAD, nonchè gli angoli $\widehat{ADB}$, $\widehat{CDA}$. Da esse si deduce:

$$\left.\begin{aligned} \cos\widehat{ADB} &= \cos\varphi\cos\gamma + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\gamma\cos(d, a_1) \\ \cos\widehat{CDA} &= \cos\psi\cos\beta + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\beta\cos(d, a_1) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\widehat{ADB}.c &= \operatorname{sen}\gamma\cos\varphi.d - \operatorname{sen}\varphi\cos\gamma.a_1 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\gamma[(d\alpha a_1) \\ \operatorname{sen}\widehat{DA}.b &= -\operatorname{sen}\beta\cos\psi d + \operatorname{sen}\psi\cos\beta.a_1 + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\beta[(d\alpha a_1) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

I vettori b_1, c_1 sono determinati dalle formole:

$$b_1 = e^{-\gamma d}\, a_1 e^{\gamma d}$$

$$c_1 = e^{\beta d}\, a_1 e^{-\beta d}.$$

Il vettore a dato da:

$$e^{\widehat{BDC}.a} = e^{-\theta b_1}\, e^{\alpha d}$$

da cui:

$$\cos \widehat{BDC} = \cos\theta \cos\alpha + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \cos(b_1, d)$$

$$= \cos\theta \cos\alpha + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \cos(a_1, d) \qquad (5)$$

$$\operatorname{sen} \widehat{BDC}.a = \cos\theta \operatorname{sen}\alpha . d - \operatorname{sen}\theta \cos\alpha . b_1 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha [(d \alpha b_1) \qquad (6)$$

Operando su a, b, c per $\times d$ si ottengono i coseni dei diedri di spigoli BC, CA, AB, ossia:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{BDC}.\cos \overline{BC} &= \operatorname{sen}\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\alpha \cos(d, a_1) \\ \operatorname{sen} \widehat{CDA}.\cos \overline{CA} &= \operatorname{sen}\beta \cos\psi - \operatorname{sen}\psi \cos\beta \cos(d, a_1) \\ \operatorname{sen} \widehat{ADB}.\cos \overline{AB} &= \operatorname{sen}\gamma \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi \cos\gamma \cos(d, a_1) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2. — La proiezione del punto D sul piano ABC (piede dell'altezza calata da D) ha per coordinate baricentriche in ABC le proiezioni delle tre faccie concorrenti in D sul piano di ABC. Tenuto conto delle (8) si deduce facilmente che questo punto D' coincide col punto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha \cot\theta . A + \operatorname{sen}^2\beta \cot\psi B + \operatorname{sen}^2\gamma \cot\varphi . C -$$

$$- \frac{1}{2} \cos(d, a_1) [\operatorname{sen}2\alpha . A + \operatorname{sen}2\beta B + \operatorname{sen}2\gamma . C]$$

e quindi cade sulla retta che unisce il circumcentro di ABC col punto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha \cot\theta . A + \operatorname{sen}^2\beta \cot\psi . B + \operatorname{sen}^2\gamma \cot\varphi . C.$$

Sia:

$$\delta = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha \cot\theta + \operatorname{sen}^2\beta \cot\psi + \operatorname{sen}^2\gamma \cot\varphi}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}$$

$$D_1 = \frac{\operatorname{sen}2\alpha . A + \operatorname{sen}2\beta . B + \operatorname{sen}2\gamma . C}{4 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma} = \text{circumcentro } \overline{ABC}$$

$$D_2 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha \cot\theta . A + \operatorname{sen}^2\beta \cot\psi . B + \operatorname{sen}^2\gamma \cot\varphi . C}{\delta \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}. \qquad (9)$$

Sarà:

$$D' = \frac{\delta . D_2 - 2\cos(da_1) D_1}{\delta - 2\cos(da_1)} . \tag{10}$$

Sia D_3 la posizione occupata da D' quando $a_1 = d$, ossia quando $\cos(da_1) = 1$.

Sia D_4 la posizione occupata da D' quando $a_1 = -d$, ossia quando $\cos(da_1) = -1$.

Sarà:

$$D_3 = \frac{\delta D_2 - 2D_1}{\delta - 2} ; \qquad D_4 = \frac{\delta D_2 + 2D_1}{\delta + 2} \tag{11}$$

quindi:

$$D' = \frac{(\delta+2)\operatorname{sen}^2 \frac{da_1}{2} . D_4 + (\delta - 2)\cos^2 \frac{da_1}{2} . D_3}{\delta - 2\cos da_1} . \tag{12}$$

I punti D_3, D_4 soddisfano anche (per ipotesi) alle condizioni:

$$(ABCD_3) = \rho e^{\varphi d} ; \qquad (ABCD_4) = \rho e^{-\varphi d} \tag{13}$$

e sono i punti del piano ABC tali che le loro distanze da A, B, C sono proporzionali agli spigoli AD, BD, CD. Dalle (2), (2') ecc. si deduce che le coordinate angolari di questi punti rispetto ad ABC sono rispettivamente:

$$\alpha \mp \theta, \quad \beta \mp \psi, \quad \gamma \mp \varphi.$$

Ne segue che *le rette* AD_3, BD_3, CD_3 *e le rette* AD_4, BD_4, CD_4 *incontrano il circumcerchio di* ABC *in due terne di punti che sono vertici di due triangoli uguali, e gli angoli di questi triangoli sono rispettivamente* θ, ψ, φ.

Le coordinate baricentriche di D_3, D_4 in ABC sono rispettivamente:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha \mp \theta)}{\operatorname{sen}\theta} , \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\beta \mp \psi)}{\operatorname{sen}\psi} , \qquad \frac{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(\gamma \mp \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} .$$

Se $\varphi = \psi = \theta$ i punti D_3, D_4 coincidono coi *centri isodinamici* di ABC.

Il luogo dei punti tali che loro distanze da tre punti dati A, B, C sono proporzionali a tre segmenti dati AD, BD, CD è una circonferenza normale al piano ABC che ha per diametro

il segmento D_3, D_4, quindi D_3, D_4 sono veduti da D sotto angolo retto, e siccome D_3, D_4 dividono armonicamente D_1, D_2, così si può aggiungere che *le rette DD_3, DD_4 separano armonicamente le rette DD_1, DD_2 e bisecano gli angoli da esse formati. Il piano di queste quattro rette contiene l'altezza calata da D su ABC, contiene il circumcentro di ABC e quindi il circumcentro del tetraedro.*

Ne consegue ancora che DD' è media proporzionale tra D_3D' e $D'D_4$, quindi:

$$DD' = \frac{\sqrt{\delta^2 - 4}\,\mathrm{sen}(da_1)}{2[\delta - 2\cos(da_1)]} \cdot D_3D_4.$$

Dalle (13) si deduce:

$$D_3 = A + \left[\frac{\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\psi}{\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\theta}\, e^{-(\gamma-\varphi)d} - 1\right]^{-1}(A - B)$$

$$D_4 = A + \left[\frac{\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\psi}{\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\theta}\, e^{-(\gamma+\varphi)d} - 1\right]^{-1}(A - B)$$

da cui, dopo alcune riduzioni, si ricava:

$$\begin{aligned} AD_3 &= \frac{\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\theta \,.\, \overline{AB}}{\sqrt{\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\psi\,\mathrm{sen}\theta(\delta - 2)}}, \\ AD_4 &= \frac{\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\theta \,.\, \overline{AB}}{\sqrt{\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\psi\,\mathrm{sen}\theta(\delta + 2)}}; \end{aligned} \tag{14}$$

$$D_3D_4 = \frac{4R}{\sqrt{\delta^2 - 4}} \text{ dove } R \text{ è il circumraggio di } ABC. \tag{14'}$$

Quindi:

$$DD' = \text{altezza tetraedro} = \frac{2R\,\mathrm{sen}(da_1)}{\delta - 2\cos(da_1)}.$$

$$\text{Volume } \overline{ABCD} = T = \frac{4}{3} R^3 \frac{\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma\,\mathrm{sen}(da_1)}{\delta - 2\cos(da_1)}. \tag{16}$$

Gli spigoli AD, BD, CD si deducono dalle (2). Si trova:

$$\begin{aligned} AD &= \frac{2R\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma\,\mathrm{sen}\theta}{\Delta} \\ BD &= \frac{2R\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\gamma\,\mathrm{sen}\psi}{\Delta} \\ CD &= \frac{2R\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\varphi}{\Delta} \end{aligned} \tag{17}$$

dove:

$$\Delta = \sqrt{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \left[\delta - 2\cos(da_1)\right]}.$$

Il circumraggio del tetraedro è dato da $\frac{R}{\operatorname{sen}(da_1)}$ ed è indipendente da ρ e da φ.

Gli altri elementi del tetraedro $ABCD$, cioè i seni dei triedri, gli angoli degli spigoli opposti, le distanze degli spigoli opposti ecc., si deducono immediatamente dalle formole precedenti.

3. — Dalle considerazioni e dai calcoli svolti nel numero precedente, risultano segnalati punti e rette *notevoli* nelle faccie del tetraedro, che corrispondono a proprietà di questa figura, che si possono raccogliere in questo teorema:

Se per un vertice di un tetraedro si conducono le bisettrici interne ed esterne di ciascuna delle faccie concorrenti in quel vertice, fino ad incontrare i lati della faccia opposta in tre coppie di punti, i punti medî di queste tre coppie sono allineati. Le sfere che hanno per diametri le congiungenti queste coppie di punti passano per il primo vertice e si tagliano secondo una circonferenza. Il piano di questa circonferenza è normale alla faccia stessa, la incontra secondo un diametro del suo circumcerchio, e contiene il circumcentro del tetraedro.

I punti d'incontro di questa circonferenza colla faccia a cui è normale, sono punti notevoli della faccia stessa. Se si proiettano questi punti dai vertici delle faccie sul proprio circumcerchio si ottengono quattro coppie di triangoli tutti simili. I lati di questi triangoli sono proporzionali ai prodotti degli spigoli opposti nel tetraedro.

Se si chiamano rispettivamente θ, ψ, φ gli angoli di questi otto triangoli simili (che a due a due sono uguali), saranno punti notevoli del tetraedro i punti delle faccie che hanno in ciascuna di esse per coordinate baricentriche le potenze ennesime dei seni di θ, ψ, φ. Sono i punti:

$$\operatorname{sen}^n\varphi \,.\, B + \operatorname{sen}^n\psi \,.\, C + \operatorname{sen}^n\theta \,.\, D$$
$$\operatorname{sen}^n\theta \,.\, C + \operatorname{sen}^n\psi \,.\, D + \operatorname{sen}^n\varphi \,.\, A$$
$$\operatorname{sen}^n\varphi \,.\, D + \operatorname{sen}^n\psi \,.\, A + \operatorname{sen}^n\theta \,.\, B$$
$$\operatorname{sen}^n\theta \,.\, A + \operatorname{sen}^n\psi \,.\, B + \operatorname{sen}^n\varphi \,.\, C$$

che chiamerò rispettivamente A^n, B^n, C^n, D^n, con n intero.

Molti altri punti *notevoli* si possono dedurre da questi colla trasformazione isogonale od isotomica, e molte rette notevoli colla polarità.

Non è oggetto principale di questo lavoro il ricercare le proprietà di questi punti; mi limiterò ad enunciare le più ovvie:

1° I punti A^n, B^n, C^n, D^n hanno per baricentro comune quello del tetraedro.

Infatti:

$$A^n + B^n + C^n + D^n = A + B + C + D.$$

2° Se $\varphi = \psi = \theta$ i punti A^n, B^n, C^n, D^n coincidono coi baricentri delle faccie. In questo solo caso le rette AA^n, BB^n, CC^n, DD^n concorrono in un punto.

3° I punti reciproci dei punti coniugati isogonali di A^2, B^2, C^2, D^2 sono quei punti della faccia che hanno per coordinate baricentriche i quadrati degli spigoli esterni a quella faccia.

4° I centri delle sfere d'Apollonio passanti per D relative ai lati AB, BC, CA sono i punti:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\alpha} A - \frac{\operatorname{sen}^2\psi}{\operatorname{sen}^2\beta} B, \quad \frac{\operatorname{sen}^2\psi}{\operatorname{sen}^2\beta} B - \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\gamma} C, \quad \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\gamma} C - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\alpha} A$$

e stanno sulla retta:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}^2\varphi} AB + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\theta} BC + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\psi} CA.$$

La coniugata isogonale di questa retta è la polare del reciproco di D^2.

La sua coniugata isotomica è la retta secondo cui la faccia ABC è incontrata dal suo piano antiparallelo condotto per D.

IV.

Tetraedri speciali e notevoli.

1. — Sono quelli che corrispondono ad un particolare e notevole birapporto dei loro vertici.

α) $a_1 = \pm d.$

I punti $ABCD$ sono i vertici di un quadrangolo piano.

β) $imag(ABCD) = 0.$

I punti $ABCD$ sono conciclici.

γ) $(ABCD) = -1$.

I punti $ABCD$ formano un *gruppo armonico*, ed il quadrangolo $ABCD$ è un *quadrangolo piano ed armonico* (*).

δ) $\rho = 1$.

$$(ABCD) = e^{\varphi a_1}, \quad (ACBD) = -2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\, e^{\frac{\varphi}{2} a_1}$$

$$AC \times BD = AD \times BC = AB \times CD / 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}; \quad \psi = \theta.$$

2. $a_1 \times d = 0$.

Il tetraedro $ABCD$ è inscritto in un emisfero, che ha per centro il circumcentro di ABC. Introducendo l'ipotesi $\cos(a_1,d)=0$, $\operatorname{sen}(a_1,d)=1$ nelle formole del § III esse si semplificano notevolmente.

$$\cos \widehat{ADB} = \cos\varphi \cos\gamma \qquad \operatorname{sen} \widehat{ADB} \cos \overline{AB} = \operatorname{sen}\gamma \cos\varphi$$

$$\cos \widehat{CDA} = \cos\psi \cos\beta \qquad \operatorname{sen} \widehat{CDA} \cos \overline{CA} = \operatorname{sen}\beta \cos\psi$$

$$\cos \widehat{BDC} = \cos\theta \cos\alpha \qquad \operatorname{sen} \widehat{BDC} \cos \overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha \cos\theta$$

$$D' = D_2 = \frac{(\delta-2)D_3 + (\delta+2)D_4}{2\delta}$$

$$DD' = \frac{2R}{\delta} \qquad \text{ecc.}$$

3. — Tetraedro equi-anarmonico. Sia:

$$(ABCD) = e^{\frac{\pi}{3} a_1}.$$

Dico che i punti A, B, C, D formano un gruppo *equi-anarmonico*, e che il tetraedro $ABCD$ è *equi-anarmonico*.

Dall'ipotesi si deduce:

$$(ABCD) = (ACDB) = (ADBC) = e^{\frac{\pi}{3} a_1}$$

$$(ACBD) = (ABDC) = (ADCB) = e^{\frac{\pi}{3} a_1}$$

(*) Si veda il lavoro citato: *Baricentro di un sistema di punti ecc.*

quindi:

$$\varphi = \psi = \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$AB \times CD = BC \times AD = CA \times BD$$

ossia: *Nel tetraedro equi-anarmonico il prodotto di due spigoli opposti è costante, e questo è proprietà caratteristica della equi-anarmonia.*

I ventiquattro birapporti di una quaterna equi-anarmonica di punti sono a tre a tre uguali, e si riducono ad otto a due a due reciproci. Essi dipendono unicamente dai quattro vettori $a_1 b_1 c_1 d_1$.

Le formole del § III si riducono notevolmente in questo caso, come è facile verificare sostituendo.

$$\delta = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma} \Big/ \sqrt{3}$$

$$D_2 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha A + \operatorname{sen}^2\beta B + \operatorname{sen}^2\gamma C}{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma} = \text{punto di Lemoine di } ABC.$$

I punti D_3, D_4 coincidono coi *centri-isodinamici* di ABC ed hanno per coordinate angolari $\alpha \mp \frac{\pi}{3}$, $\beta \mp \frac{\pi}{3}$, $\gamma \mp \frac{\pi}{3}$.

Il luogo dei punti che con tre punti dati A, B, C *formano un gruppo equi-anarmonico è una circonferenza in un piano normale ad* ABC *che ha per diametro la congiungente i centri isodinamici di* ABC.

Le sfere luogo dei punti per cui il rapporto delle distanze da A, B è AD/BD; da B, C è BD/CD; da C, A è CD/AD, passano rispettivamente per C, per A, per B; sono le sfere di Apollonio relative al triangolo ABC. I loro centri stanno sulla retta:

$$\operatorname{sen}^2\gamma \,.\, AB + \operatorname{sen}^2\alpha \,.\, BC + \operatorname{sen}^2\beta \,.\, CA$$

che è la retta di Lemoine in ABC.

Le anti-parallele ai lati di ABC condotte per D formano angoli uguali. Il loro piano incontra ABC secondo la retta:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}^2\gamma} + \frac{BC}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{CA}{\operatorname{sen}^2\beta}$$

che è la retta di Longchamp reciproca di quella di Lemoine, ed è la polare del punto di Lemoine.

Il tetraedro equi-anarmonico gode di molte proprietà, di cui le principali sono le seguenti:

1° Le bisettrici degli angoli opposti ad uno spigolo s'incontrano sullo spigolo stesso, quindi le rette che uniscono i vertici cogli incentri delle faccie opposte passano per un punto.

2° Le rette che uniscono i vertici coi punti K^n delle faccie opposte (punti che hanno per coordinate baricentriche le potenze ennesime dei lati del triangolo a cui appartengono) passano per un punto, e le polari dei punti K^n stanno in un piano.

3° Le anti-parallele ai lati di una faccia condotti dal vertice opposto formano fra loro angoli uguali.

4° I piani anti-paralleli ad una faccia condotti per i vertici opposti, incontrano la faccia stessa secondo la sua retta di Longchamp. Le rette di Longchamp delle quattro faccie stanno in un piano.

5° I piani tangenti nei vertici alla circumsfera del tetraedro determinano un secondo tetraedro omologico al primo. È polo di omologia il punto in cui si incontrano le congiungenti i vertici coi punti di Lemoine delle faccie opposte. È piano di omologia quello che contiene le rette di Longchamp delle faccie stesse.

6° I piedi delle altezze cadono sulla retta che congiunge nella faccia corrispondente il circumcentro col punto K^2, retta che contiene i centri isodinamici.

7° I centri isodinamici di ciascuna faccia sono veduti sotto angolo retto dal vertice opposto.

8° I piani che proiettano i centri isodinamici di una faccia dal vertice opposto s'incontrano secondo una retta r che passa per il circumcentro del tetraedro e per il punto d'incontro delle congiungenti i vertici coi punti K^2 delle faccie opposte.

9° La retta r incontra le quattro circonferenze che passano per i centri isodinamici delle diverse faccie e per i vertici opposti negli stessi due punti che si potrebbero chiamare *centri isodinamici del tetraedro equi-anarmonico.*

10° I *centri isodinamici* del tetraedro equi-anarmonico determinano colle faccie del medesimo otto nuovi gruppi equi-anarmonici.

Relazione intorno alla Memoria presentata dal Prof. E. Martel, intitolata: *Contribuzione all'Anatomia del fiore delle Ombrellifere.*

L'A. si occupa dello studio delle armature fibro-vascolari del fiore delle Ombrellifere. Paragonando fra loro le differenti armature dei verticilli fiorali successivi, egli dimostra che, stando ai criterii che si possono derivare dalle osservazioni del numero, della disposizione e della entità dei fasci, si deve ritenere che il verticillo ovarico delle Ombrellifere non deve essere considerato come formato da due soli fillomi indipendenti, ma che piuttosto devesi ritenere composto da due completi verticilli di N. 5 fillomi ciascuno, ognuno dei quali corrisponde ad uno degli antichi carpelli.

L'esame accurato dei vari stadî evolutivi del fiore, condusse l'A. ad ammettere, contrariamente a quanto si riteneva finora, che negli stadî anteriori alla fecondazione, il *pistillo vero* è ridotto al solo *Stilopodio*, e che nei periodi successivi, in seguito, come egli si esprime, alla *invaginazione del ricettacolo*, si viene a formare la cavità sottostilopodiale, che da tutti i fitografi era ritenuta invece rappresentare l'ovario.

L'A. dimostra che gli ovuli si originano dallo *Stilopodio*, e che la cavità sottostilopodiale è un semplice adattamento del ricettacolo, diretto ad accompagnare gli ovuli nel mentre si allungano, e a proteggerli durante la loro progressiva evoluzione.

L'A. discute intorno alle cause del curioso fenomeno, illustrando le differenze essenziali che si hanno tra l'ovario *infero genuino* e quello delle Ombrellifere, che non è tale, se non apparentemente.

Il *Carpoforo*, che a maturità sostiene i due carpidi, deriva, secondo le ricerche dell'A., dal fascio commissurale che si rende libero dopo la essiccazione e la distruzione dei parenchimi che lo attorniano.

L'A. termina la breve memoria, illustrata da molti disegni ricavati dai preparati microscopici, esponendo alcune sue osservazioni sullo sviluppo delle protuberanze che ricoprono i frutti dei *Laserpitium* e delle *Astranthiae*.

L'esame minuzioso della Memoria presentata dal Dr. Martel, la quale fa seguito ad una serie di lavori pubblicati già nei volumi delle nostre Memorie, ci ha persuaso a proporre l'approvazione e l'inserzione nei volumi accademici anche di queste ricerche, le quali hanno condotto l'A. a conclusioni originali e certamente importanti, quantunque l'A. stesso, poco curante della bibliografia, si sia attenuto ad un sistema di indagine troppo unilaterale, ed abbia dimostrato di accordare troppa importanza al valore dei fasci vascolari e al loro significato nella morfologia florale, e nella organogenia.

A. Parona,
Oreste Mattirolo, *Relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 9 Aprile 1905.

PRESIDENZA DEL PROF. FRANCESCO ROSSI
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Cipolla, Brusa, Carutti, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusano l'assenza il Presidente D'Ovidio, il Vice Presidente Boselli, il Direttore della Classe Ferrero.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 26 marzo 1905.

Il Sindaco di Genova fa omaggio delle seguenti due opere del prof. Francesco Luigi Mannucci, pubblicate a spese di quel Municipio: 1° *L'Anonimo genovese e la sua raccolta di rime (sec. XIII-XIV)*, Genova, 1904; 2° *La Cronaca di Jacopo da Varagine*, Genova, 1904.

Il Socio Cipolla presenta per gli *Atti* una nota del Socio corrispondente prof. Federico Patetta, intitolata: *Una lettera concernente trattative per la pace tra i Guelfi ed i Ghibellini.*

LETTURE

Una lettera concernente trattative per la pace tra i Guelfi ed i Ghibellini di Firenze.

Nota del Socio corrispondente Prof. FEDERICO PATETTA.

È noto che nell'anno 1279 papa Niccolò III degli Orsini, rinnovando con miglior fortuna il tentativo fatto sei anni prima da Gregorio X, mandò a Firenze il cardinal Latino, suo nipote, perchè procurasse la pace generale fra i cittadini. Il cardinal Latino, giunto a Firenze in principio d'ottobre, riuscì infatti a far conchiudere la famosa pace del 18 gennaio 1280, che ebbe tanta importanza per la storia interna fiorentina (1).

La lettera, che ora pubblico, si riferisce a trattative anteriori alla missione del cardinal Latino, a trattative cioè iniziate nei sei mesi di sede vacante, che vi furono fra la morte di Giovanni XXI e l'elezione di Niccolò III (20 maggio-25 novembre 1277), e continuate poi subito dopo.

La lettera fu scritta da Gherardo, generale dell'ordine camaldolese, al cardinal Bentivenga, vescovo d'Albano. Da essa veniamo a conoscere, che, evidentemente in tempo di sede vacante, la parte guelfa di Firenze ed i fuorusciti ghibellini avevano affidato a Gherardo e all'abate di Vallombrosa la missione di recarsi a trattare della pace davanti ai cardinali e davanti al re Carlo d'Angiò: che l'abate di Vallombrosa era morto, certo dopo essersi messo in viaggio e forse anche dopo aver conferito almeno coi cardinali: che dopo l'elezione di Niccolò III, Gherardo aveva potuto trattare personalmente con lui, ottenendone formali promesse d'intervento: che buone parole aveva avuto anche dalla viva voce di re Carlo.

(1) Cfr. G. Salvemini, *Magnati e popolani in Firenze dal 1280 al 1295*, Firenze, 1899, pag. 1 e segg., 19 e segg., ecc. Il testo della *Pace del Cardinal Latino* è stampato dal Salvemini a pag. 320 e segg.

Gherardo scrive ora al cardinal Bentivenga, perchè scongiuri e solleciti il papa. Egli non fa considerazioni politiche: vuole solo che " la superficie della terra non diventi più rossa di sangue umano ". Dà però un'importante notizia: d'essersi abboccato coi capi di parte ghibellina e di poter quindi assicurare, che erano disposti ad obbedire a qualunque ordine del pontefice, purchè non ne risultasse loro nessuna *diminutio*.

Diciamo ora brevemente di Gherardo e delle persone ricordate nella sua lettera.

Gherardo (1), già monaco nel monastero di Classe, fu eletto generale dei Camaldolesi nel 1274. Gli *Annales Camaldulenses* riportano le importanti costituzioni generali emanate da lui nel 1279, e citano molte sue lettere, scritte fra il 1279 ed il 1288. Parlano inoltre di una sua opera intitolata *Vita heremitarum Camaldulensium*. Gherardo morì nell'aprile del 1291.

Il cardinal Bentivenga (2), della famiglia Bentivenga di Acquasparta in provincia di Perugia, autore di sermoni e d'importanti opere teologiche, era frate Francescano; non però generale dei Francescani, come afferma il Cappelletti, confondendolo evidentemente con Matteo Bentivenga d'Acquasparta, eletto appunto generale nel 1287. Il nostro Bentivenga fu fatto nel 1276 vescovo di Todi, poi, due anni dopo, creato cardinale e trasferito alla diocesi d'Albano da papa Niccolò III, di cui era confessore. Egli era dunque persona ottimamente scelta per influire sull'animo del pontefice. Il cardinal Bentivenga morì in Todi nel marzo del 1289.

L'*Abbas Vallembrosanus*, compagno di Gherardo, è Jacopo (3),

---

(1) Cfr. specialmente Mittarelli e Costadoni, *Annales Camaldulenses*, tomo V, Venezia, 1760, pag. 128, 137, 189, ecc. Lo Chevalier, *Rép. bio-bibliogr.*, 1ª ed., col. 849, cita solo Ziegelbauer, *Centif. Camald.*, 1750, p. 21-22 (fonte a me non accessibile).

(2) Chevalier, op. cit., col. 269; Mazzuchelli, *Scrittori d'Italia*, II, 2, 866-67; Wadding, *Annales Minorum*, 2ª ediz., tomo V, Roma, 1733, *passim*; Id., *Scriptores Ordinis Minorum*, Roma, 1650, pag. 53; Cappelletti, *Chiese d'Italia*, I, 668; V, 229-230.

(3) V. Simii, *Catalogus sanctorum et plurium virorum illustrium, qui veluti mystici flores effloruerunt in Valle Umbrosa*, Roma, 1693, pag. 151-153; G. Albergantius, *Index eremitarum Vallisumbrosae*, nella raccolta di opuscoli di varî autori, intitolata *Del beato Michele Flammini, eremita e abate*

eletto generale degli eremitani di Vallombrosa nel 1272 e morto il 3 novembre 1277, una ventina di giorni prima dell'elezione di Niccolò III.

Se è vero che Jacopo sia morto a Firenze, come scrivono gli storici del suo ordine, si deve credere che il 3 novembre 1277 fosse compiuta già da qualche tempo la missione affidata a lui e al suo compagno; oppure che Jacopo, colto dalla malattia, che doveva essergli fatale, abbia interrotto il suo viaggio per ritornare nel suo monastero.

Gli stessi storici di Vallombrosa affermano, che Jacopo godeva a Firenze di grande stima e fiducia, e ricordano sue lettere, dalle quali appariva, che egli era stato mandato più volte dal comune *ad Romanam curiam et Carolum regem, de pace et concordia R. P. tractaturus*. Questa notizia riceve ampia conferma dalla lettera di Gherardo; cosicchè possiamo sperare che vengano quando che sia alla luce anche le lettere di Jacopo.

Per trattare coi cardinali in tempo di sede vacante, Gherardo e Jacopo dovevano certo recarsi a Viterbo, dove si teneva il conclave.

A Viterbo Gherardo si sarà poi abboccato col papa appena eletto; oppure gli avrà fatto visita a Roma, dove Niccolò III dimorò senza dubbio dalla fine del dicembre 1277 al principio del giugno 1278. Vedremo che il suo colloquio col papa non può essere posteriore al gennaio 1278.

Il papa si mostrò lieto delle proposte di pace e promise di cooperare per parte sua alla buona riuscita delle trattative. Certo egli doveva esser sincero nelle sue promesse, cosicchè ad altri (forse al re Carlo) (1) si deve imputare se la missione del cardinal Latino non si ebbe se non poco meno di due anni dopo.

---

generale di Vallombrosa, ecc., nuova edizione, Roma, s. a. *(ma verso il 1765)*, pag. 188. L'Albergante, che essendo stato generale di Vallombrosa e procuratore della sua Congregazione a Roma, potè avere a sua disposizione tutti gli archivi dell'ordine, parla appunto delle missioni affidate a Jacopo, dicendo di averne avuto notizia dalle sue lettere *(" id colligimus ex suis epistolis ")*; cioè forse da un registro simile a quello camaldolese, da cui traggo la lettera di Gherardo. Solo per errore, probabilmente di stampa, si legge nell'Albergante che Jacopo morì *die 3 anno salutis 1277*, essendo omesso il nome del mese, che è novembre.

(1) Cfr. Salvemini, op. cit., pag. 12 e segg.

Carlo D'Angiò, secondo i regesti pubblicati dal Minieri Riccio (1), non uscì mai dal suo regno nè in tempo di sede vacante, nè in principio del nuovo pontificato, essendosi recato a Roma solo nel maggio del 1278.

Gherardo dovette dunque presentarsi alla corte Angioina a Napoli o in altro luogo del Regno, entro il quale si spinse fin nella Puglia (*post meum de Apulia redditum*). Ora, siccome nei primi giorni del febbraio 1278 egli, come vedremo, era già in Toscana, il suo colloquio con Carlo d'Angiò, che sembra posteriore a quello col papa, dovrebbe essere del gennaio 1278. Se poi l'essere ricordato il colloquio col re dopo quello col papa fosse cosa puramente casuale e senza conseguenza per la data dei due avvenimenti, Gherardo potrebbe aver parlato col re anche negli ultimi mesi del 1277.

Carlo D'Angiò affermò che egli pure desiderava la pace fra i Guelfi e i Ghibellini di Firenze; ma le sue parole non dovevano essere troppo sincere, e forse se n'avvide lo stesso Gherardo, che scrivendo al cardinal Bentivenga pare lasci indovinare la fredda accoglienza avuta dal re, ben diversa da quella franca e cordiale avuta dal pontefice; cosicchè a nuove trattative col re non accenna neppure lontanamente.

Gherardo dal 7 febbraio al 26 aprile 1278 datò le sue lettere da varî conventi del territorio d'Arezzo; il 2 e 3 maggio lo troviamo a Firenze e il 5 maggio a Pisa, dalla qual città scrisse la lettera qui pubblicata, appunto il 5 maggio e forse immediatamente dopo essersi abboccato coi capi del partito ghibellino. Pisa infatti era allora tenuta dai ghibellini, e doveva quindi esser facile trovarvi i principali fuorusciti fiorentini. Del resto pare che Gherardo non voglia precisare nè la data nè il luogo del ritrovo, limitandosi alla vaga indicazione *post meum de Apulia redditum*. Egli dice inoltre che il colloquio coi capi ghibellini era avvenuto *per caso*, mentre possiamo ragionevolmente sospettare che l'abate di Vallombrosa, godendo della fi-

---

(1) *Il regno di Carlo I d'Angiò dal 2 gennaio 1273 al 31 dicembre 1283*, in " Arch. stor. ital. „, serie III, tomo XXII e segg.; serie IV, tomo I e segg. Le parti di questo lavoro contenute nel vol. XXVI della serie III (1877) si riferiscono all'anno 1277; quelle nel vol. I della serie IV (1878) all'anno 1278.

ducia del comune di Firenze, rappresentasse nelle trattative la parte guelfa, e Gherardo la ghibellina.

Il fatto più importante acquisito alla storia fiorentina per mezzo della nostra lettera è questo: che fin dal 1277 la parte guelfa e la ghibellina avevano iniziato trattative di pace, che forse erano tenute nascoste ai gregarî, destinati sempre a combattere e a gridar *viva* o *morte* senza sapere il perchè. Certo nessun cronista fiorentino parla della missione del 1277, mentre Giovanni Villani e, dopo di lui, molti altri (1) ricordano i *solenni ambasciadori* mandati al papa nel 1279 dal comune e dai capitani di parte guelfa, perchè " *mettesse suo aiuto a pacificare i Guelfi di Firenze insieme* ", e quelli mandati contemporaneamente al pontefice dai fuorusciti ghibellini " *a pregarlo e richiederlo, che egli mettesse ad esecuzione la sentenza della pace data per Gregorio X tra loro e Guelfi di Firenze* ".

Solo Dino Compagni (quantunque lo Scheffer-Boichorst (2) impugnasse l'autenticità della sua cronaca anche per causa della narrazione che vi si fa della pace fra Guelfi e Ghibellini) mostra forse di esser meglio informato degli altri, scrivendo che i Guelfi " doppo molti consigli tenuti alla Parte, pensorono pacificarsi co' Ghibellini che erono di fuori. E saviamente concordorono ridursi con loro a pace sotto il giogo della Chiesa, acciò che i legami fussino mantenuti dalla fortezza della Chiesa: e *celatamente* ordinorono, che il Papa fosse mezzo alla loro discordia. Il quale, a loro petizione, mandò messer frate Latino ecc. " (3).

Il *celatamente* potrebbe del resto spiegarsi, osservando che i quattro *solenni ambasciadori* mandati dalla parte guelfa, secondo la narrazione del Villani, avevano apparentemente mandato di indurre il papa *a metter suo aiuto e consiglio a pacificare*

---

(1) G. Villani, *Istorie fiorentine*, l. VII, cap. 55; *Istoria fiorent.* attribuita a Ricordano Malispini (falsa o rimaneggiata), cap. CCV (ed. di Bologna, 1867, pag. 284); Marchionne di Coppo Stefani, lib. II, rub. 152 (in *Delizie degli eruditi toscani*, tomo VIII, Firenze, 1777, pag. 19); *Historia fiorentina* di Domenico Buoninsegni (falsamente attribuita al figlio Piero), Firenze, 1581, pag. 78; ecc. Si veda anche il frammento storico del sec. XV edito in *Delizie* cit., tomo IX, 1777, pag. 66.

(2) *Florentiner Studien*, 1874, pag. 52-59. Cfr. I. Del Lungo, *Dino Compagni e la sua Cronica*, I, 2, 1880, pag. 1046-1047.

(3) I. Del Lungo, op. cit., II, pag. 19.

i Guelfi di Firenze insieme. Lo scopo più importante e più difficile, cioè la pacificazione tra Guelfi e Ghibellini, era dunque tenuto segreto.

Possiamo ora chiederci come mai, essendo la parte guelfa e la ghibellina d'accordo nel mandare Gherardo e Jacopo ai cardinali e al re Carlo perchè trattassero la pace, non si pensasse a trattarla direttamente senza bisogno d'intermediarî.

A questo si può rispondere, che Carlo d'Angiò si considerava quasi come sovrano anche in Toscana, e perciò il Comune di Firenze non avrebbe probabilmente osato di riammettere i fuorusciti senza il suo beneplacito; che certo non tutti dovevano volere la pace, cosicchè anche il nostro Gherardo mostra di credere che si sarebbe ottenuta *effectu potentiae* più presto che per accordo; che infine, secondo l'osservazione di Dino Compagni, era cosa savia ridursi a pace per mezzo del re e della Chiesa, perchè *i legami fussino mantenuti* dalla loro potenza.

Ci resta a dire della fonte, da cui ci è conservata la lettera di Gherardo, cioè di un frammento del registro originale delle lettere scritte da lui nella sua qualità di generale dell'ordine Camaldolese.

Nelle costituzioni edite dal nostro Gherardo nell'ottobre del 1279 *apud oppidum Socii*, nel territorio d'Arezzo, è stabilito fra le altre cose, che si debba tenere il registro di tutte le lettere *sigillo prioris Camaldulensis munitarum* (1); ma già prima si doveva tenere tale registro, almeno per le lettere più importanti.

Gli autori degli *annales Camaldulenses* (2) conoscevano infatti tre volumi di registri, il primo contenente gli atti del priore Angelo, morto nel novembre del 1268, gli altri quelli del nostro Gherardo, a quanto pare, dall'agosto del 1279 al giugno del 1288. Infatti dalle loro citazioni (3) si ricava, che nella prima pagina del

(1) *Annales Camaldulenses* cit., V, pag. 138.

(2) Tomo V, pag. 138-139 e *passim*.

(3) La pagina 1 del Reg. II è citata negli *Annales*, V, pag. 139. La pagina 83 (citata a pag. 155-156) conteneva una lettera del giorno *quinto intrante iunio 1283*; la pagina 89 (cit. a pag. 156) una lettera datata *die tertia iunii*, dove forse è da leggersi *die tertia exeunte iunio*. La pagina 12 del Reg. III è citata a pag. 163, e la pagina 64 dello stesso Registro a pag. 177. A pag. 144 del citato volume degli *Annales* è indicato un documento del 1° luglio 1286 come esistente nel secondo Registro; ma o II si deve correggere in III, o si tratta di un'aggiunta.

secondo registro vi era una lettera di Gherardo del 10 agosto 1279 e nelle pagine 83 e 89, ultime citate, due lettere del giugno 1283: che nella pagina 12, prima citata del terzo registro, vi era una lettera del 9 aprile 1284 e nella pagina 64, ultima citata, una lettera del giugno 1288.

Non so se i tre volumi si conservino ancora. Certo sarebbe cosa utilissima rintracciarli.

Il frammento di registro, che ho presente, appartiene all'Archivio di Stato di Modena, al quale fu donato, il 14 novembre 1890, dal conte Carlo Onorato d'Espagnac, insieme con altre carte dell'abbazia Camaldolese di S. Maria di Vangadizza (prov. di Verona).

Gli annalisti Camaldolesi non lo conobbero. Ne diede invece brevemente notizia il compianto Malaguzzi, nella sua relazione sull'*Archivio di Stato in Modena durante il triennio 1888-89-90* (Modena, 1891, pag. 32 e segg.), pubblicando l'indice delle date e degli indirizzi.

Il frammento, protetto da una brutta rilegatura moderna, consta di 26 fogli cartacei, in parte assai danneggiati, misuranti mm. 230 × 300. Erano rimasti in bianco i fogli 12^b-15^b, ma tre pagine vennero utilizzate nel secolo decimoquinto per trascrivere intitolazioni e modelli di lettere.

Il nostro registro comincia attualmente con una lettera, mancante del principio, scritta da Soci, presso Bibbiena in provincia d'Arezzo, il 7 febbraio 1278, e continua, generalmente in ordine cronologico, fino all'8 settembre dello stesso anno. Nel *recto* dell'ultimo foglio fu poi aggiunto un atto notarile del 7 marzo 1279, relativo al monastero di Vangadizza. Perciò il Malaguzzi congetturò ragionevolmente, che il registro fosse nell'archivio di quel monastero fin dal 1279, *o giù di lì*.

Naturalmente la maggior parte delle lettere hanno solo l'indicazione del giorno e del mese, non quella dell'anno; ma l'anno 1278 compare nella data di due lettere (24 maggio e 6 settembre), e in due anche l'indizione sesta (8 febbraio e 6 settembre).

In altro lavoretto comunicherò varie notizie tratte dal registro. Mi limito ora alla sola lettera, che concerne i Guelfi e i Ghibellini di Firenze (*Reg.* f. 7^a-7^b).

Domino Bentevegne episcopo Albanensi, Romane ecclesie cardinali.

Affectum amplificat in filii subiecti visceribus sibi per tantum patrem pia demonstrata benignitas, firmat et prosecutio [1]) fidem conceptam diutius, dum, que petita extitit, fuit gratia filio largiter elargita. Sane quidem ad vestram presentiam presens hec cedula portet me vestras quasdam litteras recepisse, quas ad meorum nuntiorum petitionem potestati, capitaneo et communi Pisano pro favore ordinis dominationi vestre placuit destinare; propter quas vobis gratiarum exolvo uberima[*s action*]es [2]). Ceterum ecce, neccessitate petente, ab incepta sermonis materia quodammodo divertere me oportet. Et quoniam michi dictat assumpta michi de vobis fiducia specialis [3]), patrem sapientem alloquor, qui et meos sermones imperfectos perficiet et quod supplicabitur effectui mancipabit. Itaque, mi pater et domine, recessisse de vestra memoria non opinor, qualiter cum viro venerabili bone recordationis dudum Vallembrosano abbate ad dominos cardinales et dominum regem Karolum meum direxerim iter, pro pace videlicet inter Guelfos et Ghibellinos civitatis Florentie [4]) pertractanda, sicut ipsis ambabus [*partibus nobis in*]iungere [5]) placuit florentinis, et qualiter, vestra cooperante mecum gratia, locutus fui personaliter domino nostro pape, [f. 7v] qui verba pacis per me porrecta suscepit illariter et in perficienda predicta se velle asseruit interponere manus suas: quod et illud idem dominus rex Scicilie supradictus se dessiderare michi protulit organo vive vocis. Igitur, cum pro summo bono pacis hodie prosecutio reputetur, et pacem quilibet non solum inquirere set et persequi teneatur, et hanc ymni angelici tuba clamet et tertii *agnus Dei* [6]), ac etiam salutatio ipsius humani generis redemptoris data suis discipulis sit " *Pax vobis* „ [7]),

---

(1) La lezione *prosecutio* pare sicura, benchè non chiarissima.

(2) La piccola lacuna, alla quale ho supplito di congettura, è prodotta dall'esser la carta logorata.

(3) Ms. *spalis*.

(4) Ms. *Flor*.

(5) Per consunzione della carta mancano nell'originale sette od otto lettere. Il supplemento proposto mi pare certo, tanto più essendo la parola *florentinis* scritta in disteso e non per abbreviazione. Solo invece di *nobis* si potrebbe anche congetturare *michi*.

(6) Bisogna anche qui sottintendere *tuba*. L'*inno angelico* è quello del vangelo di S. Luca, 2, 14 " *et in terra pax hominibus bonae voluntatis* „: il terzo *agnus Dei* è nella liturgia: " Agnus Dei, qui tollis peccata mundi, miserere nobis. Agnus Dei qui tollis peccata mundi, miserere nobis. *Agnus Dei, qui tollis peccata mundi, dona nobis pacem* „.

(7) *Evang. Lucae*, 24, 36; *Evang. Ioh.*, 20, 19.

pietati vestre inducitur mea humilis devotio supplicare, quactenus suggerere instanti sollicitudine dignemini, meis precibus et intuitu maxime tanti boni, domino nostro sanctissimo summo pontifici, ut ad tantum ipsorum Guelforum et Ghibillinorum dicidium sic suos misericordes oculos adaperire dignetur, quod, dum ad prosequendam predictam pacem patris omnium fuerit diffusa potentia, terre superficies de cetero effusione humani sanguinis nullactenus rubra fiat. Volo etiam, quod vobis preterea constet, quod, post meum de Apulia redditum, maiores partis Ghibillinorum fui casu personaliter allocutus, et, prout per ipsos fides michi tradita fuit, affirmare valeo, predictos fore paratos parere preceptis quibuslibet domini pape, diminutione qualibet pretermissa. Sit ergo in vobis pietatis respectu in suggerendo constantia, ut accelleretur predicte pacis provisio, quam cicius effectus potentie ministrabit. Consueverunt namque interdum in mora multa pericula provenire. Demum vero cor meum et corpus repono in misericordie vestre sinu, offerens me ad vestra beneplacita et mandata totis viribus preparatum. Dat. Pisis in monasterio sancti Michaelis de burgo pisano, III nonas mensis maii [5 *maggio* 1278].

L' Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Aprile 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Segre, Fileti, Parona, Morera, Grassi e Jadanza che funge da Segretario.

Scusano la loro assenza i Soci Salvadori, Camerano, Guidi e Mattirolo.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica una lettera del Prof. Simone Newcomb di Washington che ringrazia per la sua nomina a Socio corrispondente.

Il Socio Segre presenta per l'inserzione negli *Atti*, a nome del Socio nazionale non residente Luigi Bianchi, una nota del Dr. Guido Fubini, intitolata: *Alcuni nuovi problemi che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali.*

Il Socio Morera, a nome del Socio nazionale non residente Volterra, presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Prof. E. Almansi, intitolato: *Sull'equilibrio dei sistemi disgregati.* Il Presidente nomina una Commissione perchè l'esamini e ne riferisca in una prossima adunanza della Classe.

LETTURE

Alcuni nuovi problemi, che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali.

Nota di GUIDO FUBINI.

Le seguenti pagine studiano alcuni tipi di equazioni alle derivate parziali: le equazioni differenziali in due variabili indipendenti di tipo iperbolico (§§ 1, 2), le equazioni in più di due variabili indipendenti, che chiamerò equazioni di Bianchi-Niccoletti (§ 4) e infine le equazioni, le cui caratteristiche sono in parte reali, in parte immaginarie (§ 5). Incidentalmente studio (§ 3) un problema, che si può considerare come una generalizzazione del problema dell'inversione degli integrali definiti.

In questa nota mi accontenterò di enunciare, piuttosto che di dimostrare i teoremi, che man mano andrò esponendo: e ciò, per non allungare inutilmente queste pagine con dimostrazioni, le quali non presenterebbero alcuna novità, in quanto che esse si ridurrebbero a una semplice ripetizione delle considerazioni, ormai tanto note, che si usano nelle applicazioni del metodo delle approssimazioni successive. Mi accontenterò inoltre (e specialmente nei §§ 4, 5) di svolgere soltanto qualche esempio particolare: le generalizzazioni sono numerosissime e si presentano spontanee.

Insomma lo scopo di queste pagine non è già quello di dare metodi nuovi, ma soltanto quello di mettere in luce alcuni nuovi problemi al contorno *(Randwerthaufgaben)*, che si possono presentare per le equazioni differenziali. Fra l'altro, mi sembra in ispecial modo interessante il risultato che per alcune equazioni differenziali del tipo iperbolico in due variabili indipendenti esistono varie classi di *contorni chiusi*, lungo cui si possono prefissare " a priori " i valori di un integrale, appunto come se si trattasse di un'equazione del tipo ellittico (§ 2, III° e IV° Caso limite). Si trovano poi alcune curiose proprietà di questi integrali.

§ **1.** — Sia data l'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) \tag{1}$$

dove la f è una funzione (di 5 variabili) soddisfacente alle condizioni di Lipschitz rispetto alle $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, u. Supporremo che le x, y siano coordinate cartesiane ortogonali in un piano rappresentativo; indicheremo con O l'origine degli assi. Siano A, B due punti posti rispettivamente sull'asse delle x e sull'asse delle y, e sia R il rettangolo di cui O, A, B sono tre vertici. È ormai classico il teorema che *in* R *esiste uno e un solo integrale* u *della* (1), *che su* OA, OB *prende valori prefissati arbitrariamente.* Se poi Γ è un arco di curva terminato ai punti A, B, che sia contenuto tutto nella regione $x \geq 0$, $y \geq 0$, che non sia incontrato da alcuna retta caratteristica ($x =$ cost., $y =$ cost.) in più di un punto, che possegga in ogni punto una tangente determinata, che non abbia alcuna tangente parallela all' asse delle x o a quello delle y, allora è pur ben noto il teorema: *Esiste in* R *uno e un solo integrale* u *della* (1) *tale che su* Γ *la* u *e la sua derivata normale abbiano valori prefissati* (*).

Goursat ha infine dimostrato recentemente (" Annales de la Faculté de Toulouse ", 1904):

Un integrale u *della* (1) *è in generale determinato in un'area abbastanza piccola, quando si diano i suoi valori lungo due curve* Γ, Γ', *le quali escano da uno stesso punto* A, *non abbiano, oltre* A, *alcun altro punto a comune, non siano incontrate ciascuna da alcuna caratteristica in più di un punto, e siano di più tali che le due caratteristiche, uscenti da* A, *rimangano esterne all'angolo formato dalle curve* Γ, Γ' *in discorso. Su queste due curve poi i valori di* u *si possono prefissare a piacere.*

Questo teorema del Goursat può recare sorpresa, perchè le curve Γ, Γ' si possono considerare come costituenti un'unica curva C, lungo cui è sufficiente conoscere i valori di un inte-

---

(*) Qui supponiamo senz'altro che la f sia definita per tutti i sistemi di valori finiti della x, y, u $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$; se ciò non fosse, bisognerebbe supporre R abbastanza piccolo, ecc., ecc. (Darboux, *Théorie des Surfaces*, IV° partie; note I par M. E. Picard).

grale, per determinarlo completamente. Ciò non è però contraddittorio coi teoremi precedenti, perchè esistono infinite caratteristiche, che incontrano C in due punti (uno posto su Γ, uno posto su Γ'), *anzichè in uno soltanto.*

Noi dimostreremo ora un teorema più generale. Dimostreremo cioè che per determinare un integrale u della (1) si possono dare (ad arbitrio) i suoi valori lungo due curve Γ, Γ', uscenti rispettivamente da due punti *distinti* A, A' di una stessa caratteristica $y=0$, e lungo il segmento AA' di questa caratteristica. Il teorema, enunciato con precisione, è il seguente:

Nel quadrante positivo del piano (x, y) *sia dato un arco di curva* Γ (Γ') *che sia incontrato da ogni caratteristica in non più di un punto, che abbia in ogni punto una tangente variabile con continuità (la quale non sia mai parallela a uno degli assi coordinati) e che infine sia terminato a un punto* A (A') *della caratteristica* $y=0$ *e a un punto* B (B') *della caratteristica* $x=0$. *I due archi* Γ, Γ' *siano sempre a distanza finita l'uno dall'altro; i punti* A, A', B, B' *siano distinti dall'origine* O. *Sia p. es.* OA' > OA; *sarà pure* OB' > OB. *Se allora* OA', OB' *sono sufficientemente piccoli* (*), *esiste nel rettangolo* R *(di cui* O, A', B' *sono tre vertici) uno e un solo integrale* u *della* (1), *che sugli archi* AB, A'B' *e sul segmento* AA' *(oppure sul segmento* BB') *assume valori prefissati arbitrariamente.*

Non si diminuisce la generalità, supponendo che questi valori siano nulli; infatti se φ è una funzione, che in Γ, Γ', AA' prende i valori prefissi, la funzione $v=u-\varphi$ si annulla su Γ, Γ', AA' e in R soddisfa alla:

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + f\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v + \varphi, x, y\right).$$

Basterebbe quindi studiare questa equazione, anzichè la (1).

Supponiamo dunque senz'altro nulli i valori prefissati su Γ, Γ', AA'. Porremo poi, come suggeriscono i noti metodi delle approssimazioni o integrazioni successive:

$$u = \lim_{n=\infty} u_n$$

(*) Ciò che si può sempre ottenere con una conveniente omotetia di centro O.

dove le u_n su Γ, Γ', AA' si annullano e in R soddisfano alle:

$$u_0 = 0\,; \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, u_{n-1}, x, y\right) \qquad (n \geq 1).$$

Per determinare successivamente le u_n, basta dunque saper costruire in R un integrale w di un'equazione:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \psi(x, y)$$

(dove $\psi(x, y)$ è una funzione nota), il quale si annulli su Γ, Γ', AA'. Questo integrale sarà dato da una formola del tipo:

$$w = F(x, y) + \lambda(x) + \mu(y)$$

dove $F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y \psi(x, y)\, dy$, e dove le $\lambda(x)$, $\mu(y)$ sono funzioni rispettivamente della x e della y, che si tratta di determinare in R. Evidentemente la μ (che è funzione della sola y) è determinata in R, quando ne siano noti i valori su Γ'. Sia E_0' un punto di Γ'; noi indicheremo con E_0 quel punto, in cui la retta $x = \text{cost}$, uscente da E_0', incontra Γ, con E_1' quel punto, in cui la retta $y = \text{cost}$, uscente da E_0, incontra Γ', con E_1 quel punto, in cui la retta $x = \text{cost}$, uscente da E_1', incontra Γ e così via. Arriveremo finalmente a un punto E_i' di Γ' tale che la retta $x = \text{cost}$ uscente da esso incontra AA' in un punto E_i. Sarà chiaramente $\lambda(E_k') = \lambda(E_k)$; $\mu(E_k) = \mu(E'_{k+1})$ dove è rispettivamente $k \leq i$, $k \leq i - 1$. Ricordiamo ora che $w = F + \lambda + \mu$, è per ipotesi nullo in ciascuno dei punti E, E'; avremo così, indicando con $F(E), \lambda(E), \mu(E)$ rispettivamente i valori che F, λ, μ hanno in E:

$$\sum_{k=0}^{i} [F(E_k') + \lambda(E_k') + \mu(E_k')] = \sum_{k=0}^{i} [F(E_k) + \lambda(E_k) + \mu(E_k)] = 0$$

e quindi anche, sottraendo e ricordando le precedenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{i} [F(E_k') - F(E_k)] + \mu(E_0') - \mu(E_i) = 0$$

donde:

$$\mu(E_0') = \mu(E_i) - \sum_{k=0}^{i} [F(E_k') - F(E_k)]. \tag{2}$$

Ora, siccome noi dobbiamo soltanto determinare $\lambda+\mu$, possiamo intanto determinare μ, in modo che per $y=0$ sia $\mu=0$. La μ sarà quindi nulla in tutto il segmente AA' e quindi anche nel punto E_i.

La (2) ci determina quindi senz'altro la μ in un punto qualunque E_0' di Γ', come appunto si voleva. Ora poichè su AA' sono nulle tanto la w, che la F e la μ, sarà pure nulla la $\lambda=w-F-\mu$. Basterà dunque, affinchè la λ sia nota in tutto R, determinare λ sull'arco Γ: ciò che si compie con un metodo affatto analogo al precedente.

È ora necessario trovare un limite superiore di F, λ, μ e delle loro derivate prime nel rettangolo R. Indicheremo con l il più grande dei lati di R e supporremo che in R sia $|\varphi|<M$ (M=cost). Sarà allora:

$$|F|<Mxy<Ml^2; \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|<Mx<Ml; \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|<My<Ml.$$

Ora si osservi che nel secondo membro di (2) è da porre $\mu(E_i)=0$ e che il massimo valore assoluto di $F(E_k')-F(E_k)$ è inferiore al massimo valore assoluto di $\frac{\partial F}{\partial y}$ lungo il segmento E_kE_k' moltiplicato per la differenza delle ordinate dei punti E_k', E_k. Ora $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|<Ml$; la somma dei valori assoluti di queste differenze è $\leq l$; quindi:

$$|\mu(y)|<Ml^2.$$

Osserviamo che dalla (2) si ricava che $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ è uguale alla somma di un numero *finito* di termini, ciascuno dei quali è uguale al valore, che $\frac{\partial F}{\partial x}$ $\left(\text{oppure } \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ ha in un punto di R, moltiplicato per un fattore *finito*.

Ricordando il limite superiore trovato per $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ in R, si ha che esiste una costante h tale:

$$|\mu'(y)|<hMl.$$

Questa disuguaglianza si potrebbe anche stabilire, senza far uso della proprietà che il secondo membro di (2) consta di un

numero finito di termini, usando di procedimenti analoghi a quelli di cui si serve il Goursat (loc. cit.). In modo analogo si trovano limiti superiori per $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$; e se ne conclude che esiste una costante K, tale che:

$$|w| < KMl^2; \quad \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| < KMl; \quad \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| < KMl.$$

Noi abbiamo così imparato a costruire successivamente le u_n; e ci basterà dimostrare che il $\lim\limits_{n=\infty} u_n$ esiste e ci dà effettivamente un integrale della (1), che soddisfa alle condizioni volute. Basterà, come è noto, dimostrare che la serie $\Sigma|u_n - u_{n+1}|$ è uniformemente convergente in R. Indichiamo con M_n il più grande dei massimi valori assoluti in R delle differenze:

$$|u_n - u_{n+1}|, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right|.$$

Ricordiamo che:

$$\frac{\partial^2(u_{n+1} - u_{n+2})}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, u_n, x, y\right) - f\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}, u_{n+1}, x, y\right).$$

Il secondo membro di questa uguaglianza per le ipotesi fatte sulla f, è minore di HM_n, dove H è una costante; e quindi, poichè $u_{n+1} - u_{n+2}$ si annulla su Γ, Γ', AA', avremo per i risultati precedenti, che M_{n+1} è minore della più grande delle quantità KHM_nl, KHM_nl^2. Se, per fissare le idee, supponiamo p. es. $l < 1$, avremo che:

$$M_{n+1} < KHlM_n$$

e quindi:

$$M_{n+s} < (KHl)^s M_n \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ora poichè $|u_{n+s} - u_{n+s+1}| < M_{n+s}$, ne trarremo che, se l è abbastanza piccolo, la serie $\Sigma|u_n - u_{n+1}|$ è in R assolutamente e uniformemente convergente. La $u_0 + \sum\limits_1^\infty (u_i - u_{i-1})$ tende dunque uniformemente a un limite u, ecc., ecc.

Esiste quindi un integrale u della (1) soddisfacente alle condizioni volute.

E questo integrale (se l è abbastanza piccolo) è unico. Sia

infatti v un altro integrale della (1), soddisfacente alle condizioni imposte su Γ, Γ', AA'. Poniamo $v_n = v - u_n$: i metodi precedenti dimostrano che $\lim_{n=\infty}(v - u_n) = 0$ ossia che $v = u$ c. d. d.

Osservazione. — Notiamo però che le derivate prime (di w e quindi anche) delle u_n e della u avranno in generale una discontinuità di prima specie in quei punti E_0', tali che il corrispondente punto E_i coincide con A. Queste discontinuità spariscono (se $\psi(x, 0) = 0$) nel caso generale, se i dati valori al contorno sono p. es. tali che si possa scegliere la φ in guisa che il secondo membro di (1′) sia nullo per $y = v = 0$ (*). Noi potremmo, volendo, limitarci allo studio di queste ultime condizioni al contorno, ponendo $u = \varphi$ su Γ, Γ', AA', dove φ è una funzione che soddisfa alla condizione predetta.

§ 2. — Noi ora vedremo come il teorema testè dimostrato include come casi limiti molti teoremi, alcuni notissimi, altri, credo, affatto nuovi e abbastanza notevoli.

I° Caso limite. — Se Γ, Γ' sono infinitamente vicini, il nostro teorema si riduce al teorema più sopra accennato che esiste uno e un solo integrale della (1), che su Γ prende valori arbitrariamente prefissati, insieme alla sua prima derivata normale.

II° Caso limite. — Se A, A' divengono infinitamente vicini, il nostro teorema si riduce al citato teorema di Goursat.

III° Caso limite. — I punti B, B' divengono infinitamente vicini (coincidono). In tal caso il secondo membro di (2) contiene ancora un numero *finito* di termini, ma questo numero cresce indefinitamente se E_0' tende al punto limite B. In tal caso si può ancora, come sopra, dimostrare la $|w| < KMl^2$, ma non si può più trovare un limite superiore delle derivate prime di w *(almeno nel caso generale in cui la* f *non è una funzione analitica).* Se dunque *ci limitiamo al caso generale che* f *sia una funzione, così come si definisce nella teoria delle variabili reali*, i nostri metodi saranno applicabili soltanto alle equazioni del tipo:

$$(1^{bis}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(u, x, y).$$

(*) Questa condizione si traduce semplicemente in una relazione tra i valori delle derivate prime, che le funzioni, a cui si deve ridurre u su Γ, Γ', hanno rispettivamente nei punti A, A (rispetto all'arco di Γ, Γ'): questa relazione dipende soltanto dalle f e dai valori imposti alla u sul segmento AA'.

E per esse avremo il seguente teorema, che mi sembra non privo di interesse:

Se l *è abbastanza piccolo, esiste uno e un solo integrale* u *della* (1bis) *che sulle due curve* Γ, Γ' (uscenti da uno stesso punto B e terminate a due punti A, A' di una stessa caratteristica) *e sul segmento* A A' *di questa caratteristica prende valori prefissati arbitrariamente.*

Sarà opportuno fare due osservazioni:

1ª Il contorno formato da Γ, Γ', AA' è un *contorno chiuso!* Si è quindi trovata una prima classe di *contorni chiusi, su cui si possono prefissare ad arbitrio i valori di un integrale* u *di una equazione* (1bis) *di tipo iperbolico* (il quale integrale ne resta univocamente determinato) *appunto come avviene per le equazioni del tipo ellittico!*

2ª. Il precedente teorema è in *apparente contraddizione* col teorema di Goursat: infatti per il teor. di Goursat noi possiamo bensì dare i valori di u lungo Γ, Γ', ma non già lungo AA'; questi ultimi anzi sono determinati dai precedenti. La contraddizione è soltanto apparente: infatti nel caso attuale *l'integrale* u, *testè considerato, in generale non è continuo, ma ha una discontinuità di seconda specie nel punto* B. Ed è abbastanza intuitivo che ciò debba avvenire: infatti il punto B non è che un caso limite del segmento BB', e si deve quindi considerare (mi si consenta l' espressione) come *un segmento infinitesimo.* Se non m'inganno, questa curiosa classe di integrali per la (1bis) non è stata ancora osservata.

IV° Caso limite. — Supponiamo che i punti A, A' coincidano in un punto A della retta $y = 0$ e che i punti B, B' coincidano in un punto B della retta $x = 0$. Le curve Γ, Γ' non abbiano poi alcun altro punto comune. Tiriamo nel quadrante positivo una retta $y = \text{cost}$, che incontri Γ, Γ' rispettivamente nei due punti M, M'. Costruiamo al modo di Goursat, quell'integrale u_1 di (1bis) che esiste nell'area AMM' (e quindi anche nel rettangolo, di cui A, M sono due vertici opposti, e i cui lati sono rette caratteristiche) e che sugli archi AM, AM' (posti rispettivamente su Γ, Γ') prende i valori prefissati. Esso assumerà su MM' certi valori. Costruiamo quindi nell'area BMM' quell'integrale u_2 della (1bis), che su MM' coincide con u_1 e sugli archi BM, BM' prende i valori prefissati (cfr. III° Caso limite).

I due integrali u_1, u_2 testè considerati esisteranno e saranno univocamente determinati, se l è abbastanza piccolo; essi costituiranno in tutta l'area racchiusa da Γ, Γ' (cfr. Goursat, loc. cit., pag. 130 e seg.) un *unico* integrale u della (1bis), che esisterà in tutto R, prenderà su Γ, Γ' i valori prefissi, sarà continuo in A e sarà univocamente determinato. Del resto, *anche questo caso si può trattare direttamente, senza ricorrere al II° e al III° caso.* Avremo dunque (sempre supposto l abbastanza piccolo):

Il contorno formato da Γ, Γ' *è un nuovo contorno* **chiuso,** *relativamente al quale si possono proporre per la* (1bis) *dei problemi al contorno affatto analoghi ai problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico: in altre parole, prefissati ad arbitrio dei valori su* Γ, Γ', *esiste uno e un solo integrale* u *della* (1bis), *che su* Γ, Γ' *assume detti valori e che è continuo nel punto* A *(o nel punto* B*). Questo integrale avrà in generale una discontinuità di seconda specie nel punto* B(A). Se noi invece nulla prestabilissimo circa alla continuità di u nel punto A o, se si vuole, nel punto B, il teorema di unicità non sarebbe più vero.

Come si vede, questa classe di *problemi al contorno* per le equazioni di tipo iperbolico presenta grandi analogie coi problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, pure conservando in parte una fisonomia *sui generis.*

§ **3.** — È facile vedere che esiste una intima relazione tra i problemi attuali e il problema d'inversione degli integrali definiti: ciò che fu già osservato dal Le Roux (" Annales de l'École Norm. Supér. ", 1895) e dal Goursat (loc. cit.) per i casi da essi studiati. Il Le Roux osservò già (come fu ritrovato più tardi dal Prof. Burgatti nei " Rendiconti dei Lincei ", 1903) che al suddetto problema di inversione si può applicare il metodo delle approssimazioni successive. Noi vogliamo generalizzarne i risultati, cominciando anzitutto a mettere in luce di nuovo le relazioni tra gli attuali problemi e il problema d'inversione degli integrali definiti. Supponiamo che la (1) sia un'equazione lineare. Sia Γ la solita curva AB e sia P un punto di R: le rette caratteristiche uscenti da P incontrino Γ nei punti M, N. È ben noto che, applicando i metodi di Riemann, si può esprimere il valore di u in P per mezzo di un integrale esteso all'arco MN di Γ, il cui integrando contiene linearmente i valori di u e di

una delle sue derivate prime, p. es. di $\frac{\partial u}{\partial y}$, sull'arco MN stesso. Supponiamo noti i valori di u su Γ: basterà adunque che noi possiamo determinare i valori di $\frac{\partial u}{\partial y}$ su Γ, affinchè u risulti determinato in tutto R. In particolare ne risulteranno determinati anche i valori di u su Γ'. E, se noi supponiamo che questi valori siano noti anch'essi " a priori ", dovremo esprimere che i valori, testè determinati di u su Γ', coincidono coi valori prestabiliti. Ciò che darà appunto una equazione integrale, la cui risoluzione determinerà i valori cercati di $\frac{\partial u}{\partial y}$ su Γ. Noi però senza altro ci volgeremo allo studio della seguente equazione più generale:

$$f(x) = \varphi(x) + F\left(\int_a^b \lambda(x, y)\,\varphi(y)\,dy,\ x\right)$$

dove $f(x)$, $\lambda(x, y)$ sono funzioni note, F è pure una funzione nota, a, b si immaginano per maggior generalità (cfr. Fredholm, *Acta Mathem.*, tomo 26) costanti, $(a<b)$, φ è la funzione incognita. Si suppone al solito che F soddisfi alle condizioni di Lipschitz. Per determinare la φ, si ponga al solito $\varphi = \lim\limits_{n=\infty} \varphi_n$, dove:

$$\varphi_0(x) = f(x)\ ;\ \varphi_n(x) = f(x) - F\left(\int_a^b \lambda(x, y)\varphi_{n-1}(y)dy, x\right)\quad (n \geq 1).$$

Indichiamo con M_i il massimo valore assoluto di $\varphi_i - \varphi_{i-1}$; e ricordiamo che per ipotesi $|F(z, x) - F(t, x)| < H|t - z|$, dove H è una costante. Posto $b - a = \delta$, $|\lambda| < L$ (δ, L costanti), avremo:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1} - \varphi_n| &= \left|F\left(\int_a^b \lambda(x, y)\varphi_{n-1}(y)dy, x\right) - F\left(\int_a^b \lambda(x, y)\varphi_n(y)dy, x\right)\right| \\ &< H\left|\int_a^b \lambda(x, y)[\varphi_{n-1}(y) - \varphi_n(y)]\,dy\right| \\ &\leq HLM_n\delta \end{aligned}$$

ossia $M_{n+1} < HLM_n\delta$. Quindi, se δ è sufficientemente piccolo, si dimostra (come per il $\lim\limits_{n=\infty} u_n$ al § 1) che esiste il $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n$, che esso soddisfa all'equazione integrale considerata, e che non esiste alcuna altra funzione soddisfacente alla detta equazione.

§ 4. — Le precedenti considerazioni si possono estendere senza difficoltà alle equazioni di Bianchi-Niccoletti (cfr. Niccoletti, " Atti della R. Accademia di Napoli ", ser. II, vol. 8, 1897). Per quanto il metodo sia generale, mi limiterò a studiare come esempio la seguente equazione in tre variabili indipendenti x, y, z.

$$(3) \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, u, x, y, z\right)$$

dove la f è simbolo di una qualunque funzione, soddisfacente alle solite condizioni di Lipschitz. Noi considereremo le x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali nello spazio ambiente.

Siano $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ tre superficie, incontrate dalle parallele ai tre assi coordinati (rette caratteristiche) in non più di un punto, tutte contenute entro il triedro coordinato positivo, in guisa che ogni retta, uscente dall'origine O e non avente alcun coseno direttore negativo, incontri le $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ in un punto e in un punto soltanto. Le $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ abbiano in ciascun punto un piano tangente variabile con continuità, il quale non sia mai parallelo a uno degli assi coordinati. Dette superficie siano a distanza finita l'una dall'altra e incontrino l'asse delle $x(y)(z)$ rispettivamente nei punti $A, A' A''$ (B, B', B'') (C, C', C'').

Supporremo per fissar le idee $OA < OA' < OA''$ e quindi $OB < OB' < OB''$, $OC < OC' < OC''$. Sia R il parallelopipedo, di cui OA'', OB'', OC'' sono tre spigoli; sia l il più grande di questi tre spigoli. Io dico che:

Se l *è abbastanza piccolo, esiste uno e un solo integrale* u *della* (3), *che assume valori prestabiliti su* $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$, *sull'area* σ *del piano* xy, *limitata dai segmenti* AA'', BB'' *e dalle curve* AB, A''B'', *intersezione del piano* xy *rispettivamente con le superficie* Σ, Σ'', *e assume infine valori prestabiliti anche sull'area* σ' *del piano* xz, *che è limitata dai segmenti* A'A'', C'C'' *e dalle curve* A'C', A''C'', *intersezione di detto piano con le superficie* Σ', Σ''.

Al solito basta dimostrare questo teorema per le equazioni del tipo della:

$$(4) \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \varphi(x, y, z)$$

(dove φ è una funzione nota in R), e applicare quindi alla (3) il metodo delle approssimazioni successive. Noi, per non ripetere

considerazioni già svolte (§ 1) ci limiteremo allo studio della (4); il cui integrale generale è:

$$w = F(x, y, z) + \lambda(y, z) + \mu(x, z) + \nu(x, y)$$

dove $F(x, y, z) = \int_0^x dx \int_0^y dy \int_0^z \varphi dz$. Come già facemmo al § 1, potremo limitarci a determinare le λ, μ, ν in guisa che w sia nullo su $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \sigma, \sigma'$. Osserviamo che le λ, μ, ν non sono singolarmente determinate; chè, se noi indichiamo con X, Y, Z delle funzioni rispettivamente di x, y, z, e poniamo $\lambda + Y + Z$, $\mu + X - Z$, $\nu - X - Y$ al posto di λ, μ, ν, l'integrale w non cambia. Potremo dunque dare ad arbitrio le λ, μ sul piano $z = 0$ ed anche la λ sul piano $y = 0$. Noi supporremo, per fissar le idee, che per $z = 0$ sia $\lambda = \mu = 0$ e che per $y = 0$ sia $\lambda = 0$. Ora, poichè su σ è $w = F = \lambda = \mu = 0$, sarà pure (in σ) $\nu = 0$. Dai punti della curva AB tiriamo le parallele all' asse delle z, fino a incontrare Σ' in una certa curva. Sia M il punto di questa curva, che è più vicino al piano xy; costruiamo il piano π, uscente da M e parallelo al piano xy e sia $z = t$ l'equazione di π. Siano B_1A_1, $B_1'A_1'$, $B_1''A_1''$ le curve di intersezione del piano π rispettivamente con le superficie $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$; i punti A_1, A_1', A_1'' (B_1, B_1', B_1'') giacciano sul piano $xz(yz)$. Sia ora N un punto di σ', o di Σ' o di Σ'', posto entro la striscia $0 \leq z \leq t$; la sua proiezione N_0 sul piano xy cadrà entro l'area σ. Ora w per ipotesi è nullo tanto in N, che in N_0; quindi (*):

$$F(N) + \lambda(N) + \mu(N) + \nu(N) = 0$$

$$F(N_0) + \lambda(N_0) + \mu(N_0) + \nu(N_0) = 0.$$

Sottraendo membro a membro, avremo, poichè $\nu(N) = \nu(N_0)$:

$$F(N) - F(N_0) - [\lambda(N_0) + \mu(N_0)] = -[\lambda(N) + \mu(N)].$$

E poichè per ipotesi λ, μ sono noti (nulli) in N_0, questa equazione determinerà il valore di $\lambda + \mu$ nel punto N. Perciò, se è $0 \leq k \leq t$, la somma $\lambda(y, z) + \mu(x, z)$ è nota tanto sulle

(*) Al solito indicheremo con $F(N)$, $F(N_0)$, $\lambda(N)$..., i valori che $F, \lambda, \ldots$ hanno rispettivamente nei punti N, N_0.

curve C', C'' intersezione del piano $z=k$ rispettivamente con le superficie Σ', Σ'', quanto sul segmento s, intersezione di detto piano con l'area σ'.

Ci proponiamo ora il problema di determinare la λ e la μ su C', C'', s.

Ora, se noi consideriamo, com'è lecito, sul piano $z=k$ la z come un parametro, vediamo che questa questione coincide pienamente con quella risoluta al § 1, quando abbiamo determinato i valori delle funzioni λ, μ, supposta nota la loro somma $\lambda+\mu(=-F)$ sulle curve Γ, Γ' e sul segmento AA'. Potremo dunque supporre note le λ, μ in tutti i punti di Σ', Σ'', σ' posti entro la striscia $0 \leq z \leq t$, e quindi anche, poichè $\lambda(\mu)$ è costante su una parallela all'asse delle $x(y)$, in tutti i punti di Σ interni alla striscia $0 \leq z \leq t$. Ora su Σ è $\nu = -(\lambda+\mu+F)$; da questa equazione ricaviamo i valori di ν in tutti quei punti di Σ, in cui sono note λ, μ, ossia in tutti i punti di Σ, posti entro la striscia $0 \leq z \leq t$. Ma ora, poichè, come dicemmo, la ν è pure nota (nulla) su σ, e poichè la ν rimane costante lungo una parallela all'asse delle z, ne verrà che ν è nota in tutti i punti di quella regione della striscia $0 \leq z \leq t$ che è limitata dalle Σ, Σ'' e dai piani xz, yz. Basterà dunque, in conclusione, determinare i valori di λ, μ, ν per i punti del triedro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq t$. Per far questo, basterà applicare a questo triedro le stesse considerazioni, che abbiamo testè applicato al triedro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$: ciò che è lecito, perchè le λ, μ, ν sono già completamente note in quella regione del piano $z=t$, che è limitata dalle curve A_1B_1, $A_1''B_1''$ e dai segmenti A_1A_1'', B_1B_1''. Si continua quindi fino a che si siano determinate le λ, μ, ν in tutti i punti del triedro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; le λ, μ, ν saranno ancora date da formole del tipo della (2), dove il secondo membro ha ancora un numero *finito* di termini: e si possono quindi ancora applicare le considerazioni del § 1. Il nostro teorema è così dimostrato.

Anche qui sono interessanti i varii casi limiti: p. es. le curve $A'C'$, $A''C''$ (del piano $y=0$) possono coincidere (in tal caso le λ, μ vengono date da serie, anzichè da somme), ecc. Se le tre superficie Σ, Σ', Σ'' divengono infinitamente vicine, il nostro teorema si riduce all'altro, ormai classico, che un integrale della (3) è determinato, quando si dieno su Σ i valori di u e delle sue derivate normali prima e seconda, ecc., ecc.

Questi risultati si potrebbero infine, almeno parzialmente, estendere alle equazioni differenziali a due variabili indipendenti a caratteristiche reali di ordine qualunque, e alle equazioni, che io ho studiato in una mia memoria (" Atti dell'Accademia Gioenia ", 1905) riassunta in una breve nota dei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei " (1905).

§ **5.** — Nei precedenti paragrafi ho indicato alcuni nuovi tipi di condizioni iniziali (problemi al contorno) che possono servire a determinare un integrale di un'equazione differenziale a linee caratteristiche reali. I recenti e svariati studi sulle funzioni armoniche e poliarmoniche hanno già posto in luce quali problemi al contorno si presentano nella teoria delle equazioni a caratteristiche immaginarie. Ora, poichè io non conosco alcuno studio sulle equazioni alle derivate parziali, le cui linee caratteristiche sono in parte reali, in parte immaginarie, finirò questa nota mostrando in un esempio particolare quali problemi al contorno si possono presentare per equazioni siffatte.

Premetterò alcune considerazioni: Sia R un rettangolo $OPTQ$ con un vertice nell'origine O, e i lati OP, OQ sugli assi coordinati. Indichiamo con G la funzione di Green per questo rettangolo, relativa al problema di Dirichlet, cosicchè (se con σ indichiamo l'area di R) l'integrale $v = \int_R \psi(x, y) G d\sigma$ rappresenta una funzione v, che in R soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \Delta_2 v = \psi,$$

e che si annulla al contorno. La funzione:

$$w = \int_0^x dx \int_0^y v dy = \int_0^x dx \int_0^y dy \int_R \psi G d\sigma$$

soddisferà quindi in R all'equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta_2 w = \psi,$$

si annullerà sui lati OP, OQ e avrà la derivata normale nulla sul contorno di R. Ammettendo soddisfatte dalla ψ le solite con-

dizioni, che si incontrano nella dimostrazione dei teoremi di Poisson, troveremo per note proprietà della funzione G che:

$$|w| \leq |xy| MK; \quad \left|\frac{\partial^i w}{\partial x^i}\right| \leq |y| MK;$$

$$\left|\frac{\partial^i w}{\partial y^i}\right| \leq |x| MK (i=1,2); \quad \left|\frac{\partial^{i+k} w}{\partial x^i \partial y^k}\right| \leq MK \, (i, k = 1, 2; \, i+k \leq 3),$$

dove con M indico il massimo valore assoluto di ψ e con K una costante, che si può rendere piccola a piacere, impicciolendo R. Si trova poi:

$$\left|\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right| = \left|\int_0^y dy \frac{\partial}{\partial x} \int_R \psi \frac{\partial G}{\partial x} d\sigma\right| < |y| MH; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial^3 y} < |x| MH,$$

dove H è una costante finita. Ora se l è il più grande dei segmenti OP, OQ è $|x| \leq l$, $|y| \leq l$; di più l si può rendere piccolo a piacere, impicciolendo R. Potremo dunque porre:

$$\left|\frac{\partial^{i+k} w}{\partial x^i \partial y^k}\right| \leq ML \quad (0 \leq i \leq 3, \, 0 \leq i \leq 3; \, 0 \leq i+k \leq 3)$$

dove L è una costante che si può rendere piccola a piacere, impicciolendo R. Potremo tosto dimostrare:

L'equazione $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta_2 u = f\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{y}, u, x, y\right)$ *ammette* (supposto al solito che f soddisfi alle condizioni di Lipschitz) *uno e un solo integrale* u, *che esiste in* R *(purchè* R *sia abbastanza piccolo), che sui lati* OP, OQ *prende valori prefissati, e la cui derivata normale prende valori prefissati sul contorno di* R.

Al solito si può supporre che u si annulli su OP, OQ e che la sua derivata normale si annulla sul contorno di R. Si pone quindi $u = \lim_{n=\infty} u_n$, dove in R è:

$$u_0 = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta_2 u_n = f\left(\frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x^2 \partial y}, \ldots, u_{n-1}, x, y\right)$$

e dove le u_n si annullano su OP, OQ e posseggono derivate normali nulle sul contorno di R. Le precedenti disuguaglianze dimostrano che, se l è abbastanza piccolo, si possono ancora applicare considerazioni affatto analoghe a quelle da noi svolte nel § 1. Esiste dunque la funzione $u = \lim_{n=\infty} u_n$; essa è precisamente l'integrale cercato. Questo integrale è poi unico, se l è abbastanza piccolo (cfr. § 1) c. d. d.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 30 Aprile 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo e Grassi; scusano l'assenza il Direttore della Classe Salvadori ed il Socio Morera;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, De Sanctis, Ruffini e Renier, Segretario; scusa l'assenza il Direttore della Classe Ferrero.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza plenaria antecedente, 22 gennaio 1905.

Il Presidente partecipa che con Regio Decreto in data 22 agosto 1904, l'Accademia fu autorizzata ad entrare in possesso del legato Berruti e dà conto del modo come quel capitale fu investito.

Invitato dal Presidente, il Socio Tesoriere espone il conto consuntivo dell'esercizio 1904 e quello delle eredità Bressa, Gautieri, Pollini, Vallauri del medesimo anno 1904. Essi sono approvati. — Il Tesoriere legge quindi il bilancio preventivo del 1905, che è pure approvato.

A norma dell'art. 3 del Regolamento interno pel conferimento del premio Bressa, il Segretario della prima Giunta Socio Naccari, legge la relazione intorno i nomi ed i titoli delle opere che possono venire considerate pel premio. Il Presidente chiede ai Soci se hanno da fare nuove proposte; ma nessuno risponde, onde il periodo delle proposte è dichiarato chiuso. — A norma dell'art. 4 si procede alla elezione della seconda Giunta pel premio Bressa, composta di cinque Soci per ogni Classe, più il Presidente membro nato. Le Classi votano divise. Riescono eletti: Spezia, Naccari, Camerano, Guareschi, Segre, Chironi, Cipolla, De Sanctis, Pezzi, Graf.

L'Accademia è chiamata quest'anno a giudicare intorno al conferimento del premio lasciato dal senatore Giovanni Morelli ad un giovane nativo della provincia di Bergamo, che abbia scritto una pregevole opera scientifica, affinchè egli possa perfezionarsi all'estero nella disciplina da lui coltivata. Il giudizio è dato per turno dall'Istituto Lombardo, dall'Istituto Veneto, dall'Accademia delle Scienze di Torino e dall'Accademia dei Lincei. Con deliberazione presa in adunanza a Classi Unite l'11 giugno 1899, l'Accademia nostra ha accettato il còmpito. — I lavori presentati quest'anno pel conferimento del premio Morelli sono due: uno a stampa del Dr. Giulio Crescenzi, *La morfologia del sangue negli animali smilzati e con fistola del dutto toracico*; l'altro manoscritto del Dr. Carlo Invernizzi, *Contributo alla storia dell'ebraismo nel Ducato di Milano: gli Ebrei a Pavia dal 1387 al 1597*. L'Accademia delibera che la Commissione risulti di due membri per ciascuna Classe, più il Presidente. Le Classi votano divise. Risultano eletti: Camerano, Foà, Cipolla, e Pizzi.

La relazione della Commissione sarà inviata direttamente a Bergamo senza più passare per l'Accademia.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Rodolfo Renier.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 30 Aprile 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, De Sanctis, Ruffini, e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Ferrero, Direttore della Classe.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente 9 aprile 1905.

Il Presidente presenta una voluminosa opera del sig. Attilio Profumo, mandata in omaggio all'Accademia: *Le fonti ed i tempi dell'incendio Neroniano,* Roma, tip. Forzani, 1905.

Il Socio Renier offre, a nome del Socio corrispondente prof. Giuseppe Boffito, il suo recente volume: *La " Quaestio de aqua et terra „ di Dante Alighieri,* riproduzione fototipica dell'ediz. principe 1508, con introduzione storica, trascrizione critica e versioni in cinque lingue, Firenze, Leo Olschki, 1905. Su questo libro il Socio Renier si trattiene alquanto, segnalandone l'innegabile utilità ed i pregi.

Con una sua lettera, il Direttore della Classe Socio Ferrero presenta una memoria del prof. Arturo Segre, *La questione sabauda e gli avvenimenti politici e militari che prepararono la tregua di Vaucelles.* Il Presidente designa a riferirne il proponente Socio Ferrero ed il Socio Manno.

Intorno alla memoria del prof. Augusto Mancini, *Sulla interpretazione e sulla fortuna dell'egloga IV di Virgilio*, presentata dal Socio De Sanctis, riferiranno, per designazione del Presidente, i Soci De Sanctis e Cipolla.

Il Socio Ruffini, che col Socio Cipolla doveva esaminare lo scritto del prof. Silvio Pivano, *Lineamenti storici e giuridici della cavalleria medioevale,* legge la relazione, favorevole allo studio, che è inserita negli *Atti.* La Classe approva a voti palesi la relazione suddetta e poi, con votazione segreta, delibera unanime l'inserzione nelle *Memorie* accademiche dello scritto del Dr. Pivano.

Per gli *Atti* il Socio Graf presenta una nota di Attilio Momigliano, *Perchè Don Rodrigo muore sul suo giaciglio?*

LETTURE

Perchè Don Rodrigo muore sul suo giaciglio?

Nota di ATTILIO MOMIGLIANO.

Chi scriverà una storia compiuta del modo, come si sono formati i *Promessi Sposi*, chi rifarà il lungo, tormentoso cammino percorso dal Manzoni per arrivare alla redazione definitiva, dimostrerà luminosamente quanta parte di quell'opera spetti alla riflessione costante e severa; questa storia particolareggiata sarà, altri già lo disse, un' ottima lezione di modestia pei giovani scrittori e di pazienza per il genio. Essa proverà ancora, che, se ci sono romanzi, che superano il manzoniano per altezza di concezione e robustezza di pensiero, nessuno lo uguaglia nella coerenza irreprensibile, nessuno si presta altrettanto ad un continuo commento estetico. Infatti opera così pensata e nel disegno e in tutti i particolari, opera nella quale, così come in questa, l'autore sia sempre presente a sè stesso, non dimentico mai di nessuna delle sue opinioni nè in fatto di lingua, nè in fatto di procedimenti artistici, nè in fatto di psicologia, nè in fatto di morale, è difficile trovare, nonchè nella letteratura nostra, in quella di qualsivoglia nazione. In altre parole, non solo le idee estetiche del Manzoni sono per tal modo legate l'una all'altra, che, ciò che all'una contrasta, nemmeno coll'altra si accorda, ma il sistema estetico del nostro autore, saldo in ogni parte, è pure strettamente connesso col suo sistema filosofico e religioso, per modo che anche a questo repugna ciò, che si oppone a' suoi canoni d'arte.

Questo breve preambolo mi servirà, almeno in parte, di scusa presso coloro, che, ponendo attenzione al mio tentativo di scoprire le ragioni, per le quali il Nostro s'è indotto a sopprimere nei *Promessi Sposi* l'apparizione di Don Rodrigo ripubblicata (1)

(1) Questo passo si poteva già legger quasi per intero alle pp. 122-124 del I vol. degli *Scritti postumi di Alessandro Manzoni*, pubblicati da Pietro

da pochi mesi nei *Brani inediti*, vorranno accusarmi di sottigliezza e stimeranno improbabile, che quella primitiva immaginazione sia stata rifiutata per tante cause da formare come una rete, dove non si può discernere la maglia, dalla quale essa ebbe origine.

È giusto premettere ancora, che delle ragioni, che verrò enumerando, quelle estetiche sono uno svolgimento di quella accennata prima dal Graf (1) e poi dal Renier (2), e quella religiosa si accorda in parte colle parole di Fedele Romani (3) e con quelle del Renier stesso, inspirate da un articolo del Róndani (4).

Ed ora veniamo ad esaminare il passo in questione.

Nella pubblicazione dello Sforza, mentre padre Cristoforo benedice i due giovani restituiti l'una all'altro, Lucia leva gli occhi sul frate, vede a un tempo un altr'uomo e manda un grido: è il suo persecutore, che la malattia, la paura, la collera e la " dissensatezza „ rendono insieme miserando e terribile. La visione, inaspettata, lugubre, scultoria nella sua psicologia insolitamente breve, lascia nell'anima un solco incancellabile. Nei *Promessi Sposi* ogni linea ci ferma con una particolare bellezza, ma nessun' altra concezione, forse, è così vigorosamente e audacemente nuova nel disegno da rapirci solo per sè stessa, indipendentemente da ogni pregio minuto. In questo romanzo gli avvenimenti non scoppiano, ma si svolgono; tutto è preparato con ogni cura, giacchè parecchi fatti giungono improvvisi per qualche personaggio, nessuno, che io ricordi, per il lettore: all'interesse dell'inatteso è sostituito l'interesse del ben congegnato. Ora, ecco che nei *Brani inediti* troviamo l'interesse di quella prima specie. Vero è, che l'impensato è più apparente che reale, è dovuto, più che al fatto

---

Brambilla a cura di Giovanni Sforza, Enrico Rechiedei, Milano, 1900. Si legge ora a pp. 537-543 dei *Brani inediti dei " Promessi Sposi „ di Alessandro Manzoni* per cura di Giovanni Sforza. Hoepli, Milano, 1905.

(1) *Il primo getto di un capolavoro,* " La Stampa „, 6 nov. 1904.

(2) *I " Promessi Sposi „ in formazione.* III. *Episodi minori,* " Fanfulla della Domenica „, 29 gennaio 1905.

(3) *La prima minuta dei " Promessi Sposi „,* " Marzocco „, 29 genn. 1905.

(4) *Una variante del Manzoni circa la morte di Don Rodrigo,* " Natura ed Arte „, 1903, nn. 4 e 5.

in sè, al mutamento della preparazione in spiegazione; ma questo basta, perchè la nostra impressione si raddoppi: è un artifizio, che, come vedremo, pel Manzoni non era così buono come per noi, e che del resto non costituisce una vera eccezione al suo metodo, perchè il non aver voluto rinunziare alla preparazione, neppure se, per mantenere l'effetto, era obbligato a cangiarla in spiegazione, ci mostra appunto, che egli non ammetteva nel romanzo l'inaspettato. L'impressione, smorzata dalla giustificazione di quella comparsa, che diminuisce la tragica rapidità del racconto, si risveglia quando questo si riprende. Don Rodrigo, che nei *Promessi Sposi* è, più che un uomo, un tipo di prepotente capriccioso, in questo passo è vivo come in nessun altro. Il tumulto, che gli sconvolge l'anima, è, nell'insieme, di una verità che sorprende, benchè un esame sottile scopra in qualcuno dei sentimenti, che lo dominano, incoerenza col resto del romanzo o insufficienza di preparazione: la paura, omai più istintiva che cosciente, di quella voce, che un giorno, atterrito, aveva fatto tacere; l'attenzione sospettosa, eccitata dalla presenza di quei due, che avrebbe voluto separati in eterno; l'incertezza tra il fuggire quel tremendo frate o inseguirlo insieme con Renzo; l'odio per il rivale e per il profeta della sua sciagura; il furore, un sentimento complesso, fatto di gelosia, di amore deluso e di rabbia oramai impotente contro quel matrimonio, lo inchiodano per un istante, istupidito, alla soglia della capanna. Il sentimento predominante è la paura, cioè quello che meglio si concilia col suo stato di moribondo e di delirante, quello che al Manzoni giovava mettere in rilievo, poichè è la paura di Dio, di un castigo anche più terribile di quello, che già lo ha colpito. Alla prima mossa di fra Cristoforo e di Renzo (con questo nome più noto indicherò sempre il fidanzato) questo sentimento preponderante si sovrappone a tutti gli altri, e Don Rodrigo fugge. L'ira, nella quale ha la sua parte anche la gelosia, si sfoga in una tempesta di pugni e di calci sul cavallo, in cui il frenetico s'imbatte: pochi ritocchi potevano fare di quella fuga un capolavoro di evidenza.

Frattanto Renzo s'è accomiatato da Lucia e padre Cristoforo sta per andarsene; ma, vedendo " nell'aspetto di lei, mista alla commozione, una grande inquietudine ", le domanda: " Di che state inquieta? " E Lucia, esitando: " Quell'uomo.....! " " Po-

veretto „ risponde il frate “ non è più in caso di far paura a nessuno „ (1). È un finissimo e denso tratto di dialogo: quanta evangelica pietà di fra Cristoforo, e, soprattutto, quanti delicati sentimenti di Lucia vi s'adombrano! timore, pudore, che per una ritrosia naturalissima si lasciano indovinare più che non si palesino, e altro ancora.

I due rimasti, accompagnandosi per qualche passo, giungono dinanzi ai monatti, che gittano un morto, Don Rodrigo, sul carro, mentre uno di essi raccomanda: “ .....mettetelo bene in fondo costui, che non torni a cavallo, a farci tribolare. — Che diavolo è stato? „ domanda qualcuno. “ Il diavolo „ risponde il monatto “ l'aveva in corpo costui: è andato su e giù finch'ebbe fiato: se durava ancora, faceva crepare il cavallo: ma è crepato egli (il Manzoni di poi avrebbe detto “ lui „), e allora, per amore, o per forza, ha dovuto venir giù „ (2). Questa pennellata, dovuta a quel realismo ragionevole, che piacque a tutti i grandi artisti di ogni tempo, dipinge un' anima con una potenza fulminea, la quale, forse, non ha riscontro in alcun altro passo del romanzo. Qui non posso non pensare al beccamorti dell'Amleto, che scava una fossa cantando: c'è in quella risposta un umorismo funebre, che nella letteratura nostra è rarissimo e nei *Promessi Sposi* si ritrova una volta sola, nel dialogo fra Renzo ed i monatti (3).

Padre Cristoforo, dinanzi a quell'uomo impietrito dalla lunga dimestichezza colla morte, raccomanda a Lucia di pregare per la povera anima del trapassato: il contrasto è efficace.

Così “ Don Rodrigo, su la cima d'un tristo mucchio, fra lo strepito e le bestemmie, usciva dal lazzeretto per andarsene alla fossa „ (4). Son due linee pensate; compendiano la miseria di quella fine e il disprezzo del Manzoni per Don Rodrigo, che è sepolto collo stesso cinismo, col quale ha vissuto: “ fra lo strepito e le bestemmie „.

Mi sono indugiato un po' sul commento di quest'episodio per mostrare, quali ragioni avrebbero potuto trattenere il Man-

---

(1) *Brani inediti*, p. 542.
(2) *Brani inediti*, p. 543.
(3) Edizione Hoepli. Milano, 1905, cap. XXXIV, p. 514.
(4) *Brani inediti*, p. 543.

zoni dal far getto di una tale concezione, e per far notare, che essa ci rivela in lui un artista più vario e più robusto di quello, che conoscevamo; certa arditezza di immaginazione e di raccostamenti, certa vivezza di realismo sono nuove o quasi.

Nel romanzo riappaiono staccati due elementi di quest'episodio: la fuga del cavallaccio e il perdono di Renzo a Don Rodrigo, che nel brano inedito era sottinteso. Quella rimane come una brevissima digressione, tanto evidente, che sembrò al maestro del naturalismo, allo Zola (1), il passo migliore del romanzo: che cosa avrebbe detto della scena, nella quale dapprima era incastrato quel particolare?

Il Manzoni ci teneva a quest'immaginazione del cavallaccio, tanto che Renzo assiste a quella strana corsa, quando sta per inoltrarsi fra la moltitudine degli appestati, dalla quale si leva un cantare alto e giocondo, eppure più angoscioso che una nenia funebre (2): il quadro qui mi pare più corretto e più conciso; ma, trattandosi d'un ignoto, l'interesse è meno intenso e men duraturo; e poi manca quel dialogo efficacissimo: erano poche linee, che, adattate al frenetico, si potevano mantenere.

L'altro elemento, il perdono, è preparato ed ampliato: questa saggia preparazione è dovuta alla considerazione, che Renzo aveva tanto sofferto per causa di Don Rodrigo, che, data la sua indole un po' violenta, senza le buone parole di padre Cristoforo, che sono come un balsamo per una ferita, era improbabile, che, anche volendo, potesse d'un tratto dimenticare. " ...Se lo trovo „ dice nella redazione definitiva " se la peste non ha già fatto giustizia..... „ (3). Ma la peste ha già fatto giustizia, e non c'è bisogno d'altro: è chiaro, che nell'intenzione del Manzoni quel malanno è castigo sufficiente per Don Rodrigo. Renzo dunque dimentica e va col buon padre a visitare il morente: ne segue una scena calma, solenne, una delle più cristianamente elevate di tutta l'opera. Don Rodrigo non riconosce nessuno: così ogni doloroso sentimento gli è risparmiato. " Forse „ dice fra Cristoforo a Renzo " il Signore è pronto a concedergli un'ora di ravvedimento; ma voleva esserne pregato da te „ (4).

(1) V. De-Amicis, *Ritratti letterari*, Emilio Zola, p. 84.
(2) Cap. XXXIV, pp. 516-517.
(3) Cap. XXXV, p. 525.
(4) Cap. XXXV, pp. 528-529.

In queste parole, se non m'inganno, si contiene una delle ragioni, per le quali la terribile apparizione fu soppressa. Nel passo corretto pare, che il Dio della giustizia e della misericordia abbia compassione di Don Rodrigo e, dopo averlo punito, lo perdoni anche lui per bocca del santo frate (1). Nel brano rifiutato la cosa è ben diversa: quell'apparizione, tanto dolorosa per Don Rodrigo, sembra un nuovo castigo, quasi non bastasse la peste, che, accompagnata da quel mirabile, spaventoso sogno, arriva come una vera sanzione del cielo. Nella prima stesura fra Cristoforo, vedendo Don Rodrigo a bisdosso del cavallaccio, non dice: — Chi sa che Dio non gli perdoni! —, ma esclama: " Giudizî di Dio! „ (2); e Don Rodrigo muore in un orribile modo e in più orribile modo è sepolto.

Ricordiamo che il Nostro detesta la morale dei pagani, perchè, fra l'altro, essa manca di ogni idea della compassione (3). Nel brano inedito non c'è traccia di misericordia; il Manzoni non pensa a quel, che dirà poi fra Cristoforo nel romanzo, quando Renzo manifesta propositi di vendetta: " Guarda chi è Colui che gastiga!... Colui che flagella e che perdona!„ (4). La peste è il flagello, dopo non c'è più luogo che per il perdono. " Vieni „ aggiunge poi " e vedrai con chi tu potevi tener odio, a chi potevi desiderar del male, volergliene fare „ (5). In queste parole c'è qualche cosa del ragionamento, che deve avere indotto il Manzoni alla soppressione: infatti mettere Don Rodrigo, che tanto aveva fatto per impedir quel matrimonio, dinanzi ai fidanzati, che stavan per celebrarlo a dispetto di ogni suo sforzo, infliggere una tale dolorosa umiliazione ad un'ombra omai innocua, punirla novamente con una rappresaglia, che finiva per essere quasi uno scherno, era un porre in opera un ideale di giu-

(1) Ecco l'unica osservazione, nella quale a questo proposito mi accordo col Rondani. Contro quello, che egli pensa, non trovo nulla a ridire nelle succitate parole di fra Cristoforo: 1° perchè Don Rodrigo ha già espiato abbastanza i suoi peccati; 2° perchè il Manzoni a bella posta ha lasciato molta incertezza nell'accenno al perdono.

(2) *Brani inediti*, p. 540.

(3) *Opere inedite o rare* pubblicate per cura di Pietro Brambilla da Ruggero Bonghi. Milano, frat. Rechiedei, 1885, vol. II, *Postille al Rollin*, p. 285.

(4) Cap. XXXV, p. 526.

(5) Cap. XXXV, p. 528.

stizia un po' gretto e, più che severo, crudele. " Don Rodrigo ha tentato con ogni mezzo di opporsi a quel matrimonio; „ sembrerebbe pensare il Manzoni " la sua punizione più terribile sarà non poterlo più impedire e comparir dinanzi agli sposi promessi, proprio quando potrà toccar con mano, che egli li ha perseguitati inutilmente e *non è più in caso di far paura a nessuno* „. Ma il castigo ha per fine la correzione e non deve cercar di destar nel reprobo un sentimento, che gli meriterebbe una nuova pena. Don Rodrigo dopo quell'incontro è più malvagio di prima; anzichè pentirsi, resta ribelle fino alla morte, e per di più, presso alla sua fine, accoglie nell'anima un nuovo peccaminoso sentimento: l'invidia per Renzo, a cui tocca quello, che egli ha sempre desiderato invano. Questa gelosia è la conseguenza inevitabile di quella punizione. Don Rodrigo muore veramente, come dice il monatto, col diavolo in corpo. Questa è giustizia cristiana? Chiunque eviterebbe ad un malvagio ridotto nelle condizioni di quell'appestato un dolore così grande, com'è per lui la vista dei due fidanzati. Questa pietà, della quale ogni uomo è suscettibile, può essere sdegnata dal più mite degli dei? Nei *Promessi Sposi* Dio rende a tutti ciò che loro spetta, anche ai personaggi secondari, anche al Griso, che, ladro del padrone, è còlto dalla peste e spogliato a sua volta (1); ma chi studiasse la parte, che ha la giustizia divina in questo romanzo, vedrebbe, che essa non varca mai i limiti: questo era l'unico caso. Può Dio, dopo aver già punito una volta, e terribilmente, incrudelire con quel piccino, odioso confronto di due felici con un moribondo, per il quale lo spettacolo di quella felicità, che egli ha sempre tentato di impedire, è un nuovo e più angoscioso strazio? Il Nostro scorda, che ora Don Rodrigo non è più un signorotto prepotente, ma un miserabile, che il braccio divino ha atterrato: la rappresentazione di quel poveraccio, che nei *Promessi Sposi* è tutta inspirata alla pietà, nel brano inedito ha un po' di livore. Questo è contrario all'indole del Manzoni, che, come fra Cristoforo, ama buoni e cattivi, loda i primi, biasima i secondi e li conduce al bene. Don Rodrigo qui non è condotto al bene, poichè il doppio castigo lo vince, ma non lo doma.

L'intento di far trionfare la virtù e confondere il vizio

(1) Cap. XXXIII, p. 486.

è troppo evidente in quest'apparizione: qui appunto noto un elemento di quella teatralità, che il Graf ha additato come una delle probabili ragioni della soppressione. In ultima analisi quella scena si riduce, nel suo significato morale, a questo: la sconfitta più clamorosa, che fosse possibile, di quel gran malvagio, che era stato Don Rodrigo. L'apparato era sfarzoso, come quello di qualche esecuzione capitale famosa: quello sfarzo noceva alla dignità della giustizia divina.

Tutte queste considerazioni parranno forse giustificate, quando si pensi con quale meticolosità il Manzoni discuta le questioni morali: bastino come esempio i suoi dubbî sulla delicatezza di quel servo, che aveva origliato alla porta di Don Rodrigo per aiutar padre Cristoforo nella sua opera santa, e sulla convenienza della lode, che il frate gliene aveva data (1): sapete, che il Manzoni, più scrupoloso dello stesso padre Cristoforo, non osa concluder nulla su le due questioni. Una famiglia inglese, che cercava libri da leggersi in viaggio, si tenne dal comperare i *Promessi Sposi*, perchè li giudicava " non romanzo, ma Bibbia „ (2). In questo c'era molto di vero: il Manzoni chiedeva alla religione la risoluzione di ogni quesito morale, sia nella vita sia nell'arte. Alla Diodata Saluzzo scriveva: " Egli è vero che l'evidenza della religione cattolica riempie e domina il mio intelletto; io la vedo a capo e in fine di tutte le questioni morali; per tutto dove è invocata, per tutto donde è esclusa. Le verità stesse, che pur si trovano senza la sua scorta, non mi sembrano intere, fondate, inconcusse, se non quando sono ricondotte ad essa, ed appaiono quel che sono, conseguenze della sua dottrina. Un tale convincimento dee trasparire naturalmente da tutti i miei scritti, se non fosse altro, perciocchè, scrivendo, si vorrebbe esser forti, e una tale forza non si trova che nella propria persuasione „ (3).

---

(1) Cap. VI, pp. 79-80.

(2) V. lettera del Tommaseo del 24 giugno 1827, pubblicata da M. Barbi a p. 253 della *Miscellanea di studi critici* edita in onore di Arturo Graf, nello scritto intitolato: *Alessandro Manzoni e il suo romanzo nel carteggio del Tommaseo col Vieusseux.*

(3) *Epistolario di Alessandro Manzoni* raccolto e annotato da Giovanni Sforza, Milano, 1882-83, pp. 362-363 del I vol.

Io credo tuttavia, che, se anche un critico fosse sorto a notare la crudeltà della seconda punizione (caso molto improbabile, perchè sarebbe stata soverchia sottigliezza rilevare quello, che ora il confronto della prima minuta col passo definitivo mi obbliga ad osservare), se anche questo critico si fosse trovato, costui si sarebbe presto chetato nell'ammirazione di quel vigoroso quadro, che nell'ultima stesura sarebbe stato facilmente ridotto alla perfezione. Ma al Manzoni non sarebbe piaciuto, che gli si perdonasse un errore morale in grazia d'un pregio estetico, perchè la distinzione di bello e di vero morale per lui era assurda (1). Dato questo suo discutibile principio, l'apparizione, falsa giudicata alla stregua della morale cristiana, non è nemmeno bella; laddove il perdono sostituitole è, pel Manzoni e per noi, bello moralmente e artisticamente: per noi tuttavia, per quanto più edificante e più sereno sia lo spettacolo del perdono, per quanto su quella scena aleggi il più schietto spirito evangelico, l'apparizione non cessa di esercitare un fascino più potente. Ma questo non importa al Manzoni, perchè egli, che, pure amando la bellezza, è pronto sempre a sacrificarla alla morale più severa, — e il passo, che esamino, ne è forse la prova più evidente — pensa che tutti convengono nel principio, " che il diletto e la commozione devono essere subordinati allo scopo morale, o almeno non contraddirgli „ (2); e chi gli osservasse, che, concesso che questa fosse opinione generale al suo tempo, tale non è più ora, non riuscirebbe perciò a smuoverlo dalla convinzione, che " le belle lettere „ sono " un ramo delle scienze morali „ (3): convinzione, nella quale è confermato dall'osservazione, che, per quanto gli uomini amino il bello, " amano ancor più..... le eterne idee della giustizia „ (4). Insomma, per lui l'arte è un mezzo e non un fine (5), e il suo fondamento è il vero morale: quell'apparizione contrasta a questa specie di vero, alla quale egli crede che ogni altra debba cedere.

---

(1) *Opere inedite o rare.* Vol. III, p. 214, *Dello scopo morale e della perfezione estetica della Tragedia.*

(2) *Opere inedite o rare,* vol. III, p. 158, *Materiali estetici.*

(3) Ivi, p. 168.

(4) Ivi, p. 199.

(5) Ivi, vol. II, pp. 440-441, *Postille allo Schlegel.*

Che quella scena sia magnificamente immaginata, è cosa che non lo riguarda, perchè per lui la semplice invenzione d'un fatto, se non serve ad un intento determinato, non ha valore alcuno; questa per lui, abbia egli o no interamente ragione, è " ciò che vi è di più facile e di più volgare nel lavoro dello spirito, ciò che richiede minor riflessione, ed anche minore immaginazione „ (1). Data questa sua opinione, dato che quella scena presentava maggior bellezza plastica e drammatica, che bellezza morale, è naturale che sia stata sostituita dal perdono. Anzi, forse, l'origine prima del mutamento s'ha da cercare nell'essersi affacciata in seguito alla mente del Manzoni la scena del perdono, che sarà poi stata accettata per ragioni morali ed estetiche. In questa, della malvagità di Don Rodrigo non si parla più; pare anzi, che la peste lo abbia domato, che anche lui, come tutti i reprobi del romanzo, abbia piegato davanti alla giustizia suprema: invece nell'apparizione, come dissi, Don Rodrigo, è l'unico personaggio dei *Promessi Sposi*, che resti sempre ribelle. Il trionfo di Dio viene dunque a mancare; intendo il trionfo, che consiste nella resipiscenza del peccatore, quel trionfo, che nella redazione definitiva pare annunziato dalle già citate parole di fra Cristoforo: " Forse il Signore è pronto a concedergli un' ora di ravvedimento „.

Chi volesse accusar di pedanteria il ragionamento, che son venuto facendo, non potrebbe obiettarmi, che l'incontro di Don Rodrigo coi fidanzati è meramente fortuito, e quindi meramente fortuito il nuovo castigo; anzitutto perchè in questo romanzo non v'è nulla di casuale, cioè moralmente indifferente, ma ogni avvenimento o ha direttamente uno scopo morale o porta in ultimo ad uno scioglimento morale, e poi perchè, e questo è il più, quell'incontro fu cercato da Don Rodrigo.

Qui ci s'affaccia un' altra probabile causa del mutamento. Don Rodrigo ha voluto quell'incontro, perchè non era dominato da un capriccio, ma da una passione. Questo supponeva due contraddizioni: l'una con una ferma opinione del Manzoni; l'altra colla condotta antecedente di Don Rodrigo, che a quell'opinione si collega.

---

(1) *Opere varie*, Milano, Rechiedei, 1870, p. 425. *Lettre à M. C.*** sur l'unité de temps et de lieu dans la tragédie.*

Il Manzoni credeva, che non s'avesse a rappresentar la passione, perchè cattiva in sè e contagiosa, e, per conseguenza, piena di pericoli per il lettore. Non è qui il caso di discutere, se la rappresentazione della passione sia sempre e soltanto immorale e se l'arte non possa soffrire per quest'esclusione sistematica: tanto più che, la questione essendo già stata risolta teoricamente, cioè dai critici, e praticamente — cioè dagli scrittori, che non tennero conto dell'anatema del Manzoni, e dai lettori, che ne seppero loro grado — sfonderei una porta spalancata. Del resto qui importa solo notare, che pel Nostro la passione è una debolezza. Infatti nella lettera a M. Chauvet diceva: " Certes il faut plaindre les insensés qui, désespérant de la providence, concentrent tellement leurs affections dans une seule chose, que perdre cette chose ce soit avoir tout perdu, ce soit n'avoir plus rien à faire dans cette vie de perfectionnement et d'épreuve! Mais transformer cet égarement en magnanimité, en faire une espèce d'obligation, un point d'honneur, c'est jeter de déplorables maximes sur le théâtre, sans se demander si elles n'iront jamais au delà, si elles ne tendront pas à corrompre la morale des peuples „ (1). Chi voglia maggiori particolari rammenti certe sentenze inserite nella *Storia della Colonna infame* (2) e la digressione sull'amore nei romanzi (3), che il Fogazzaro inclina a credere sia stata rifiutata perchè falsa (4): ma tutto il romanzo è l'applicazione di quella teoria. Bene però l'idealista vicentino afferma, che, se il Manzoni avesse saputo scrivere l'episodio di Paolo e Francesca, " avrebbe trovato nella sua coscienza austera la ragione e il coraggio di sacrificare questa gloria „ (5).

Chi voglia avere una prova dello studio e della diffidenza, con cui egli evitava la passione nell'opera sua, pensi che l'unico amore descritto nella prima concezione del romanzo, quello della

---

(1) *Opere varie*, pp. 435-436.

(2) Aggiunta ai *Promessi Sposi* nell'edizione del 1840. Milano, Guglielmini e Redaelli. V. pp. 788 e 790.

(3) *Brani inediti*, pp. 3-12.

(4) *Un'opinione di Alessandro Manzoni*, in *Discorsi*. Milano, Cogliati, 1898, p. 28.

(5) Ivi, pp. 21-22.

monaca di Monza, che occupa qualche pagina, è ridotto nell'ultima stesura a tre famose parole.

Ma una prova, che importa molto più al caso nostro, è quella, alla quale ho alluso poco fa: in tutto il romanzo Don Rodrigo appare governato non dalla passione, ma dal capriccio. Qualche passo dei *Promessi Sposi* ce ne convincerà. Quando il Griso ritorna dalla sua spedizione fallita, quello, che più spiace al suo signore, è l'essere stato " burlato così barbaramente „ (1). Se fosse stato innamorato, ben più che dello scorno, Don Rodrigo si sarebbe doluto di non aver conquistata Lucia. Egli non appare mai angosciato perchè e in quanto ella gli è sfuggita, non si preoccupa del fatto in sè, ma delle sue conseguenze, del mormorar della gente, delle beffe del cugino, di dieci altre cose e non di una, che trasformi in amore quello svago di signorotto ozioso, che, unito al puntiglio, al punto d'onore, può impiastricciargli per qualche tempo un simulacro di passione e nulla più. Nemmeno chi gli sta d'attorno non crede, che il cuore abbia parte in quella faccenda: ne fa fede il colloquio di Attilio con il conte zio. Del resto nel primo getto abbiamo la testimonianza di Don Rodrigo stesso: " Io mi trovo impegnato in un affare d'onore, in un puntiglio „ (2) dice al conte del Sagrato. Questi vuol per l'aiuto dugento doppie: " Diavolo! questo capriccio mi vuol costare! „ (3) pensa il nostr' uomo: non è il pensiero d'un innamorato. E continua a riflettere: " Lucia la voglio... si è parlato troppo... non son chi sono... „. Si direbbe, che omai non voglia più Lucia, se non per troncar quelle ciarle. Il Manzoni adopera la parola " passione „ a proposito di Don Rodrigo: ma, appena l'ha pronunciata, si spiega, a scanso di equivoci (4). Per lui quel prepotente non era nemmeno capace di una vera passione. C'è solo un passo, nel breve squarcio inedito intitolato " Fermo perseguitato dal Podestà di Lecco a istigazione di Don Rodrigo „ (5), nel quale entra in gioco il cuore del nostro per-

(1) Cap. XI, p. 165.

(2) *Brani Inediti. Visita di Don Rodrigo al Conte del Sagrato*, p. 160.

(3) Ivi, p. 161.

(4) " Tante circostanze favorevoli al suo disegno infiammavano sempre più la sua passione, cioè quel misto di puntiglio, di rabbia e d'infame capriccio, di cui la sua passione era composta „. Cap. XVIII, p. 264.

(5) *Brani Inediti*, pp. 573-574.

sonaggio (l'accenno alla gelosia ne è un sicuro indizio); ma si consideri, che anche in quel tratto vi sono reticenze molto significative (1), e che, quel che è più, quelle linee furono poi soppresse: segno manifesto, che non erano conformi all'idea, che il Manzoni s'era fatta dell'anima di Don Rodrigo.

Questo, mi pare, s'ha da ripetere per l'apparizione, che sto esaminando. Se Don Rodrigo non era stato molestato che da un capriccio, la peste doveva essere stata più che sufficiente per levarglielo dal capo. Ma la viva memoria, che egli serba de'suoi antichi propositi, testimonia che egli è in preda a una tenace passione, che finora non avevamo nemmeno sospettata. Quella scena dunque non ha, come si suol dire, una motivazione psicologica in tutto sodisfacente. Obiettare, che quello di Don Rodrigo fu sempre un vero amore, ma il Manzoni lo volle rappresentar come tale soltanto in questo punto per mostrarne la vanità e in genere per discreditar la passione, sarebbe una sottigliezza, che non sottrarrebbe il romanziere all'accusa di incoerenza: questo tardo indizio di passione giunge proprio quando, dato che Don Rodrigo è moribondo, è più inopportuno e men verosimile. Eppure, senza questo cambiamento subitaneo, l'apparizione e la fuga non si spiegano interamente. Qualcuno, per mostrarmi che il Manzoni non supponeva un tale mutamento, potrebbe citarmi queste parole del passo, che sto esaminando: " In una tal confusione di passioni, o piuttosto in un tale delirio, s'era egli alzato dal suo miserabile strame... „ (2). Ma questa è una semplice riprova della ritrosia del Nostro ad ammetter, che nei fatti, che egli narra, entri in qualche modo la passione. Tuttavia il mio contraddittore potrebbe rincalzare: " Il male non ha mutato, nè poteva, la natura collerica di Don Rodrigo; alla vista di Renzo egli si adira, rammentando le sue trame sventate; lo segue, lo vede con Lucia e s'arrabbia anche più; ma poi quella certa misteriosa paura lo conduce alla fuga, nella quale egli spossa la sua furia in una grandinata di botte „. D'accordo: ma il capriccio, ragione di quell'ira, poteva durare?

(1) P. es. a un certo punto dice, che Don Rodrigo aveva impedito il matrimonio " per guadagnar tempo, per isfogare in qualche modo la rabbia e l'amore, *se amore si può dire quel suo* „, p. 574.

(2) *Brani Inediti*, p. 539.

Certo scrutare l'anima di Don Rodrigo in quel momento è impresa molto malagevole, tanto complicato è il viluppo delle anormalità del suo stato fisiologico e psicologico; distinguere quello, che del suo delirio è dovuto al male, e quello, che ai sentimenti destati da quell'incontro, è una delle questioni meno facili. che si possano presentare ad un critico psicologico: ma, tuttavia, che Don Rodrigo non avrebbe cercato quell'incontro, se non fosse stato infiammato dalla più ardente delle passioni, mi pare indubitabile. Pensiamo che, non solo egli era moribondo, ma, quel che è più, aveva perduto ogni potenza, era ridotto alle condizioni d'un qualunque appestato: che in tanto sfacelo gli durasse ancora quel puntiglio di signorotto? Cessata la causa, cioè la potenza, doveva cessare anche l'effetto, cioè il capriccio. Dunque, tra le ragioni psicologiche della collera di Don Rodrigo, v'è certo la passione, che si fa più violenta che mai, mentre il parossismo del male lo travaglia. Che si trattasse di capriccio, non deve averlo pensato nemmeno il Manzoni. Infatti nella " Storia della Signora „ (1) egli dice: " Le faccende gravi e le grandi sciagure... spennacchiano le ali *all'amore* e gli spezzano i dardi „. Ora, se egli credeva, che le sventure distruggono o calmano l'amore (non cerco, se fosse interamente nel vero), a maggior ragione doveva pensare, che uccidono i capricci.

La passione dunque vince la forza del morbo, dando a Don Rodrigo istanti di lucidità, sia pur relativa, poichè la sua non è la cieca pazzia di quel cavaliere frenetico, che gli è sostituito nell'ultima stesura; è una " dissensatezza „, nella quale balenano ancora molti lampi di consapevolezza, che illuminano a grandi scorci la sua vita passata: la passione per Lucia, i vani tentativi, la paurosa predizione di fra Cristoforo, quel sogno. Mentre nei *Promessi Sposi*, come già notai, non riconosce più nessuno, non rammenta più nulla (e questo dev'esser parso più naturale anche al Manzoni), nel brano inedito, riafferrato dalla passione, mantiene viva in grazia di questa, che ora è il suo male più grave, la propria personalità, nonostante che la peste tenda ad opprimerla. L'amore, alla vista di Renzo, si ridesta e dà al malato la forza di seguirlo, incurante del contagio, che Dio gli ha appiccato. Egli è quindi ribelle alla potenza divina,

(1) *Brani Inediti*, p. 56.

e, poichè appunto la passione lo conduce alla ribellione, è un ribelle simpatico. È appestato e offeso nel proprio amore: il colmo della sua miseria lo rende per la prima volta simpatico e degno di pietà: eppure era stato il personaggio più odioso di tutto il romanzo. Ora, il Manzoni voleva certamente evitare questo genere di simpatia ottenuto coll'aborrito mezzo della passione. Egli faceva poca stima di questa e nessuna di Don Rodrigo: questo doppio disprezzo agevolò il sacrificio di quella scena.

Ma, anche se si conceda, che il Manzoni credeva possibile la sopravvivenza d'un capriccio a tante calamità, è verosimile, che questo bastasse per dare a quel moribondo la forza e la serenità di mente necessarie per concepire e mettere in esecuzione il disegno di tener d'occhio fra Cristoforo e Renzo nella speranza, che essi cercassero Lucia? Ho buon gioco per sostenere, che il Manzoni avrebbe risposto negativamente a questa domanda, perchè egli sostituisce nei *Promessi Sposi* una completa incoscienza a così improbabili lucidità e pacatezza di mente e forza fisica; si noti, che nel caso nostro queste tre qualità stanno male insieme: la collera poteva rinforzare il malato, tanto da fargli sopportar quella fuga infernale, ed anche dargli qualche lampo di lucidità, ma non la pacatezza necessaria per concepir quel disegno, che suppone intenzioni abbastanza complicate.

Don Rodrigo, infatti, è spinto alla capanna di Lucia non solo dalla passione, ma anche, e a questo sembra che il Manzoni voglia dare maggior risalto, dal desiderio di vendicarsi di frate Cristoforo, il vaticinatore della sua sciagura. Questo accennava ad un fatto nuovo, che avrebbe voluto un lungo e non so se possibile svolgimento. Presupponeva, cioè, che l'idea della divinità si fosse impadronita di Don Rodrigo fino allora ateo. Solo questo spiega, come egli potesse creder fra Cristoforo causa della peste toccatagli, annunziatore del castigo divino. Ora Dio a quel malvagio, che colla sua condotta lo aveva sempre disconosciuto, manifestava la sua potenza, penetrandogli a forza l'anima, impadronendosi di tutte le sue facoltà e rivolgendole alla vendetta d'un' offesa, credere alla quale era credere a Dio. Don Rodrigo riconosceva suo malgrado l'esistenza e la potenza divina; o almeno, la sentiva in sè. Immaginazione alta e ardita, la quale rendeva la psiche di Don Rodrigo in quel momento

d'una complessità estrema, che il Manzoni dominava a meraviglia, se si ha solo riguardo a quella scena in sè e per sè: infatti il malvagio operava in perfetta coerenza coi sentimenti e collo stato patologico, che in quegli istanti il Manzoni gli attribuiva; ma è facile avvertire, che la nuova fase, nella quale entrava l'anima di Don Rodrigo, richiedeva una lunga spiegazione, che non poteva consistere soltanto nel " lontano e misterioso spavento „ (1) provato dal signorotto a quel fatidico " Verrà un giorno... „ di fra Cristoforo. Era questo l'accenno ad una quarta conversione (2), che, impedita dalla morte, si indovina, più che non si avverta. Descriverla era fare alla volontà di Dio troppa e troppo visibile e meravigliosa parte in tutto il romanzo. Conversioni siffatte sono molto rare, e quattro in un solo racconto possono sembrar volute: già qualcuno aveva mormorato per le tre, che sono rimaste.

L'apparizione di Don Rodrigo, in quanto è per molta parte motivata da questo oscuro sentimento del divino, assume un aspetto soprannaturale, di cui il lettore può pretendere una giustificazione, tanto più che il Manzoni, il quale è un credente, che non nega mai i diritti della ragione, non ama lasciare il soprannaturale senza uno schiarimento: la preparazione della conversione dell'Innominato lo prova.

Il Nostro dunque si metteva in un ginepraio, che ora punge, ed era facile, me che mi ci sono impigliato, e dal quale non so come sarebbe potuto uscire il Manzoni stesso, senza ripetere in qualche modo quello, che già aveva scritto per Francesco Bernardino Visconti.

*
* *

Se egli non ha scorto subito le incoerenze più o meno visibili, che mostrai, o volli mostrare, in quell'apparizione paragonata colle sue idee morali e col resto del romanzo, è segno, che nemmeno lui si sottraeva al fascino di quella vigorosa rappresentazione balzata fuori dalla sua fantasia in un momento

(1) Cap. VI, p. 78.

(2) Le altre sono, com'è noto, quella di fra Cristoforo, quella dell'Innominato e quella tardiva della monaca di Monza.

ispirato. Ma chi scrive, esperimenta spesso, che le immaginazioni, che di primo tratto più gli piacciono, sono appunto quelle, che a mente calma lo sodisfano meno, perchè si reggono in virtù d'una robustezza fittizia, che, se lì per lì non manca di fare effetto, sbollito l'entusiasmo della creazione, sembra volgare: accade allo scrittore quello, che ad un pubblico rozzo, il quale, sbalordito dalla potenza di una scena, non bada ai mezzi, coi quali quell'efficacia fu ottenuta, ed applaude freneticamente. Ora, il Manzoni, tornando sul suo lavoro, anzichè perdonarsi le incongruenze del passo in grazia della forza della concezione, deve aver trovato in questa forza stessa qualche cosa di troppo scenico. Io però mi affretto a dire, che, quantunque, come vedremo, questo giudizio vada d'accordo colle sue idee estetiche, non può tuttavia sfuggire ad ogni censura.

Qui occorre spiegare un accenno, che ho fatto addietro: l'apparizione giunge inaspettata, come un colpo di scena; chi, leggendo la benedizione di fra Cristoforo, è arrestato dallo " strido repentino „ di Lucia, allibisce, come se, mentre contempla un colle fiorito, cinto di luce e di voli, vedesse d'un tratto alzarglisi in vetta un immane spettro minaccioso. La subitanea, spaventosa comparsa di Don Rodrigo contrasta bruscamente colla placidità della scena, che ne è interrotta. L'impreparazione, già lo dissi, produce quest'effetto. Ricordiamo, che il Nostro scriveva a Claude Fauriel, mentre attendeva al suo capolavoro: " Quant à la marche des événements, et à l'intrigue, je crois que le meilleur moyen de ne pas faire comme les autres, est de s'attacher à considérer dans la réalité la manière d'agir des hommes, et de la considérer surtout dans ce qu'elle a d'opposé à l'esprit romanesque. Dans tous les romans, que j'ai lus, il me semble de voir un travail pour établir des rapports intéressants et inattendus entre les différents personnages, pour les ramener sur la scène de compagnie, pour trouver des événements, qui influent à la fois et en différentes manières sur la destinée de tous, enfin une unité artificielle, que l'on ne trouve pas dans la vie réelle „ (1). Nell'episodio, che esamino, c'è forse appunto questa ricerca di ravvicinamenti inattesi, che al Man-

(1) 29 maggio 1822, *Epistolario*, I, 242.

zoni spiaceva. Ma, se l'impreparazione gli dava ombra, non aveva a far altro, che presentar Don Rodrigo dopo aver dato al lettore le spiegazioni necessarie.

Il guaio è, che, probabilmente, in quella comparsa un'altra circostanza offendeva il suo gusto: un urto forse troppo vivo di passioni, quel metter così di fronte Don Rodrigo da una parte, Lucia e Renzo dall'altra; costoro non si trovano mai tutti insieme nel romanzo: anzi, quando Renzo e Don Rodrigo sono di fronte, quest'ultimo è fuor di senno. La scena prodotta da quell'incontro è tumultuosa, per quanto l'agitazione dell'anima di quei tre personaggi sia, più che altro, accennata: Don Rodrigo sappiamo quel che senta; Renzo è dei tre il meno turbato: prova solo una grande pietà, che pure dev'esser la conseguenza d'un'istantanea lotta interna; Lucia è combattuta fra il ribrezzo, la pietà e la paura, una paura molto complessa.

E qui mi piace pensare, che il Manzoni abbia rinunziato a quella scena per un' altra ragione, la più delicata, quella, per la quale son più tentato di approvare quel sacrificio. È un motivo, che, se non è una semplice ipotesi, mostra con quanta finezza egli abbia penetrato l'anima femminile: forse gli ripugnava far trovar Lucia dinanzi a Don Rodrigo in un momento, nel quale anche Renzo era presente. Chi ricorda, che essa narra con ritroso pudore davanti a Renzo il suo incontro con Don Rodrigo (1), e solo quando vi è costretta, perchè sente, che, anche essendo senza macchia, quella circostanza offusca la sua anima, immagina quanto più penoso sia per lei, mentre sta col fidanzato, che la ama con ben altre intenzioni, trovarsi di fronte a quel signorotto, che con sì impuro amore l'ha perseguìta. Il candore di Lucia resta un po' contaminato, sia pure senza sua colpa, poichè il pudore è tale virtù, che chiunque lo può macchiare, senza che la persona, che se ne adorna, lo perda: è come un fiore, che non ha colpa se una mano rozza lo tocca, eppure si sciupa. In quell'incontro così violento la divina ingenuità dell'amore va in parte perduta, benchè gli sposi siano sempre, quali erano prima: l'amore è come uno specchio, che al menomo soffio si appanna. Il Manzoni vuole evitare ogni circostanza, che possa gettare l'ombra anche più lieve sull'affetto

(1) Cap. II e III, pp. 33-34.

dei due contadini e, soprattutto, su quel tipo di ragazza innocente, che è Lucia. In un altro romanzo, dove gli innamorati non avessero un'anima così candida, una scena di tal fatta non urterebbe: qui per il particolare carattere di quei fidanzati la cosa muta aspetto.

Ma, quanti lettori avrebbero notata questa lievissima sconvenienza? Ad ogni modo lo spirito sottile del Manzoni poteva scorgere nel quadro qualche tinta non delicata, qualcuna, come già dissi, troppo viva — perchè questa è la scena più mossa di tutto il racconto, quella, nella quale il sentimento dei personaggi è più fortemente colpito e, per la subitaneità dell'apparizione, più gagliardamente divampa — e infine qualche altra un po' troppo fosca.

L'epilogo della vita di Don Rodrigo raccoglie in sè tanti elementi straordinari, quanti nessun altro luogo del romanzo: una comparsa inattesa, che è più di fantasma, che d'uomo; una lotta vivissima di sentimenti disparati; una fuga tra di spaurito, di furente e di pazzo; una corsa d'indemoniato; una morte miseranda; un dialogo del più stupefacente cinismo. C'è, di che preparare un'angosciosa catastrofe di tragedia. Eppure l'impressione di teatralità mi pare si abbia più quando a questo brano si ripensa, che quando lo si legge, perchè la parola del Manzoni, anche qui, è molto sobria: questa è la ragione, per la quale dal lato estetico la scena è accettabile, nonostante il tumulto ed i contrasti, che in sè racchiude.

Altro elemento teatrale doveva esser pel Manzoni quel soprannaturale, a cui accennai più sopra, perchè il teatrale consiste spesso nell'irragionevole, in quello, che accade all'improvviso, senza una sufficiente spiegazione, e non avverrebbe più, se questa si volesse cercare, insomma nell'inverosimile, che è una delle cose, che dan più ombra al Manzoni. Per lui la " verisimiglianza „ è " mezzo unico „ per arrivare all' " eccitamento degli affetti „ e alla " simpatia al bene „ (1).

L'inverosimile è anche contrario al semplice, che è l'essenza dell'arte del Manzoni. Il nostro autore preferisce come argomento de' suoi scritti il comune, il quotidiano: anzi se ne

(1) *Opere inedite o rare*, III, 214: *Dello scopo morale e della perfezione estetica della Tragedia.*

compiace troppo, perchè questa fine di Don Rodrigo ci mostra che egli, volendo, avrebbe potuto allargare l'orizzonte dell'arte sua, facendola capace di raccogliere nel suo ambito tutte le forze impetuose della vita. Non volle: colpa del suo troppo rigido sistema di idee. Salvo qualche rispettosa mutazione, potremmo ripetere a proposito di lui quello, che egli scriveva al Fauriel: " ...Que de peine on a bien souvent pour faire mal! pour écarter des choses belles et grandes qui se présentaient naturellement et qui n'avaient d'autre inconvénient que de ne pas être conformes au système étroit et artificiel de l'auteur! „ (1). Nell'arte del Manzoni non trovan posto le bellezze, che, pur non essendo quelle di minor conto, si sottraggono al ragionamento; per esempio un po' d'immaginoso, anche se non è del tutto ragionevole, non guasta. Il Manzoni, per contro, lo evita sempre, tranne in quell'apparizione; si pensi, che egli giunse quasi ad osteggiar la poesia per quello, che d'immaginoso e d'intemperante ha in sè. Una delle ragioni, che andiam cercando, dev'esser dunque la medesima, che, con altre forse, lo indusse a sopprimer la descrizione della Fama là, dove si accinge a parlar di Don Rodrigo, che fugge per salvaguardare la sua dignità (2).

S'aggiunga, che quella scena così precipitosa e complessa sarà parsa anche un po' scomposta al Manzoni, che del bello aveva un senso più classico, che egli stesso non credesse, e quindi, ad immagine del proprio spirito, aveva atteggiato a compostezza tutto il romanzo.

Insomma, dato che il Manzoni frenò sempre la sua immaginativa con quella, che fu detta la sua prima qualità, la ragione, il brano è un po' contrario all'impostazione dei *Promessi Sposi*, tanto che di primo acchito si stenta a crederlo del medesimo scrittore, che compose quel libro, nel quale ci sono bensì avvenimenti straordinari, ma son tutti narrati colla serenità dell'uomo, che trova di ogni fatto la spiegazione naturale.

Quell'apparizione sta a sè ed ha qualche cosa, per quanto poco, di quella terribilità, che fu detta satanica: al Manzoni non andavano a' versi le " mostruosità della scuola satanica „. Egli, italianissimo in questo, ripudiò tutto quel, che di orrendo

(1) *Epistolario*, I, 140.
(2) *Brani inediti*, pp. 327-328.

e di funebre aveva il romanticismo. Qualche cosa di funebre, benchè non sia accompagnato dalla nebulosità, che gli si univa spesso nei romantici, e, come troppo nordico, non si confà al genio italiano, si può notare in quell'apparizione. Ma, appunto perchè non è per nulla vaporosa, perchè è di tinte meno fosche di quello, che si avrebbe potuto attendere dall'argomento, ed è in qualche modo, se non irreprensibilmente, motivata, il romanziere si sarebbe dovuto ritenere dal sacrificarla. Non è ragionevole cercar nell'arte il terribile per il terribile, ma nemmeno è ragionevole bandirnelo solo perchè terribile. Chi proceda con questo criterio, esclude dal campo dell'arte veri capolavori — fra l'altro parecchie tragedie dello Shakespeare, il drammaturgo prediletto dal Manzoni — e si oppone in qualche modo alla massima, che la letteratura debba aver per soggetto il vero, anche se per esso s'intenda il vero morale, perchè nella vita c'è del terribile, che è moralissimo. Io credo quindi, che l'elemento terribile, che più spiaceva al Manzoni, sia il significato morale dell'episodio, la severità della pena, degna d'un dio vendicatore.

Rispetto all'arte pura questo sarebbe stato il passo più arrischiato del romanzo: forse troppo arrischiato pel Nostro, che, come osservò lo Zola, era " ardimentoso, ma guardingo ne' suoi ardimenti „. Infatti il senso della misura fu il suo più grande pregio ed anche il suo difetto più grave, perchè gli vietò la concezione ardita, la concezione, che balza fuori intera e perfetta dalla fantasia, senza che la ragione l'abbia troppo misurata co' suoi regoli. Un po' di scapigliatura dà ad un' opera d'arte quel profumo di giovinezza, che è per essa quel, che la giocondità per un ragazzo di vent'anni. Il Manzoni ebbe l'arditezza delle riforme pensate: non ebbe, o piuttosto non volle avere, l'arditezza dell'ingegno, che crea e non s'impaccia troppo di regole; anzi la sua arditezza di riformatore si appuntò contro quest'altra arditezza, che talvolta era andata troppo oltre.

Per quest'eccessiva misuratezza, se anche quell'apparizione fosse stata storica, è da credere che il Manzoni l'avrebbe soppressa ugualmente, perchè egli, non ostante il suo realismo, non cessa di apparire ad ogni momento nel romanzo, direttamente o indirettamente, e soprattutto nel diriger l'azione, la quale si conforma bensì in modo mirabile all'ambiente, alle circostanze

storiche, alla verosimiglianza, ma non si adatta meno mirabilmente, e già lo dissi, a' suoi particolari principî estetici e religiosi.

Il Manzoni ha dato dell'Hugo questo giudizio, che indica quale sia la più gran differenza, che corre fra questi due artisti, e in che consista la superiorità del primo sul secondo: " Le situazioni le sa trovare; e, trovate, le sa usare; ma non guarda se siano ragionevoli „ (1). A questo il Manzoni ha badato sempre; questa volta, anche troppo. Per me questo è uno di quei casi, nei quali, come direbbe il Graf, " per volere ragionare troppo, finisce ad aver torto „ (2).

Certo è, che le ragioni della soppressione sono tutte, quale più, quale meno, sottili: della sofisticheria, cattivo frutto del suo soverchio amore del raziocinio, ce n'era nello spirito di colui, che sentiva il bisogno di fare questa... sottile difesa della sottigliezza: " ...j'ai remarqué que l'on appelle assez souvent subtiliser, ce qui pourrait s'appeler en d'autres termes: toucher le point de la question „ (3). Sapeva d'essere un tantino pedante, ma a questo difetto non poteva rinunziare: nel dialogo *Dell'Invenzione*, Secondo, impigliato nella fitta rete del ragionamento di Primo, dice: " Se tutto questo non foss'altro che de' giocherelli di logica? „ (4). Ma poi, naturalmente, Primo la vince anche su questo punto. E Primo è certamente il Manzoni.

Per essere in tutto un grande artista egli era dunque un troppo grande ragionatore; forse ricercava troppo le ragioni di tutto ciò che scriveva, era troppo conscio di tutti i perchè di ogni frase, che gli uscisse dalla penna. Chi cura eccessivamente la perfezione dei particolari, finisce talora col perdere la bellezza dell'insieme. Un altro romantico non avrebbe rinunziato a quell'episodio meraviglioso: il sacrifizio di quell'immaginazione pittoresca e drammatica, che gli deve esser costato non poco, è un esempio insigne di quanto possa nuocere il soverchio noto-

---

(1) *Epistolario*, I, 477.

(2) *Foscolo, Manzoni e Leopardi. Il romanticismo del Manzoni*, p. 44. Qualche idea generale sull'arte del Manzoni è tolta da questo scritto: i lettori colti se n'avvedranno.

(3) *Opere inedite o rare*, II, 481: *Dialogue entre un homme du monde et un poëte.*

(4) *Opere varie*, p. 526.

mizzare l'opera propria, giacchè a quell'episodio ne fu sostituito un altro, che non turba l'unità morale ed estetica dei *Promessi Sposi*, è più umano, più edificante, più semplice, forse più vero, non " più potente e più tragico „ (1) come vuole lo Sforza, certo men bello. Fra i brani inediti questo è quello, che più spiace veder soppresso: noi scusiamo il Manzoni solo, perchè questa è un'altra, forse la più luminosa, prova della sua coerenza. Ma è proprio necessaria in un artista una coerenza continua, ottenuta a tutti i costi? Non si chiede nemmeno all'uomo la coerenza continua. E, del resto, non poteva il Manzoni mantenere quel passo, che è esteticamente irreprensibile, dando come ragioni di quella comparsa non la passione e la paura di Dio, ma il caso e il parossismo del male?

Forse, dunque, egli è stato qui vittima del suo sistema. Dico " forse „, perchè tutto questo mio lavoro è tessuto di congetture, le quali, se sono difficili nell'ambito della critica storica, sono anche più malagevoli e dubbiose nel campo della critica psicologica ed estetica. Chi cerca le probabili ragioni, per le quali uno scrittore ha seguito una via, piuttosto che un'altra, rischia sempre di cadere in sottigliezze. Chi sa su quante io sono andato almanaccando, che forse il Manzoni non sospettò neppure: chi sa, se egli, per quanto scrupolosamente pesasse tutte le cose sue, non mi direbbe: " La ragione del mutamento è questa sola, semplicissima... „. E qui mi rivelerebbe quell'unico motivo, che io, forse, fra tanti, non ho saputo trovare.

Gennaio 1905.

(1) *Scritti postumi di A. M.*, I, 124.

Relazione intorno alla Memoria presentata dal Dr. Silvio Pivano: *Lineamenti storici e giuridici della Cavalleria medioevale.*

Il lavoro del Dr. Silvio Pivano si compone di due parti. A dimostrare l'importanza di una di esse, che è la seconda, e l'opportunità che sia pubblicata, basterà che si dica, come essa contenga la intiera ed accurata trascrizione degli Statuti del cosidetto Ordine cavalleresco della Nave, fondato in Napoli da Carlo di Durazzo nel 1381; i quali ci erano stati tramandati in un solo, preziosissimo codice della nostra Biblioteca universitaria, che il malaugurato incendio dello scorso anno ridusse a pochi, malconci e insignificanti frammenti. Il documento storico importantissimo sarebbe andato quindi poco men che intieramente perduto senza il felice pensiero, che tempo addietro, e cioè naturalmente prima dell'incendio, il Pivano aveva avuto di ricopiarlo.

Ma dallo studio del codice, e nello intento di illustrarne il contenuto, il Dr. Pivano fu indotto a riprendere in esame l'intero argomento della Cavalleria medioevale, considerandola però, come la natura del documento da illustrarsi voleva e la sua qualità di storico del diritto consigliava, massimamente sotto l'aspetto di istituzione giuridica, di istituzione del diritto pubblico. Ora è da osservare a questo riguardo, che il soggetto, se ha in apparenza una ricca letteratura, non fu per altro ancora studiato nè da storici nè da giuristi con quel rigore di metodo critico, il quale solo consentirebbe di fare qui quel che già s'è fatto per altri soggetti attinenti pure all'alto Medioevo e anch'essi strettamente contesti di elementi storici e di leggendarii, e cioè di sceverare in modo sicuro la realtà dalla finzione poetica.

Questo non diremo certo che sia riuscito di fare al Pivano. Chè anzi egli, seguendo del resto in ciò le traccie degli storici del diritto e nostrani e stranieri, e anche dei più reputati acuti e recenti, è propenso piuttosto al pensiero, o, vorremmo quasi dire, al partito della realtà che non a quello della finzione.

Ma non si può per altro disconoscere, come sul punto oltre ogni altro scabroso ed oscuro delle origini egli abbia saputo, nella gara delle congetture, chè a ciò si sono fin qui ridotti gli studiosi, mettere innanzi una ipotesi geniale e certo meno avventata di troppe altre; perchè trova il suo addentellato in un carattere incontestabile e tutto peculiare della costituzione feudale franca. A spiegare, di fatti, perchè da un lato il cominciamento e il maggior fiorire della cavalleria siano stati in Francia, e perchè dall'altro lato, pur svolgendosi essa in linea parallela al feudo, non se ne possa però fare una cosa sola con esso, il Pivano fa richiamo a quei caratteri di assoluta indivisibilità del feudo a tipo franco e di trasmissibilità di esso per solo diritto di primogenitura, che massimamente lo differenziano — come è risaputo — dal feudo a tipo longobardo; e pone in quella schiera di cadetti, i quali con ciò si trovavano tagliati fuori dal quadro della gerarchia feudale, pari bensì di natali ai più alti signori, ma provvisti, come le leggi del tempo ordinavano, solamente di beni dati o in assegno, o in usufrutto, o *en parage*, il primo nucleo della cavalleria.

Non vorremmo dire neppure qui che la prova documentaria, la prova irrefragabile dell'asserto sia pienamente riuscita; e neppure che la delineazione dello svolgimento posteriore dello istituto fino al secolo XIV, in cui cade appunto l'Ordine della Nave, sia nei momenti più controversi del tutto netta e convincente; ma dobbiamo però rilevare, insieme alla vivezza del pensiero e alla ingegnosità dell'argomentare, questo fatto, che nella pochezza delle altre trattazioni comprensive e specialmente giuridiche del tema, ch'è indubbiamente de' più difficili, questo studio del Pivano deve considerarsi come un molto opportuno ed utile contributo.

Pertanto la Commissione crede di proporne alla Classe la lettura.

C. Cipolla,
F. Ruffini, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

N. Y. ACADEMY OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Maggio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Mosso, Spezia, Segre, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Morera e Jadanza che funge da Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente partecipa la morte del prof. Augusto Piccini, dell'Istituto di Studi superiori di Firenze e Socio corrispondente dell'Accademia, avvenuta il 15 aprile 1905. Il Presidente ricorda brevemente i meriti scientifici dell'estinto ed il prof. Guareschi s'incarica di scrivere un cenno commemorativo che sarà inserito nelle pubblicazioni accademiche. L'Accademia è stata rappresentata ai funerali dal Socio corrispondente prof. A. Roiti.

Vengono presentate per gli *Atti* le seguenti note:

1° *Osservazioni sul " De Arte illuminandi „ e sul manoscritto Bolognese (segreti per colori),* del Socio Guareschi;

2° *Nuovo metodo per determinare il rapporto diastimometrico in un cannocchiale distanziometro,* del Socio Jadanza;

3° *Il Dinamometamorfismo e la Minerogenesi,* del Socio Spezia;

4° *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili,* del Socio nazionale non residente Luigi Bianchi, presentata dal Socio Segre;

5° *Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona cilindrica retta,* dell'ing. Enrico Gatti, presentata dal Socio Jadanza:

6° *Ricerche petrografiche nelle Valli del Gesso (Valli di S. Giacomo),* del Dr. Alessandro Roccati, presentata dal Socio Spezia;

7° *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica,* del prof. Francesco Severi, presentata dal Socio Segre.

LETTURE

Osservazioni sul " De arte illuminandi " e sul Manoscritto Bolognese (Segreti per colori).

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

Questa mia nota è, direi, l'introduzione, o discorso preliminare, intorno ad un manoscritto sulla miniatura (*De arte illuminandi*), supposto del secolo XIV, che, con annotazioni e critiche, pubblicherò fra poco in un più esteso lavoro: *I colori degli antichi.*

Lungi da me l'idea di entrare in un campo di studio non mio, che non sia cioè relativo alla chimica; questa scienza ha diramazioni tanto numerose ed estese che ben poche altre scienze possono farne a meno.

Il trattatello: *De arte illuminandi*, non solamente interessa l'arte, ma ben più ha importanza per la storia della chimica. L'artista, o l'archeologo od il paleografo, che non conosca almeno gli elementi della chimica, non potrà mai leggere con profitto un libro come il *De arte illuminandi* ed altri analoghi; o lettolo, non potrà utilizzarlo che materialmente, cioè ripetendo meccanicamente ciò che l'autore scrive; senza intenderlo.

Essendochè questo mio lavoro probabilmente sarà letto anche da qualcuno che non è chimico, e ciò veramente me lo auguro di cuore, così sarà bene che io dica brevemente come sono entrato in quest'ordine di idee, che al profano possono sembrare estranee alla chimica. Due vie mi condussero alla stessa meta; prima, il mio lavoro sul *Biringucci e la chimica tecnica*, poi l'altro mio lavoro *Della pergamena.*

Gli antichi libri che trattano della pittura, come il *Compositiones ad tingenda*, il *Mappae Clavicula*, i libri di Teofilo, di Eraclio, di Alcherio, di Cennini, ecc., che stanno sulla punta della penna di tutti gli scrittori moderni di pittura, che ci di-

cono intorno alla natura dei colori? Nulla; perchè appunto ben poco si conosceva allora, la chimica era nell'infanzia. Sono però autori preziosi perchè ci dànno il nome dei colori che adoperavano e ci indicano il modo col quale erano applicati. Ma non di più; molti di essi poi, quali il *Compositiones ad tingenda*, l'Eraclius, il Teofilo, il Manoscritto Bolognese, ecc., ci dànno notizie di chimica tecnica anche all'infuori dei colori. Tutti questi autori hanno bisogno di essere commentati, ed i commenti debbono essere fatti da chimici, come il *Mappae Clavicula* ed il *Compositiones ad tingenda*, ecc., commentati dal Berthelot. Abbiamo certamente un bel libro su Teofilo; l'edizione fatta da l'Escalopier, con introduzione del Guichard ed interessanti annotazioni, è senza dubbio bellissima ed utile sotto molto riguardi, ma un vero commento scientifico manca ancora.

Nel mio lavoro storico-sperimentale: *Osservazioni ed esperienze sul ricupero e sul restauro dei codici danneggiati dall'incendio della Biblioteca Nazionale di Torino* e nell'altro, più esteso: *Della Pergamena, con osservazioni ed esperienze sul ricupero e sul restauro dei codici danneggiati negli incendi, e notizie storiche*, con *XX tavole separate*, Torino, 1905, dissi che mi sarei occupato anche *De' colori usati dagli antichi.*

È questo un argomento assai importante che si collega colla chimica nelle sue origini. Nell'Egitto, nella Caldea, nella China, nel Giappone, ecc., sino dalla più remota antichità si sono preparati de' colori per applicare alla tintura od alla decorazione delle terre cotte o delle porcellane o per la colorazione degli smalti, e de' vetri, e da quasi 2000 anni si applicano i colori per la decorazione de' libri, per la miniatura.

Seguire lo sviluppo della chimica tecnica ne' primi secoli della nostra civiltà equivale a seguire lo sviluppo della chimica pratica in generale. Come gli antichi ci hanno dato le prime nozioni di chimica pratica, che erano fuse può dirsi coll'origine delle arti, così ci hanno pure dato le prime nozioni di filosofia chimica colla teoria atomica di Leucippo e di Democrito.

Nel 1904 io ho pubblicato un lavoro su *Biringucci e la chimica tecnica* (1) ed ho fatto notare come nel medio evo si siano

(1) *Vannoccio Biringucci e la chimica tecnica, con note storiche su la chimica dei Cinesi, e su Faustino Malaguti.* Torino, Unione Tip.-editr., 1904.

scritte non poche opere che interessano la chimica o le arti tecniche. Sono opere che stanno a dimostrare la figliazione della chimica del medio evo dalla chimica dell'Egitto e de' Greci. Continuando in questo studio mi sono persuaso che talune di quelle opere, anche molto importanti, o non sono conosciute dai chimici o lo sono imperfettamente; da questo studio risultò pure che moltissimi dei libri che trattano di chimica tecnica o delle arti tecniche o decorative dal secolo VIII al secolo XVII sono italiani, e si riferiscono specialmente ai colori.

Dall'esame di queste opere venni a cognizione anche di un altro fatto. Questi antichi libri tecnici si trovano talora inseriti in raccolte archeologiche o in collezioni letterarie poco conosciute dai chimici; sono così venuto a conoscere il libro *De arte illuminandi,* leggendo l'opera di Eug. Müntz: *L'arte italiana nel Quattrocento,* ove, a pag. 684, si trova ricordata tanto l'edizione del Salazaro quanto quella del Lecoy de la Marche, e questa si trova nelle *Mémoires de la Société nationale des Antiquaires de France.* Non solo, ma queste opere di arti tecniche sono, quasi sempre, state pubblicate, od anche commentate, da chi non ha che poca o nessuna cultura scientifica; perciò queste pubblicazioni non sono prive di errori gravi.

Dopo quanto ci hanno lasciato Teofrasto, Vitruvio, Plinio ed il Papiro di Leyda (sec. III), il primo lavoro chimico che riguarda le arti tecniche, e specialmente i colori, è il manoscritto di Lucca, *Compositiones ad tingenda* (sec. VIII), di cui ho fatto un cenno nel mio Biringucci. A questo fanno seguito la *Mappae Clavicula* (sec. X), il *Liber Sacerdotum* o *Liber Johannis* (X-XI, tratta poco de' colori), Eraclius (XI), Teofilo (XII), il manoscritto di Montpellier (XIV), l'*Hermeneia* del Monte Athos, l'*Anonymus bernensis*, il manoscritto veneziano del " British Museum „ (Sloane, N. 416), Cennino Cennini (XIV-XV), ecc., e principalmente le altre opere antiche (Alcherius, Le Begue, ecc.), (sec. XII a XVII), pubblicate dalla sig.ra Merrifield come dirò più avanti.

Altri italiani, quali ad esempio il Biondo (1549) ed il Dolce (1557), scrissero sui colori, ma ne' loro scritti poco vi è che interessi la chimica.

Della storia della miniatura hanno scritto molti autori (Vasari, ecc.), ma più che altro riguardo la vita e le opere degli

artisti. Così hanno fatto G. e C. Milanesi e Pini, i quali hanno in molti punti corretta e completata l'opera del Vasari: *Nuove indagini con documenti inediti per servire alla storia della miniatura italiana*, Firenze, 1850; opuscolo separato, tolto dall'edizione del Vasari). Nulla dicono però della tecnica dell'arte.

Tra i libri che trattano de' colori antichi uno dei più importanti è senza dubbio il *Trattato della Pittura*, di Cennino Cennini, messo in luce la prima volta, con annotazioni, da Giuseppe Tambroni, Roma, 1821.

Questo *Trattato della Pittura*, o *Libro dell'arte*, fu poi ripubblicato con correzioni ed aggiunte da G. e C. Milanesi, ed. Lemonnier, 1859; ma con annotazioni spesso tutt'altro che esatte. I commentatori aggiunsero a questa edizione una *Tavola delle voci attinenti all'arte*, che dovrebbe essere completamente riveduta e corretta.

Ed è curioso poi leggere a pag. XXIV della Prefazione all'edizione Lemonnier, le critiche de' sig.[i] G. e C. Milanesi all'edizione romana del 1821 e dichiarare che " il Tambroni volle porre al testo cenniniano alcune note, il più delle quali sono per le voci dell'arte, ... Ma, tra per la non molta conoscenza della chimica pittorica (!) ch'era in lui ecc....; le annotazioni dell'editore romano riuscirono *spesso inesatte*, e *quasi sempre insufficienti* ".

Questo è ciò che noi precisamente potremmo dire, forse con non minore ragione, della edizione fatta da G. e C. Milanesi. Colla differenza che la prima è del 1821 e la seconda del 1859. Ma ora non è il caso di occuparci di quest'opera.

I.

De arte illuminandi.

Della storia della miniatura si occupò anche il p. A. Caravita; egli pubblicò le notizie principali sugli artisti e sulle opere loro, che si trovano nell'Archivio di Montecassino (P. A. Caravita, *I codici e le arti a Montecassino,* 3 vol. pe' tipi della Badia, 1869-70).

Sino al 1877 non si conosceva, pare, un'opera che trattasse

esclusivamente della tecnica della miniatura. Il p. A. Caravita trovò fra i codici della Biblioteca Nazionale di Napoli un antico manoscritto che tratta esclusivamente dell'arte del colorire e del miniare. Di questo manoscritto fece uno studio speciale il sig. Demetrio Salazaro, che lo ha pubblicato con annotazioni la prima volta nel 1877 (1).

Questo stesso manoscritto fu pubblicato di nuovo con note dal sig. Lecoy de la Marche nel 1886 (2). Secondo il Lecoy, questo trattato è molto importante, ma il testo non sarebbe stato in alcuni punti riprodotto con esattezza dal Salazaro. Le critiche però del Lecoy non sono sempre giuste, e le annotazioni fatte da lui al testo non sono sempre esatte. In molti punti è più corretto il Salazaro.

Il Salazaro nella sua edizione ha riprodotto in varî luoghi, nelle annotazioni, quegli ammaestramenti di Cennino Cennini (ed. Lemonnier, 1859) che hanno maggiore relazione con ciò che l'autore anonimo espone nel suo libro. Ma vi è un grave inconveniente, ed è che talune note sono segnate come tolte dal Cennini, mentre non sono che le annotazioni dei commentatori del Cennini stesso; annotazioni di G. o C. Milanesi che trovansi nella *Tavola delle voci attenenti all'arte*; ed il lettore non molto pratico, può essere tratto in errore. Il Lecoy stesso non ha, probabilmente, esaminato bene l'opera del Cennini (ediz. 1859) se crede che le note apposte dal Salazaro siano tutte tolte dal testo cenniniano. Il Lecoy de la Marche ha fatto notare le differenze fra il testo dato da lui e quello dato dal Salazaro.

Secondo Lecoy, questo trattatello dell'arte della miniatura è completo, contrariamente all'opinione del Salazaro, che lo credeva incompleto.

Il Salazaro a pag. 2 in nota scrive: " Crediamo fare cosa utile agli studiosi, riportando qui e in altri luoghi tutti quegli ammaestramenti di Cennino Cennini, che hanno una maggiore

---

(1) *L'arte della miniatura nel secolo XIV.* Codice della Biblioteca Nazionale di Napoli, messo a stampa per cura di Demetrio Salazaro, ispettore del Museo Nazionale. Napoli, Raffaele Càccavo edit., 1877, in-4°.

(2) *L'art d'enluminer, Manuel technique du quatorzième siècle,* Paris, 1887, " Mémoires de la Société nationale des antiquaires de France ", 1886 (serie 5ª, t. VII, p. 248-286).

relazione con quello che va esponendo il nostro Anonimo nel presente Trattato „.

Non si capisce proprio bene perchè il Salazaro, e in ciò è lodato dal Lecoy, abbia voluto annotare, o commentare, un autore supposto del 1300 al 1400, con quanto scrisse un altro autore che è pressochè di quel tempo, come il Cennini; un autore, questo, che egli stesso ha bisogno d'essere commentato perchè non dà, e non poteva dare, che imperfettamente, indicazioni intorno la natura dei colori che adoperava.

Ben a ragione il Petrini nel 1822 scriveva (*Antologia*, VI, p. 524): " Che val, per esempio, che nel Trattato del Cennini ragionandosi della natura dell'Azzurro della Magna (Cap. LX), si noti *che egli è un color naturale il quale sta intorno e circonda la vena dell'argento, che nasce molto in nella Magna; che si vuol triare poco poco e leggermente con acqua, perchè è forte sdegnoso della pietra;* ecc. ecc.? Ma solamente dopo molti secoli fu dimostrato essere questo colore un *carbonato di rame* „ (Branchi, 1811).

A questo manoscritto il Salazaro diede il titolo: *L'arte della miniatura nel secolo XIV*, ed il Lecoy invece: *De arte illuminandi*, ma nell'originale il titolo manca. Forse dall'autore aveva avuto il titolo di *Secreti*, quale era in uso molto ne' secoli XVI-XVII. Nella rubrica XXII infatti il nostro anonimo fa cenno di *Secretum*.

Ad ogni modo, il titolo: *De arte illuminandi* è quello col quale trovasi classificato il manoscritto nella Biblioteca Nazionale di Napoli, ed anch'io, come il Lecoy, lo conservo tale e quale.

Il Lecoy ha curato essenzialmente l'esattezza del testo, ha fatto rilevare alcuni errori nei quali sarebbe caduto il Salazaro, come, ad esempio, *desiccatas* invece di *desiccata*, *permictas* invece di *permicte*, ecc. Il Lecoy ha la pazienza di far notare quasi ad ogni principio di rubrica che invece di *accipe* si deve scrivere *recipe*; nella stessa pagina corregge varie volte *pinzello* con *pizello*, *pinzelli* con *pizelli*, ecc. Poi, il Lecoy stesso in altri luoghi del testo (Rubrica XXIX ecc.) scrive *pinzelli* e *pinzellum* anch'egli. Se voleva fare l'osservazione, non bastava una volta sola? Ora, in testi di questo genere, l'esattezza ortografica è certamente importante; ma è al senso, ai procedimenti descritti, ecc., che si deve dare più valore; che si scriva *cinabrium* invece di *cino-*

brium, o *cenobrium* poco importa. Teofilo ha un capitolo intitolato: *De cenobrio.* Ma anche sotto questo riguardo il testo dato dal Salazaro non è peggiore di quello dato da Lecoy. Nè Teofilo, nè Eraclius, nè altri autori tecnici di questo tempo hanno scritto un bel latino; il *Compositiones ad tingenda* è scritto in un latino barbaro, molto sgrammaticato. Ci vorrebbe altro che tentare di correggere questi testi!

Questi manoscritti antichi bisogna riprodurli esattamente quali sono, senza tentare, eccetto casi evidentissimi, di correggere gli errori di ortografia o gli errori de' copisti; con queste correzioni sistematiche si corre pericolo di alterare il testo, scritto forse in origine da artigiani, introducendovi delle congetture e delle interpretazioni moderne.

Quando si voglia pubblicare qualche manoscritto che trovasi nelle nostre biblioteche, e che tratta di scienza o delle arti tecniche, si dovrebbe interpellare chi ha la dovuta competenza; in questi casi l'essere paleografo non basta; per la trascrizione esatta del testo e per le annotazioni occorre il concorso dello scienziato, al quale spetta la parte più importante del lavoro.

Desiderando io di compiere degli studî storici e sperimentali sui colori usati dagli antichi, ho dovuto, naturalmente, occuparmi anche della miniatura e de' libri antichi che trattano di quest' arte. Così, io presi vivo interesse a conoscere l'opera, relativamente recente, data alle stampe dal Salazaro nel 1877. Quasi subito però mi colpì il modo superficiale, col quale era stata scritta la prefazione e fatte le annotazioni; alcune direi, non poche anzi, delle quali, possono trarre in errore il lettore.

Lo studio di questi antichi trattati ha una notevole importanza, perchè serve a stabilire la concatenazione, il modo graduale col quale si sono sviluppate le arti chimiche nel medioevo per arrivare sino a Biringucci (1540). Ed essendochè, come già dissi, questi manoscritti de' secreti, ecc. sono in gran parte italiani, tanto più è doveroso che dagli italiani siano tolti dall'obblio. E perciò, quando ebbi esaminato questo libro, pensai di ripubblicarlo con alcune note esplicative che servissero come commento e come correzione alle annotazioni fatte dal Salazaro e dal Lecoy. L'esame attento di questo lavoro mi persuase a poco a poco che non solo era stato incompletamente e inesattamente annotato o commentato, ma che il manoscritto stesso

scoperto dal Caravita ed illustrato dal Salazaro e dal Lecoy non era forse tanto antico quanto questi autori dimostrano di credere.

Per varie ragioni ho creduto utile rifare la traduzione italiana. Di questo lavoro si è incaricato l'egregio Dr. Mario Zucchi, ed io credo ch'egli abbia adempiuto il suo còmpito molto lodevolmente.

Ed ora appunto discutiamo brevemente intorno al tempo in cui fu scritto questo trattato: *De arte illuminandi.*

Nella prefazione il Salazaro scrive: " Da non pochi scrittori fu lamentata finora la mancanza quasi assoluta di un qualche trattato sull'arte gentile dell'*alluminatura* o *miniatura*, che avesse potuto darci notizie del metodo tenuto dai cultori di quest'arte durante il periodo del medio-evo ed il seguente. Ed in vero è stata questa una lacuna nell'istoria del risorgimento artistico in Italia, che da ogni parte veniva riconosciuta; ed i più recenti ricercatori delle patrie glorie tentarono ogni via per raccogliere documenti negli archivî e nelle biblioteche a fin di rintracciare in certo modo gli elementi di questo ramo importante di studî. E nessuno riuscì mai, per quanto sappiamo, a dirci in modo speciale quali mezzi furono adoperati dai claustrali o altri artisti per decorare ed arricchire di miniature tanti preziosi codici che ancora si osservano negli archivî e ne'varî musei d'Europa „.

" Per la qual cosa, quando nel 1872 il nostro chiarissimo e compianto amico p. A. Caravita, fra' codici della Biblioteca Nazionale di Napoli, riconobbe un trattato del 300 sulla miniatura, destossi, come è naturale, il desiderio de' dotti. Ed in fatti, appena fu tra noi annunziata tale scoperta, che tosto i giornali artistici ed archeologici stranieri si affrettarono di darne agli studiosi l'importante notizia. Laonde crediamo nostro debito, come cultori di siffatti studî, dare al presente trattato quella pubblicità che a giusto titolo il documento richiede „.

" Molti per fermo parlarono de' miniatori, ma nessuno sulla miniatura, cioè sul modo di comporre e conservare i colori, e di usare l'oro e l'argento, nonchè sulla formazione de' liquidi gommati per dare consistenza e durabilità alle opere disegnate o miniate (1) „.

---

(1) Già Teofilo ha dei capitoli interi nei quali a lungo discorre delle varie colle (della pelle, di cervo, di pesce); della colla a vernice; della maniera di indorare e argentare i libri; del modo di usare i colori all'olio e alla gomma; *de omni genere glutinis in pictura auri; quomodo colores in libris temperentur*, ecc.!

Ecco le notizie principali che dà il Salazaro intorno questo manoscritto:

" Esso è un codicetto in 8° p. cartaceo, segnato XII. E. 27, e componesi di 10 carte scritte con caratteri gotici, piuttosto tondi e piccoli, e con lettere d'inchiostro sbiadito, addossate le une alle altre, che spesso ne rendono difficile l'interpretazione.

" Il tempo che deve assegnarsi al codice è il XIV secolo. È copia d'altro più antico manoscritto originale. E che sia tale, apparisce dall'uguaglianza e dall'accuratezza della scrittura, dal non esservi molte abbreviazioni, da talune parole lette erroneamente dal manuense, e da altre lasciate in bianco. Nè questa copia fu del tutto condotta a termine, perchè mancano le iniziali dei capi, e la intitolazione del trattato col nome dell'autore, chè una mano più esperta doveva colorire e fregiare gli ornati, secondo era costume. L'autore poi dell'opuscolo, il cui nome fu ommesso di scriversi al principio della copia, e che pur tuttavia noi possiamo ben dire che fosse napoletano, sia pel modo di esprimersi, sia per alcune frasi o voci prese dal dialetto, visse in questo secolo XIV, certo non prima della fine del precedente, citandosi da lui l'autorità di Alberto Magno. In guisa che ben si può affermare ch'egli fosse vissuto circa un secolo (?) innanzi il Cennini, il quale sappiamo nato nel 1372, e che probabilmente non compose il suo libro che nel XV secolo. Scrisse con barbara latinità; e frequentemente le parole non hanno di latino che la sola desinenza; occorrono anche non pochi errori, i quali forse più che all'autore del trattato, debbono attribuirsi all'ignoranza dell'amanuense. Sembra che il nostro anonimo abbia avuto in mente di confutare altro trattato sulla miniatura di non sappiamo dire quale altro autore. E questa nostra congettura poggiamo sulle parole da lui messe a principio, *sine aliqua attestatione, caritative tamen*, dove accenna altresì a molti altri trattati sulla miniatura, scritti prima del suo, i quali certamente andarono perduti, o giacciono tuttavia sepolti in qualche biblioteca ".

Il Salazaro era talmente entusiasta di questa scoperta, che dopo aver brevemente accennato al *Compositiones ad tingenda* (1) che trovasi nelle *Antiq. Ital.* del Muratori, al Teofilo, *Diversarum*

(1) Questo trattato di ignoto autore che il Salazaro crede del IX secolo, è invece del secolo VIII.

artium schedula, all'Eraclius, *De coloribus et artibus Romanorum* ed al Cennino Cennini, *Trattato della Pittura*, scrive, con evidente esagerazione: " Come si vede dai loro titoli, poco, anzi nulla può raccogliersi da queste opere che valga a gittare una qualche luce per iscorgere i metodi seguiti dagli artisti nel miniare i loro codici. A ciò mirabilmente risponde questo trattato, che per la prima volta va alle stampe, e che, è a credere, soddisferà pienamente i voti de' cultori di patrie memorie ".

Certamente, *dai titoli* solamente non possiamo giudicare se questi libri trattano della miniatura o no, ma bisogna leggerli.

Il Lecoy (loc. cit., p. 249) scrive: " Il manoscritto è verosimilmente un originale o almeno almeno una copia contemporanea. La scrittura è quella che gli scribi italiani usavano nella seconda metà del XIV secolo. Il trattato è completo, ecc..... Il titolo generale del libro solamente ci manca, ma non vi è ragione per non adottare quello che è nel catalogo della biblioteca di Napoli: *De arte illuminandi* ".

" L'autore non si è fatto conoscere, ma la sua nazionalità è resa manifesta da certe frasi, dall'ortografia e da idiotismi significativi. È certamente un italiano e senza dubbio un napoletano o forse un romano, ecc. ".

In altro luogo il Lecoy, dopo avere accennato alle opere di Teofilo, di Eraclio, ecc., scrive (1):

" Il trattato di Eraclius: *De coloribus et artibus Romanorum*, quello di Pierre de Saint-Omer: *De coloribus faciendis*, e quelli di alcuni anonimi italiani non sono speciali alla miniatura. Ma ve ne è uno che si occupa esclusivamente della miniatura e che ci dà sulla pratica degli insegnamenti che sono i più completi ed interessanti; è un opuscolo inedito che abbiamo trascritto dall'originale della Biblioteca di Napoli e che ha per titolo: *De arte illuminandi*. L'autore, secondo gli indizi che emergono dal testo, era un uomo del mestiere, italiano, e molto probabilmente napoletano. La scrittura del manoscritto ci dimostra che fu redatto verso l'anno 1400; si riferisce dunque alla più bella epoca della miniatura ed emana da una delle più brillanti scuole. Eccone

(1) Lecoy de la Marche, *Les manuscrits et la miniature*. Paris, Quantin édit., pag. 309.

l'esame sommario di quest'opera che ci dà un' idea chiara dei processi in voga nel medio evo „, ecc.

Già il romano Eraclius non ha forse de' capitoli interi della sua opera (della quale molti parlano, ma che non conoscono) che trattano dell'applicazione dei colori alla miniatura? Nel Libro III del *De coloribus et artibus romanorum* (1), Eraclius, o chi poco dopo scrisse questo libro in prosa in aggiunta ai due primi in versi, tratta spesso della miniatura e dà delle notizie importantissime, come ad esempio nei capitoli: (LVI) *De miscendis inter se coloribus pingendo et illuminando, et de modis cum de ipsis implentur opera et matizantur et inciduntur alter ex altero;* (LVII) *De coloribus sibi contrariis;* (LVIII) *De diligentia quae haberi debet circa naturas colorum, et de modis miscendi, est inter se, et incidendi, et matizandi, cum in operibus distinguuntur, ut etiam aliud capitum de hoc antepositum est*, ecc. Come si vede, tratta anche della vera incompatibilità fra i colori.

Nel Libro III (cap. 34), trattando della preparazione del colore bresilio dice: " *De hoc colore in ligno et in muro operari poteris, mirabilius tamen in pergamenis* „. Già nel Libro I (cap. 2) tratta dei colori ricavati dai fiori e che servivano nella miniatura.

Notizie sui colori usati in miniatura si trovano anche nelle altre opere antiche sovraricordate. E quanto scrisse il Cennini? Come può dunque dirsi che nulla si conosceva prima della scoperta del manoscritto pubblicato dal Salazaro e dal Lecoy? Ma bisogna esser giusti e riconoscere che nel *De arte illuminandi* si tratta ampiamente ed in modo particolare dell'arte del miniare.

---

(1) Di questa importante opera nostra si sono fatte varie edizioni e traduzioni all'estero, ma io non conosco nessuna edizione italiana, specialmente con commento. Oltre la traduzione fatta dalla sig.ª Merrifield, deve essere qui ricordata quella tedesca di Alberto Ilg: *Quellenschriften für Kunstgeschichte und Kunsttechnik des Mittelalters* di Eitelberger e Edelberg, IV *Heraclius von der Farben u. Künsten der Römer*, Wien, 1873) col testo originale identico a quello pubblicato dalla Merrifield e con molte note interessanti. Ritornerò su questo argomento.

Anche in questa bella raccolta, *Quellenschriften*, ecc., il commento consiste essenzialmente nell'enumerare e nel riprodurre ciò che hanno detto i vari scrittori precedenti, ma il commentatore poco o nulla vi aggiunge del proprio, nè dà una vera spiegazione del fatto o del fenomeno in senso moderno.

Credo utile dire alcune parole intorno un'opera molto importante che tratta della storia della pittura in generale, ed anche della miniatura in particolare. Quest' opera, ora classica, è la seguente: *Original Treatises dating from the XIIIth-XVIIIth centuries on the Arts of Painting, in Oil miniature, mosaic*, ecc., by Mrs. Merrifield, 2 vol. in-8°, London, 1849.

L'opera della sig.ra Merrifield è molto importante, fatta con giusta critica e colla raccolta di numeroso materiale trovato principalmente nelle biblioteche italiane. L'Italia deve essere grata a questa insigne donna. Aveva trattato bene ed a fondo questo argomento anche l' Eastlake nel suo *Materials for a History of Oil-Painting* (*Notizie e Pensieri sopra la storia della Pittura ad olio.* Trad. V. G. Bezzi, Torino, 1849), e la sig.ra Merrifield si mostra grata al suo compatriota per i consigli avutine.

La signora Merrifield stette varî anni in Italia (1), visitò con molta attenzione i nostri monumenti, le nostre biblioteche: si innamorò dell'arte nostra, pubblicò molti manoscritti antichi che trovò nelle biblioteche di Bologna, Padova, Venezia, ecc., ove giacevano dimenticati, come ne pubblicò di quelli trovati in Francia (Le Begue, ecc.). Riunì il tutto in due bellissimi volumi, che diede alle stampe nel 1849.

Il primo volume comprende una importante ed erudita introduzione generale di CCCXII pagine, divisa in *sei* capitoli. Nel primo

---

(1) La sig.ª P. Merrifield fu, sino dal 1845, incaricata dal Governo Britannico di una missione da compiersi nell' Italia del Nord, allo scopo di raccogliere manoscritti ed altri documenti relativi alla tecnica della pittura, specialmente per conoscere i processi ed i metodi adoperati dagli antichi artisti italiani.

Colla raccomandazione del celebre ministro inglese Roberto Peel, l'Autrice potè pubblicare i numerosi manoscritti raccolti, in parte a spese del Governo inglese.

Nella Prefazione alla sua Opera la Merrifield ricorda con gratitudine, fra i molti altri, il nostro Panizzi, allora nel " British Museum „, ed il Gazzera della Biblioteca dell'Università di Torino.

Alla sig.ª Merrifield si deve inoltre la traduzione inglese del *Trattato della Pittura* di Cennino Cennini (London, 1844). Anche quest' opera pare non fosse conosciuta dai commentatori del Cennini (ediz. 1859). Altre opere importanti si debbono a questa scrittrice.

Non ho ancora potuto trovare qualche notizia biografica intorno questa illustre scrittrice, della quale dirò più a lungo nell'altro mio lavoro: *I colori degli antichi.* La prefazione al suo libro fu scritta nel 1848 a Brighton.

tratta dello stato della società e delle arti nel medio evo, nel secondo *della miniatura in generale*, nel terzo dei mosaici e dell'intarsio, nel quarto del vetro e della pittura sul vetro, nel quinto di varie arti quali la doratura, il niello, la tintura, ecc., nel sesto della pittura ad olio, dei colori usati dagli antichi nella pittura, degli olii essenziali, delle resine, delle vernici, ecc. Tutto documentato e chiaramente esposto. Si vede che l'autrice aveva sufficienti cognizioni chimiche per trattare l'argomento sotto il punto di vista che desiderava.

Poi riproduce il testo originale di varî manoscritti sulla pittura e sulla miniatura, dandone anche la traduzione inglese. Tali sono:

Alcune annotazioni su un manoscritto: Raccolte di Secreti, Specifici, Remedî, ecc., di Fra Fortunato da Rovigo.

Manoscritto di Jehan Le Begue del 1431, che contiene la materia seguente, riassunta dall'indice dato dall'autore stesso:

Continentur hoc volumine:

Tabula de vocabulis, synonymis et equivocis colorum rerumque et accidentium colorum ipsisque omni arti pictorie conferentium nec quod operum exercitiorum propitiorum ac contingentium eorum.

Alia tabula licet imperfecta et sine initio.

Experimenta de coloribus.

Experimenta diversa alia quam de coloribus.

Liber Theophili admirabilis et doctissimi magistri de omni scientia picturae artis.

Liber Magistri Petri de Sancto Audemaro de coloribus faciendis.

Eraclii sapientissimi viri liber primus et metricus de coloribus et de artibus Romanorum.

Ejusdem liber secundus, item metricus.

Ejusdem liber tertius sed prosaicus de coloribus praedictis.

De coloribus ad pingendum capitula scripta et notata a Johanne Archerio seu Alcherio anno Domini 1398 ut accepit a Jacobo Cona flamingo pictore commorante tunc Parisiis.

Capitula de coloribus ad illuminandum libros ab eodem Archerio sive Alcherio scripta et notata anno 1398 ut accepit ab Antonio de compendio illuminatore librorum in Parisiis et a magistro Alberto Porzello perfectissimo in omnibus modis scribendi, mediolani scholas tenente.

Aultres receptes en Latin et en François per Magistrum Johannem dit Le Begue Licentiatum in legibus et generalium

magistrorum monetæ regis greffarium Parisiis. Qui præsens opus seu capitula in hoc volumine aggregatu propria manu scripsit anno Domini 1431. Aetatis vero suae 63.

Illustra Deus oculum.

In questo volume trovansi molte notizie che interessano la miniatura.

Nel volume secondo si contiene:

1° Manoscritto bolognese " *Secreti per colori* „ (del secolo XV).

2° Manoscritto della Marciana " Secreti diversi „ (del secolo XVI).

3° Manoscritto padovano " Ricette per fare ogni sorte di colori „ (del secolo XVII).

4° Manoscritto volpato " Modo da tener nel dipinger „ (del 1650 circa).

5° Manoscritto di Bruxelles " Recueuil des Essaies des merveilles de la Peinture by Pierre Lebrun „ (Del 1635).

6° Storia della Organizzazione Civile delle Belle Arti in Venezia, ecc., di G. O'Kelly Edwards, e una dissertazione di Pietro Edwards.

La lettura della prefazione e delle annotazioni al *De arte illuminandi*, del Salazaro, e forse anche del Lecoy prima del 1886, mi fece nascere il dubbio che questi due autori allora non conoscessero i numerosi manoscritti del secolo XII al XVIII, pubblicati dalla Merrifield, come a quanto sembra non li conobbero i commentatori del Cennini, posteriori al 1849. Il Lecoy, però, ricorda la Merrifield in una sua opera pubblicata dopo il 1887: *Les manuscrits et la Miniature.*

Come pure questi scrittori non conobbero i lavori di Branchi, di Fabroni d'Arezzo, di Petrini e di altri più o meno chimici, sui colori usati dagli antichi. Se ciò non fosse, sarebbero stati più esatti nelle annotazioni.

Questo libro del nostro anonimo è certamente importante, sia perchè vi tratta esclusivamente di colori usati nella miniatura, sia perchè è molto ben ordinato, metodico e chiaro.

Il Lecoy dà il seguente giudizio dell'opera del nostro anonimo:

" La sua opera ha per iscopo di presentare sotto una forma chiara e concisa, le regole da seguirsi per illustrare i libri me-

diante il pennello e la penna. Esso, è ben più che una semplice raccolta di ricette come i libri di Teofilo, Pietro di Saint-Omer (1) o di Eraclius. È una metodica spiegazione (almeno nell'intenzione dell'autore) del modo di comporre e preparare i colori, del modo di servirsene, ecc., ecc. " Insomma è un manuale speciale pel miniatore, mentre gli altri non sono . . . . . , ecc. Tal quale egli è dev'essere stato assai utile agli artisti e loro allievi dell'Italia Centrale e Meridionale e può rendere ancora molti servigi non solamente agli archeologi, ma anche agli artisti moderni, ecc., ecc. „.

Maggiore importanza avrebbe il *De arte illuminandi*, quando fosse dimostrato che questo manoscritto è della prima metà del 1300, cioè anteriore al Cennini, perchè allora si potrebbe riguardare come un anello di congiunzione tra il *Compositiones ad tingenda*, il *Teofilo*, la *Mappae Clavicula*, Eraclius e Cennini stesso. Ma Salazaro e Lecoy sono ben lontani dall'aver dimostrato l'antichità grande di questo manoscritto.

Io non ho la pretensione di essere conoscitore di antichi manoscritti, di essere un paleografo, nè di volere entrare in un campo non mio, come pur troppo si è fatto e si fa ancora da molti; la mia critica avrà per iscopo unicamente quanto riguarda la chimica e le scienze affini.

Secondo dunque Salazaro e Lecoy l'opuscolo o trattatello del nostro anonimo sarebbe anteriore a quello del Cennini, cioè del 1300 al 1400; secondo, anzi, il Salazaro, sarebbe anteriore di quasi un secolo al trattato del Cennini (2). Il Lecoy crede sia della seconda metà del XIV. Dall'esame complessivo del libro, mi pare invece che esso sia posteriore a quello del Cennini; non solo, ma forse dopo il 1500. Appena mi venne questo dubbio, esaminai più attentamente il libro e vieppiù mi persuasi di essere nel vero, o almeno di non essere lontano dal vero.

Dopo la lettura dei primi capitoli di questo libro mi colpì subito il gran numero di materie colorantì che erano ricordate o descritte dal nostro autore; e ciò per la sola miniatura, mentre si sa che per quest'arte pittorica nei tempi antichi sono sempre

(1) C. S. Audemar.

(2) Sia detto qui incidentemente che alcuni, quali il Müntz, reputano essere l'opera del Cennini non del 1437, ma bensì del secolo XIV.

state poco numerose le materie coloranti adoperate. Certo, anche nel medio evo erano conosciute molte materie coloranti, che poi servirono per la tintura, ma non erano tutte usate nella miniatura.

I colori che trovansi nei codici più antichi del medio evo per l'ornamentazione e la miniatura, sono, eccetto l'oro, di qualità inferiore, poco resistenti. In un codice, ad esempio, del *Rhabanus Maurus* (*De Laudibus Sanctae Crucis*), che sembra del secolo X, i colori usati sono: il giallo, il ranciato, il rosso, il verde, l'azzurro, il bruno ocra, ecc.; ma tutti di qualità scadente. Il verde pare niente altro che *Terra di Verona*, il rosso è *minio* Pb^3O^4, il giallastro, il bruno, il rossastro sono semplicemente formati da ocre.

Il nostro anonimo, sino dal principio dell'Introduzione relativamente all'arte della miniatura de' libri, scrive:

" e benchè ciò sia stato anteriormente divulgato dagli scritti di molti . . . . . ".

Ammettiamo che il nostro anonimo abbia scritto dal 1300 al 1350, oppure dal 1350 al 1400; chi erano questi *molti* che avevano scritto e *divulgato* sull'arte della miniatura? Erano invece ben pochi prima del Cennini, dell'Alcherius (1398), del Le Begue (1431), coloro che scrissero su quest'argomento.

Questa affermazione del nostro anonimo invece, si capisce benissimo, se si riferisce a dopo il 1500.

Nella rubrica V: *De rubeo colore artificiali*, il nostro anonimo distingue molto bene il vero cinabro dal minio: " *Rubeus color artificialis fit ex sulfure, argento vivo, et vocatur cinnabaris: et alio modo fit, vid. ex plumbo, et vocatur minium sive stupium. Et quia etiam de istis coloribus satis ubique reperiuntur, ideo modum conficiendi non posui* ".

Distinzione così netta non è fatta nemmeno dal Cennini, che tante volte parla del cinabro e del minio. Al tempo del Cennini si usava indifferentemente il nome di *cinabro* e di *minio*, pur essendo sostanze diverse. Il nostro anonimo dice che di questi colori trovasi detto abbastanza dovunque e che quindi non descrive i modi di prepararli. Il Cennini invece si limita a dire che questi colori si fanno *per archimia*.

Ma ciò che più importa notare si è che il nostro anonimo discorre di sostanze, le quali, prima del cinquecento non si usavano nella pittura o non erano conosciute nel commercio europeo.

Ad esempio, nella rubrica VI *De Glauco*, scrive: *Glaucus color artificialis fit multipliciter. Primo, vid. ut superius dictum est, fit ex radice curcumi, sive ex herba rocchia, etc., etc.* Egli mette dunque in prima linea il color giallo della curcuma. E ricorda la curcuma in altre rubriche (XXVI, ecc.). Mentre si sa che anche in tempi più moderni la curcuma fu poco usata nella pittura. Ed ha poco pregio anche nella tintura, perchè il colore è poco resistente (Berthollet).

La *curcuma* o *zafferano delle Indie*, o *Souchet del Malabar*, o *zenzero giallo*, detta anche *Terra merita* e dagli inglesi *Turmerie*, è la radice della *Curcuma longa* e *C. rotonda* delle *Zingiberacee* che cresce spontanea nelle Indie, nel Madagascar, nella Cina, ecc., e si coltiva a Giava, nelle Antille, ecc.

La parola *curcuma* deriva dal persiano *kurkum*, nome dato allo zafferano.

Pare che la curcuma sotto il nome di Κύπειρος (Cyperus), una specie di zenzero, sia già ricordata da Dioscoride (Hanbury).

Sotto il nome di *Crocus indicus* è descritta da Garcia d'Orta nel 1563 e da Fragoso nel 1572. Già nel 1450 si vendeva in Germania insieme allo zenzero ed alla zedoaria, come condimento. Questa radice è ricca di una materia colorante gialla detta *curcumina* $C^{21}H^{20}O^{6}$.

Il Pomet, che scrisse il suo classico libro sull'*Hist. gén. des drogues simples* nel 1692, dice: " La *Terra Merita*, che alcuni chiamano *Curcuma* ed altri zafferano o *Souchet* delle Indie o del Malabar o di Babilonia, è una radice giallastra, ecc., ecc. ". Si vede che il nome di Curcuma non era comune ancora nel 1700 circa.

Il Pomet ed altri autori affermano che questa radice era usata dai tintori, dai profumieri, come condimento, ecc., ma non fanno cenno dell'uso suo nella pittura a quel tempo. S'usava, è vero, per colorire le carte da tappezzeria; ma le carte dipinte per tappezzeria sono originarie della Cina e del Giappone e non furono introdotte in Europa dagli Olandesi, che verso il mezzo del secolo XVI, e la fabbricazione in Europa non cominciò che verso la metà del secolo XVII.

La curcuma o turmerie non è ricordata nei varî manoscritti dei secoli XII a XVII, raccolti e pubblicati da Mrs. Merrifield (opera citata).

Nella *Tabula de vocabulis sinonimis et equivocis colorum*, ecc. di Jehan Le Begue (1431), non è ricordata la *curcuma* o *terra merita*, come non sono nominati il *tornasole*, la *gomma adragante*, nè altre sostanze accennate dal nostro anonimo.

Nel *Ricettario fiorentino* del 1597 sono descritte la canfora, la gomma adragante, il bolo armeno, la gomma lacca dell'India, la curcuma degli Arabi che veniva dall'India.

Anche nel *Manoscritto Padovano* del XVII (" Ricette per far ogni sorte di colori "), nel quale si dà un'elenco *di colori per miniare*, non è nominata la curcuma.

Tutto ciò costituisce, a mio avviso, un argomento che, con altri, può mettere in dubbio la grande antichità del *De arte illuluminandi*.

Il nostro anonimo nella rubrica IX tratta dell'*azzurro o color celeste naturale ed artificiale* e ricorda l'*indaco* come una materia colorante comune: e scrive: " *aliud vero fit artificialiter et grossum*, idest *indico optimo et cerusa* ". Parrebbe anche che vi fossero varie qualità di indaco, se richiede che sia *optimo*.

L'indaco, è vero, era usato dagli antichi come materia colorante; ne parlano Plinio e Vitruvio. Dioscoride lo denominava ἰνδικὸν e Plinio e Vitruvio *indicum*. Ne parla pure Avicenna. Era usato in tintoria ai tempi di Federico II, e se ne fa cenno in un diploma di questo imperatore, nel 1250. In molti autori si trova accennato l'uso dell'indaco nel medio evo. Come osserva il Lecoy, errano coloro che affermano essere stato portato l'indaco dall'India in Europa verso la metà del secolo XVI. Resta però il fatto che l'uso dell'indaco nella tintoria, più che nella pittura, si è diffuso in Europa nel secolo XVI, quando fu importato per via marittima dalle Indie orientali.

Marco Polo è stato il primo a far conoscere la estrazione dell'indaco; fu importato in Italia dalle Repubbliche commercianti, e si diffuse in Europa specialmente per cura delle compagnie indo-olandesi.

Pomet fa cenno, come ai suoi tempi (secolo XVII) si usasse l'indaco anche nella pittura, misto col bianco per dare il colore azzurro, e misto al giallo per dare il verde. Proprio come afferma il nostro anonimo che fa l'azzurro coll'indaco e la cerussa, ed il verde coll'indaco buono e l'orpimento!

L'indaco è ricordato nelle memorie manoscritte dei secoli

XII a XV. Il Cennini lo ricorda più volte (cap. XIX, LXI e LXXV); si adoperava per colorire in fresco, il che non poteva farsi coll'azzurro della Magna nè coll'oltremare. Non dice che fosse usato nella miniatura.

Secondo il Petrini " si adoperò misto al bianco di calce nei freschi; al bianco di piombo nelle tempere, nel secolo XIV e nel XV; se ne sono riconosciuti i caratteri nel turchino dei panneggiamenti conservatissimo, di alcuni avanzi degli antichi a freschi di Alesso e Buonaccorso pittori condotti nel 1345, a dipingere la Cappella di S. Jacopo di Pistoja „ (*Antologia*, 1822, vol. VI, pag. 537). Anche il Petrini non accenna che l'indaco fosse usato in miniatura nei secoli XIV e XV.

Io non ho ancora potuto vedere il *Plictho* di Giovanni Ventura Rosetti, pubblicato a Venezia nel 1548, ma a quanto ne riferisce il Berthollet nei suoi *Éléments de l'art de la Teinture*, vol. I, pag. 22, Paris, 1804, nè la *coccinìglia*, nè l'*indaco* sono ricordati in quella, ora rarissima, opera. Il Berthollet dice, che nel 1548, probabilmente queste due materie coloranti non erano ancora in uso in Italia. È vero che secondo Plinio il cosidetto *indicum* si usava nella pittura, ma certo il suo uso nei secoli XIII-XIV non era molto diffuso. Si noti poi che l'*indicum* non sempre voleva dire indaco, ma bensì l'*inchiostro di china (indicus nigrum)*.

Tutto questo poco che ho detto dell'*indaco* mi sembra una prova di più che questo libro *De arte illuminandi* appartiene ad un tempo molto posteriore a quello in cui viveva il Cennini. Ciò che scrive il Pomet dell'indaco alla fine del secolo XVII è pressochè identico a ciò che trovasi nel *De arte illuminandi*.

Non priva affatto di importanza, è forse anche una osservazione che si può fare intorno al *tornasole*. Il tornasole è spesso ricordato dal nostro autore e specialmente nella rubrica IX e così pure nella Introduzione ove scrive:

" *Azurium etiam artificiale fit ex herba, que dicitur torna ad solem, et ex eadem herba pro tempore fit violaceus color* „. Nella rubrica IX descrive poi con molti particolari la preparazione del colore dal succo della detta erba.

A pag. 6 il Salazaro fa l'annotazione seguente a proposito della parola tornasole che trovasi nel testo:

" Lo stesso che girasole, si dice anche una tintura, o in

pasta o incorporata in alcune pezzette di seta, che serve a tingere varî liquori per coprire l'acido, che in loro si trova. Quella che viene da Costantinopoli, è fatta di cocciniglia e di alcuni acidi: quella che viene di Olanda o di Lione, è fatta dei frutti della pianta detta anche essa tornasole o girasole „.

Ora, tutto questo, o non dice nulla in fondo, o quel poco che dice è erroneo, perchè il tornasole nulla ha a che fare colla cocciniglia.

Nel senso di colorante il tornasole ha avuto ed ha semplicemente due significati. In nessun caso ha il significato di *girasole*, nome comunemente dato all'*Helianthus annuus*, dai cui semi si ha un olio.

Il nostro autore dice *herba, que vocatur torna-ad-solem*; ma con questo nome non voleva indicare il comune *girasole* che non è un'erba, è invece una pianta con fusto che può arrivare alla altezza di 2 metri.

Come coloranti si avevano e si hanno due tornasoli; uno detto in *pasta* e l'altro in *drapeaux*.

Il primo, cioè il tornasole che è adoperato come reattivo dai chimici, è detto anche *laccamuffa*, è preparato con alcuni licheni e specialmente la *rocella tinctoria* e la *lecanora tartarea* (*Parmellia roccella* e *Tartarea Acharius*), che si trattano pressochè nello stesso modo antico come si preparava l'oricello; con calce, potassa, urina, ecc. Il tornasole o laccamuffa è una bella materia colorante azzurro-violaceo che con una traccia di acido debole passa al violaceo e poi al rosso.

Certamente il nostro autore non intende parlare di questo tornasole, perchè, come descrive nella rubrica IX, prepara il suo tornasole coi frutti dell'erba che si raccoglie dalla metà di luglio alla metà di settembre.

È fuori di ogni dubbio che il nostro anonimo chiami tornasole ciò che in Francia si chiamava *Tournesol en drapeaux* o *di Provenza* e detto anche *folium* e si preparava col succo verdastro della *maurelle*, una euforbiacea detta *Croton tinctorium* o *Crozophora tinctoria*. In questo caso il tornasole è preparato dai frutti. Il Pomet (*Hist. gén. des drog.*, I, p. 176) descrive questo tornasole ed anche quello detto *orseil d' Hollande* come preparati dai frutti dell' *Heliotropium Tricoccum*, mediante la *perelle*, la calce e l'urina. Un modo analogo col quale è descritto dal

nostro autore. Ciò che si diceva *perelle* o *perelle brodée*, era il *lichen saxatilis* L., o *lichen tinctorius* (Buc'hoz, *Traité des plantes qui servent à la teinture et à la peinture*, p. 118, Paris 1785).

Questo tornasole si distingue dal tornasole dei chimici o laccamuffa secondo Joly (1847) perchè quando è arrossato dagli acidi non ritorna più azzurro cogli alcali (in Girardin, *Leçons de chim. élém. appl. aux arts*, IV, p. 339).

Comunque sia, la descrizione che ne dà il nostro anonimo non mi sembra molto antica; nulla ha a che fare colle brevi descrizioni che ne danno Teofilo, S. Audemar ed altri autori veramente antichi. Il nostro autore chiama la pianta *torna-ad-solem*, mentre negli scrittori antichi è detta *folium*.

Il nome di *tornasole* si trova appena incidentalmente ricordato anche dal Le Begue (in Merrifield, I, p. 87), ma ivi si fa notare che: *quod ubi dicitur tornesol vult dicere Bresil*. L'*oricello* si preparava da lungo tempo in modo analogo al tornasole da diversi licheni, fra i quali il *lichen roccella* o *rocella tinctoria*, la *variolata dealbata*, ecc.

È vero d'altra parte che l'oricello, era usato da lungo tempo in Oriente per la tintura, che se ne perdette nel medio evo il modo di preparazione e che si deve a un italiano, al fiorentino Federigo, la scoperta di ottenere questo colore verso il principio del secolo XIV, ma è pur vero che allora non si conosceva il cosidetto tornasole, ch'ebbe pur il nome di *Oricello d'Olanda*.

Non si capisce poi come il Salazaro possa aver confuso il tornasole, di qualunque origine sia, o sia pur anco l'oricello, con la *cocciniglia*, la quale certamente non fu conosciuta in Europa prima del 1500. Il Salazaro stesso a pag. 6 in una nota latina scrive: *(a) croton tinctorium, quod etiam a recentioribus botanicis dicitur crozophora tinctoria*; che certamente non è cocciniglia ma tornasole. La cocciniglia e la sua lacca sono ricordate nei ricettarî per colori del secolo XVII (MSS. di Padova: *Ricette per far ogni sorta di colori*). Come pure il legno di Campeggio (Campeachy Wood). Ma mai si trova in ricettarî o altri libri prima del 1500.

Nella rubrica XI il Salazaro in nota ripete più chiaramente che *grana de' tintori* vuol dire: *corpo di un insetto che dà il color rosso vermiglio; lo stesso che Cocco o Cocciniglia*. Il che è

inesatto, perchè in tutti i testi antichi la *grana de' tintori*, o semplicemente *grana*, voleva significare il *Kermes animale* (*Coccus ilicis* L.), che si chiamava anche *grana di scarlatto*, e proveniva dall'Oriente ed anche dalla Spagna e dalla Provenza, mentre la vera cocciniglia o *cochenille mestique* proveniva e proviene dall'America Centrale e Meridionale, come meglio sarà detto nelle annotazioni alla rubrica XI.

Se il nostro anonimo col nome di *grana tinctorum* avesse voluto indicare la cocciniglia, come crede il signor Salazaro, sarebbe fuori di ogni dubbio che questo manoscritto creduto del 300 o 400, sarebbe certamente posteriore al 500.

Ma vi è un' altra sostanza usata dal nostro autore e che fa dubitare della sua antichità. Egli nomina alcune volte la *gomma adragante*. Questa gomma diversa dalla gomma nostrale e dalla gomma arabica, non trovasi accennata da autori antichi che trattano dei colori, nè dal Cennini, nè nei manoscritti dal secolo XII al XIV pubblicati dalla Merrifield. Il Cennini invece descrive il modo di ottenere e usare la chiara d'ovo.

Il nostro autore ricorda la *canfora* ed il *garofano per conservare dalla putrefazione* l'albume d'uovo. La canfora è ricordata nel manoscritto bolognese (secolo XV), ma non è la vera canfora, bensì un misto artificiale. L'uso di queste sostanze e anche del *realgar*, che l'autore nomina in altra parte, come agenti contro la putrefazione, non parla in favore della troppa antichità di questo manoscritto.

Egualmente dicasi della pianta *ruta* (ora *ruta graveolens*), che non è accennata dal Cennini, nè da altri autori precedenti. Il succo di ruta e l'erba ruta sono appena accennati nel manoscritto di Le Begue (V. Merrifield, I, pag. 67 e 287) e nel manoscritto di Padova (secolo XVII).

Non privo di importanza forse per discutere l'antichità di questo manoscritto e per mettere in dubbio la competenza dei suoi commentatori, è, a mio modo di vedere, anche la storia riguardante un altro colorante: il *legno brasile*. Il *legno brasile* era conosciuto in Europa molto prima che si scoprisse quella parte dell'America che fu denominata *Brasile* dall'abbondanza del legno che fu poi detto *legno del Brasile*. Si noti solamente che il nostro autore scrive sempre *brasilium, ligni brasili*, e mai *bresile*, *brexilium*, *berzillium*, *verzinum*, *verxillium*, *brixilium* od

anche *pressilium*, come scrivono più spesso autori antichi quali l'Eraclius, l'Alcherius, il Le Begue, ecc. Ma di ciò discorrerò più a lungo nell'altro mio lavoro sui colori degli antichi. Ciò che qui voglio far notare si è che tanto il Salazaro quanto il Lecoy dimostrano di non sapere che il legno brasile si conosceva in Europa prima della scoperta dell'America e che era stato usato e ricordato da autori anteriori al Cennini e assai prima del *De arte illuminandi*, come si scorge dalle note apposte alla rubrica XI. Non solo, ma il Salazaro confonde il *legno di Campeggio* col *legno del Brasile*; il primo certamente non era conosciuto in Europa prima del 1510 circa.

Il nostro autore inoltre nomina nella rubrica XVIII l'*albumine ovorum*, che negli antichi autori si trova di raro, come nel *liber sacerdotum*, ma quasi sempre col nome di *clara*, o *clarum ovorum* (V. rubrica XII ecc.). Così pure l'uso della bambagia nel calamaio con l'inchiostro, di cui fa cenno nella rubrica XX, non deve essere tanto antico.

Anche le misure quali la pinta, il dramma, lo scrupolo, il simbolo dell'oncia ℥, ecc., mi fanno dubitare che non sia molto antico. Il nostro autore inoltre parla di acqua *putrefatta*, di acqua *dolce* comune, ecc.

Da tutto quanto ho esposto mi pare possa ritenersi molto probabile che questo trattato *De arte illuminandi* sia posteriore al 1500 o del tempo circa del manoscritto bolognese, e sia una di quelle compilazioni simili ai *Segreti*, ecc., che si scrissero principalmente nei secoli XVI e XVII.

L'anonimo che scrisse questo libro sembra fosse un artista di professione che ha raccolto le principali notizie sui colori specialmente usati in miniatura, un monaco, forse, che conosceva bene l'arte del miniare; il libro è ben fatto ed, a mio parere, è redatto più metodicamente dei precedenti analoghi; ha i caratteri di una redazione più moderna. Anche il latino usato mi sembra migliore di quello di autori certamente più antichi.

Tanto più penso di essere nel vero, riflettendo che il numero maggiore dei più grandi miniaturisti è dei secoli XV e XVI, quindi si capisce come si potesse sentire la necessità di un trattatello speciale sulla miniatura o *de arte illuminandi*; non prima, nel secolo XIV, nel qual tempo erano, relativamente, pochi i veri miniatori. Van Eyck, o Giovanni di Bruges stesso

(n. 1386, m. 1440) è posteriore o contemporaneo del Cennini. I ventinove grossi volumi costituenti i libri corali del duomo di Siena, ad esempio, furono miniati dal 1457 al 1482 circa; e G. e C. Milanesi nella loro operetta: *Storia della miniatura italiana* ci hanno date le principali notizie dei miniatori cui si deve questo insigne lavoro. Le miniature dei corali del Duomo di Firenze furono eseguite dal 1508 al 1530; gli stupendi corali della Cattedrale di Ferrara, ora conservati nel Museo del Palazzo Schifanoja, sono stati lavorati dal 1477 al 1535; l'Attavante miniò alcuni dei corali del Duomo di Firenze dal 1508 al 1511; ecc.

Un trattato come questo doveva venire dopo che l'arte della miniatura era molto progredita, non prima.

L'argomento principale, certo molto importante, addotto dal Salazaro e dal Lecoy per fissare il tempo in cui fu scritto questo libro, è la forma della scrittura del manoscritto; la scrittura detta gotica, o angolare o scolastica. Però, benchè io non possa nè debba entrare in simile questione, farò osservare solamente che questa forma di scrittura, specialmente per codici liturgici (e il nostro anonimo probabilmente era un monaco), rimase viva in Italia sino a tutto il secolo XVII.

Anche il non esservi molte abbreviazioni (Salazaro) non è un argomento sicuro per ritenere il manoscritto molto antico, ed invero il Piscicelli Taeggi scrive: " Il numero maggiore o minore delle abbreviazioni di un manoscritto, è ritenuto anche come un criterio per fissarne la data; ma, oltre ad essere un criterio intrinseco, induce anche non di rado in errore „ (1).

Ma su ciò io non voglio più oltre insistere. Metto poi in dubbio anche la grande competenza del nostro anonimo e dei suoi commentatori nell'uso dei coloranti. Il tornasole, la cocciniglia, i gigli azzurrini, la curcuma ed altri coloranti di cui indica la preparazione e l'uso, sono facilmente alterabili e non so se proprio si siano molto usati o si possano usare con vantaggio nella miniatura, per quanto, è vero, i lavori miniati siano difesi spesso dall'azione della luce. Anche Eraclio nomina ben pochi colori delle piante usati in miniatura.

Ad ogni modo, riconosco che, per quanto le considerazioni

(1) *Paleografia artistica di Montecassino*, 1883, pag. 9.

precedenti siano di qualche valore, gli argomenti da me addotti in favore della relativa modernità di questo libro, non sono tutti molto sicuri; io non ho ancora avuto modo di poter fare ricerche più approfondite. Colla più grande riserva dunque io ammetto quanto ho esposto; perchè, ripeto, argomenti direi sperimentali, prove veramente certe colle quali corroborare il mio asserto, io non ho. Mi pare però che sia solamente procedendo con metodo che si potrà riuscire alla verità.

II.

Manoscritto Bolognese o Segreti per colori, del Secolo XV.

A pag. 14 ho fatto notare quali e quante siano le benemerenze della signora Merrifield riguardo la storia della tecnica dell'arte nel medio evo.

Il bellissimo esempio dato dalla signora Merrifield dovrebbe essere seguito da molti dei nostri scrittori; ma purtroppo non rare volte manca la cultura necessaria. Chi vuole occuparsi di questi studî riguardanti la chimica tecnica o le arti industriali o tecniche o decorative, senza le adeguate cognizioni scientifiche, non può fare che opera monca, inutile ed anche dannosa.

Nel volume 2° della sua opera la signora Merrifield pubblicò un manoscritto bolognese del secolo XV, assai interessante per le arti tecniche in genere ed anche per la miniatura. Era mio intendimento di farne una edizione italiana con annotazioni, ma in questo frattempo venni a cognizione di un libro il cui titolo attirò la mia attenzione, e l'esame del quale mi fece abbandonare, per ora, quest'idea.

Nella *Scelta di Curiosità letterarie inedite o rare* dal secolo XII al XVII fondata e diretta da Fr. Zambrini, si trova: " *Il libro dei colori - Segreti del secolo XV*, pubblicato da O. Guerrini e C. Ricci, Bologna, Romagnoli, 1887, L. 10 „.

Il libro è stampato su carta finissima, e pubblicato in soli 202 esemplari, numerati. Il titolo e la supposta novità del trattato mi spinsero a leggerlo, direi, con avidità; ma quale non fu la mia sorpresa quando dopo le prime pagine mi avvidi che *Il libro dei colori, segreti del secolo XV*, non era altro che il *Bolognese Manuscript*, entitled *Segreti per colori, del secolo XV*,

pubblicato con prefazione e note, e tradotto in inglese col testo di fronte, sino dal 1849 dalla signora Merrifield! Non volevo quasi prestar fede ai miei occhi. Eppure è così. Identici, dalla prima all'ultima parola.

La sola lieve differenza sta nel titolo; non so perchè gli autori citati abbiano dato la denominazione *Il libro dei colori*, che credo non esista nel manoscritto. È questo un titolo generico che potrebbe essere applicato anche ad altre opere simili. La signora Merrifield ha dato il vero titolo *Bolognese Manuscript - Segreti per colori, del secolo XV*, per ricordare onorevolmente anche Bologna nella cui Biblioteca di S. Salvatore si trovava, ed ora nella Universitaria, il manoscritto, e per distinguerlo da altri segreti per colori. Non è poi esatto dire invece: *Segreti del secolo XV*.

A pag. XXIII della *Prefazione* (edizione 1887) è detto:

" Il Codice, rilegato in carta pecora, porta scritto sul dorso di mano del passato secolo, della stessa mano che numerò le carte: *Segreti per colori. M. S. del secolo XV*. Il codice è inedito. Solo Michelangelo Gualandi nelle sue " Memorie originali italiane risguardanti le Belle Arti ", serie III, pag. 110, ne stampò alcune righe del principio e della fine, ed una ricetta " a mollificare l'osso ", dove in cinque righe introdusse dieci mostruosi errori di lettura, evidente dimostrazione della nessuna pratica del Gualandi in cose paleografiche, etc. ".

È evidente dunque che gli autori credono essere il codice *inedito*; e che solamente il Gualandi ne abbia pubblicate alcune righe.

" Il codice che ha servito alla presente edizione appartiene alla R. Biblioteca della Università di Bologna e si trova tra i manoscritti col N° 2861 ".

Per essere giusti bisognava dire, come ha fatto la Merrifield a pag. 325, vol. II della sua opera, che il primo ad avvertire l'esistenza di questo manoscritto è stato il Gualandi (Mem. di Belle Arti) nel 1842, e non limitarsi a dipingere questo scrittore tanto male come paleografo. Fu il Gualandi, che fece conoscere il manoscritto alla signora Merrifield. Il Gualandi ha pubblicato una interessante serie di documenti originali e lettere di pittori, ed è con gratitudine ricordato dalla Merrifield, dal Labarte e da altri scrittori della storia dell'arte in Italia.

Nella stessa *Prefazione*, che non contiene proprio nulla di

nuovo e ci sembra molto superficiale, si citano i nomi di un gran numero di autori a caso, tant'è vero che alcuni di essi non si sono mai occupati dei colori degli antichi. A pagina XIX è detto: " abbiamo citati questi nomi non per ostentare una facile erudizione, ma soltanto per mettere in maggiore evidenza l'importanza del nostro libro, che riempie la grave lacuna che si trova fra il Cennini e i cinquecentisti. Non ci siamo pertanto rimproverate le dimenticanze e l'inesattezze che il cultore di simili studî può riscontrare fra queste succinte notizie ".

Eppure in mezzo a tanti nomi si tralasciano, non dico quelli di Lomazzo, Borghini, Baldinucci, Armenini, ecc., ma quelli di Petrini, Branchi, Fabroni di Arezzo e di altri italiani che hanno scritto in modo particolare de' colori degli antichi e che sono stati coloro ai quali precisamente si deve la conoscenza, insieme a Chaptal e a Davy, della vera natura chimica dei colori usati dagli antichi. Se poi si trattava di riempire una sì *grave lacuna*, bisognava esaminare bene la questione e vedere se questa grave lacuna veramente esisteva.

L'erudizione seria, veramente scientifica e metodica, è tutt'altro che facile; la così detta facile erudizione e la critica superficiale, conducono appunto ad errori come questo, di pubblicare nel 1887 come nuovo, come inedito, e senza nessuna annotazione, ciò che era stato pubblicato e tradotto, con note, sino dal 1849!

La lacuna era stata già bene riempita dalla signora Merrifield, non solamente colla pubblicazione del *Manoscritto Bolognese* del secolo XV, ma colla pubblicazione del Le Begue, contemporaneo, o di poco posteriore, al Cennini, e che essendo francese poteva darci, come ci ha dato, notizie sui colori usati in quel tempo in Francia ed altri paesi.

Purtroppo ho dovuto persuadermi che molti scrittori moderni sui colori e sulla pittura, specialmente italiani, non conoscono l'opera della signora Merrifield; essa è invece ricordata da coloro che seriamente si occupano della storia critica dell'arte o della chimica tecnica nel medio evo; questi scrittori usano correntemente le abbreviazioni *Merr.* per Merrifield, *Bol.* per *Bolognese manuscript*, ecc.

Anche Eug. Müntz (*L'arte italiana nel quattrocento*) tiene nella dovuta considerazione l'opera della Merrifield.

Questa autrice è lodatissima da tutti coloro che hanno avuto bisogno di consultare ed esaminare le opere sue. Alberto Ilg ha pubblicato nella importante raccolta: *Quellenschriften für Kunstgeschichte und Kunsttechnik des Mittelalters u. d. Renaissance* di Eiselberger e Edelberg, Vienna, 1871-1888, i tre libri di Eraclius: *De coloribus et artibus romanorum* secondo il testo e le note pubblicate dalla signora Merrifield, ed il Giry nella sua *Notice sur un traité du moyen âge intitulé de coloribus et artibus romanorum* (" Bibliothèque de l'École des Hautes Études ") loda, e molto, l'opera della Merrifield; ne loda l'esattezza ed il vero senso critico. Egli, ad esempio, rispetto all'Eraclio, ritiene migliore l'edizione data dalla Merrifield che non quella più recente dell'Ilg.

Evidentemente tanto il Salazaro quanto il Lecoy, come gli autori del *Il libro dei colori* pubblicato nel 1887, non conoscevano non solamente l'opera della Merrifield ma nemmeno la raccolta *Quellenschriften*, ecc.

Libri come questi non dovrebbero sfuggire all'attenzione degli studiosi. Si noti poi che nel caso speciale, l'opera della Merrifield dovrebbe trovarsi in qualche Biblioteca della città di Bologna; la signora Merrifield era membro onorario dell'Accademia di Belle Arti di quella città.

Anche nel *Manoscritto Bolognese* è già descritto l'uso dei *gigli azzurrini*, dell'*erba morella*, dell'*alume zucharino*, della *gomma dragante*, del *verzino sive brasilium*, ecc., come nel *De arte illuminandi*.

Il *Manoscritto Bolognese* pubblicato dalla Merrifield, è importante non solamente perchè tratta dei colori usati nella miniatura, ma anche di quelli usati negli altri generi di pittura, e per argomenti diversi che riguardano le arti tecniche, come gli smalti, i mosaici, le pietre artificiali, i vetri colorati, la tintura delle pelli, delle ossa, la fabbricazione delle colle, vernici, gl'inchiostri, diversi prodotti chimici, quale il borace, ecc.

Volendone fare una edizione nuova, e italiana, bisognava farla in modo che eguagliasse, o meglio, superasse, l'edizione della Merrifield per un più esteso commentario. Solo in questo caso la storia della tecnica dell'arte ne avrebbe avuto vantaggio.

Torino, R. Università, Aprile 1905.

Nuovo metodo per determinare il rapporto diastimometrico in un cannocchiale distanziometro.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Quando il cannocchiale semplice astronomico è destinato a misurare le distanze, il reticolo è quasi sempre composto, oltre che della semplice croce di fili orizzontale e verticale, di altri due fili orizzontali equidistanti da quello di mezzo (quello che col filo verticale determina un punto dell'asse ottico). Situando codesto cannocchiale in posizione orizzontale e leggendo la parte della stadia, compresa tra i fili estremi del reticolo, la distanza orizzontale D, compresa tra il fuoco anteriore della lente obbiettiva del cannocchiale ed il punto dove è stata situata verticalmente la stadia, è data dalla formola:

$$D = K . S, \tag{1}$$

nella quale S è la parte di stadia compresa tra i fili estremi del reticolo e K è una costante che chiamasi *rapporto diastimometrico.*

Se s'immagina un triangolo isoscele avente per base la distanza s tra i fili estremi del reticolo e per altezza la distanza focale φ della lente obbiettiva del cannocchiale, si ha:

$$\frac{1}{K} = \frac{s}{\varphi} = \operatorname{tg} . \omega \tag{2}$$

dove ω è l'angolo al vertice del triangolo ora detto. Tale angolo costante è conosciuto col nome di *angolo parallattico, angolo dia-*

stimometrico o anche di *distanza angolare tra i fili estremi del reticolo.*

Il metodo che proponiamo per determinare la costante K è il seguente:

Su di un terreno piano si misurino colla massima cura due distanze D_1 e $\frac{D_1}{n}$ da un punto arbitrario H; quindi si ponga l'istrumento in vicinanza di H in modo che il centro dell'obbiettivo cada sul punto a terra H. Posta una stadia prima alla distanza $\frac{D_1}{n}$ e poi alla distanza D_1 si facciano diverse letture (l'asse ottico del cannocchiale essendo presso a poco orizzontale) in corrispondenza dei fili estremi del reticolo (queste diverse letture si faranno dando al cannocchiale dei piccoli spostamenti in altezza) e si indichi con S_2 la media dei valori delle differenze di lettura quando la stadia si trova alla distanza $\frac{D_1}{n}$ e con S_1 la media dei valori delle differenze di lettura quando la stadia si trova alla distanza D_1, il valore di $\frac{1}{K}$ sarà dato da:

$$\frac{1}{K} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{S_1 - S_2}{D_1}. \tag{3}$$

Infatti sia (fig. 1) ab il reticolo quando si trova al secondo

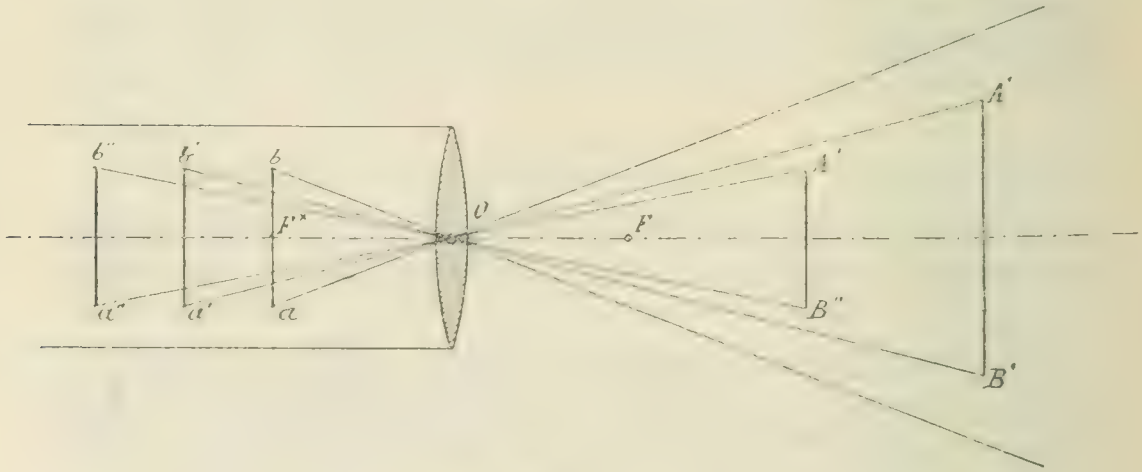


Fig. 1.

fuoco della lente obbiettiva ed $a'b'$, $a''b''$ le posizioni che esso prende, quando la stadia si trova alla distanza D_1 ed alla distanza $\frac{D_1}{n}$.

Indicando con p_1 e p_2 le distanze del reticolo dalla lente O nelle posizioni $a'b'$, $a''b''$, sarà:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{s}{p_1} = \dfrac{S_1}{D_1} \\[2ex] \dfrac{s}{p_2} = \dfrac{S_2}{\dfrac{D_1}{n}} = n\,\dfrac{S_2}{D_1} \end{cases}$$

E poichè:

$$\frac{s}{D_1} + \frac{s}{p_1} = \frac{s}{\varphi}$$

$$\frac{ns}{D_1} + \frac{s}{p_2} = \frac{s}{\varphi},$$

si avrà, sottraendo:

$$(n-1)\frac{s}{D_1} + \frac{s}{p_2} - \frac{s}{p_1} = 0.$$

Osservando che è:

$$\frac{s}{D_1} = \frac{1}{K} - \frac{s}{p_1}$$

se ne dedurrà:

$$\frac{1}{K} - \frac{s}{p_1} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{s}{p_1} - \frac{s}{p_2}\right]$$

donde, tenendo conto delle (4), si deduce la (3).

Nella pratica è molto conveniente assumere per n il valore 8, nel qual caso la (3) diventa:

$$(5) \qquad \frac{1}{K} = \frac{8}{7} \cdot \frac{S_1 - S_2}{D_1}.$$

Esempio 1°.

Il reticolo del cannocchiale di un tacheometro della casa Simms ha 5 fili orizzontali ed uno verticale. Allo scopo di determinare i *rapporti diastimometrici* convenienti alle coppie dei fili estremi (1° e 5°), (2° e 4°) sono state fatte le seguenti osservazioni su di una stadia posta prima alla distanza $D_1 = 50^{\mathrm{m}}$, e poi alla distanza di $6^{\mathrm{m}},25 = \frac{D_1}{8}$.

Alla distanza di 50^m.

Reticolo	Letture sulla stadia					
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
1° filo	1,008	1,024	1,049	0,948	0,912	0,940
2° „	1,258	1,274	1,300	1,198	1,162	1,190
4° „	1,760	1 775	1,800	1,699	1,664	1,691
5° „	2,009	2,028	2,050	1,950	1,914	1,942

Alla distanza di 6^m,25.

Reticolo	Letture sulla stadia				
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
1° filo	1,360	1,370	1,372	1,380	1,390
2° „	1,392	1,401	1,404	1,411	1,421
4° „	1,457	1,466	1,468	1,476	1,486
5° „	1,489	1,498	1,500	1,509	1,518

Calcolando i valori di S_1 ed S_2 per la coppia dei fili estremi si trova:

$$S_1 = 1{,}0020$$

$$S_2 = 0{,}1284$$

e quindi per la detta coppia si avrà:

$$K = \frac{7}{8} \cdot \frac{50}{0{,}8736} = 50{,}08.$$

Per la coppia corrispondente ai due fili 2° e 4° si ottiene:

$$S_1 = 0{,}50117$$

$$S_2 = 0{,}06480$$

e quindi per tale coppia sarà:

$$K = \frac{7}{8} \cdot \frac{50}{0{,}43637} = 100{,}26.$$

I rapporti dati dal costruttore sono 50 e 100.

Se i fili del reticolo fossero verticali, sarà sufficiente mettere la stadia in posizione orizzontale tanto alla distanza D_1 quanto alla distanza $\frac{D_1}{n}$.

Esempio 2°.

Per far vedere la comodità e l'esattezza di questo metodo lo abbiamo adoperato a misurare la distanza dei fili del reticolo di un cannocchiale destinato ad osservazioni astronomiche, appartenente ad un buon teodolite a microscopi micrometrici della casa Simms di Londra.

Il reticolo ha cinque fili verticali ed uno orizzontale; le osservazioni sono state fatte soltanto ai fili I, III, V. Ecco i risultati ottenuti:

Alla distanza di 50^m.

I numeri indicano millimetri.

Filo I	376	340	291	450	500	550
„ III	528	491	442	601	651	701
„ V	680	643	595	753	803	852

Alla distanza di $6^m,25$.

I numeri indicano decimi di millimetro.

Filo I	500	464	421	528	564
„ III	680	645	602	709	746
„ V	860	827	783	890	928

Calcolando i valori di S_1 ed S_2 separatamente per le distanze I-III; III-V; I-V si è ottenuto:

	per la coppia I-III	per la coppia III-V	per la coppia I-V
S_1	0,151167	0,15200	0,303167
S_2	0,018100	0,01812	0,036220
$S_1 - S_2 =$	0,133067 ;	0,13388 ;	0,266947

e quindi:

$$\frac{1}{K} = 0{,}00304153; \qquad 0{,}0030601; \qquad 0{,}00610160.$$

L'angolo corrispondente ω è:

In arco $\omega'' = 627'',361$ $\quad 631'',191$

In tempo $\omega^s = 41^s,82$ $\quad 42^s,08.$

I valori delle suddette distanze dei fili determinati con passaggi di stelle sono i seguenti:

I-III $= 41^s,96$ $\quad$ II-V $= 42^s,11.$

È bene non confondere questo metodo con quello che comunemente si adopera in Geometria Pratica per la determinazione del rapporto diastimometrico. Quest'ultimo metodo si può indicare in poche parole:

Su di un terreno piano si misurino colla massima cura diverse distanze $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ da un punto fisso A. Posto l'istrumento in modo che (fig. 2) il fuoco anteriore della lente obbiettiva stia sulla verticale del punto A, si mandi la stadia

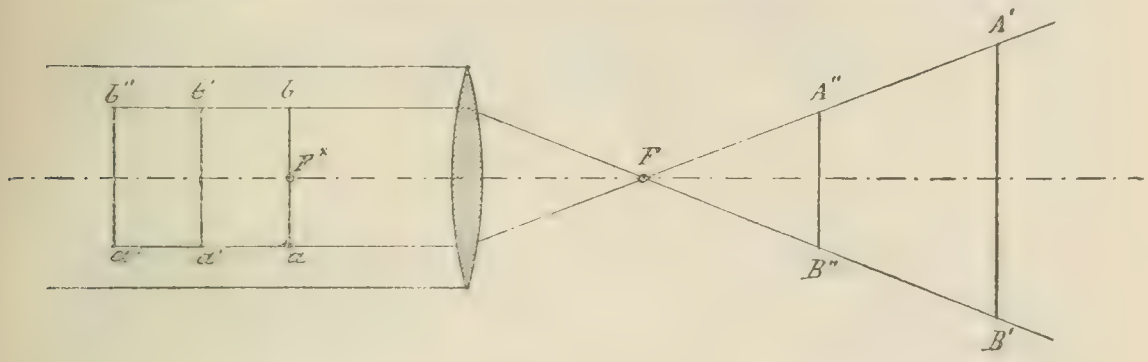


Fig. 2.

al punto estremo di ciascuna distanza e si legga ciascuna volta (il cannocchiale essendo presso a poco orizzontale) la parte di stadia compresa tra i fili estremi del reticolo. Siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$ codeste parti di stadia; si avrà:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{n}\left[\frac{S_1}{D_1} + \frac{S_2}{D_2} + \ldots + \frac{S_n}{D_n}\right]. \tag{6}$$

La fig. 2 e la formola (6) dimostrano ad evidenza la differenza tra questo ed il nostro metodo, il quale richiede la misura di due sole distanze. Ciò si può eseguire più facilmente nella pratica.

Torino, maggio 1905.

Il dinamometamorfismo e la minerogenesi.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA
Professore di Mineralogia nell'Univ. di Torino.

(Con una Tavola).

Il dinamometamorfismo ha ancora molti autorevoli fautori, i quali, sebbene cerchino di sostenerlo interpretando in vario modo il significato della parola ed attribuendo alla pressione speciali azioni, ammettono tuttavia sempre che la pressione sia anche agente di processi chimici.

Per es.: il Grubenmann in un suo recente scritto sugli schisti cristallini (1) ritiene che il metamorfismo delle rocce avvenga in modo diverso in tre zone distinte dalla loro rispettiva profondità: nella zona superiore l'azione della pressione sarebbe essenzialmente meccanica, nelle altre due zone, la media e l'inferiore, l'azione della pressione sarebbe precipuamente chimica.

E lo stesso autore seguendo le idee di Lepsius, Heim e di Becke porta, in appoggio all'ipotesi che la pressione sia causa di reazioni chimiche, una legge che si riferisce ai volumi molecolari dei minerali ed illustra con esempi il suo concetto.

La minerogenesi è a mio avviso la base del metamorfismo chimico delle rocce, ossia le teorie che si propongono per spiegare tale metamorfismo dovrebbero dare ragione anche della formazione dei minerali.

Ed è perciò che io mi sono indotto ad esporre alcune osservazioni sul dinamometamorfismo considerando la formazione di un minerale che dal Grubenmann è data come esempio dell'azione della pressione e che invece io ritengo sia uno dei migliori esempi che la natura offre contro il dinamometamorfismo.

Un fatto notissimo che si osserva in natura nelle rocce cristallino-schistose, è la frequentissima associazione del quarzo

(1) *Die Kristallinen Schiefer*, I, Berlin, 1904, pag. 60.

colla calcite ed in pari tempo la scarsissima presenza della wollastonite relativamente alla diffusa associazione degli anzidetti minerali, i quali rappresentando anidride silicica e carbonato calcico parrebbe dovessero dar luogo al silicato calcico.

Ora il Grubenmann cita precisamente, quale frequente esempio d'applicazione della legge sui volumi, la formazione della wollastonite scrivendo l'equazione (1):

$$\underbrace{\overset{\text{Calcite}}{CaCO^3} + \overset{\text{Quarzo}}{SiO^2}}_{\substack{36,76 \quad 22,64 \\ 59,40}} = \overset{\text{Wollastonite}}{CaSiO^3} + CO^2 \nearrow$$

ossia sotto l'alta pressione, la calcite ed il quarzo danno luogo con eliminazione di CO^2 alla wollastonite, perchè il volume molecolare di questo minerale 40,70 è minore della somma dei volumi molecolari dei due primi che è di 59,40.

Non discuto la supposizione di una pressione, la quale, dovendo essere uniforme in tutti i sensi per agire sul volume molecolare, lascerebbe tuttavia sfuggire il gas CO^2; nè discuto la questione se il gas, dovendo rimanere, non produrrebbe colla sua concentrazione, una tensione che arresterebbe la reazione. Ma credo opportuno di porre in rilievo soltanto le esperienze di laboratorio e le osservazioni di ciò che avviene in natura, per esaminare se la reazione chimica sopraindicata possa, per causa della semplice pressione, effettuarsi con quella facilità colla quale si può scriverla.

Io ritengo che non possa esistere una chimica speciale per il metamorfismo delle rocce, e quando per spiegarlo si ricorre a reazioni chimiche, non si debba porre in seconda linea od anche trascurare le rispettive affinità chimiche per le quali gli elementi o i gruppi atomici reagiscono fra di loro e non tenere conto delle condizioni necessarie perchè la reazione avvenga.

Sino ad ora le esperienze eseguite dai chimici e da coloro che si occuparono della formazione artificiale della wollastonite dimostrano che l'anidride silicica ed il carbonato calcico reagiscono fra di loro soltanto coll'alta temperatura della fusione.

---

(1) Loc. cit., pag. 51.

La reazione per via umida sarà stata anche sperimentata; ma non conosco pubblicazioni di lavori a tale riguardo.

Ad ogni modo io feci in proposito alcune esperienze.

Ho posto un frammento di sfaldatura di spato d'Islanda in acqua contenente silice gelatinosa, e in una prima esperienza mantenni per 7 giorni la temperatura di 100°, ed in una seconda per eguale tempo la temperatura di 200°; ma dalla prima esperienza non ebbi traccia di reazione chimica e nella seconda la superficie del frammento apparve coperta da leggerissime velature indeterminabili al microscopio con forte ingrandimento.

Per ciò che spetta all'azione dell'alta pressione, fra le varie esperienze, eseguite sulla mutua reazione fra i minerali e sempre con risultato negativo, ne feci anche due che si riferiscono appunto all'azione fra l'acido silicico ed il carbonato calcico.

In una prima esperienza posi in un recipiente cilindrico della silice gelatinosa e la lasciai finchè per sineresi si fosse formato un cilindretto di silice non troppo dura; quindi tale cilindretto fu posto in un recipiente d'acciaio in mezzo a carbonato calcico ottenuto per precipitazione ed essiccato, ed il tutto sottoposto alla pressione coll'apparecchio da me descritto in altro lavoro (1).

La pressione continua fu di 6000 atmosfere e l'esperienza durò dal 12 luglio 1902 al 2 luglio 1903, ossia circa un anno. Per risultato ottenni che il carbonato calcico divenne compattissimo presentando la durezza 3 e dimostrava una traccia di schistosità normale alla direzione della pressione, talchè con un forte colpo dato sopra un coltello col taglio normale all'altezza del cilindro potei spaccare questo in due. La figura 1 rappresenta coll'ingrandimento di due diametri e mezzo la superficie di rottura. La silice nel mezzo aveva assunto un aspetto vetroso; ma il limite fra la silice ed il carbonato calcico è netto come si vede dalla figura, ossia, non vi fu assolutamente traccia di reazione chimica.

Un'altra esperienza fu eseguita ponendo un frammento di spato in acqua contenente silice gelatinosa e mantenendo la pressione pure di 6000 atmosfere per quasi 9 mesi, dal 6 giugno 1904 al 2 marzo 1905. Il risultato fu che sulle superficie di sfal-

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXV, pag. 750.

datura del frammento di calcite vi erano tracce di corrosione visibili con un forte ingrandimento, le quali indicavano una traccia di solubilità forse dovuta più alla durata dell'esperienza che alla pressione; ma ciò che più importa è che non osservai traccia alcuna di formazione di wollastonite, ossia di una avvenuta reazione chimica, ed il fatto della traccia di solubilità dimostra pure che, sebbene il carbonato calcico e l'acido silicico si trovassero in soluzione, non vi era ancora la condizione necessaria, in questo caso la temperatura, per la mutua reazione.

Queste due esperienze dimostrano che la pressione statica non produce reazione fra la silice ed il carbonato calcico.

Ma ora dai fautori del dinamometamorfismo si ritiene come principale agente di reazioni chimiche la pressione dinamica, mentre la pressione statica avrebbe per compito di produrre effetti dipendenti dalla cosidetta *legge dei volumi*.

Infatti il Becke distingue la pressione eguale in tutti i sensi corrispondente a quella idrostatica e che egli chiama *Druck*, ossia quella per la quale può stare il nome italiano di pressione statica. E poi vi ha la pressione laterale che il Becke chiama *Pressung* e che sarebbe quella che si esplica nei movimenti tettonici, sollevamenti, ripiegamenti di strati, litoclasi, ecc., ossia una pressione unita a movimento e per la quale io tengo il nome di pressione dinamica.

A riguardo dell'azione delle due specie di pressione il Becke scrive (1): " La *Pressung* (pressione dinamica) è un fattore prin-
" cipale di metamorfosi, non soltanto perchè per la pressione
" le parti vengono polverizzate ed aumentate le superfici di
" contatto fra le parti solide e le soluzioni; ma anche perchè
" la pressione secondo il principio di Riecke, nelle rocce conso-
" lidate, produce in punti vicini soluzioni e cristallizzazioni per
" cui si sviluppano processi chimici e di cristallizzazione; i quali,
" nelle condizioni di *Druck* (pressione statica) e di temperatura,
" senza cioè la pressione dinamica, si effettuerebbero con infinita
" lentezza. In questo caso comprendiamo anche l'idea di Rosen-
" busch, che il lavoro meccanico si trasforma in lavoro chimico,

---

(1) *Ueber Mineralbestand und Struktur der Krystallinischen Schiefer.* " Separatabdruck. der K. Ak. Wiss. zu Wien ", 1903, p. 40.

" e vediamo nel principio di Riecke l'anello d'unione fra il la-
" voro meccanico e quello chimico „.

Le esperienze che riflettono l'azione chimica della pressione statica sono facili, ma sono più difficili quelle sulla pressione dinamica, quando si vogliano mantenere od almeno eseguire le esperienze in condizioni che si avvicinino a quelle naturali.

Perciò è evidente che acquistino grande valore le osservazioni sulle reazioni chimiche, fra minerali nelle condizioni naturali, sia di pressione statica che dinamica.

E precisamente per la mutua reazione fra la calcite ed il quarzo, così facile secondo il Grubenmann, io esaminai l'associazione dei due minerali trovata nelle rocce intersecate dalle gallerie del Fréjus e del Sempione.

La galleria del Fréjus attraversa una serie di rocce schistose, calceschisti filladici, quarziti, ecc., i di cui rappresentanti si trovano al museo geologico nella collezione preparata durante il traforo. Dal direttore di detto museo prof. Parona, che ringrazio, ebbi il permesso di esaminare alcuni esemplari ed io scelsi un esemplare di filladi contenenti straticelli di quarzo e di calcare e che era stato preso alla progressiva fra 6331 m. e 6365 m. dall'imbocco di Bardonecchia. A tale profondità orizzontale nella galleria corrisponde un'altezza di roccia sovrastante di 1600 m.

Alcuni frammenti tolti dagli straticelli bianchi intercalati nella fillade, trattati con acido cloridrico diluito, si sciolgono facilmente con effervescenza, lasciando per residuo null'altro che grumi o grani di quarzo, senza alcuna traccia di wollastonite. Inoltre, eseguite alcune sezioni, queste al microscopio dimostrano che il contatto fra il quarzo e la calcite è netto e senza traccia di mutua reazione chimica, come appare dalla fig. 2ª.

Nella galleria del Sempione, fra le progressive 7000 e 7100 m. dall'imbocco di Iselle, si è incontrato un calcare cristallino contenente poca mica e granuli di quarzo, i quali minerali rimangono come residuo insolubile trattando il calcare con acido cloridrico diluito; ma in tale residuo non trovai traccia di wollastonite e la sezione rappresentata dalla fig. 3ª, dimostra ad evidenza il netto contatto fra i granuli di quarzo e la calcite.

Nelle figg. 2ª e 3ª, che rappresentano sezioni viste fra Nicol incrociati e con 60 diametri d'ingrandimento, le aree con linee di sfaldatura indicano la calcite, e le aree d'aspetto uniforme, il quarzo.

Osserviamo ora le condizioni di pressione, sia dinamica che statica e di tempo, nelle quali dovettero trovarsi le associazioni di quarzo e calcite. Le due località del Fréjus e del Sempione possono servire d'esempio di sollevamenti e contorsioni di strati, quindi l'azione del movimento o della pressione dinamica non doveva mancare.

A riguardo della pressione statica in questo caso dell'associazione del quarzo colla calcite, non si può supporre che tale associazione siasi formata dopo il sollevamento degli strati e consecutiva erosione e quindi dedurre la pressione dall'altezza della roccia sovrastante ora al livello delle gallerie, ma bisogna tenere conto della potenza degli altri strati di roccia che prima del sollevamento coprivano lo strato contenente l'associazione dei due minerali. In questo caso se consideriamo per brevità soltanto la tettonica delle rocce attraversate dalla galleria del Sempione, la potenza degli strati di rocce sovrastanti al calcare contenente quarzo, ed i quali ridotti all'orizzontale dovevano costituire la pressione statica, non era certamente inferiore ai 4000 metri. Quindi la pressione statica doveva essere non minore di 1000 atmosfere.

In quanto all'altro grande fattore geologico, il tempo, le rocce cristalline schistose del Sempione si possono ritenere non più recenti del trias.

In complesso quindi si ha che una pressione statica di 1000 atmosfere continuativa per epoche geologiche ed una pressione dinamica, del cui lavoro era un fattore la stessa pressione di 1000 atmosfere essendo l'altro fattore la velocità del movimento delle rocce nel sollevarsi, non produssero alcuna reazione chimica fra l'anidride silicica ed il carbonato calcico.

Quindi l'osservazione dei fatti naturali dimostra che la formazione della wollastonite, per mezzo delle reazioni fra il quarzo e la calcite, supposta dal Grubenmann, sia il miglior esempio contro il dinamometamorfismo e la prova che la wollastonite debba la sua genesi ad altre reazioni chimiche; ed ovvia deduzione è che per la minerogenesi non basti scrivere la reazione chimica con un'equazione, ma sia indispensabile di tenere conto delle affinità chimiche degli elementi, dei loro gruppi atomici e delle condizioni volute perchè la reazione chimica si effettui.

Inoltre il risultato dell'osservazione sulla paragenesi del

quarzo e della calcite al Fréjus ed al Sempione, stabilisce che la pressione statica ha nessuna influenza nella reazione chimica, fatto provato dalle esperienze, e dimostra in pari tempo che si esagera anche molto sull'azione della pressione dinamica per il metamorfismo chimico delle rocce.

Del resto alla stessa conclusione fornita dalle esperienze e dalle osservazioni si giunge anche esaminando le proprietà che dai fautori del dinamometamorfismo si attribuiscono, per le reazioni chimiche, alla pressione sia statica che dinamica.

Una proprietà ancora da taluni ammessa è che la pressione statica produca la reazione chimica, sebbene non vi sieno esperienze le quali dimostrino con evidenza tale azione della pressione nei liquidi e nei solidi.

I sostenitori dell'azione chimica della pressione citano sovente le esperienze di Spring sulla formazione del biioduro di mercurio e del solfuro di rame, senza badare che le relative reazioni avvengono, come io ho dimostrato (1), anche senza pressione alla temperatura ordinaria nella quale si fa l'esperienza; ma poi essi tacciono di quelle esperienze di Spring che sono prova dell'inattività della pressione, per es., quella che nella miscela di zolfo, nitrato potassico e carbone non avvenne reazione chimica, neppure colla pressione di 7000 atmosfere, o quella sul composto organico del forone, per la quale fu provato che la pressione di 7000 atmosfere non produsse la temperatura di 28°.

Parimenti riguardo alla solubilità del quarzo, minerale di somma importanza litologica, si ammette come indiscutibile, anche dal Grubenmann (2), l'esperienza di Pfaff, che trovò essere il quarzo solubile nell'acqua a temperatura ordinaria con sole 290 atmosfere di pressione ed in soli 3 giorni di tempo; ma non si considerano le esperienze (3) che dimostrarono la perfetta insolubilità del quarzo nell'acqua a temperatura ordinaria, nonostante che la pressione fosse di 1750 atmosfere e la durata dell'esperienza di 5 mesi.

Del resto è naturale che allorquando vi sono esperienze che

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXI, pag. 943.
(2) Loc. cit., pag. 31.
(3) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXI, pag. 249.

sembrano contradditorie, perchè non si confrontano le condizioni in cui si fanno, i fautori di una teoria scelgano quelle che appoggiano le loro idee, trascurando le contrarie e senza curarsi, come sarebbe dovere scientifico, di ripetere essi stessi le esperienze.

Ma il rinnovare un esperimento potrebbe dare un risultato contrario alla propria teoria, ed allora, evitando le esperienze, si cerca un appoggio nella speculazione; perciò ora si vuol dare grande importanza alla legge detta dei volumi per sostenere l'azione chimica della pressione statica.

Se la pressione può favorire la formazione di un composto chimico che nel suo costituirsi diminuisce di volume, ciò non vuol dire che la pressione produca il movimento atomico necessario per la reazione chimica. La pressione in tal caso non stabilirebbe che una direzione d'orientamento degli atomi; e fissare una direzione non è sinonimo di produrre moto. Ed il movimento atomico, necessario per la reazione chimica, sarà dato dalla temperatura o da forze elettromotrici ma non mai dalla pressione, la quale non può quindi essere fattore del metamorfismo chimico delle rocce anche sotto l'egida della legge dei volumi.

Consideriamo l'altro caso che la pressione porrebbe ostacolo alla formazione di un composto chimico quando vi fosse aumento di volume molecolare, e che perciò, secondo il Grubenmann (1), nelle grandi profondità della terra un'alta temperatura ed un'alta pressione si troverebbero nemiche fra di loro.

In questo caso, siccome la pressione si costituirebbe resistenza contro la temperatura che sarebbe la forza impellente del movimento atomico, bisognerebbe conoscere i relativi valori, ossia il grado di equivalenza fra l'azione della pressione e quella della temperatura.

Ma se nel controverso argomento si ritenessero come esperienze definitive quelle eseguite per conoscere l'azione della pressione nella solubilità e si prenda, per es., l'esperienza di Braun (2) sulla solubilità del solfato sodico, essa dimostrerebbe che una soluzione di detto sale satura a 0° prenderebbe ancora

(1) Loc. cit., pag. 34.
(2) " Sitzungsb. Ak. Wiss. München ", Bd. XVI, pag. 205.

colla pressione di 500 atmosfere altro sale, come se fosse satura alla temperatura di 2°,2.

Quindi si potrebbe supporre, anche concedendo maggiore effetto alla pressione, che sarebbe necessaria la pressione di 200 atmosfere per fare equilibrio ad 1° di temperatura. Ora io ritengo che non si possa dare alcun valore geologico all'effetto della pressione quando si confrontino fra di loro la profondità di roccia nella crosta terrestre per avere l'aumento di un grado di temperatura, con quella necessaria per avere la pressione di 200 atmosfere; perchè alla profondità delle roccie corrispondente ad una data pressione, la temperatura sarebbe sempre tale da vincere colla dilatazione la resistenza opposta dalla pressione.

Perciò la pressione nel caso di aumento di volume molecolare non sarebbe un ostacolo alla reazione, ma tutt'al più costituirebbe nel movimento atomico prodotto dalla temperatura un attrito affatto trascurabile e di gran lunga compensato dall'azione favorevole della pressione di mantenere l'acqua nelle condizioni più adatte per l'evoluzione chimica della materia minerale ed in conseguenza del metamorfismo chimico delle rocce.

L'importanza della legge sui volumi, sostenuta specialmente dal Becke con pazienti indagini sui volumi molecolari dei minerali costituenti le rocce, presenta, a mio avviso, anche il difetto di una base molto ipotetica; perchè il volume molecolare dei minerali è dedotto da formole chimiche sovente ipotetiche e che non rappresentano i dati delle analisi. Per es., secondo il Becke (1) e seguace il Grubenmann, sarebbe possibile l'equazione:

Albite + Nefelina		=	Glaucofane	
$NaAlSi^3O^8$ . .	100,3		$Na^2Al^2Si^4O^{12}$ . .	137
$NaAlSiO^4$ . .	56			
	156,3			

ossia essendo la somma dei volumi molecolari della nefelina e dell'albite di 156,3 si avrebbe per effetto della pressione la glaucofane che ha il minore volume molecolare di 137.

Ora in tale equazione la formola della glaucofane non rappresenta la sua composizione data dall'analisi, la quale trova

(1) Loc. cit., pag. 31.

il ferro in vario stato d'ossidazione da un minimo di 7 %, ad un massimo di 10 %.

Ma si capisce che ponendo come produttori di glaucofane l'albite e la nefelina, nei quali minerali il ferro non è costante e quando è presente è solo in minima quantità, bisognava escludere dalla glaucofane il ferro, benchè tale elemento si trovi costantemente e sia causa del caratteristico forte pleocroismo della glaucofane.

Per analogo motivo cioè della mancanza o soltanto presenza di tracce di magnesia nell'albite e nella nefelina si esclude tale ossido dalla glaucofane che lo contiene costantemente da un minimo di 4 % ad un massimo del 14 %.

Si noti poi che se si considera la glaucofane della Beaume analizzata dal Colomba (1) che è tipica e che per la sua composizione si avvicina a quella di Syra e che è espressa dalla formola $Na^2 Fe Mg^2 Al^2 Si^7 O^{21}$ e di peso specifico di 3,137, il suo volume molecolare sarebbe di 234; ossia dovrebbe succedere la reazione inversa, cioè per la pressione la glaucofane darebbe luogo ad albite e nefelina, più un silicato di magnesia e di ferro.

A riguardo poi dell'elemento ferro, forse per la difficoltà che il suo vario stato di ossidazione presenta alla speculazione lo si esclude addirittura; e negli esempi portati da Becke di trasformazioni, o di equazioni di volumi, come egli le chiama, l'elemento ferro appare soltanto nell'ilmenite.

Tale minerale poi quando è introdotto è posto nel primo membro dell'equazione soltanto per spiegare la presenza della titanite nel secondo; talchè ne risulta dagli esempî citati dal Becke che i minerali olivina, augite, orneblenda, glaucofane ed epidoto dovrebbero essere tutti scevri di ferro, sebbene l'importanza di tale elemento si presenti anche nei caratteri ottici di qualcuno dei detti minerali.

A me pare che una teoria di minerogenesi, benchè ingegnosa ed anche attraente, non possa sostenersi quando si escludono dalla composizione chimica dei minerali gli elementi chimici costanti e caratteristici, la cui presenza può far variare in modo essenziale le condizioni di una reazione chimica.

In complesso quindi bisogna ricorrere a formole chimiche

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXIX, pag. 404.

molto ipotetiche interpretando le analisi *ad usum rationis* per volere dare alla legge dei volumi un'importanza maggiore di quella che le spetta considerandola come prova, che la pressione possa produrre una reazione chimica.

Passiamo ora ad esaminare altre proprietà che si vogliono attribuire alla pressione come fattrice di reazioni chimiche.

Il Grubenmann (1) asserisce addirittura che la pressione produce la solubilità; il Becke più a ragione dice che la pressione dinamica polverizzando i minerali estende la superficie di contatto fra le parti solide e le soluzioni. È certo che la riduzione in polvere di un minerale aumenta la sua velocità di soluzione; ma sempre quando il minerale sia solubile; perchè se il minerale è in condizione di essere insolubile, la riduzione in polvere non può renderlo solubile, o lo potrebbe soltanto nel caso, ancora da dimostrarsi possibile, che la polverizzazione meccanica diretta potesse dividere fra loro gli atomi o le molecole di un composto chimico.

Ma ammettiamo pure che la pressione produca delle soluzioni mineralizzate; ciò non vuol dire ancora che le due soluzioni debbano reagire fra di loro; poichè due soluzioni possono rimanere mescolate senza che avvenga reazione chimica, quando non vi sia la vera causa efficiente della reazione.

Consideriamo ora il principio di Riecke che il Becke pare ritenga di grande importanza pei processi chimici inerenti alla pressione.

Il Riecke (2) studiò l'equilibrio fra un corpo solido omogeneamente deformato e la fase fluida, e dai risultati teorici ottenuti, si potrebbe in generale stabilire: che se in una soluzione satura si trovano due prismi della stessa sostanza disciolta ed uno dei prismi sia sottoposto ad una deformazione unilaterale sia di trazione che di compressione, avviene in tale prisma soluzione di sostanza, la quale per l'equilibrio della soluzione si depositerebbe sull'altro prisma non soggetto a deformazione.

Forse il principio di Riecke potrebbe apparire spiegativo per l'intreccio dei granuli di quarzo nelle quarziti, supponendo

(1) Loc. cit., pag. 34.

(2) " Nachrich. der K. Gesell. Wiss. zu Göttingen. math. phys. Classe ", 1894, pag. 278.

che un granulo sia sottoposto ad una pressione diversa dal granulo adiacente in modo che, trovandosi i granuli circondati da acqua satura di silice, il granulo sottoposto a minore deformazione aumentasse a dispendio di quello sottoposto a maggior pressione, costituendo in tal modo la speciale struttura ad incastro.

Ma in questo caso d'applicazione del principio di Riecke dovrebbe entrare in funzione anche la direzione d'orientamento dei granuli per la grandissima differenza di solubilità, dimostrata da esperienze (1), che presenta il quarzo fra la direzione dell'asse di simmetria e quella ad esso normale.

D'altronde non si può ammettere una pressione perfettamente unilaterale come lo si suppone nel prisma considerato dallo studio teorico, perchè quanto più i granuli saranno piccoli tanto più la pressione nella massa di essi tenderà colla profondità a diventare uniforme in tutti i sensi, ed in ogni caso i granuli certamente non si troveranno mai nella condizione dei due prismi teorici di essere uno sottoposto a deformazione e l'altro no.

Perciò il principio di Riecke, importantissimo dal lato teorico per le premesse condizioni di deformazione unilaterale ed omogenea, troverebbe forse difficile applicazione nel metamorfismo delle rocce nelle quali le condizioni sono assai diverse.

Ad ogni modo è a ritenersi col Becke che il principio di Riecke spiegherebbe molto meglio le deformazioni senza rottura che non l'ipotesi di Heim che un corpo solido e rigido diventi plastico sotto una pressione uniforme in tutti i sensi; ipotesi che ha esperienze contrarie (2) e che è insostenibile per quei corpi, p. es., i silicati, i quali passando dallo stato solido al liquido aumentano di volume.

Inoltre tale principio ha pel metamorfismo il valore di conferma del fatto che, effettuandosi con speciali condizioni di moto una deformazione, si può avere calore efficiente di solubilità ed anche di reazioni chimiche, ossia una conferma dei fenomeni causati dalla pressione dinamica.

Ma, come ho detto più sopra, si esagera anche negli effetti che può produrre nel metamorfismo chimico la pressione associata al movimento.

---

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIII, pag. 292.
(2) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXVII, pag. 591.

È un fatto indiscutibile che quando il movimento è repentino, come nel caso di una formazione di litoclasi inclinata all'orizzonte e contemporaneo spostamento della massa rocciosa, si debba aver per l'attrito radente un grande sviluppo repentino di calore trasformabile in energia chimica ed i cui effetti si osservano sulle pareti delle litoclasi.

Ma in tal caso gli effetti s'inoltrano pochissimo nelle pareti delle litoclasi perchè l'istantaneità dell'azione unita alla poca conducibilità termica delle rocce non dà tempo al calore di disseminarsi in esse. Avviene, per un confronto di analogia, ciò che si osserva nella caduta delle meteoriti litoidee, nelle quali la superficie si fonde mentre nell'interno havvi ancora una temperatura di parecchi gradi sotto zero, come si trovò nella meteorite caduta a Dhurmsalla.

Però l'esempio addotto delle litoclasi ha minima importanza per il metamorfismo delle rocce.

Osserviamo invece gli effetti che si vogliono attribuire alla pressione dinamica durante i sollevamenti, raddrizzamenti e ripiegature degli strati rocciosi.

La forza viva che dovrà in uno strato trasformarsi in energia termica e quindi in energia chimica avrà per fattore la pressione statica, ossia il peso della roccia sovrastante allo strato e la velocità del movimento.

Ora tale movimento, effettuandosi lentamente col tempo di epoche geologiche, farà sì che l'energia termica avrà tutto l'agio di disseminarsi nelle masse rocciose non ostante la loro poca conducibilità termica e la temperatura non potrà mai raggiungere il grado necessario alle reazioni chimiche.

Nè si deve trascurare il fatto che parte della forza viva, per il lentissimo movimento, invece di trasformarsi in energia termica possa mutarsi, massime nei sinclinali degli strati rocciosi, in un lavoro potenziale di elasticità di compressione, della quale elasticità si possono facilmente osservare gli effetti sia nelle gallerie di miniere, sia nei tunnels.

A proposito di tale elasticità credo opportuno di indicare un fatto costantemente apparso in tutte le mie esperienze eseguite con pressione di 6000 atmosfere e con la velocità di compressione di un millimetro per minuto primo, esperimentando sia con sostanze minerali polverulente e umettate soltanto come

fosse rappresentata l'acqua di cava e sia con materiale perfettamente asciutto; la quantità di materiale oscillava secondo l'esperienza dai 20 ai 25 centimetri cubi.

Io ho sempre osservato che il cilindro compressore d'acciaio del diametro di 25 millimetri, togliendo la pressione al termine dell'esperienza durata parecchi mesi, s'innalzava spontaneamente di 3 o 4 millimetri a seconda dell'esperienza, quantunque io trovassi poi sempre una fortissima resistenza nell'estrarre totalmente il cilindro dal foro del recipiente d'acciaio nel quale era stata compressa la sostanza. Ora tale effetto di elasticità ritengo sia dovuto in gran parte alla sostanza compressa e certamente di più che alla elasticità dell'apparecchio, perchè il recipiente d'acciaio aveva il diametro di 11 centimetri, mentre il diametro del foro era eguale a quello del cilindro compressore.

Ora in tutte le esperienze io non ottenni mai alcun risultato di reazioni chimiche, sebbene a tale scopo esse fossero condotte; ciò prova che la forza viva, data dalla pressione di 6000 atmosfere colla velocità di un millimetro per minuto primo, avrà fornito in parte energia termica che si disseminava lentamente nelle pareti del recipiente senza produrvi lavoro chimico ed in parte la forza viva si trasformava in lavoro potenziale di elasticità; e se si pensa che la velocità impiegata nell'esperienza, è incomparabilmente maggiore di quella che avranno le rocce nel loro movimento, appare evidente che la pressione dinamica in tale condizione di moto non potrà mai produrre energia termica sufficiente per la reazione chimica.

Perciò le pressioni, sia la statica, sia quella dinamica a lento movimento, saranno principali fattori di effetti fisici inerenti alla struttura delle rocce, al mantenimento dell'acqua in esse in condizioni favorevoli alle reazioni chimiche, ed anche di effetti fisici predisponenti le reazioni come la triturazione, e l'aumento di contatto, ma dette pressioni non potranno somministrare la temperatura necessaria alle reazioni chimiche.

Ossia la parola dinamometamorfismo non può indicare che il metamorfismo fisico e pel metamorfismo chimico suonerebbe meglio la parola termometamorfismo.

E la temperatura, necessaria al metamorfismo chimico delle rocce cristalline schistose, bisogna ricercarla o in quella di contatto di rocce eruttive per fenomeni locali e più di tutto per i

fenomeni generali nella temperatura interna della terra, ossia per la temperatura bisogna riprendere quelle idee antiche le quali, dopo la comparsa della parola dinamometamorfismo, furono abbandonate, perchè sovente il nuovo è più affascinante che il vero.

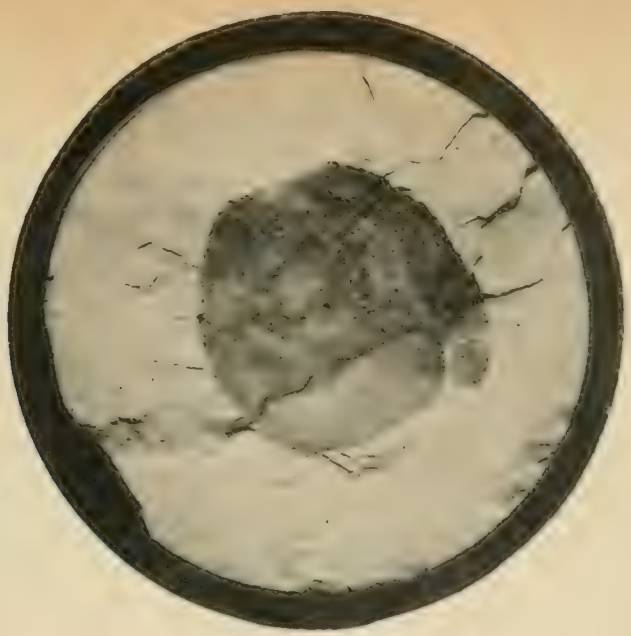
D'altronde, se si confrontano la temperatura e la pressione approssimative che si avrebbero ad una data profondità p. es., 6 chilometri, si può ritenere che la temperatura sarebbe di 200° e la pressione di 1680 atmosfere. Ora le esperienze dimostrano facilmente la differenza fra la grande energia chimica della temperatura di 200° nelle reazioni per via umida e quella minima, e secondo le mie esperienze nulla, della pressione di 1680 atm. sia statica, sia dinamica a lento movimento; e s'intende associando sia alla temperatura che alla pressione l'altro grande fattore geologico, il tempo.

E lo stesso Becke dà ora grande importanza alla temperatura interna della terra, anzi egli sarebbe d'avviso di ammettere due livelli abissali (adottando la traduzione proposta da Stella (1) della parola *Tiefenstufen*), uno inferiore nel quale la temperatura è così alta che sarebbe esclusa la formazione di minerali ricchi di idrossili e l'altro superiore dove si formerebbero anche tali minerali, e nel suo interessante lavoro il Becke annovera i minerali che sarebbero proprî di ciascun livello e quelli comuni ad entrambi i livelli di diversa temperatura.

Tale divisione potrà forse essere accettata supponendo anche una certa promiscuità di minerogenesi fra l'uno e l'altro livello come ammette lo stesso Becke, sebbene la supposizione diminuisca di poco il carattere molto astratto del concetto per cui non si può avere un'idea anche lontanamente approssimativa della temperatura dei due livelli.

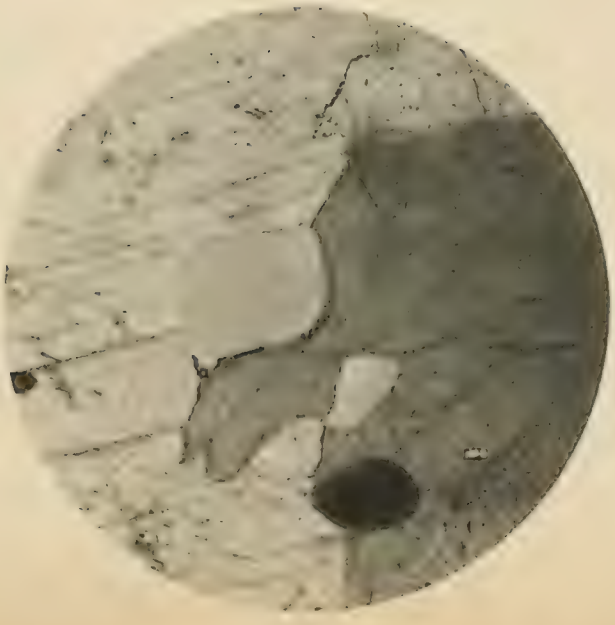
Lo studio della paragenesi dei minerali fornisce sovente fatti comprovanti come lo stesso minerale possa formarsi a diverse temperature e ciò per le diversissime circostanze di ambiente chimico nelle quali può avvenire la genesi. E rimane molto incomprensibile il concetto di Becke che per le rocce cristalline schistose vi siano livelli in cui la temperatura sia così alta da

1) " Boll. R. Comitato geologico ", 1905, pag. 39.



1

2



3

rimanere esclusa la formazione dei minerali ricchi di idrossili, ed egli infatti esclude la muscovite dai minerali appartenenti al livello inferiore ossia di maggior temperatura; mentre la muscovite è minerale principale dei graniti e dei gneiss. Per altra parte poi il Becke (1) pone il granato fra i minerali caratteristici del livello di maggior temperatura, mentre si trova tale minerale anche con fossili, come, p. es., negli schisti a belemniti del Nufenen.

Il supporre che minerali con idrossili non si formino ad alta temperatura deriva dal fatto che si vuol dare alla pressione degli strati proprietà di metamorfismo assai discutibili e si escludono invece quelle più importanti, come quella di mantenere nelle profondità dove havvi un'alta temperatura l'acqua inchiusa, in qualunque stato poi si voglia, in modo da formarsi minerali con idrossili ed agevolare anche la cristallizzazione di tutti i minerali costituenti le rocce.

E per questa seconda proprietà dell'acqua io sono convinto che se le esperienze di litogenesi, che si fanno colla fusione di minerali per lo studio della differenziazione nei magma eruttivi, si eseguissero sempre in modo da mantenere inchiuse alla temperatura di fusione dei silicati anche tracce di acqua, la cristallizzazione sarebbe più evidente, come fu dimostrato da Loewinson-Lessing (2), e le esperienze corrisponderebbero di più all'osservazione dei fatti naturali.

---

(1) Loc. cit., pag. 33.

(2) *Studien über die Eruptivgesteine*, pag. 359.

Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili.

Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

§ 1.

Teoremi generali sulla deformazione.

Si sa che nella teoria generale della deformazione delle superficie, supposte flessibili ed inestendibili, le linee assintotiche si differenziano da tutte le altre linee tracciate sulla superficie per la seguente proprietà, che ha fatto dar loro il nome di *linee di piegamento*. Mentre qualunque linea *non* assintotica cangia necessariamente di forma quando la superficie si flette, invece attorno ad una assintotica, mantenuta rigida, è possibile ancora flettere in infiniti modi la superficie. Fin qui però la deduzione di questa importante proprietà era fondata unicamente sul fatto che negli sviluppi in serie, ottenuti per definire analiticamente le possibili configurazioni di una superficie con assintotica rigida, rimangono infiniti coefficienti indeterminati. Ma la convergenza di questi sviluppi non era in generale dimostrata; e solo in pochi casi particolari si era confermata, mediante integrazione diretta, la legittimità della conclusione (*).

Come si vedrà nella presente Nota, basta applicare alle equazioni trovate da Darboux per le *assintotiche virtuali* di una superficie i risultati generali della teoria delle equazioni a derivate parziali per stabilire in tutto rigore il teorema in discorso, e fissare nel tempo stesso il grado di arbitrarietà, che resta nella deformazione di una superficie con assintotica rigida.

Dimostro a tale oggetto il teorema fondamentale seguente:

A) *Tracciate ad arbitrio sopra una superficie* S, *a curvature opposte, due curve* C, C′, *uscenti da un medesimo punto ordinario*

(*) V. Darboux, *Leçons*, t. III, pag. 280.

di S, *ed ivi non tangenti, esiste una deformazione della superficie che rende ambedue le curve* C, C′ *assintotiche (di diverso sistema) della superficie deformata* (*).

Per stabilire questo teorema bastano quelle semplici condizioni di continuità che, nella teoria delle equazioni a derivate parziali del 2° ordine del tipo iperbolico, assicurano l'applicabilità del metodo di Picard delle approssimazioni successive. Ma se ci limitiamo a considerare superficie *analitiche* e le loro deformazioni analitiche, possiamo completare la proposizione col teorema di *unicità*:

A′) *Esiste una ed una sola deformazione analitica* S, *che rende insieme assintotiche due curve (analitiche)* C, C′, *incrociantesi sopra* S.

Supponendo nel teorema A) che una delle curve C, C', per esempio la C, sia già un'assintotica di S, nella configurazione attuale, se ne deduce l'altro teorema:

B) *Attorno ad una assintotica* C, *mantenuta rigida, si può flettere la superficie* S *in guisa che un'altra curva arbitraria* C′, *uscente da un punto di* C, *diventi assintotica del secondo sistema. La deformazione è certamente unica nel caso analitico.*

Così è stabilita la proprietà fondamentale delle assintotiche come linee di piegamento; e viene inoltre fissato il grado di libertà inerente a tali deformazioni con assintotica rigida, come dipendente da una funzione arbitraria di una variabile.

Una conseguenza notevole si trae dalla proposizione precedente applicandola al caso della deformazione di una superficie rigata (analitica), nella quale si mantenga rigida *una* generatrice. Si ottiene così il teorema:

C) *Se in una superficie rigata analitica (non sviluppabile), supposta flessibile, si mantiene rigida una generatrice, tutte le altre generatrici restano necessariamente rigide.*

Tale proprietà, che può a prima vista sembrare singolare, trovasi confermata direttamente, nel caso analitico, dall'uso opportuno delle equazioni di Gauss e Codazzi. Ed in un caso particolare importante, quello della elicoide rigata ad area minima, sia nello spazio euclideo sia in quello generale a curvatura

(*) Nel caso particolare delle superficie pseudosferiche questa proposizione trovasi già stabilita nelle mie: *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, pag. 389.

costante, si riconosce che il teorema C) sussiste in tutta generalità, anche per le deformazioni non analitiche.

Coi teoremi generali surriferiti relativi alla deformazione delle superficie, e valevoli tanto in geometria euclidea come nella geometria ellittica ed iperbolica, viene a collegarsi spontaneamente il *problema di Tchebychef*, di rivestire una data superficie S, di distendere cioè sopra S un doppio reticolo di fili flessibili ed inestendibili a maglie parallelogrammiche (una rete di Tchebychef) (*). Secondo un'osservazione dovuta a Servant (**), il problema di Tchebychef conduce analiticamente ad integrare un sistema di due equazioni del 2° ordine di costruzione affatto analoga a quello di Darboux per le assintotiche virtuali. Ed, applicando le medesime considerazioni, si può quindi stabilire con analisi rigorosa il teorema seguente, che dal punto di vista intuitivo può considerarsi come evidente (***):

D) *Tracciate ad arbitrio sopra una superficie* S *due curve* C, C′, *uscenti da un medesimo punto, in direzioni diverse, si può adattare sulla superficie una rete di Tchebychef in guisa che due fili incrociantisi dalla rete si distendano sopra* C, C′.

§ 2.

Le equazioni di Darboux per le assintotiche virtuali.

Indico col nome di *assintotiche virtuali* di una superficie S a curvature opposte ogni doppio sistema di linee (α, β) tracciate sopra S, suscettibili di diventare le assintotiche di S, dopo una conveniente deformazione.

Se con

$$ds^2 = E_1 d\alpha^2 + 2F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2 \tag{1}$$

(*) V. Darboux, *Leçons*, t. III, pag. 133 e 206 e le mie *Lezioni*, vol. II, pag. 401.

(**) *Sur l'habillage des surfaces*, " Comptes rend. de l'Ac. „, juillet 1903.

(***) Cfr. Voss, *Ueber äquidistante Curvensysteme auf krummen Flächen*, " Katalog mathem. Modelle „, München, 1902, pag. 16. V. anche " Math. Annalen „, Bd. 19.

denotiamo, il quadrato dell'elemento lineare di S, riferita alle linee (α, β), e con

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \tag{2}$$

la curvatura della superficie, le formole fondamentali della teoria ci dicono (*): *Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le linee* (α, β) *siano assintotiche virtuali sono date dalle due relazioni:*

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial \alpha} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1, \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial \beta} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1, \tag{3}$$

dove i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1$, $\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1$ *si riferiscono alla forma quadratica* (1) (**).

Soddisfatte queste condizioni (3), la superficie deformata S_1 è *intrinsecamente* individuata dai valori seguenti della seconda forma quadratica fondamentale di S_1:

$$D = D'' = 0, \quad D' = \frac{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{\rho}.$$

Se supponiamo dapprima la superficie S riferita ad un qualunque sistema curvilineo (u, v) e poniamo:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \tag{4}$$

considerando u, v come funzioni dei parametri α, β delle assintotiche virtuali, queste due funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ dovranno soddisfare a due equazioni caratteristiche a derivate parziali del 2° ordine, che sono le indicate equazioni di Darboux. Esse si deducono dalle formole generali di Christoffel per l'equivalenza

(*) Cfr. *Lezioni*, ecc. Vol. I, § 73 e segg.

(**) I valori effettivi di questi simboli sono:

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = \frac{G_1 \dfrac{\partial E_1}{\partial \beta} - F_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial \alpha}}{2(E_1 G_1 - F_1^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 = \frac{E_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial \alpha} - F_1 \dfrac{\partial E_1}{\partial \beta}}{2(E_1 G_1 - F_1^2)}.$$

di due forme differenziali quadratiche nel modo seguente. Le due forme (1), (4) essendo per ipotesi equivalenti, le citate formole di Christoffel (*) ci dànno le due:

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right) + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = \left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 \dfrac{\partial u}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right) + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = \left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 \dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 \dfrac{\partial v}{\partial\beta}, \end{cases}$$

i simboli di Christoffel a sinistra riferendosi alla forma differenziale (4). Ora, siccome le (α, β) si suppongono assintotiche virtuali, si avrà per le (3):

$$\begin{cases} \left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} \right) \\ \left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right), \end{cases}$$

onde le (α) si tradurranno nelle *equazioni di Darboux*:

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \left(\left\{ {11 \atop 1} \right\} - \dfrac{\partial \log\rho}{\partial u} \right) \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left(\left\{ {12 \atop 1} \right\} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v} \right) \\ \qquad \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right) + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left(\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u} \right) \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right) + \\ \qquad + \left(\left\{ {22 \atop 2} \right\} - \dfrac{\partial \log\rho}{\partial v} \right) \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0. \end{cases}$$

Inversamente se si ha una coppia u, v di funzioni *indipendenti* di α, β, che soddisfino le equazioni (A), il doppio sistema di linee (α, β) sulla superficie S sarà di assintotiche virtuali. E invero, paragonando le (A) colle (α) di Christoffel, ne risulteranno le due relazioni:

$$\begin{cases} \left(\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial\beta} \right) \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \left(\left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial\alpha} \right) \dfrac{\partial u}{\partial\beta} = 0 \\ \left(\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial\beta} \right) \dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + \left(\left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial\alpha} \right) \dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

(*) *Lezioni*, vol. I, pag. 64 (formola (II)).

dalle quali, poichè il determinante funzionale:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

non è nullo, seguono le (3); ora queste caratterizzano, come si è detto, le linee (α, β) quali assintotiche virtuali.

Non tralascieremo di osservare che le equazioni (A) di Darboux valgono non solo nello spazio euclideo (a curvatura nulla), ma più in generale in uno spazio a curvatura costante K_0. Soltanto bisognerà in tal caso sostituire alla curvatura *assoluta* K della superficie S la sua curvatura *relativa* k, data da:

$$k = K - K_0.$$

Per una superficie S ad assintotiche reali come qui si suppone, questa curvatura k è invero negativa, e se si pone:

$$k = -\frac{1}{p^2},$$

le formole (3) continuano ad esprimere le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee (α, β) siano assintotiche virtuali (*).

Tutti i teoremi generali enunciati, che andiamo ora a dimostrare, sussistono quindi negli spazî di curvatura costante come in quello euclideo.

§ 3.

Dimostrazione del teorema A).

Da un punto O della superficie S facciamo uscire, in direzioni diverse, due curve arbitrarie C, C' e cerchiamo un sistema di assintotiche virtuali (α, β) di S, tali che le due curve prefissate C, C' appartengano l'una al sistema (β) l'altra al sistema (α). Per fissare le idee, poniamo che la C debba coincidere colla $\beta = o$ e la C' colla $\alpha = o$; prendiamo inoltre per *para-*

(*) Cfr. *Lezioni*, vol. I, pag. 504.

metri α, β i rispettivi archi delle curve C, C', contati a partire da O. Verremo per tal modo a conoscere lungo le curve C, C' le funzioni u, v di α, β rispettivamente, e sia:

$$(5) \qquad \begin{cases} u(\alpha, 0) = f(\alpha), & v(\alpha, 0) = \varphi(\alpha) \\ u(0, \beta) = f_1(\beta), & v(0, \beta) = \varphi_1(\beta) \ (*). \end{cases}$$

Per risolvere il nostro problema geometrico dobbiamo dunque integrare il sistema (D) colle condizioni ai limiti (5). Dimostriamo subito inversamente che ad una tale coppia:

$$u(\alpha, \beta), \ v(\alpha, \beta)$$

di soluzioni delle equazioni (A) corrisponde una soluzione del nostro problema geometrico. E infatti queste funzioni u, v saranno intanto fra loro indipendenti, poichè sono distinte le due curve C, C', e quindi le linee (α, β) traccieranno (pel § 2) sopra S un sistema di assintotiche virtuali. Ma poichè u, v si riducono per $\beta = 0$ alle funzioni $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ prefissate, la curva $\beta = 0$ verrà precisamente a coincidere colla C; e similmente la $\alpha = 0$ colla C'.

Il problema analitico in cui abbiamo così trasformato la nostra questione geometrica consiste adunque nel trovare una coppia di soluzioni delle equazioni (A) del 2° ordine del tipo iperbolico, colle caratteristiche reali α, β, in guisa che lungo le due caratteristiche $\beta = 0$, $\alpha = 0$ le funzioni incognite u, v si riducano alle funzioni prefissate (5). I primi membri delle equazioni (A) sono funzioni quadratiche delle derivate prime:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \ \frac{\partial u}{\partial \beta}, \ \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \ \frac{\partial v}{\partial \beta},$$

con coefficienti funzioni di u, v, che noi supponiamo finite e continue insieme alle loro derivate parziali prime rapporto ad u, v in un certo campo (**). In queste condizioni il metodo delle ap-

(*) Si noti che, pel significato dato ai parametri α, β, le funzioni $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ non sono indipendenti, ma legate dalla relazione:

$$E\left(\frac{df}{d\alpha}\right)^2 + 2F\frac{df}{d\alpha}\frac{d\varphi}{d\alpha} + G\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2 = 1;$$

analogamente dicasi di $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$.

(**) Basta per ciò che E, F, G siano funzioni finite continue di u, v fino alle derivate parziali del 4° ordine.

prossimazioni successive di Picard (*) è certamente applicabile e ci assicura della esistenza delle soluzioni domandate. Sussiste dunque il teorema fondamentale A).

Restringendoci ora al campo analitico, supponiamo che E, F, G siano funzioni analitiche olomorfe di u, v e sviluppabili quindi in serie di potenze di $u - u_0$, $v - v_0$, essendo u_0, v_0 i valori iniziali per $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dati dalle (5), ossia le coordinate del punto iniziale 0. Supponiamo anche naturalmente che le funzioni $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$; $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ di α e β siano olomorfe nell'intorno di $\alpha = 0$ le prime, di $\beta = 0$ le seconde. Potremo trovare una coppia di funzioni olomorfe u, v di α, β date dagli sviluppi in serie:

$$u = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} a_{m,n}\alpha^m\beta^n, \quad v = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} b_{m,n}\alpha^m\beta^n$$

che soddisfino alle equazioni (A) ed alle condizioni iniziali (5), e questa coppia sarà *unica*. L'unicità risulta intanto subito da ciò che le (A) successivamente derivate, e le (5) bastano a calcolare nel punto $\alpha = 0$, $\beta = 0$ tutte le derivate:

$$\left(\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\alpha^m\,\partial\beta^n}\right)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}, \quad \left(\frac{\partial^{m+n}v}{\partial\alpha^m\,\partial\beta^n}\right)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}},$$

e quindi i valori dei coefficienti $a_{m,n}$, $b_{m,n}$. Quanto alla convergenza effettiva di questi sviluppi si stabilisce ripetendo considerazioni affatto analoghe a quelle svolte p. e. dal Goursat a pag. 184 del suo trattato (Tome I) (**).

Così resta dimostrato anche il teorema A').

Dobbiamo ora osservare che l'esistenza e l'unicità del sistema integrale è assicurata solo in un intorno sufficientemente piccolo del punto iniziale $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Corrispondentemente l'esistenza della deformazione richiesta, che riduce ambedue le curve C, C' assintotiche, viene assicurata soltanto per una regione convenientemente ristretta, ma finita, circostante sulla superficie al punto O d'incrociamento delle due curve prefissate.

(*) *Mémoire sur la Théorie des équations aux dérivées partielles* (" Journ. de Mathématique ", 1890).

(**) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, Hermann, 1896.

§ 4.

Deformazioni con un'assintotica rigida.

Supponiamo ora che delle due curve C, C' nel teorema generale A) la prima C sia già assintotica della superficie S nella sua configurazione attuale, ma non la seconda C'. Esisterà una deformazione della S che, lasciando la C assintotica, renderà assintotica anche la C'; di più, almeno nel caso analitico, la deformazione sarà certamente unica. È facile vedere che in questa deformazione l'*assintotica* C *rimane rigida*. E invero la sua prima curvatura non varia, perchè sempre eguale alla curvatura geodetica di C; ma nemmeno la sua torsione varia, poichè il quadrato di questa eguaglia, pel teorema d'Enneper, la curvatura K della superficie cangiata di segno. Resta così stabilito il teorema B), che assicura l'esistenza delle deformazioni con una assintotica rigida e ne fissa il grado di libertà in una funzione arbitraria di una variabile, p. es. la curvatura geodetica della C' in funzione dell'arco s. È chiaro che in queste deformazioni speciali, vincolate alla rigidità di una data assintotica, una curva Γ prefissata sulla superficie non può più assumere una forma arbitraria come nelle deformazioni perfettamente libere. Al contrario le varie forme possibili per una curva Γ saranno vincolate da una relazione differenziale fra gli elementi che definiscono intrinsecamente la curva, p. es. la flessione e la torsione di Γ quali funzioni dell'arco. Queste relazioni differenziali non si conoscono però fino ad ora che nel caso particolarmente semplice delle deformazioni delle superficie rigate con generatrici rigide, su cui ritorniamo più avanti.

A conferma di questi teoremi generali sulla deformazione ricorderemo varî casi particolari ben noti. Il primo e più semplice esempio si ha nelle superficie d'elemento lineare:

$$ds^2 = (1 - u^2)\,du^2 + u^2 dv^2,$$

che sono le evolute delle superficie W colla relazione:

$$r_1 - r_2 = \operatorname{sen} 2(r_1 + r_2)$$

fra i raggi principali di curvatura.

Per la corrispondente classe completa di superficie applica-

bili, una delle prime determinate da Weingarten, si ha l'elegante costruzione geometrica di Darboux che le fa derivare dalle superficie di traslazione colle due curve generatrici a torsione costante eguale e contraria (*). Il Calò ha studiato appunto nella sua tesi (**) la deformazione di questa superficie in relazione coi teoremi generali, e dalle sue ricerche facilmente risulta che il problema di flettere la detta superficie sì da rendere assintotiche due sue curve prestabilite, si riduce ad integrare equazioni differenziali ordinarie (di Riccati), trattandosi di determinare le due curve trasformate dalle loro equazioni intrinseche note.

Altri casi notevoli si hanno nelle superficie pseudosferiche e in cinque tipi di superficie applicabili sopra superficie di rotazione che si collegano alle superficie pseudosferiche stesse e sono:

1° la pseudosfera accorciata;

2° la pseudosfera allungata (ovvero la superficie logaritmica di rotazione);

3° il catenoide ordinario;

4° il catenoide accorciato;

5° il sinusoide iperbolico.

Il primo e secondo tipo sono dati dalle superficie complementari, il terzo dalle evolute delle superficie pseudosferiche (***). Gli ultimi due tipi dipendono dalla composizione di due trasformazioni di Bäcklund reali ed opposte, ovvero puramente immaginarie coniugate (****). Per tutte le classi di superficie enumerate il problema di fare acquistare, per flessione, alla superficie due assegnate assintotiche si riduce ad integrare l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\partial\beta} = \operatorname{sen}\omega ,$$

assegnati i valori di ω lungo due caratteristiche $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$.

(*) Darboux, *Leçons*, t. III, pag. 372 s. s. Cfr. le mie *Lezioni*, § 245 (vol. II, pag. 61).

(**) *Sulle evolute delle superficie di Weingarten* $r_1 - r_2 = c \operatorname{sen}\left(\frac{r_1 + r}{c}\right)$, " Annali di Matematica ", 1893.

(***) *Lezioni*, vol. I, pag. 293-294.

(****) Ibid., vol. II, §§ 390 e 398.

§ 5.

Deformazione delle superficie rigate.

Prendiamo una superficie rigata flessibile ed inestendibile e deformiamola, secondo il teorema B), mantenendo rigida una generatrice g (assintotica). Se ci poniamo nel caso analitico, la deformazione è determinata in *modo unico* quando sia fissata una curva C, intersecante g, che debba diventare assintotica dopo la deformazione. Ma, per le note ricerche di Beltrami (*), si sa che possiamo rendere altresì assintotica la curva C con una deformazione che lasci rigide *tutte* le generatrici della rigata. Dunque, le due deformazioni coincidono e si ha l'enunciato teorema C):

Sopra una superficie rigata S *tutte le generatrici restano rigide quando tale si mantenga una di esse.*

Come corollario si può notare che:

Se in una quadrica rigata restano rigide due generatrici di diverso sistema, l'intera superficie rimane rigida.

Ritornando al nostro teorema generale C), osserviamo che lo studio delle particolari flessioni delle rigate con generatrici rigide, dovuto a Minding e Beltrami, appare ora come il primo e più semplice esempio del problema di determinare tutte le flessioni di una superficie con assegnata assintotica rigida.

Poichè la dimostrazione del nostro teorema C) è stata ottenuta per una via alquanto indiretta, non sarà inutile dimostrare come esso segua anche dalle formole di Codazzi, sempre rimanendo nel caso analitico. Riferiamo perciò la rigata ad un sistema coordinato (u, v) di cui le $v =$ cost siano le generatrici, rimanendo le $u =$ cost arbitrarie. Indicando con D, D', D'' i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale, per una superficie qualunque S applicabile sulla rigata, e ponendo:

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

(*) *Sulla flessione delle superficie rigate,* " Annali di Matem. „, serie I, t. VII (1865). *Opere,* vol. I, pag. 208 s. s. Vedi anche le mie *Lezioni,* vol. I, pag. 265.

avremo in primo luogo l'equazione di Gauss:

$$\Delta'^2 - \Delta\Delta'' = \frac{1}{\rho^2} \tag{6}$$

e le due equazioni di Codazzi. Qui però ci occorre soltanto ricorrere alla prima di esse che, avendosi:

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$$

per essere le $v = \text{cost.}^{\text{te}}$ geodetiche, si scrive:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \Delta = \frac{\partial\Delta'}{\partial u} + 2 \left\{ {12 \atop 2} \right\} \Delta'. \tag{7}$$

Ma siccome nello stato iniziale di rigata si ha:

$$\Delta = 0, \quad \Delta' = \frac{1}{\rho}$$

e la (7) ci dà:

$$\frac{\partial \log\rho}{\partial u} = 2 \left\{ {12 \atop 2} \right\},$$

così potremo scrivere in generale la (7), per una configurazione S qualunque, nel modo seguente:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \Delta = \Delta' \frac{\partial}{\partial u} \log(\rho\Delta'). \tag{7*}$$

Supponiamo ora che sulla S *una* delle linee $v = \text{cost}$, p. e. la $v = 0$, si sia mantenuta rettilinea, e quindi assintotica: avremo:

$$(\Delta)_{v=0} = 0. \tag{8}$$

Per dimostrare il nostro teorema dovremo provare che sarà identicamente:

$$\Delta = 0, \text{ per qualunque } v.$$

Poichè ci troviamo nel caso analitico e supponiamo che le funzioni:

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \rho, \left\{ {22 \atop 2} \right\}$$

siano sviluppabili in serie di Taylor per potenze di v, basterà dunque provare che insieme a Δ si annullano *per* $v=0$ tutte le sue derivate rapporto a v:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v}, \frac{\partial^2\Delta}{\partial v^2}, \frac{\partial^3\Delta}{\partial v^3} \cdots$$

in là quanto si vuole.

Intanto, ponendo nella (6) $v=0$, si vede che si può ritenere:

$$\Delta' = \frac{1}{\rho} \quad per \quad v=0,$$

ossia:

$$(\rho\Delta')_{v=0} = 1.$$

Questa derivata rapporto ad u ci dà:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0} = 0,$$

e dalla (7*) risulta quindi:

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right)_{v=0} = 0.$$

Procedendo ora con metodo induttivo, supponiamo d'aver verificato che fino all'ordine $n-1$ sussistono le formole:

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right)_{v=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial v^2}\right)_{v=0} = 0, \ldots \left(\frac{\partial^{n-1}\Delta}{\partial^{n-1}v}\right)_{v=0} = 0$$

$$(\beta) \quad (\Delta')_{v=0} = \left(\frac{1}{\rho}\right)_{v=0}, \quad \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial v}\right)_{v=0} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)_{v=0} \cdots \left(\frac{\partial^{n-2}\Delta'}{\partial v^{n-2}}\right)_{v=0} = \left(\frac{\partial^{n-2}}{\partial v^{n-2}}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)_{v=0}$$

e dimostriamo che si verificheranno anche le due per l'ordine seguente:

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{\partial^n\Delta}{\partial v^n}\right)_{v=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{n-1}\Delta'}{\partial v^{n-1}}\right)_{v=0} = \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial v^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)_{v=0}.$$

Intanto dalle (β) si ha subito:

$$(\rho\Delta')_{v=0} = 1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial v}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0} = 0, \ \ldots, \quad \left(\frac{\partial^{n-2}}{\partial v^{n-2}}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0} = 0,$$

e, derivando rapporto ad u, ne seguono le altre:

$$(\beta') \quad \left(\frac{\partial}{\partial u}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0}=0,\ \left(\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0}=0,\ldots\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial u\partial v^{n-2}}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0}=0.$$

L'equazione (6) di Gauss, derivata $n-1$ volte rapporto e postovi poi $v=0$, ci dà per le (α), (β):

$$\left(\frac{\partial^{n-1}\Delta'}{\partial v^{n-1}}\right)_{v=0}=\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial v^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)_{v=0},$$

che è appunto la seconda (γ). Dalla ultima segue anche per le (β):

$$\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial v^{n-1}}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0}=0$$

e quindi:

$$\left(\frac{\partial^{n}}{\partial u\partial v^{n-1}}\log(\rho\Delta')\right)_{v=0}=0.$$

Infine derivando la (7*) $n-1$ volte rapporto a v e ponendovi $v=0$, coll'aver riguardo alle precedenti, verifichiamo anche la prima delle (γ):

$$\left(\frac{\partial^{n}\Delta}{\partial v^{n}}\right)_{v=0}=0.$$

Il nostro teorema C) è così nuovamente dimostrato.

§ 6.

Deformazioni dell'elicoide rigata d'area minima.

Vogliamo ora dimostrare come per particolari superficie rigate il teorema C) sussista in tutta generalità senza restringersi al caso analitico. Scegliamo per questo esempio una classe a più riguardi notevole di superficie rigate, quella delle superficie applicabili sull'elicoide rigata d'area minima nello spazio euclideo, e più in generale in uno spazio di curvatura costante, positiva o negativa. La detta elicoide è generata da una retta dotata di movimento elicoidale attorno ad un asse a cui si appoggia normalmente. Si genera così in tutti i casi una superficie d'area minima, che nel caso euclideo ha l'elemento lineare:

$$(9) \qquad ds^2=du^2+\left(u^2+\frac{1}{T^2}\right)dv^2$$

essendo $\frac{1}{T}$ il parametro del movimento elicoidale. Nello spazio ellittico invece, di curvatura $K_0 = +1$, la superficie ha l'elemento lineare:

$$ds^2 = du^2 + \left(\cos^2 u + \frac{\operatorname{sen}^2 u}{T^2}\right) dv^2, \tag{10}$$

e nell'iperbolico, di curvatura $K_0 = -1$, l'altro:

$$ds^2 = du^2 + \left(\cosh^2 u + \frac{\operatorname{senh}^2 u}{T^2}\right) dv^2. \tag{11}$$

Le generatrici $v = \text{cost}$ e le loro traiettorie ortogonali $u = \text{cost}$ (eliche) sono le assintotiche della superficie.

In tutti tre i casi si verifica subito che la seconda delle equazioni (D) di Darboux diventa:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

onde integrando:

$$v = f(\alpha) + F(\beta). \tag{12}$$

Di qui, con una considerazione semplicissima, segue subito in tutta generalità il teorema C) pel caso attuale. Suppongasi infatti che sopra una superficie S applicabile sul nostro elicoide *una* delle generatrici, p. e. la $v = 0$, si sia conservata rettilinea (assintotica) e coincida poniamo colla $\alpha = 0$. Avremo dunque dalla (12):

$$f(0) + F(\beta) = 0,$$

dopo di che la (12) si scrive:

$$v = f(\alpha) - f(0)$$

e dimostra che tutte le linee $v = \text{cost}$ sono assintotiche e quindi rettilinee, c. d. d.

A riguardo di queste superficie aggiungiamo le osservazioni seguenti.

Le loro deformate rigate sono le superficie luogo delle binormali alle curve di torsione costante $\frac{1}{T}$; quelle invece in cui una e quindi tutte le generatrici hanno perduta la forma rettilinea sono le evolute delle superficie a curvatura costante con assintotiche reali. Il problema di deformare queste superficie in modo da far loro acquistare due prefissate curve per assintotiche conduce sempre alla medesima equazione:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\partial\beta} = \operatorname{sen}\omega \text{ (*)}$$

da integrarsi con valori prefissati per ω lungo due caratteristiche.

Infine osserviamo che l'intima ragione del fatto perchè i problemi della deformazione della superficie (9) nello spazio euclideo, o della (10) nello spazio elittico, o infine della (11) nell'iperbolico, sono problemi equivalenti, dipende dalla circostanza seguente. Queste superficie sono rappresentabili l'una sull'altra, con semplici formole che qui omettiamo, in guisa che si corrispondono le linee assintotiche attuali (u, v) ed insieme le loro *linee geodetiche*. Secondo i risultati e le denominazioni introdotte in una mia Nota nei Rendiconti dei Lincei (**), esse sono quindi *superficie coniugate in deformazione*; si corrispondono cioè anche tutti i loro sistemi di assintotiche virtuali. In particolare ad ogni superficie rigata applicabile sull'elicoide rigata d'area minima nello spazio euclideo ne corrisponderà una analoga nello spazio ellittico e nell'iperbolico, ciò che dà luogo ad una relazione corrispondente fra le curve a torsione costante nei due spazî.

(*) Però se siamo nello spazio ellittico ed è $\frac{1}{T^2} = 1$, l'equazione corrispondente è semplicemente $\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0$. Si hanno allora le superficie a curvatura nulla in geometria ellittica (V. *Lezioni*, vol. I, § 219-220).

(**) *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie* (aprile 1902).

§ 7.

Reti di Tchebychef.

Venendo da ultimo al problema delle reti di Tchebychef distese sopra una superficie di dato elemento lineare (4), osserviamo che la proprietà caratteristica di una rete siffatta (α, β) consiste in questo che nella corrispondente forma (1) del ds^2 si ha:

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = 0, \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0.$$

Ne segue allora infatti:

$$\frac{\partial E_1}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} = 0$$

e, cangiando i parametri α, β si può rendere:

$$E_1 = 1, \quad G_1 = 1,$$

dopo di che il ds^2 riveste la forma caratteristica delle reti di Tchebychef:

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2.$$

Ora se nelle formole (a) di Christoffel poniamo $\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = 0$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 = 0$, ne otteniamo le due equazioni a derivate parziali per u, v:

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right) + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} \right) + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0. \end{cases}$$

Queste sono appunto le formole di Servant: esse *caratterizzano* le reti (α, β) di Tchebychef, precisamente come le (D) di Darboux i sistemi di assintotiche virtuali; poichè se le fun-

zioni *indipendenti* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ soddisfano le (13), dal paragone colle formole (a) di Christoffel segue ora:

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = 0, \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\}_2 = 0.$$

Supponiamo che si cerchi sopra la superficie S una rete di Tchebychef a cui appartengano due curve prefissate C, C', incrociantisi in un punto O di S, e sulle quali debbano venire rispettivamente a distendersi due fili $\beta = 0$, $\alpha = 0$ della rete. Conosceremo così lungo queste due caratteristiche i valori delle funzioni u, v di α, β rispettivamente: i teoremi generali ricordati al § 3 ci assicurano dell'esistenza della soluzione cercata ed, almeno nel caso analitico, della sua unicità. Questa soluzione (u, v) delle equazioni (13) ci dà la rete di Tchebychef domandata, onde segue il teorema D).

Infine osserviamo che nel caso delle superficie pseudosferiche essendo $\rho = \text{cost}$, le equazioni D) di Darboux vengono a coincidere colle (13) di Servant. Ciò è dovuto alla circostanza ben nota che per le superficie pseudosferiche ogni sistema di assintotiche virtuali è una rete di Tchebychef e viceversa.

Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona cilindrica retta.

Nota dell'Ing. ENRICO GATTI.

(Con una Tavola).

1. — Sia una corona cilindrica retta rifrangente immersa nell'aria. Le circonferenze di base Ω, Ω' (Fig. 1) della sezione retta di simile solido si suppongano avere raggi di lunghezze rispettive b, a, tali che il rapporto $\frac{b}{a}$ risulti finito e maggiore dell'unità e sieno inoltre $n > 1$ e θ l'indice di rifrazione e l'angolo limite relativi al solido stesso.

Assunti AY ed AX come direzioni positive di due assi cartesiani ortogonali, si consideri un punto qualunque B, della circonferenza Ω, come punto di incidenza di raggi i quali si supporranno sempre in quella sezione normale.

Condotta la normale AN e la tangente LL' a quella circonferenza nel punto B, si determini il raggio rifratto BE corrispondente all'incidente VB, appartenente al quadrante LBN, e si indichi con r l'angolo di rifrazione ABE.

In quanto segue si ammetteranno come positivi gli angoli di rifrazione, come r, dovuti a raggi incidenti nel quadrante come LBN: negativi gli angoli di rifrazione relativi ai raggi rifratti che cadono nel quadrante come LBA.

Le proprietà di questi ultimi raggi potranno dedursi da quelle proprie ai raggi appartenenti al quadrante come ABL', scambiando nelle relazioni che le determinano r in $-r$.

Indicate ordinatamente con p e con q le coordinate BC, CA del punto B, nelle ipotesi fatte, le equazioni:

$$y = \frac{p \cos r + q \operatorname{sen} r}{q \cos r - p \operatorname{sen} r}(x - q) + p$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

rappresenteranno rispettivamente la retta BE e la circonferenza Ω' riferiti, tali luoghi, agli assi coordinati scelti.

Le radici comuni a quelle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{b\,\mathrm{sen}\,r(p\cos r + q\,\mathrm{sen}\,r) \pm (q\cos r - p\,\mathrm{sen}\,r)\sqrt{a^2 - b^2\mathrm{sen}^2 r}}{b} \\ y &= \frac{-b\,\mathrm{sen}\,r(q\cos r - p\,\mathrm{sen}\,r) \pm (p\cos r + q\,\mathrm{sen}\,r)\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{sen}^2 r}}{b} \end{aligned}$$

porgeranno le coordinate dei punti di incontro, del raggio rifratto considerato, colla circonferenza Ω'.

Tali punti saranno reali e distinti, reali e coincidenti, oppure complessi coniugati secondochè si avrà:

$$(2)\qquad a \gtreqless b\,\mathrm{sen}\,r$$

od ancora secondochè:

$$\frac{a}{\cos r} \gtreqless b\,\mathrm{tang}\,r.$$

Gli è perciò che condotta da A (Fig. 1), nel quadrante ABL', la retta AS tale che l'angolo BAS sia uguale ad r, e determinati i punti F, H d'incontro di essa retta colle tangenti BL', GH alle circonferenze Ω, Ω' nei punti rispettivi di loro intersezione B, G, col raggio AN, la condizione (2) riesce espressa da:

$$(2')\qquad AH \gtreqless BF.$$

Se si supporrà che sia $r = \theta$ la condizione da soddisfarsi dai raggi b, a, per un dato indice di rifrazione, perchè il raggio rifratto corrispondente all'incidente LB intersechi la circonferenza Ω' in due punti reali e distinti, reali e coincidenti o complessi coniugati, sarà la prima, la seconda, oppure la terza di quelle racchiuse nella relazione (2):

$$\frac{b}{a} \lesseqgtr n.$$

2. — Dei due punti reali e distinti in cui un raggio rifratto come BE (Fig. 1) taglia la circonferenza Ω' quando sia:

$$a > b\,\mathrm{sen}\,r$$

non potrà essere punto di incidenza di tal raggio che quello più prossimo al punto B, ossia quello che, con questo punto, si tro-

verà dalla stessa banda della polare del punto stesso rispetto alla circonferenza accennata.

Volendo definire algebricamente quale di quei due punti debba essere considerato come punto di incidenza, conviene — per quanto occorrerà più innanzi — esaminare l'equazione risultante dalla somma delle relazioni (1) moltiplicate la prima per q e la seconda per p.

Così operando si ottiene:

$$qx + py = b(b\,\mathrm{sen}^2 r \pm \cos r \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{sen}^2 r}). \tag{3}$$

L'equazione, così dedotta, vale — indipendentemente dal problema fisico — qualunque sia la retta come BE passante per B ed appartenente al quadrante come ABL': i valori che essa porgerà per $qx + py$, al variare di r, saranno reali od immaginarî con quelli di x e di y (1), e varranno, manifestamente, per i punti di intersezione, colla circonferenza Ω', della retta come BE' del quadrante come LBA, corrispondente all'angolo $-r$.

Si supponga verificata l'una o l'altra delle condizioni racchiuse nella (2):

$$a \geqq b\,\mathrm{sen}\, r.$$

Quando fosse:

$$a > b\,\mathrm{sen}\, r,$$

la (3) rappresenterebbe l'equazione complessiva di due rette, reali e distinte, normali alla retta come AB e passanti l'una per l'uno e l'altra per l'altro dei due punti, reali e distinti in cui la retta come $\begin{matrix} BE \\ BE' \end{matrix}$ corrispondente allo stesso angolo $r \begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix}$, interseca la circonferenza Ω' e situate, tali rette, da bande opposte della polare del punto B rispetto alla circonferenza stessa.

Se si avesse:

$$a = b\,\mathrm{sen}\, r$$

simili rette coinciderebbero, con tale polare, al coincidere di quei punti di intersezione.

Osservando inoltre che nella (3) i valori di:

$$b\,\mathrm{sen}^2 r \pm \cos r \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{sen}^2 r}$$

sono:

l'uno positivo e l'altro nullo per $a = b\,\mathrm{tang}\, r$; ambedue positivi

se $b \operatorname{sen} r < a < b \operatorname{tang} r$; l'uno positivo e l'altro negativo se $a > b \operatorname{tang} r$; si deduce che i due valori reali e distinti del segmento tagliato sull'asse coordinato AY da ciascuna delle rette rappresentate dall'equazione (3), nella supposizione:

$$a > b \operatorname{sen} r,$$

saranno per $\begin{matrix} p>0 \\ p<0 \end{matrix}$:

ambedue $\begin{matrix} \text{positivi} \\ \text{negativi} \end{matrix}$ quando fra i segmenti come AH, BF (Fig. 1), corrispondenti all'angolo r scelto, ed il raggio a della circonferenza Ω' passa la relazione (2)':

$$AH > BF > a;$$

l'uno $\begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix}$ e l'altro nullo se:

$$BF = a;$$

l'uno $\begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix}$ e l'altro $\begin{matrix} \text{negativo} \\ \text{positivo} \end{matrix}$ per:

$$BF < a.$$

Occorrendo stabilire, nella supposizione fatta, quale delle due rette reali e distinte, rappresentate dalla equazione (3), sia dalla stessa banda della polare che le separa, si noti che indicate genericamente con H le distanze da B dell'uno e dell'altro dei punti reali in cui una retta come BE taglia la circonferenza Ω', e con x, y le coordinate tanto dell'uno quanto dell'altro di essi punti, si ha:

$$H^2 = a^2 + b^2 - 2(py + qx).$$

Delle due rette in esame sarà quindi col punto B dalla stessa banda della polare accennata, quella per la quale la (3) fornirà per $qx + py$ il maggior valore.

Assunto adunque per r un tale valore che sia:

$$a > b \operatorname{sen} r$$

e considerando il problema fisico, dalle oservazioni esposte, si deduce che le coppie di punti reali di incidenza colla circonferenza Ω' di raggi rifratti uscenti da B ed ai quali corrisponde

lo stesso angolo di rifrazione — positivo o negativo — si troveranno su quella retta di ciascuna coppia — rappresentata dalla (3) — per la quale $qx + py$ ha valore positivo, ossia su quella retta la quale taglia sull'asse coordinato AY un segmento del segno di p. Che, se ambo i valori di $qx + py$ fossero positivi per lo stesso valore — positivo o negativo — dell'angolo di rifrazione, allora, fra essi, sarebbe da scegliersi quello di maggior valore.

3. — Si conducano da B (Fig. 1) le tangenti alla circonferenza Ω' e si indichino con K e K' i punti di loro contatto.

I valori di $qx + py$ relativi a punti come K, K' e come G si possono trarre dalla (3) sostituendo a sen$r$ i valori $\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}$, oppure 0, secondochè sia questione di un punto come K, o K', oppure di un punto come G.

Detti rispettivamente P e P_1 tali valori, fatta la sostituzione accennata, risulta:

pei punti come K, K' $\quad P = a^2$
e pei punti come G $\quad P_1 = \pm ab.$

I raggi rifratti, che si possono immaginare uscenti da B ed incidenti sulla circonferenza Ω', sono compresi nell'angolo come KBK', e siccome ciascuna retta reale — determinata dalla (3) — la quale contiene i noti punti di incidenza, è (ff. 2) racchiusa fra le rette come:

$$P = a^2, \qquad P_1 = ab,$$

così, qualunque sia il punto B, i valori di $qx + py$ relativi ai diversi punti di incidenza di quei raggi rifratti colla circonferenza Ω', saranno compresi fra ab ed a^2.

Il valore stesso sarà uguale ad ab per il punto di incidenza corrispondente ad un angolo di rifrazione nullo e ad a^2 pei punti di incidenza come $\frac{K}{K'}$ quando per lo stesso valore — positivo o negativo — dell'angolo di rifrazione sia possibile l'uguaglianza $a = b$ sen r.

4. — Si considerino ora (Fig. 1) tutti i raggi incidenti nel punto scelto B. Fra questi gioverà distinguere, per l'esame che

se ne farà in seguito, quelli i quali dànno luogo a raggi emergenti dopo riflessione dei raggi rifratti corrispondenti, dagli altri pei quali l'emergenza si compie senza la riflessione accennata. Si dirà che questi ultimi originano raggi direttamente emergenti dalla circonferenza Ω o dalla Ω'.

Si osservi intanto che se accadrà che il raggio come BK possa essere considerato come raggio rifratto, l'incidente che lo origina potrà comprendersi fra quelli che dànno luogo a raggi direttamente emergenti dalla circonferenza Ω', perchè, in tal caso, il raggio rifratto riflettendosi nel suo punto di tangenza colla circonferenza Ω' riesce per diritto col suo raggio riflesso.

Per ottenere l'accennata distinzione, si congiunga il punto di incidenza B con un punto D scelto sull'arco come KG per modo che l'angolo ABD risulti minore dell'angolo limite θ. Tale congiungente la si potrà ritenere come un raggio rifratto dovuto ad un certo raggio incidente nel quadrante LBN e sarà D (ff. 2) il punto di incidenza di quel raggio colla circonferenza Ω'.

Condotta la normale AQ alla circonferenza Ω' nel punto D ed indicati rispettivamente con r ed r' gli angoli ABD, BDQ, dal triangolo BAD, si trae:

$$\operatorname{sen} r' = \frac{b}{a} \operatorname{sen} r, \tag{4}$$

sicchè sarà:

$$r' > r.$$

Quando sia $\operatorname{sen} r = \frac{a}{nb}$ è (4) $r' = \theta$.

Se si prolungherà la tangente BK in BW e si considererà BW come un raggio incidente, sarà il raggio rifratto corrispondente BM quello che determinerà un angolo come $r' = \theta$ e, perciò, sarà tale il valore dell'angolo BOQ' fatto dal raggio BM colla normale alla circonferenza Ω' nel punto di incidenza O di quel raggio colla circonferenza stessa.

Ne segue che:

I raggi incidenti nel quadrante LBN, i quali dànno luogo a raggi emergenti direttamente da Ω', sono quelli del fascio WBN, eccettuato il raggio WB pel quale si ha riflessione del raggio rifratto corrispondente nel suo punto di incidenza colla circonferenza Ω'.

Il rapporto $\frac{b}{a}$, dei raggi delle basi della sezione normale considerata, può ammettersi maggiore, uguale oppure minore del valore n dell'indice di rifrazione.

Si esaminino partitamente tali casi, dando, nelle figure 2-3, al punto B ed ai raggi WB, BK, BK', BO i significati ammessi pel punto e raggi omonimi della figura 1.

I. — Quando fosse (Fig. 1):

$$\frac{b}{a} > n$$

risulterebbe l'angolo $ABK < \theta$.

Supposto tale valore per l'angolo ABK, si potrà considerare il raggio BK come raggio rifratto e costruire il raggio incidente BW, che gli corrisponde. In tale caso, prescindendo dai raggi del fascio come NBW già esaminati, dei rimanenti raggi incidenti nel quadrante LBN:

a) quelli compresi nell'angolo come W_1BW, eccettuato W_1B, dànno luogo a raggi rifratti i quali si riflettono nei punti di loro incidenza colla circonferenza Ω' lungo l'arco KO;

b) quelli compresi nell'angolo come LBW_1 originano raggi direttamente emergenti dalla circonferenza Ω.

II. — Se

$$\frac{b}{a} = n$$

l'angolo come ABK riesce uguale all'angolo θ.

Si ammetta (Fig. 2) tale valore pel rapporto $\frac{b}{a}$. Allora il raggio come BK, considerato come rifratto, deriva dall'incidente come LB, il quale dà quindi luogo ad un raggio direttamente emergente dalla circonferenza Ω.

Agli altri raggi incidenti nell'angolo come LBW, corrispondono raggi rifratti i quali si riflettono nei loro punti di incontro colla circonferenza Ω' lungo l'arco come KO.

III. — Supposto (Fig. 3):

$$\frac{b}{a} < n$$

l'angolo come ABK risulta maggiore dell'angolo θ.

Condotta allora dal punto B nel quadrante come ABL' il raggio BO_1, tale che sia l'angolo $ABO_1 = \theta$, il punto O_1 — di incidenza di tal raggio — riesce compreso fra i punti O e K, ed al raggio BO_1 considerato come rifratto corrisponde l'incidente come LB.

I raggi incidenti nell'angolo come LBW, dànno luogo a raggi rifratti i quali si riflettono nei loro punti di incontro colla circonferenza Ω' lungo l'arco OO_1.

Quanto venne detto pei raggi incidenti nel punto B ed appartenenti al quadrante come LBN, conviene ai raggi del quadrante come NBL' — i quali sono simmetrici ai primi rispetto alla normale AN — sicchè prendendo a considerare fra i raggi incidenti nel punto B quelli i quali dànno luogo a raggi emergenti dalla base maggiore della sezione retta considerata dopo riflessione sulla minore, si potrà concludere che qualunque sia il valore finito del rapporto $\frac{b}{a}$ esisteranno due fasci di raggi incidenti, similmente situati dall'una e dall'altra banda della normale alla base maggiore nel punto di incidenza B, che originano raggi emergenti aventi la proprietà accennata.

Tracciati poi (Fig. 1-2-3) i raggi $BW', BW_1', BO' BO_1'$ simmetrici, rispetto alla normale NB, ai raggi BW, BW_1, BO, BO_1 si deve aggiungere:

1° Che pel valore del rapporto $\frac{b}{a}$ maggiore dell'indice di rifrazione, i raggi incidenti, aventi quella proprietà, sono quelli dei fasci (Fig. 1) compresi negli angoli come WBW_1, $W'BW_1'$, eccettuati essendo i raggi come $WB, W'B$, e che, pel valore di quel rapporto uguale o minore dell'indice stesso (Fig. 2-3), i raggi aventi simili proprietà sono quelli dei fasci come $LBW, L'BW'$ con esclusione dei raggi $LB, L'B$ (Fig. 2) quando sia $\frac{b}{a} = n$;

2° Che, pei due primi valori accennati pel rapporto $\frac{b}{a}$, i punti di riflessione, sulla base minore della sezione retta considerata, sono quegli degli archi (Fig. 1-2) come $KO, K'O'$, esclusione fatta (ff. 4) pei punti K, K', mentre nel terzo caso sono tali tutti i punti (Fig. 3) degli archi come OO_1, $O'O_1'$.

5. — Sia (Fig. 4) la sezione normale di basi Ω, Ω' della nota corona cilindrica retta: si assumano, così come venne fatto sin qui, AY ed AX come direzioni positive di due assi cartesiani ortogonali ed il punto qualunque B della circonferenza Ω come punto di incidenza di raggi posti nella sezione stessa, e si dicano ancora p e q l'ordinata BC e l'ascissa AC di tal punto.

Si considerino, nel solito quadrante LBN, un raggio incidente VB, il raggio corrispondente BE e si indichi con r l'angolo di rifrazione ABE.

Condotta da A, nel piano della sezione, la normale AR al raggio incidente, sia P il suo punto d'incontro col raggio rifratto BE. A ciascun raggio come BE corrisponderà un punto come P e poichè l'angolo BAP ha per complemento l'angolo d'incidenza VBN i diversi triangoli come ABP daranno luogo alla relazione:

$$\frac{\operatorname{sen} r}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{sen}^2 r}} = \frac{AP}{BP}. \tag{5}$$

Indicati rispettivamente con α, β gli angoli ABC, CBE, e con x, y le coordinate del punto P si osservi che:

$$AP = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad BP = \sqrt{(x-q)^2 + (p-y)^2}$$

e che essendo:

$$\operatorname{sen} r = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

e

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{q}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{p}{b},$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{x-q}{\sqrt{(x-q)^2 + (p-y)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{p-y}{\sqrt{(x-q)^2 + (p-y)^2}},$$

è:

$$\operatorname{sen} r = \frac{px - qy}{b\sqrt{(q-x)^2 + (p-y)^2}}.$$

Sostituendo nella (5) a $\operatorname{sen} r$, AP, BP i valori trovati, tenuto presente che $b^2 = p^2 + q^2$, a riduzioni fatte sarà l'equazione:

$$(py + qx)^2 [(p-y)^2 + (q-x)^2] = n^2 (x^2 + y^2)(px - qy)^2 \tag{6}$$

quella rappresentante il luogo dei punti come P.

Condotte dal punto B (Fig. 4) le tangenti alla circonferenza Ω' ed indicati con K e K' i punti di loro contatto e con O ed O' i punti di incidenza, colla circonferenza stessa, dei raggi rifratti BO, BO' corrispondenti ai raggi WK, $W'K'$ supposti incidenti, si ricerchino, ove esistano, quei punti d'incontro del luogo rappresentato dalla equazione (6) colla circonferenza Ω' i quali sono compresi negli archi come KO, $K'O'$ e tali da potersi considerare come punti di incidenza di raggi rifratti uscenti dal punto B.

Perciò ricordando le relazioni:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad . \quad p^2 + q^2 = b^2$$

si noti che riuscendo:

$$(px - qy)^2 = a^2b^2 - 2(py + qx)^2$$

e

$$(p - y)^2 + (q - x)^2 = b^2 + a^2 - 2(py + qx)$$

l'equazione (6) si trasforma nella:

$$(7) \quad 2(py + qx)^3 - (a^2 + b^2 + n^2a^2)(py + qx)^2 + n^2a^4b^2 = 0,$$

la quale rappresenta tre rette di equazione:

$$(8) \qquad py + qx = K,$$

ove si indichino genericamente con K le radici della (7) risoluta rispetto $py + qx$.

Se quindi vi saranno punti reali lungo gli archi come KO, $K'O'$, appartenenti al luogo (6), questi riusciranno compresi fra quelli di intersezione delle rette come la (8) colla circonferenza Ω'.

Intanto essendo l'equazione (7) di grado impari ed il termine $n^2a^4b^2$ positivo, l'equazione stessa ammetterà almeno una radice reale e negativa. La retta determinata dalla (8) ponendo per K tale soluzione non risponderà in nessun caso (ff. 2) al problema fisico.

Per giudicare delle soluzioni rimanenti, torna utile calcolare i valori di $py + qx$ relativi ai punti come K ed O (Fig. 4) ed al punto come O_1 quale venne definito nella figura 3.

Tali valori, i quali varranno per punti come K', O' (Fig. 4),

O_1' (Fig. 3), si otterranno sostituendo nella (3) ed a sen$r$ i valori $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{nb}$, $\frac{1}{n}$, secondochè si tratterà di un punto come K, di un punto come O, oppure di un punto come O_1.

Il valore di $py + qx$ pei punti come K venne determinato (ff. 3) dalla:

$$P = a^2 ,$$

quelli relativi ai punti come O ed O_1 inclinati rispettivamente con A ed A_1 sono espressi da:

$$A = \frac{a}{n^2}\left(a \pm \sqrt{(b^2n^2 - a^2)(n^2 - 1)}\right) \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{b}{n^2}\left(b \pm \sqrt{(a^2n^2 - b^2)(n^2 - 1)}\right). \tag{10}$$

Volendosi ritenere i punti come O ed O_1 e come O' ed O'_1 quali punti di incidenza, colla circonferenza Ω', di raggi rifratti divergenti da un punto come B, nel radicale, che compare nei valori reali A ed A, sarà da tener conto (ff. 2) del segno positivo.

In tale ipotesi si sostituiscano a $py + qx$ nella equazione (7) i valori P, A, A_1, sopra stabiliti.

Come risultato della sostituzione di P si trova l'espressione:

$$a^4(1 - n^2)(a^2 - b^2)$$

la quale ha valore manifestamente positivo.

Per sostituire A, si ponga:

$$\sqrt{(b^2n^2 - a^2)(n^2 - 1)} = H;$$

allora:

$$A = \frac{a}{n^2}(a + H)$$

e il primo membro della (7) potrà scriversi colla:

$$\frac{a^2}{n^6}[(a + H)^2\{2a(a + H) - n^2(b^2 + a^2 + n^2a^2)\} + n^8a^2b^2]. \tag{11}$$

Notando che:

$$(a + H)^2 = 2n^2A - n^2(a^2 + b^2) + b^2n^4;$$

a sostituzioni e riduzioni fatte nella (11), il risultato assume la forma:

$$(12) \qquad \frac{a^2}{n^2}(a^2+b^2-2A)[a^2(1+n^2)+b^2(1-n^2)-2A].$$

Ma siccome (ff. 3) si ha:

$$ab > A > a^2,$$

e quindi riesce:

$$a^2+b^2-2A>0,$$

così il segno dell'espressione (12) dipenderà da quello della:

$$(13) \qquad a^2(1+n^2)+b^2(1-n^2)-2A.$$

Il valore assunto dalla (13) è positivo, nullo o negativo, secondochè sia:

$$(14) \qquad n^2 \lesseqgtr \frac{a^2+b^2-2A}{b^2-a^2}.$$

Quando fosse $A=a^2$ risulterebbe $n^2=1$ e la (13) acquisterebbe valore nullo: per $A \lesseqgtr a^2$ si avrebbe ordinatamente:

$$\frac{a^2-b^2-2A}{b^2-a^2} \gtreqless 1.$$

Nel caso in esame è (ff. 3) $A>a^2$ e quindi, riuscendo pel valore assunto per l'indice di rifrazione verificata la terza fra le condizioni racchiuse nella (14), l'espressione (13) e di conseguenza il risultato (12) della sostituzione di A nella (7) assumerà valore negativo.

Finalmente, la sostituzione del valore A_1 nella (7), quando si faccia nella (10):

$$\sqrt{(a^2n^2-b^2)(n^2-1)}=H_1$$

e si tenga presente che:

$$(b+H_1)^2=2n^2A_1-n^2(a^2+b^2)+a^2n^4,$$

conduce alla espressione:

$$\frac{b^2}{n^2}(a^2+b^2-2A_1)^2,$$

la quale ha valore positivo.

I risultati ottenuti mostrano come fra la coppia di valori A, P od ancora fra la coppia A, A_1, cade una radice reale e positiva della equazione (7) ed una soltanto perchè, altrimenti, ne dovrebbero cadere tre, la qual cosa è esclusa dall'esistenza d'una radice negativa.

Ricordando ora che per lo stesso angolo di rifrazione — positivo o negativo — vi è riflessione di raggi rifratti come $\frac{BE}{BE'}$ lungo l'arco come $\frac{KO}{K'O'}$ quando sia (Fig. 1-2) il rapporto $\frac{b}{a}$ maggiore od uguale all'indice di rifrazione, e riflessione lungo l'arco come $\frac{OO_1}{O'O_1'}$ (Fig. 3) se $\frac{b}{a}$ sia minore dell'indice stesso, dai risultati accennati si deduce che, qualunque sia l'ammesso valore finito del rapporto $\frac{b}{a}$, sempre un punto come P, ed uno solo, cadrà sulla porzione dell'arco (Fig. 4) come $\frac{KO}{K'O'}$ lungo la quale — dipendentemente dal valore del rapporto $\frac{b}{a}$ — si ha riflessione dei raggi rifratti come $\frac{BE}{BE'}$.

Determinato il valore K_1 della radice dell'equazione (7) compresa fra le coppie di valori A, P od A, A_1 — dipendentemente dal valore del rapporto $\frac{b}{a}$ — saranno determinati i punti di intersezione della retta (8) colla circonferenza Ω' i quali sono punti di incidenza di raggi rifratti che ivi si riflettono, e tali che le normali nei punti stessi, a quella circonferenza, riescono perpendicolari al corrispondente raggio incidente generatore.

Supposto (Fig. 4) che zz' sia tale retta, indicato con $\frac{\pi}{\pi'}$, il punto d'intersezione suo coll'arco come $\frac{KO}{K'O'}$ e costrutto corrispondentemente al raggio rifratto $\frac{B\pi}{B\pi'}$ il raggio riflesso $\frac{\pi Q}{\pi' Q'}$ risulta il raggio emergente $\frac{Qv_1}{Qv_1'}$ per diritto col proprio incidente $\frac{vB}{v'B}$.

Risolvendo l'equazione (3):

$$K_1 = b(b \operatorname{sen}^2 r + \cos r \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 r})$$

rispetto $\operatorname{sen}^2 r$ si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 r = \frac{b^2a^2 - K_1^2}{b^2(b^2 + a^2 - 2K_1)} \tag{15}$$

nella quale riesce $\operatorname{sen}^2 r > 0$ perchè è (ff. 3):

$$ab > K_1 > a^2$$

e $\operatorname{sen}^2 r < 1$ perchè a ciò basta che sia $(K_1 - b^2)^2 > 0$.

Si può quindi concludere che:

Di tutti i raggi situati nel piano della sezione normale di una corona cilindrica retta rifrangente, i quali raggi incidono in un punto qualsiasi della base maggiore, tre ve ne sono i quali si trasmettono come se il mezzo rifrangente non esistesse. L'uno, come è noto, corrisponde alla normale comune alle due basi di quella sezione nel punto di incidenza: gli altri due sono similmente posti l'uno, dall'una, e l'altro dall'altra banda della normale stessa e sono definiti per mezzo dei corrispondenti raggi rifratti dei quali lo stesso angolo di rifrazione — positivo per l'uno, negativo per l'altro — è determinato dalla relazione (15).

6. — La proprietà ora enunciata concede di determinare una particolarità della rifrazione dovuta ad un segmento di cilindro retto del quale la saetta sia minore del raggio del cilindro al quale il segmento appartiene. Si tracci la tangente SS' nel punto π (Fig. 4) alla circonferenza Ω': se si riterrà tale tangente come traccia di un piano parallelo all'asse della corona cilindrica, il segmento circolare $SS'B$, di vertice J, sarà la sezione retta del segmento cilindrico staccato dalla corona da quel piano e, di tutti i raggi incidenti nel punto particolare B al raggio vB, rimarrà la proprietà (ff. 5) per esso determinata. Simile proprietà varrà pure pel punto Q simmetrico del punto B rispetto al diametro AJ della figura.

Il punto B e, quindi, il punto Q, appariranno determinati quando si noti che l'angolo BAJ ha per complemento l'angolo di incidenza vBN definito dalla (15).

$$\operatorname{sen} vBN = n \operatorname{sen} r.$$

Condotto da π nel piano della sezione il raggio $\begin{matrix}\pi B_1\\ \pi B_2\end{matrix}$, tale che l'angolo $\begin{matrix}B_1\pi J\\ B_2\pi J\end{matrix}$ sia uguale all'angolo θ, si osservi che se la proprietà del punto $\begin{matrix}B\\ Q\end{matrix}$ potesse appartenere ad altri punti dell'arco $\begin{matrix}S'J\\ SJ\end{matrix}$, dessa non potrebbe riscontrarsi che per i raggi dell'arco $\begin{matrix}S'B_1\\ SB_2\end{matrix}$ e per i raggi incidenti in quei punti i quali, come $\begin{matrix}vB\\ v_1Q\end{matrix}$, fossero paralleli alla base $S'S$ del segmento ed ammettessero raggi rifratti convergenti in π.

Detto R_1 il punto di intersezione della retta vv_1 colla retta $A\pi$, poichè si ha:

$$\text{sen}AB\pi = \frac{a}{b}\,\text{sen}B\pi R_1$$

$$\text{sen}ABR_1 = \frac{AR_1}{b}$$

mentre deve essere:

$$\text{sen}ABR_1 = n\,\text{sen}AB\pi,$$

ponendo mente al modo di variare dell'angolo come $B\pi R_1$ e del segmento come AR_1 allorchè tali grandezze si considerano relativamente a ciascun punto dell'arco come $\begin{matrix}S'B_1\\ SB_2\end{matrix}$, si deduce che gli angoli, come $AB\pi$, ABR_1, variano in senso opposto l'uno rispetto l'altro e che, quindi, a nessun raggio parallelo ad SS' incidente in un punto dell'arco come $\begin{matrix}S'B_1\\ SB_2\end{matrix}$ — che non sia il punto $\begin{matrix}B\\ Q\end{matrix}$ — potrà corrispondere un raggio rifratto passante pel punto π.

Sull'arco circolare, adunque, appartenente alla sezione normale d'un segmento di cilindro retto avente una saetta minore del raggio del cilindro al quale il segmento appartiene, esistono due punti, simmetricamente posti rispetto il diametro della figura, nei quali un raggio incidente nell'uno, situato nel piano della sezione e parallelo alla base del segmento, emerge dall'altro nello stesso modo che se il mezzo rifrangente non esistesse.

Dall'Istituto Professionale Omar — Novara.

Fig. 1.

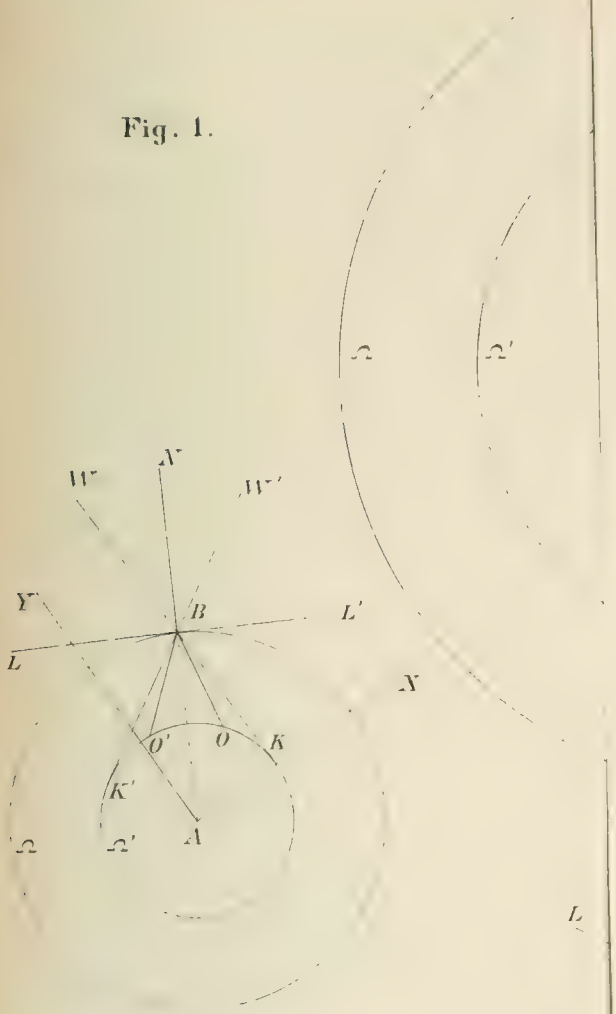


Fig. 2.

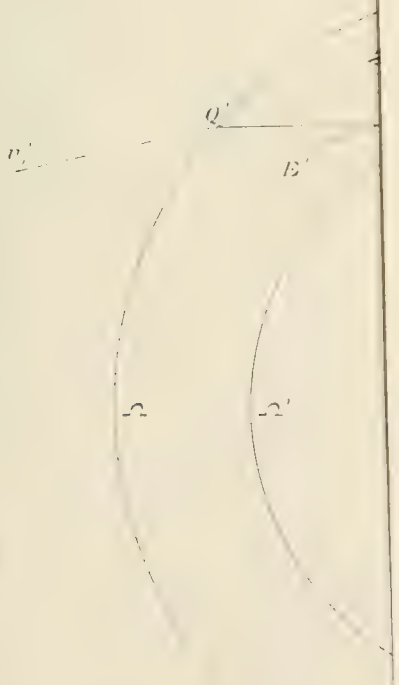


Fig. 4.

Fig 1

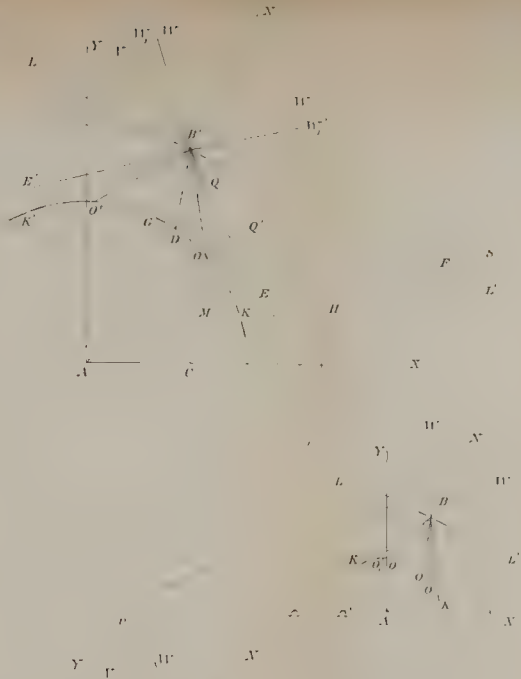


Fig 2

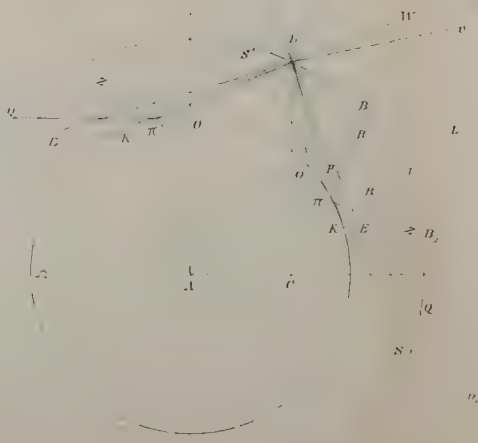


Fig 3.

Fig 4

Lit. Salussolia, Torino

Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valli di S. Giacomo).

Nota del Dott. ALESSANDRO ROCCATI
Assistente alla R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Torino.

Col nome di valli di San Giacomo, seguendo l'usanza della località, indico la valle del Gesso della Barra con le sue due diramazioni, vallone del Mont Colomb e vallone della Barra propriamente detto.

La valle del Gesso della Barra si apre a sud del Comune di Entraque e si estende per tutta la sua lunghezza nella zona cristallina che già fece oggetto di altre mie ricerche (1).

Al piano di S. Giacomo si biforca, originando a sinistra il vallone che conserva il nome di Barra e che risale al Colle delle Finestre da cui si ha accesso nella valle della Vesubia; a destra il vallone Mont Colomb che con decorso minore del primo viene a terminare contro la grandiosa serra rocciosa costituita dalla catena Gelas, Maledia, Clapier, con i ghiacciai omonimi. Nella sua parte superiore questo vallone si suddivide in due rami; uno, vallone del Murajon, è tutto circondato da pareti scoscese ed a picco, che certamente gli valsero il nome, e per il passo di Pagaré discende in val Gordolasca; l'altro ramo posto ad est risale al lago Vei del Bouc (2) e per il colle omonimo discende nella valle del Sabbione.

---

(1) *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle del Sabbione, Valle delle Rovine, Serra dell'Argentera),* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XXXVIII (1903) e XXXIX (1904).

(2) Presso il Lago Vei del Bouc compariscono associate ai gneiss le formazioni permiane rappresentate da *quarziti, anageniti* e *calcari*; di tali roccie non mi sono occupato nella presente nota, riservandomi di descriverle partitamente in un prossimo lavoro sul porfido della Rocca dell'Abisso e delle roccie annesse.

Nella valle della Barra si aprono poi il vallone delle Rovine, di cui già mi sono occupato, ed il vallone di Fenestrelle (il quale fa comunicare l'alto vallone delle Rovine con il vallone della Barra) al quale già accennai e che entra pure in parte nel campo delle ricerche odierne.

Delle roccie costituenti la parte inferiore della Valle non mi occuperò in questa Nota, limitandomi ad indicare come sul versante sinistro si sviluppino i *gneiss biotitici*, *cloritici* e *anfibolici* con struttura normale o cataclastica che ho descritti parlando della valle delle Rovine, mentre sul versante destro si ha sviluppo della *diorite* con *gneiss anfibolico* di cui ho trattato estesamente a proposito della valle del Sabbione.

L'associazione di diorite con gneiss anfibolico, con gli svariati passaggi da l'una roccia all'altra e le curiose strutture che ho descritte, si ritrova notevolmente sviluppata nella catena divisoria fra il vallone Mont Colomb e quello della Barra superiore, come anche fra questo e il vallone delle Rovine al disotto del vallone di Fenestrelle. Lo sviluppo massimo di tali roccie dioritiche e gneissiche si può osservare oltrepassato il piano di San Giacomo, oppure nella regione terminale del vallone Mont Colomb, specialmente nella parete destra, ove con un a picco di parecchie centinaia di metri limitano il piano posto alla base della Maledia, ove sorge il *gias* del Murajon sottano.

Anche facendo astrazione di queste roccie gneissico-dioritiche, molte sono le roccie della regione in esame che rendono petrograficamente interessante la località.

Gneiss. — Nei gneiss della parte superiore dei valloni di San Giacomo è si può dire costante la struttura cataclastica con i diversi passaggi già indicati; si ha cioè dapprima una semplice frantumazione dei componenti senza spostamento dei frammenti, poi una frantumazione più minuta e interposizione tra i frammenti di un minerale cementante generalmente costituito da *quarzo* finamente granulare, e talvolta anche da *clorite*. Oltre alla struttura cataclastica, si può avere nei piani di schistosità laminazione evidente, per cui essi sono resi lucidi e splendenti; potei osservare bene il fenomeno in un gneiss ricco in clorite raccolto sotto il Lago Bianco alla base della Maledia.

Dalle roccie cataclastiche si ha passaggio a roccie in cui la

schistosità scompare quasi del tutto e che l'esame microscopico rivela come vere *arcosi*; tale fatto si osserva nelle vicinanze del Lago Vei del Bouc, ove si hanno banchi intercalati nel gneiss, che si presentano di color bianco con aspetto omogeneo e che sono formati da minuti frammenti, a spigoli vivi od arrotondati, di *quarzo*, *ortosio* e *plagioclasio* cementati da *quarzo* granulare; alcuni di questi banchi contengono pure laminette di *biotite*, *muscovite* e *orneblenda*; comune è l'alterazione in *clorite* della biotite e dell'anfibolo. La fig. 1 rappresenta un esempio di struttura cataclastica in un gneiss della regione del Vei del Bouc.

In quanto alla composizione mineralogica si possono distinguere i tipi seguenti di gneiss:

Gneiss biotitico, comune nel vallone della Barra al di sopra del piano del Prajet, salendo al colle delle Finestre; esso ha composizione normale con *biotite* in lamine biassiche, brune, con intenso pleocroismo e comune alterazione, parziale o totale, in *clorite*. Notevole è il fatto che in qualche caso si trova qua e là associata alla biotite, la varietà di anfibolo a pleocroismo verde smeraldo, rosso violetto, iridescente, con estinzione di circa 17°; ho già indicato la presenza di tale anfibolo in roccie della Serra dell'Argentera e credo si possa ritenere come varietà di orneblenda.

Nel gneiss biotitico l'*ortosio* non è mai geminato; esso ha estinzione ondulata e vi si osserva la struttura vermicolare precedentemente descritta. I feldspati contengono poi frequentemente inclusioni carboniose.

Gneiss anfibolico. — È gneiss analogo al precedente per composizione, ma in cui l'*orneblenda* sostituisce la mica; in alcune zone tale sostituzione è soltanto parziale, avendosi così uno gneiss *micaceo-anfibolico*.

È roccia comune in tutta la regione, ma specialmente nell'alto vallone del Murajon, ove entra abbondantemente a costituire le morene frontali dei ghiacciai di Peirabroc, Gelas, Maledia, ecc.

L'anfibolo è l'*orneblenda* comune, ma, fatto singolare, non vi si trova associata l'incolora edenite, così comune nelle roccie di altri punti delle valli del Gesso. Sono invece abbastanza comuni altre associazioni di anfibolo: così le terminazioni delle fibre di orneblenda sono sovente di *crossite* con pleocroismo azzurro,

violetto-roseo, giallo-chiaro, di *pargasite* con pleocroismo roseo-verde chiaro, oppure della varietà a pleocroismo verde smeraldo, roseo, iridescente. Tali anfiboli, oltre che associati all'orneblenda comune, stanno pure disseminati nella massa in minuti individui isolati. Fra i minerali accessorî sono comuni la *clorite* (proveniente in parte dall'alterazione dell'anfibolo), l'*apatite*, e la *menaccanite*, la quale localmente forma dei piccoli accentramenti ove il minerale è in lamine aventi fin $^1/_2$ cm. di diametro. Come inclusioni sono frequenti lo *zircone* e la *tormalina* incolora con forme cristalline ben nette.

Gneiss a pinite. — Molto comune nei detriti morenici della Serra Gelas-Maledia sia sul versante di Entraque che sul versante Gordolasca-Vesubia. Per la composizione è roccia analoga alla precedente, avendosi essenzialmente un *gneiss orneblendico* con le diverse varietà di anfibolo, a cui si associano pure *clorite*, *muscovite* e più di rado *biotite*.

Caratteristica però è la presenza della *pinite* in cristalli che raggiungono fin 5 cm. di lunghezza e che normalmente si trovano come schiacciati fra i piani di schistosità. I cristalli hanno forma grossolanamente prismatica con tendenza a forma cilindroide; hanno colore verde sporco o rossastro e lasciano scorgere grandi lamine incluse di *muscovite*. I caratteri sono del resto quelli indicati per la pinite della Serra dell'Argentera; noto però che mentre colà potei determinare la presenza della cordierite, non mi riuscì di trovare questo minerale nel gruppo Gelas-Maledia. Ciò può esser dovuto anche allo stato d'alterazione della roccia, poichè, date le difficoltà alpinistiche della regione, non mi fu dato trovare il gneiss a pinite in posto.

Gneiss granatiferi. — Gneiss con granati sono sparsi in tutta la regione, ma specialmente abbondanti nel gruppo dei Gelas; la composizione mineralogica di tali gneiss è alquanto variabile, come anche la frequenza del granato che da scarso e sparso sporadicamente diventa localmente così abbondante da gremire addirittura la massa della roccia.

La varietà più comune di gneiss granatifero ha composizione complessa, notandovisi *quarzo*, *oligoclasio* (il più diffuso fra i feldspati), *ortosio*, *microclino*, *granato*, *orneblenda*, *clorite*, *biotite* e *muscovite*, con discreta abbondanza di *ematite*, *menaccanite* e *pirite*, scarsa invece l'*apatite*.

I caratteri dei varî componenti sono i soliti; interessante è invece il granato per le alterazioni che presenta. Esso anzitutto, a differenza degli altri componenti, ha forma cristallina distinta, per cui nelle sezioni ha contorno esagonale, ottagonale e quadratico; la struttura cataclastica, evidente in tutta la roccia, si manifestò nel granato con rotture che generalmente seguono le direzioni di sfaldatura. Malgrado la fessurazione, talora molto minuta, pure non è raro il caso che il granato si sia mantenuto inalterato, essendo allora di color rosso chiaro, limpido; altrove invece i cristalli hanno subita una trasformazione in clorite che può esser completa, avendosi così un vero fenomeno di pseudomorfosi e che si può anche osservare ad occhio nudo in piccoli cristalli rombododecaedrici che sporgono alla superficie della roccia e che sono del tutto trasformati in clorite.

Al microscopio negli individui non del tutto pseudomorfosati si osserva che l'alterazione in clorite incominciata dall'esterno (avendosi così un orlo verde più o meno esteso) si spinge all'interno seguendo le linee di sfaldatura e di frattura, secondo indicano le fig. 2 e 3.

Dei cristalli di granato sano qualcuno presenta un accenno a fenomeno di birifrazione, ma non è mai cosa comune; inclusioni del granato sono *zircone*, *rutilo* (anche in geminati a cuore o a ginocchio), *quarzo* e, negli individui in via d'alterazione, *magnetite*.

Nei feldspati della roccia si osservano abbondanti inclusioni di dimensioni variabili di *quarzo*, che si presenta in forma sferoidale od irregolare, ma sempre con margini arrotondati; queste inclusioni (che si osservano pure in gneiss di altri punti del massiccio, ma non così evidenti) costituiscono un bell'esempio di struttura pecilitica (1). Circa l'origine di queste inclusioni, più che a una segregazione del minerale includente o ad alterazione di esso ritengo, seguendo il Watson (2), che si possano interpretare come prodotti di diverse fasi di consolidazione del magma da cui si originarono i componenti della roccia.

L'*orneblenda* del gneiss granatifero è sovente associata a

---

(1) *On the Use of Terms Poikilitic and Micropoikilitic in Petrography*, " Journal of Geol. ", vol. I, Chicago, 1893.

(2) *Granites of North Carolina*, Id. id., vol. XII, 1904.

edenite o altri *anfiboli* con fenomeno di accrescimento parallelo che si manifesta pure fra *orneblenda*, *clorite* e *biotite*.

Noto infine che numerose venuzze costituite prevalentemente da *clorite* oppure da *quarzo*, come anche dai due minerali associati, attraversano in ogni senso la roccia senza ordine regolare di disposizione.

Presso il Gias del Murajon soprano il gneiss granatifero presenta localmente una struttura macromera che si ritrova pure sul versante del vallone della Barra nella località detta della Siula.

Il gneiss macromero, in cui è evidente la struttura cataclastica, forma banchi in cui alternatamente abbonda o scarseggia il granato. Dove scarseggia il granato la composizione è quella di un gneiss normale con abbondante *quarzo*, *ortosio* (non geminato), *oligoclasio*, frequente *biotite* con *orneblenda* e *clorite*. Quest'ultimo minerale più che originario sembra essere un prodotto d'alterazione della mica e dell'anfibolo; infatti costituisce per lo più zone irregolari, torbide, con poca o nulla azione sulla luce polarizzata e con accentramenti di una sostanza biancastra, opaca, che ritengo di silice amorfa proveniente probabilmente da un' ulteriore alterazione della clorite, forse provocata dalla *pirite*, che è abbastanza comune e che avrebbe dato acido solforico decomponendosi. Di più in alcuni punti è evidente la trasformazione dell'orneblenda in clorite, poichè si distinguono ancora bene le strie di sfaldatura specialmente in talune sezioni rombiche, ove presentano il caratteristico reticolato.

All'orneblenda si associano con i caratteri già indicati i rari anfiboli riferiti a *edenite*, *pargasite* e *crossite*.

Nei banchi ove è abbondante il *granato* questo minerale può essere in tal quantità da stiparsi i cristalli gli uni contro gli altri, formando così degli accentramenti intorno ai quali gli altri componenti si dispongono assumendo una disposizione come fluidale. I *granati* sono molto voluminosi, avendosene di quelli con diametro di fin 3-4 cm.; essi sono di *grossularia*; hanno color rosso bruno e si presentano o in forma sferoidale o in cristalli distinti 110-211. Caratteristica è la loro facile divisione in lamelle che hanno lucentezza madreperlacea sulla faccia di divisione.

Frequente è la già descritta alterazione del granato in clorite anche con totale pseudomorfosi; al microscopio poi i cristalli

appaiono percorsi da un reticolato fittissimo di screpolature lungo le quali si prosegue l'alterazione in clorite incominciata alla periferia. In qualche caso non solo si ha frantumazione del granato, ma anche spostamento dei frammenti con interposizioni di *quarzo* e *clorite*; oltre alla trasformazione in clorite si osserva pure quella parziale od anche totale in *limonite*, come pure osservai la formazione di fibre di *attinoto*.

Numerose sono le inclusioni del granato: *zircone* in cristalli distinti o masserelle rotondeggianti, *magnetite*, *biotite*, *orneblenda* e *quarzo*, che talvolta assume struttura dentelliforme.

I granati sono come immersi in una massa costituita da *biotite* e *clorite* in lamine distinte con *orneblenda* in prismi sfilacciati; la biotite, fortemente colorata, è però sempre in prevalenza. Nelle vicinanze del granato abbondano, in forma di granuli, *magnetite* e *pirite*, quest' ultima fornita talora di un orlo rosso vivo di *ematite*; alcuni individui di granato poi hanno una corona di finissimi aghi di *rutilo* variamente intrecciati (fig. 4).

Comune nei componenti è l'*apatite* in grosse inclusioni prismatiche.

Un' altra varietà di gneiss macromero esiste nella parte terminale del vallone della Barra presso il Colle delle Finestre.

Componenti di tale gneiss sono *quarzo*, *ortosio*, *microclino* e *oligoclasio*, con scarsissima *mica* o *clorite*, che anzi sovente mancano del tutto; alcuni banchi contengono invece *granato*.

Fra i componenti è notevole l'*ortosio*, che presenta cristalli lunghi fin 8 cm.; esso ha color grigio nerastro, dovuto ad inclusioni carboniose; ha lucentezza perlacea e sfaldatura molto facile; ridotto in lamine di un certo spessore, certi cristalli presentano fenomeno di scillerizzazione con vivi riflessi azzurri.

L'ortosio presenta inclusioni di piccoli cristalli disposti con isorientazione e geminati con la legge di Karlsbad, mentre l'individuo includente non ha geminazione; altrove si hanno plaghe costituite da *albite* con la caratteristica geminazione. Tali plaghe non hanno contorno definito, ma si perdono come per sfumatura nella massa dell'ortosio.

I *granati* presentano la solita fessurazione e trasformazione in clorite; notevole è poi il fatto che alcuni cristalli presentano pseudosimmetria dimetrica, essendo i cristallini rombododecaedrici allungati secondo un asse di simmetria quadratica tanto da simulare un prisma quadrato associato all'ottaedro.

Una roccia a ortosio macromero analoga alla sopradescritta esiste pure presso il Lago soprano della Sella in Valle Meris nel gruppo del Monte Matto.

Gneiss pirossenico porfiroide. — Questa roccia, di un tipo certamente non comune, forma piccole stratificazioni e lenti nel gneiss della regione Gelas-Maledia: quantunque non comune in posto, la si ritrova nondimeno nei materiali alluvionali lungo il corso del Gesso di Entraque.

L'aspetto macroscopico di questo gneiss, che è friabile e di poca durezza, è apparentemente quello di un micaschisto a biotite con grandi cristalli idiomorfi di ortosio geminati con legge di Karlsbad. Al microscopio invece la composizione si rivela molto più complessa e corrispondente ad un gneiss, poichè alla *biotite* è associata gran quantità di *pirosseno* e nella massa stanno disseminati *quarzo*, *ortosio*, *plagioclasio* (raro in confronto dell'ortosio) e *anfibolo*; molto abbondanti poi come inclusioni *apatite* e *zircone*.

La *biotite* è in lamine a terminazioni più o meno nette, soventi in aggregati a rosa o ventaglio; la tinta bruna è molto intensa, però non uniforme, avendosi nell'interno delle lamine plaghe in cui la colorazione è molto meno forte che nel rimanente.

Frammezzo alle lamine di biotite sta disseminato il *pirosseno*, che colla mica è il componente più abbondante della roccia; ha struttura granulare, avendosi solo di rado contorno cristallino alquanto netto; i suoi individui sono sempre di dimensioni superiori a quella della biotite sulla quale si modellano. Trattasi di *omfacite*; infatti ha color verde chiaro con leggero pleocroismo ed un angolo di estinzione che arriva ad un massimo di 44°. Sempre distinte sono le strie di sfaldatura secondo 110 finamente ripetute, a cui si aggiungono con minor evidenza quelle secondo 100; in alcuni individui compariscono traccie irregolari di separazione secondo 001, non rari poi sono i geminati secondo 100, anche polisinteticamente ripetuti. Quantunque per lo più sano e limpido, il pirosseno accenna in alcuni punti a fenomeno di uralitizzazione, oppure a trasformazione in clorite, la quale trasformazione incomincia dall'esterno. Contiene poi abbondanti *microliti* indeterminabili.

In prossimità od anche a contatto del pirosseno s'incontra dell'*orneblenda* che, all'opposto di quello, ha contorno poliedrico

abbastanza netto; è da escludersi assolutamente la sua provenienza da trasformazione del pirosseno, essendo non solo a contorno distinto, ma limpido e senza traccia di alterazione. È però componente affatto accidentale.

Nella massa della roccia sono relativamente scarsi il *quarzo* (che contiene fra altre inclusioni talune di *anfibolo* con pleocroismo dall'azzurro al roseo) e l'*oligoclasio,* mentre predomina l'*ortosio*, con caratteri però differenti dallo stesso minerale sparso porfiricamente. Infatti, mentre il primo è allotriomorfo e non mai geminato, i cristalli idiomorfi (che raggiungono lunghezza di 3-4 cm. con diametro di $^1/_2$ cm.) hanno contorno cristallino ben definito, soltanto essendo sovente gli spigoli arrotondati; è poi sempre geminato con legge di Karlsbad e presenta distinte le traccie di sfaldatura secondo 001 e 010, per cui al microscopio certe sezioni appaiono come reticolate. Frequenti sono le inclusioni di *biotite*, talora così voluminose da potersi scorgere ad occhio nudo; pure comuni e voluminose sono altre di *quarzo.*

Come inclusioni, nei diversi componenti si trovano *zircone* e *apatite*; questa è frequente in grossi individui prismatici con evidente sfaldatura basale. Notasi pure l'inclusione dello *zircone* nell'*apatite.*

Cloriteschisto. — È roccia abbastanza comune nel gruppo del Gelas, sia sul versante del Gesso che della Gordolasca-Vesubia, ove forma interstratificazioni nel gneiss, però mai con grande potenza (qualche decimetro al più). La roccia è tenera, di color verde scuro, talora brunastro o nericcio alla superficie per limonitizzazione, ed al microscopio si risolve in un intreccio di minute lamine di *clorite* ben distinte e per lo più riunite in forme vermiculari; ha color verde chiaro con debole pleocroismo e colore d'interferenza azzurro indaco intenso. Sparsi nella massa stanno rari granuli di *quarzo, magnetite* e *pirite.*

Serpentinoschisto e Serpentini. — Fra i gneiss raddrizzati che formano la punta nord del Gelas trovasi intercalato un *serpentinoschisto* che forma un banco della potenza di circa un metro e che affiora proprio sulla vetta del monte presso la depressione che divide la punta nord dalla punta sud.

È roccia a schistosità nettissima e facile divisibilità, che

ha color verde chiaro con chiazze gialle di limonite. Trattata con acido solforico a caldo tale roccia viene parzialmente decomposta.

Al microscopio appare formata da fibre di *serpentino* disposte nel senso della schistosità e frammezzo alle quali esistono fibre di *attinoto* e granuli di *calcite*.

Nei piani di schistosità è discretamente abbondante la *calcite* in grossi grani con sfaldatura e geminazioni evidenti e *dolomite* in granuli più piccoli; a questi due minerali si aggiungono *quarzo* e minuti cristalli di *ortosio*, geminati con legge di Karlsbad. Sparsi poi nella massa della roccia si hanno cristallini di *magnetite* e granuli di *pirite*.

Oltre al serpentinoschisto sopra indicato esistono in diversi punti della regione veri *serpentini*. Così ne trovai massi nella morena frontale del ghiacciaio di Peirabroc e nella valletta dell'Asino fra i valloni di Fenestrelle e delle Rovine; specialmente abbondante però è il serpentino alle falde della Punta della Valletta nei dintorni del lago di Brocan, ove è in relazione con roccie talcose e pirosseniche, dalla cui alterazione sembra provenire.

Il *serpentino* di queste località è in masse compatte di color azzurro scuro o nero e dotato di grande compattezza; in certi punti appare percorso in ogni senso da venuzze di *crisotilo* che dallo spessore di pochi millimetri raggiungono 2 o 3 cm. Tale *crisotilo* ha color bronzo con lucentezza submetallica-perlacea; è finamente fibroso con le fibre che si possono separare molto facilmente; al microscopio ha colori di interferenza vivacissimi e presenta una struttura concrezionata di finissimi strati sovrapposti quasi come da un deposito per via acquea.

Le venuzze di crisotilo si intrecciano in ogni senso nella massa e sembrano essersi formate in tempi diversi; infatti se ne hanno di quelle che ne intersecano altre interrotte al loro passaggio, di più alcune sono come spezzate con spostamento dei lembi, indicando che la roccia fu sottoposta ad azioni meccaniche dopo la loro formazione.

In quanto alla costituzione, le vene minori sono tutte di *crisotilo* a strati sovrapposti, quelle maggiori presentano una matrice formata da serpentino orientato diversamente da quello della massa. Questo al microscopio lascia scorgere distintamente la

balkenstructur (1) dei serpentini provenienti da pirosseno, anzi localmente è ancora visibile il contorno primitivo degli individui pirossenici preesistenti, che però a luce polarizzata appaiono completamente serpentinizzati.

Abbondante è la *magnetite* che in granuli più o meno minuti gremisce localmente le roccie sì da renderla opaca nelle sezioni sottili, altrove forma delle file sottili e allungate oppure si accentra intorno al pirosseno facendone risaltare il contorno, altre volte riempie tutto il vano del pirosseno dando luogo a vero fenomeno di pseudomorfosi. La presenza di così abbondante *magnetite* mi pare si potrebbe spiegare ammettendo la sua provenienza da segregazione del ferro del pirosseno nella trasformazione di questo in serpentino.

Insieme alla magnetite, ma molto meno comune, esiste della *cromite* che nelle roccie è sempre circondata da un orlo di color verde smeraldo intenso.

Disseminato con discreta abbondanza nella massa del serpentino è un *anfibolo* in minute fibre o piccole plaghe a contorno indistinto, che è sempre limpido e che ha forte pleocroismo dall'azzurro chiaro al roseo ed al ranciato con estinzione massima di 22°; qualunque sia poi lo spessore della sezione ha sempre un color d'interferenza azzurro indaco molto intenso.

Più che minerale originario io ritengo quest'anfibolo come di origine secondaria, formatosi cioè nella trasformazione del pirosseno in serpentino; i suoi caratteri poi sembrano indicarlo come della serie degli anfiboli sodici.

Nel *serpentino* raccolto a Peirabroc e che ritrovai pure nelle alluvioni dei dintorni di San Giacomo, esiste, oltre all'anfibolo azzurro sopraindicato, anche un'altra varietà che in aggregati fibrosi si può vedere ad occhio nudo disseminato nella massa delle roccie, ove spicca per la sua lucentezza submetallica. Al microscopio appare torbido, poco trasparente, però con pleocroismo distinto dal grigio scuro al grigio chiaro; il contorno dei cristalli è poco netto e le linee di sfaldatura o mancanti o poco accentuate, per cui mi riuscì poco precisa la determinazione dall'angolo di estinzione che in alcuni casi sembra retta, mentre altrove raggiunge fin 12°. L'aspetto ed i caratteri di

(1) Zirkel, *Lehrbuch der Petrographie*, Leipzig, 1894, III, p. 384.

questo anfibolo m'inducono a ritenerlo come una varietà di *orneblenda*.

Nello stesso serpentino esistono pure *granati* che all'esame macroscopico si riconoscono facilmente per la loro forma, ma che sono del tutto trasformati in limonite, oppure anche in serpentino analogo a quello della massa della roccia.

Anfiboliti e **Granatiti**. — Quantunque l'anfibolo ed il granato siano comuni come minerali componenti dei gneiss, cionondimeno sono eccezionali le roccie ove questi elementi sono componenti prevalenti od esclusivi, avendosi nelle valli di San Giacomo solo raramente anfiboliti e granatiti associate al gneiss nel gruppo Gelas-Maledia e nella regione Vei del Bouc, mancando poi del tutto nel vallone della Barra verso il Colle delle Finestre.

Le roccie a base di anfibolo sono sempre molto compatte e dure con colore scuro (verde carico o nero); esse sono analoghe a quelle già indicate per altre località delle Valli del Gesso (1). Il componente essenziale è sempre l'*orneblenda* bruna tipica con di rado associata la varietà verde azzurra, mentre è più comune l'incolora *edenite* e gli altri anfiboli che già ricordai come accompagnanti l'orneblenda. Costante e talvolta molto pronunciata è la struttura cataclastica che si esercitò specialmente lungo le linee di sfaldatura, per cui i prismi di orneblenda appaiono divisi in liste e frammenti fra i quali si sono depositati minerali secondarî: *quarzo*, *clorite*, un minerale micaceo con aspetto di *muscovite*, e più raramente *epidoto* e *zoisite*.

Delle *anfiboliti* alcune sono costituite esclusivamente da *orneblenda* (così al Lago Vei del Bouc), altre contengono *quarzo*, *ortosio*, *plagioclasi*, sempre profondamente alterati; comune poi è in tutte l'*apatite*. Presso il ghiacciaio di Peirabroc raccolsi una varietà interessante per la presenza di *pirosseno*; nella massa di esse si hanno delle plaghe ricche in *diallaggio*, in cui però i caratteri specifici sono di rado ben evidenti essendovi la uralitizzazione più o meno inoltrata. Intorno al diallaggio esiste

(1) *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Serra dell'Argentera)*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIX, 1904.

sempre una corona formata da prismetti di *orneblenda* ben distinti e che nella roccia assumono una disposizione così caratteristica da far riconoscere il posto occupato primitivamente dal diallaggio anche laddove il minerale è completamente alterato. In prossimità del pirosseno si osservano pure granuli di *magnetite* e di *pirite*.

Salendo dal gias del Murajon soprano al ghiacciaio di Peirabroc incontrai una roccia di composizione interessante essendo costituita quasi esclusivamente da *zoisite*. Più che una roccia ben definita ritengo però che non si tratti se non di un'accidentalità dell'anfibolite a cui è associata. La massa ha struttura finamente granulosa; essa è compattissima, dura e di color verde grigio chiaro; al microscopio risulta formata da un fitto intreccio di fibre o prismetti allungati di *zoisite* che specialmente a luce polarizzata lasciano distinguere i contorni ben netti e distinti e distinte pure le linee di sfaldatura. La *zoisite* è o verde chiaro oppure incolore e limpida; però sono molto abbondanti delle sferette opache di color bianco sporco, che ritengo dovute a silice amorfo essendo esse scomparse trattando una sezione con soluzione di potassa caustica a caldo; certe fibre di zoisite sono poi torbide e di color giallognolo per inquinazione di *limonite*.

Sparsi nella massa della zoisite si osservano individui di *anfibolo* a contorno cristallino abbastanza netto; alcuni allungati, altri romboidali con sempre distinte le linee di sfaldatura 110 e talvolta geminati secondo 100. Dei cristalli di anfibolo alcuni sono di color verde chiaro con discreto pleocroismo; altri quasi incolori; a luce polarizzata i primi hanno vivaci colori d'interferenza, i secondi invece si risolvono in un intreccio di fibre di *zoisite* (accompagnate talora da *sillimanite*) e che non si distinguono più da quelle della massa.

Nella roccia havvi abbondante *calcite* insinuata fra le fibre di zoisite; di più la *calcite* forma accentramenti nella massa ove è in grani irregolari e nei quali si distingue bene l'intreccio delle linee di geminazione con quelle di sfaldatura. Abbastanza comune è pure l'*epidoto* in grani verde erba e che in alcuni punti forma le terminazioni degli individui di anfibolo, laddove questi, come ho indicato sopra, pure mantenendo all'esterno la forma primitiva, sono nell'interno trasformati in *zoisite*.

Volendo considerare questa roccia come specifica si potrebbe

per essa adottare il nome di Zoisitite proposto da Riva (1) per una roccia a composizione analoga ma con discreta quantità di plagioclasio, e che egli considerò però come un'accidentalità di roccie anfiboliche.

Se scarseggiano le roccie a base di anfibolo sono più rare ancora quelle costituite da *anfibolo* e *granato*, per cui una sola varietà che può considerarsi come *granatite* io ho raccolto nell'alto vallone del Murajon, associata ad anfibolite e gneiss.

È questa una roccia microcristallina compattissima e dura, di color nero, su cui spicca la tinta rosea degli abbondantissimi granati; al microscopio è evidente la struttura cataclastica nei componenti che sono *orneblenda bruna* (associata a *edenite*) e *granato* con rare lamine di *biotite* e abbondante *ilmenite* in voluminosi grani con le caratteristiche sfrangiature ed incisioni marginali, lungo le quali si è formata della *titanite*. Come minerali secondarî si osservano *quarzo*, *zoisite* e *clorite*.

Senza entrare nella descrizione dei componenti mi limito ad indicare che nel granato è frequente la pseudosimmetria dimetrica già descritta nei gneiss granatiferi; rilevo pure un fatto che ho già osservato in roccie delle valli del Gesso e che cioè in certe fessure delle roccie in corrispondenza dell'orneblenda il riempimento sembra essersi fatto, per secrezione laterale, di un anfibolo, però con tinte molto più chiare dell'orneblenda della massa.

Diorite e **Sienite**. — La *diorite* già descritta nella valle del Sabbione e che, come ho detto, è molto sviluppata nella parte terminale del vallone del Murajon, presenta localmente un aspetto porfirico trovandovisi disseminati dei voluminosi cristalli di *feldspato*, ma specialmente di *orneblenda*, avendone osservati di quelli lunghi fin 5 cm.

Localmente poi col diminuire, fin anche a scomparire, del *plagioclasio*, aumentando invece la quantità di ortosio che da com-

(1) C. Riva, Relazione intorno alle rocce raccolte nelle adiacenze di Cremolino e del Turchino lungo la linea ferrata Genova-Ovada-Asti, in *Osservazioni geologiche in occasione del traforo delle gallerie del Turchino e di Cremolino sulla linea Genova-Asti*, compilate dal prof. Torquato Taramelli, Roma, 1898.

ponente accessorio diventa essenziale od anche esclusivo elemento feldspatico, si ha passaggio a *sienite*, la quale però dall'aspetto esterno non si differenzia dalla diorite. Tale sienite ha pure l'aspetto porfirico, essendovi sparsi nella massa grossi cristalli di *ortosio*, in forma prismatica o mandorlata, di color bianco latteo, geminati secondo la legge di Karlsbad e con le sfaldature ben evidenti.

La composizione mineralogica della roccia si avvicina assai a quella della sienite del Biellese studiata da Cossa (1), poichè oltre ai componenti essenziali *ortosio* e *orneblenda* vi sono abbondanti l'*apatite*, lo *sfeno* e lo *zircone*, oltre a rari ma grossi granuli di *pirite*.

Nella massa l'*ortosio* (a differenza di quello sparso porfiricamente) non è che raramente geminato; esso presenta la struttura vermiculare e frequenti inclusioni di quarzo e plagioclasio con struttura pecilitica.

L'*orneblenda* comprende la varietà bruna e quella verde-azzurra a cui si associa nel modo solito l'*edenite* incolora; inclusioni nell'orneblenda si hanno di *magnetite*, *zircone*, più raramente di *rutilo* con le caratteristiche geminazioni.

Il *quarzo* manca del tutto come componente essenziale; lo si trova però finamente granuloso a riempire fessure o costituire un orlo a taluni dei granuli di ortosio.

Straordinariamente abbondante è l'*apatite*, che in alcuni punti gremisce i cristalli d'orneblenda e di ortosio; essa è in prismetti distinti che assumono talora forma tondeggiante e che presentano evidente la sfaldatura basale.

Pure abbondantissimo è lo *sfeno* in granuli irregolari o in sezioni rombiche allungate molto acute, non di rado compenetrate nell'orneblenda o in accrescimento parallelo con esso; lo *sfeno* ha color giallo miele per lo più torbido, e sovente vi sono visibili le linee di sfaldatura. Localmente lo sfeno è così abbondante da potersi scorgere ad occhio nudo.

Roccie intrusive. — Roccie filoniane s'incontrano in vari punti delle valli di San Giacomo e sono per lo più identiche a

(1) *Ricerche chimiche e microscopiche su roccie e minerali d'Italia.* Torino, 1881.

quelle già indicate per le altre valli descritte. Così si osservano MICROGRANITI e APLITI in filoni della potenza di 3 a 4 m., che intersecano il gneiss nella parte superiore del vallone della Barra nella parete destra presso il colle delle Finestre. In qualche punto alla base del massiccio del Gelas, essendo i gneiss stati fortemente raddrizzati, si vedono parecchi dicchi di aplite portati in posizione orizzontale e disposti parallelamente gli uni agli altri.

Nella parte superiore del vallone del Murajon esiste pure l'APLITE, di cui una varietà assai interessante è in relazione con il gneiss a grandi granati sopra descritto.

È un'aplite a struttura microcristallina e cataclastica la quale contiene disseminati nella massa abbondantissimi *granati*, talvolta così numerosi da stiparsi gli uni contro gli altri e le cui dimensioni da microscopiche raggiungono un diametro fin di 3 cm. Il *granato*, a differenza degli altri componenti, ha forma cristallina abbastanza netta e si possono riconoscere in esso le forme del rombododecaedro e dell'icositetraedro; i cristalli spiccano vivamente col loro colore rosso bruno nella massa della roccia che è bianco-lattea.

I componenti sono quelli di un'aplite normale: *quarzo*, *plagioclasio acido* riferibile ad *oligoclasio*, *ortosio* e rare lamine di *clorite* e *orneblenda*; disseminate nella roccia stanno pure *ilmenite*, *pirite* e *ematite*.

Il *granato* presenta le alterazioni in clorite ed anfibolo già indicate per il gneiss, ed anche nell'aplite si può avere la completa pseudomorfosi del granato in clorite. Gli elementi opachi sono specialmente accentrati presso il granato; ciò succede specialmente per la *pirite*, che oltre al trovarsi in granuli esiste pure in cristalli cubici aventi un orlo rosso di *ematite*.

La MICRODIORITE esiste pure in qualche punto; così l'osservai al lago Vei del Bouc e alla base della Maledia.

Al Vei del Bouc trattasi di *diorite tipica*, i cui componenti sono essenzialmente *plagioclasio* ed *orneblenda* con *apatite* e *magnetite*, mancando il *quarzo*, che nelle altre località si può dire costante.

L'*orneblenda* è la varietà bruna con forte pleocroismo e estinzione di circa 25°, ha forme cristalline abbastanza nitide ed in cui si possono determinare le faccie 110, 100 e 010; non

rari vi sono i geminati. Contiene inclusioni di *apatite*, *quarzo* e *magnetite* e vi è talvolta associata l'*edenite*.

Il *plagioclasio*, sempre allotriomorfo, non presenta che la sola geminazione con legge dell'albite; esso è di due varietà: *oligoclasio* e *labrodorite*. Questa è molto meno abbondante di quello e si riconosce facilmente sia per i caratteri ottici, sia perchè è facilmente decomposta dall'acido cloridrico dando silice gelatinosa.

La MICRODIORITE della Maledia ha composizione più complessa e per la struttura potrebbe indicarsi, seguendo l'esempio di Kilian e Termier (1) e altri autori (2), col nome di *diorite orbiculare*. Ha infatti struttura finamente granulare con sparse nella massa concentrazioni orbiculari sferoidali e ovoidali nere, che localmente sporgono alla superficie con aspetto variolitico. Tali orbicule sono costituite da un nucleo di *pirosseno* (*diallaggio*) con contorno di *orneblenda*; più raramente il nucleo è di *plagioclasio*, la cui profonda alterazione non mi permise determinazione precisa, oppure le orbicule sono tutte di *orneblenda*. Questa è di due varietà: l'una intensamente colorata in bruno con fortissimo pleocroismo, l'altra invece bruno chiaro tendente al verde con pleocroismo minore.

Nella massa, oltre ai componenti normali, si osservano granuli di *diallaggio* con carattere analogo a quello delle orbicule, ma per lo più fortemente uralitizzato.

Come ho detto sopra, molte delle orbicule sono costituite da un nucleo di *diallaggio* con una corona di *orneblenda* finamente granulare. Di questo *diallaggio*, che è in grossi grani quasi incolori o leggermente verdognoli, sono interessanti le associazioni con l'*orneblenda*; infatti si osservano nell'interno del *diallaggio* plaghe irregolari costituite da orneblenda, oppure i due minerali con accrescimento simultaneo sembrano continuarsi

---

(1) *Note sur divers types pétrographiques et sur le gisement de quelques roches éruptives des Alpes françaises*, " Bull. Soc. Géol. de France ", 3e série, T. XXVI (1898), p. 363.

(2) T. L. WATSON, *Orbicular Gabbro Diorite from Davie County (North Carolina)*, " Journ. of Geol. ", vol. XII, n° 4, 1904. — A. C. LAWSON, *The orbicular Gabbro Diorite at Dehesa. San Diego County. California.* " Bull. Dep. Geol. of Calif. ", vol. III (1904).

l'uno nell'altro (fig. 5), oppure anche il granulo è internamente di diallaggio con l'orlo esterno di orneblenda.

In qualche punto può nascere il dubbio che possa trattarsi di una trasformazione del diallaggio in orneblenda, ma la conservazione dei due minerali, il loro stato di freschezza ed il distacco netto fra l'uno e l'altro mi portano ad ammettere un fenomeno di accrescimento parallelo analogo a quello descritto da Piolti (1) come pure da parecchi altri autori e figurato anche da Streng (2).

Porfido felsitico. — Questa roccia s'incontra in dicchi nel gneiss in diversi punti del massiccio dell'Argentera; io lo raccolsi nel vallone della Barra inferiore, ma ne verificai pure la presenza nel gruppo Asta-Dragonet e nel vallone Lourousa sopra le terme di Valdieri.

È roccia compatta di color grigio costituita da una massa criptocristallina in cui stanno disseminati abbondanti cristalli di *quarzo* e di *ortosio* e raramente prismi di *orneblenda* e lamine di *biotite* e di *clorite*.

Il *quarzo* sparso porfiricamente solo di rado lascia distinguere ben evidente la forma cristallina costituita dal prisma esagono con la bipiramide; le faccie del prisma o sono poco sviluppate o anche mancano del tutto. L'*ortosio* è in cristalli prismatici evidenti e talora con notevoli dimensioni; così ne osservai aventi lunghezza di 8 cm., uno poi completamente terminato misurava 7 cm. di lunghezza per 5 di larghezza e 2 di spessore. Tali cristalli o sono in individui semplici, oppure più comunemente in geminati secondo la legge di Karlsbad; sempre vi sono evidenti le linee di sfaldatura, facilissima, per cui i cristalli si riducono in lamine a lucentezza perlacea. Comune è la struttura zonata prodotta da inclusioni carboniose che o formano un orlo nel cristallo, o ne gremiscono tutta la massa, oppure stanno disseminate in plaghe irregolari dando ai cristalli tinta grigia o nerastra.

Il magma fondamentale non presenta parti vetrose, ma al microscopio risulta costituito da minuti cristallini o granuli di *quarzo* e *ortosio*; quest'ultimo è prevalente ed è o in individui

(1) *Gabbro orneblendico e saussurite di Val della Torre*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", XXXIX, 1904.

(2) *Uber Gabbro und den sogenannten schillersfels des Harzes*, " N. J. für Min. ecc. ", 1862, p. 949.

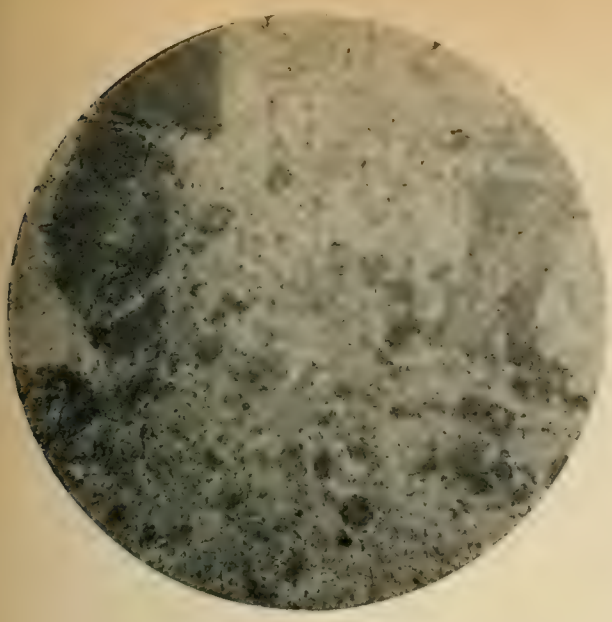


Fig. 1

Fig. 2

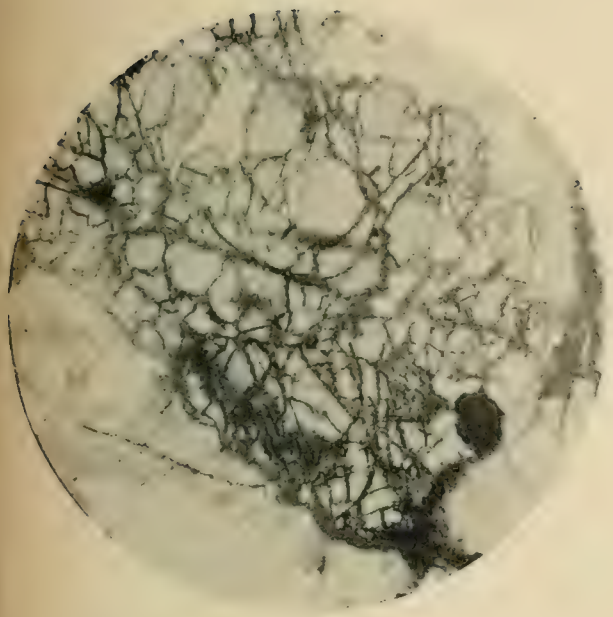


Fig. 3

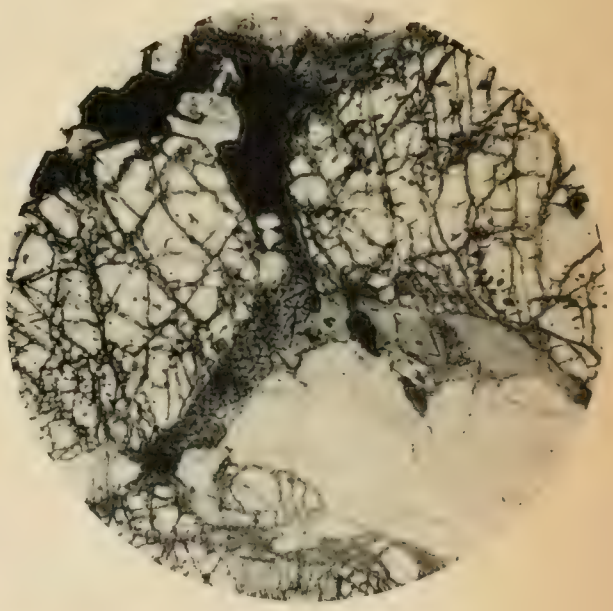


Fig. 4

Fig. 5

semplici o geminati con legge di Karlsbad. Localmente si ha pure *oligoclasio*, sempre poco abbondante, e con geminazioni associate dell'albite e di Karlsbad; nel magma esiste pure *apatite* e poche lamine di *biotite*, per lo più trasformata in clorite.

Gli elementi macroscopici presentano al microscopio i seguenti caratteri:

Il *quarzo* dà sezioni poligonali più o meno regolari, di rado è in grani informi; il contorno delle sezioni è netto, oppure appare come corroso, arrotondato agli spigoli od anche con solcature od insenature lungo le quali si è insinuata la materia magmica. Non rare sono traccie di rottura anche con spostamento dei frammenti; in tal caso fra i frammenti s'insinua il magma, oppure vi si è formato del quarzo finamente granulare che costituisce anche un orlo alle sezioni. Le inclusioni nel quarzo sono piuttosto rare e rappresentate da *zircone* e *orneblenda*.

L'*ortosio* presenta sempre sezioni a contorno arrotondato e sui margini quelle insenature e corrosioni caratteristiche del feldspato dei porfidi; anche qui si ha, come per il quarzo, la penetrazione del magma. Nell'alterazione si è formato del *caolino*, meno frequentemente un minerale di aspetto micaceo o dell'*epidoto*; alcuni cristalli presentano all'interno una sostanza verde cloritosa disseminata irregolarmente e che ritengo dovuta all'alterazione di *biotite* o di *anfibolo* che sono inclusioni comuni nel feldspato, insieme a *plagioclasio*, *ematite* e *quarzo*. Le inclusioni di quarzo sono in grandi grani (talora visibili ad occhio nudo), oppure costituite da accentramenti di minuti granuli.

Disseminati nella massa stanno poi cristalli prismatici fibrosi di *orneblenda* con tinta chiara e aventi frequenti inclusioni di *quarzo* e *magnetite*. Esistono pure lamine di clorite, che in maggior parte però ritengo dovuta all'alterazione dell'anfibolo o della biotite, e ciò perchè è sempre torbida, quasi opaca, benchè le lamine abbiano sovente contorno ben distinto.

Gabinetto di Geologia della R. Scuola d'Applicazione
per gli Ingegneri in Torino. Aprile 1905.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

1° Struttura cataclastica nel gneiss.
2° Trasformazione del granato in clorite.
3° " "
4° Formazione di rutilo intorno al granato.
5° Associazione di orneblenda e diallaggio.

Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica.

Nota di FRANCESCO SEVERI.

In una recente Nota (*), il sig. Enriques ha stabilito il teorema che " sopra una superficie algebrica ogni serie continua completa di curve, ha la serie caratteristica (**) completa ", rilevando come questo risultato fornisca una proprietà che caratterizza le superficie irregolari. Infatti, se il genere numerico p_a è minore del genere geometrico p_g, ogni sistema lineare regolare (la cui serie caratteristica ha la deficienza $p_g - p_a$), dovrà esser contenuto in un sistema continuo completo non lineare, il quale anzi si comporrà di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari (***).

Questo risultato può essere precisato:

Sopra una superficie di generi p_a, p_g $(p_g \geq p_a)$ *ogni curva, irriducibile o riducibile, di genere e grado virtuali* π, n, *e di indice di specialità* i (≥ 0), *per cui sia:*

$$p_a + n - \pi + 1 - i < 0 ,$$

(*) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (" Rend. della R. Accad. di Bologna ", 1904). — Vedasi pure la mia Nota: *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (" Rend. del Circolo mat. di Palermo ", t. XX, 1905), ove ho esposto un'altra dimostrazione del teorema surriferito, poggiandomi sempre sul principio di Enriques, che una curva variabile con continuità, non può spezzarsi senz'acquistare nuovi punti doppi.

(**) Per *serie caratteristica* di un sistema continuo di curve, s' intende la serie lineare di gruppi di punti, segata sopra una curva generica, dalle curve infinitamente vicine del sistema. Cfr. Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIX, 1904).

(***) Sotto questa forma il teorema trovasi adoperato nelle ricerche recenti di Castelnuovo (" Comptes rendus ", 23 gennaio 1905) e Severi (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 22 gennaio 1905; e " Comptes rendus ", 3 aprile 1905).

appartiene sempre:

1) *ad un sistema lineare di dimensione*

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i;$$

2) *e ad un sistema continuo di dimensione*

$$\geq p_g + n - \pi + 1 - i,$$

che, per $p_g > p_a$, *è composto di* $\infty^{p_g - p_a}$ *sistemi lineari non equivalenti.*

Il primo enunciato costituisce la più generale estensione ai sistemi lineari comunque riducibili, sopra una superficie, del noto teorema di Riemann-Roch; il secondo ha come analoga, nella geometria sulle curve di genere p, la proprietà che ogni gruppo di $m(\geq p)$ punti appartiene ad un sistema continuo ∞^m, composto di ∞^p serie lineari g_m, non equivalenti tra loro.

L'estensione del teorema di Riemann-Roch ai sistemi lineari irriducibili sopra una superficie, fu enunciata dal sig. Noether (" Comptes rendus ", 1886) nell'ipotesi $p_g = p_a (= p)$.

La giustificazione del risultato fu data da Enriques (*Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, " Memorie dell'Acc. di Torino ", 1893), con restrizioni che risultarono poi sovrabbondanti: da una parte stabilendo come la completezza della serie caratteristica dei sistemi lineari completi (cui il teorema può appoggiarsi secondo il sig. Noether), costituisca un carattere *della superficie* (l. c. IV, 1,2), che risultò poi coincidere con $p_g = p_a$; d'altra parte mostrando come la relazione

$$r \geq p + n - \pi + 1,$$

sussista sempre pei sistemi lineari, i cui caratteri soddisfano a certe diseguaglianze (l. c. IV, 4,5).

Il sig. Castelnuovo, in due Memorie pubblicate, la prima negli " Atti della Società italiana delle Scienze " (1896) e la seconda negli " Annali di Mat. " (1897), essendo riuscito a risolvere in modo esauriente la questione della deficienza della serie caratteristica dei sistemi lineari, per $p_g \geq p_a$, potè dare la relazione

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i,$$

pei sistemi lineari *irriducibili* sopra una superficie qualsiasi.

Più recentemente, io ho esposto una nuova dimostrazione

assai semplice, del teorema sulla serie caratteristica, che sta a fondamento delle ricerche precedenti (*).

A base della mia dimostrazione è posto un lemma, che, opportunamente generalizzato, adempie un ufficio essenziale anche nella trattazione più generale che qui espongo.

Nell'ultima parte di questa Nota, dimostro il secondo dei fatti enunciati, deducendolo dal primo, coll'aiuto del teorema che concerne la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo.

È mio debito dichiarare che il teorema sulla serie continua (costituita da $\infty^{p_3-p_a}$ sistemi lineari) alla quale appartiene una curva i cui caratteri soddisfino alla disuguaglianza

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0,$$

mi fu comunicato dal prof. Enriques, il quale lo aveva dimostrato poggiandosi su quanto già si conosceva intorno al teorema di Riemann-Roch. Io non ho fatto altro che semplificare la dimostrazione, adattando a questa ricerca più generale il procedimento che già avevo seguito nella mia Nota " *Sulla deficienza.....* ". — La gentilezza del prof. Enriques nell'incitarmi a pubblicare la mia dimostrazione, non poteva dispensarmi dal fare questa dichiarazione doverosa.

1. — Ci riferiremo ad una superficie F, di un certo ordine m (in S_3), che supporremo dotata soltanto di curva doppia ordinaria e di punti tripli impropri (tripli anche per la suddetta curva).

E sopra F considereremo sistemi lineari, irriducibili o riducibili, privi di punti base assegnati.

Queste limitazioni non introducono alcuna restrizione essenziale (di carattere invariante) nelle dimostrazioni che seguono, e servono soltanto ad una maggiore semplicità di esposizione.

Per ogni curva, o sistema lineare di curve $|C|$, riteniamo definiti il genere ed il grado virtuali π, n, cui si riferiscono le note formole di addizione e sottrazione dei sistemi. Designamo

(*) *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (" Rend. dei Lincei ", ottobre 1903).

poi con i (≥ 0) *l'indice di specialità* di $|C|$, cioè il numero delle superficie aggiunte φ^{m-i}, linearmente indipendenti, che passano per una C.

2. — Dato sopra F il sistema lineare $|C|$, per una C conduciamo una superficie S, d'ordine l, che seghi ulteriormente su F una curva K (irriducibile), dotata di nodi, nei punti ove S interseca (fuori di C) la linea doppia di F.

Allora, per valutare la dimensione di $|C|$, si presenta la seguente via: si calcoli anzitutto la dimensione R del sistema completo $|C+K|$, che contiene le sezioni di F colle superficie d'ordine l; si cerchi quindi la dimensione d della serie segata su K dalle curve di quel sistema: la dimensione di $|C|$ risulterà

$$r = R - d - 1. \tag{1}$$

La dimensione R di $|C+K|$, quando l è abbastanza alto, si calcola facilmente facendo capo alle note formole di postulazione. Invero, mediante queste formole si riesce ad esprimere la dimensione R_1 del sistema $|L_1|$ segato su F (fuori della linea doppia) dalle superficie aggiunte φ^{l_1} (di un ordine l_1 abbastanza alto), in funzione del grado N_1 e del genere Π_1 dello stesso sistema; e si trova:

$$R_1 = p_a + N_1 - \Pi_1 + 1,$$

ove p_a è il *genere aritmetico* di F (cioè il numero virtuale delle φ^{m-4} linearmente indipendenti).

Ciò posto, dicansi N, Π il grado ed il genere di $|C+K|$, ed j il numero delle intersezioni di una L_1 con una $C+K$. Allora il genere ed il grado del sistema $|L_1+C+K|$, segato su F dalle φ^{l+l_1}, verranno espressi rispettivamente dalle formole

$$\Pi + \Pi_1 + j - 1, \quad N + N_1 + 2j,$$

onde sarà:

$$R_2 = p_a + (N + N_1 + 2j) - (\Pi + \Pi_1 + j - 1) + 1$$

la dimensione di $|L_1+C+K|$.

Ora, per la natura delle singolarità supposte in F, la curva generica L_1 può ritenersi priva di punti multipli, sicchè, quando l

sia abbastanza grande, il sistema $|C+K|$ segherà sopra L_1 una serie non speciale e *completa* (Noether, Castelnuovo). Crescendo, se occorre, il valore di l, si può ottenere che quest'ultima serie contenga la serie caratteristica di $|L_1|$ e lasci come residuo una serie non speciale. Allora, in forza di una proprietà semplicissima delle serie lineari sopra una curva (*), si conclude che sarà completa anche la serie segata da $|L_1+C+K|$ sopra L_1. Onde, per valori elevati di l, avremo:

$$R = R_2 - (N_1 + j - \Pi_1) - 1,$$

ossia:

$$R = p_a + N - \Pi + 1. \tag{2}$$

Tentiamo ora di valutare la dimensione d della serie segata sulla curva K da $|C+K|$. Diciamo perciò ω, ν il genere ed il grado (virtuali) di K ed s il numero delle intersezioni di K con una C (**). La serie di cui dobbiamo occuparci è una $g_{\nu+s}$, di ordine $\nu+s$, la quale potrà risultare speciale o non speciale, completa o deficiente; supponendo la $g_{\nu+s}$ completa e non speciale, per le formole (1), (2) e per le:

$$\left\{\begin{aligned} \Pi &= \pi + \omega + s - 1 \\ N &= n + \nu + 2s, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

si avrebbe:

$$r = p_a + n - \pi + 1 \quad (***).$$

Ma se la $g_{\nu+s}$ è speciale e completa si avrà $d > \nu + s - \omega$, $r < p_a + n - \pi + 1$; se essa è non speciale e deficiente, sarà in-

(*) La dimostrazione della proprietà che qui si usa, trovasi in una nota a piè della pag. 83 della Memoria del sig. Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali...* (" Annali di Matematica ", (2), t. 25, 1897). Anche il ragionamento esposto pel calcolo di R, è un'imitazione di quello che si legge al n° 43 della stessa Memoria.

(**) È opportuno osservare che, in generale, la curva K passa per ciascuno dei punti d'appoggio di C sulla linea doppia; ma che tuttavia *sulla superficie* questi punti non devono riguardarsi come intersezioni di C con K, perchè intorno a ciascuno di essi le C, K appartengono a falde differenti.

(***) Il valore così ottenuto è stato definito nelle " Ricerche " di Enriques, come *dimensione virtuale* del sistema.

vece $d < \nu + s - \omega$, $r > p_a + n - \pi + 1$; sicchè a prima vista non si potrà giungere ad alcuna conclusione positiva circa il valore di r, perchè la specialità e la deficienza della $g_{\nu+s}$ influiscono in senso contrario sul valore di r; nè si sa a priori quale delle due influenze prevalga.

Fissiamo la nostra attenzione sopra una di queste due circostanze: come può avvenire che la $g_{\nu+s}$ risulti speciale?

Poniamo che il sistema $|C|$ abbia un indice di specialità $i > 0$; allora per una C passano $\infty^{i-1}\varphi^{m-4}$, aggiunte ad F, le quali segano su una K generica (che non è contenuta in nessuna φ^{m-4}) gruppi residui della serie caratteristica di $|K|$ (rispetto alla serie canonica); quindi la $g_{\nu+s}$ ha un indice di specialità $\geq i$.

Orbene, noi arriveremo a dimostrare che, per l assai grande, la serie $g_{\nu+s}$ ha precisamente l'indice di specialità i, ed in particolare che essa è non speciale per $i = 0$.

Ciò risulterà senz'altro quando avremo stabilito che *sulla curva* K, *sezione ulteriore di* F *colla superficie* S *d'ordine* l *assai alto, condotta genericamente per una* C, *le superficie* φ^{m-4}, *passanti per* C, *segnano, fuori dei punti fissi, una serie completa.*

3. — Per raggiungere quest'ultimo scopo, occorre premettere il lemma seguente:

Sulla curva K, *ulteriore intersezione di* F *con una superficie* S, *d'ordine* l, *condotta genericamente per una curva* C (*comunque riducibile*) *di* F, *le superficie di un dato ordine passanti per* C *e pei punti doppi di* K, *segano, fuori dei punti fissi, una serie lineare completa* (*).

Nel ragionamento successivo, per brevità, chiameremo *aggiunte* alla curva K, le superficie passanti per C e pei punti doppi di K.

Il concetto della dimostrazione è questo: Si prova dapprima che le superficie aggiunte d'un ordine abbastanza elevato h, segano su K una serie completa; eppoi si prova che, se questa proprietà è vera per l'ordine h, lo è pure per l'ordine $h-1$.

Il primo fatto si stabilisce con un'ovvia estensione di un

(*) Quando manca la C si ricade nel lemma già dimostrato nella mia Nota: *Sulla deficienza della serie caratteristica...* (n° 2).

ragionamento del sig. Castelnuovo (*); condotta per C una superficie d'un ordine arbitrario q, che non contenga K, s'indichi con M il gruppo da essa staccato su K, fuori del gruppo (CK), comune a C, K (**).

Le superficie d'un ordine elevato t, passanti pei punti doppi di K, segano ulteriormente su K una serie completa non speciale $g_{\mu}^{\mu-\omega}$ (***), la quale può anche ritenersi segata su K, fuori dei punti fissi, dalle *aggiunte* d'ordine $t+q$, passanti pel gruppo M.

Ora, quando t sia abbastanza grande, gli ϵ punti del gruppo M presentano ϵ condizioni alle *aggiunte* d'ordine $h=t+q$; sicchè la serie segata su K — fuori dei punti fissi — da queste ultime aggiunte, è una $g_{\mu+\varepsilon}^{\mu+\varepsilon-\omega}$, cioè una serie *completa*, non speciale.

Per passare dall'ordine $h(=t+q)$ all'ordine $h-1$, riprenderò, con qualche modificazione e semplificazione di forma, il ragionamento esposto al n° 2 della mia Nota: " *Sulla deficienza della serie caratteristica...* ".

Sieno ∞^x le superficie Ψ^h, d'ordine h, aggiunte a K, e tra queste ve ne sieno ∞^y per K, sicchè la dimensione della serie completa $g_{\eta}^{\rho}(\eta=\mu+\epsilon,\ \rho=\mu+\epsilon-\omega)$, segata dalle Ψ^h su K, sia $\rho=x-y-1$. Se con z denotiamo il numero delle condizioni imposte alle Ψ^h (o, ciò che è lo stesso, ai gruppi di g_{η}^{ρ}), dai punti del gruppo G segato su K da un piano dato α, la dimensione della serie *completa* $g_{\nu}^{\rho}-G$, risulterà uguale a $\rho-z$.

Ora, indicando con x_1 l'infinità delle superficie Ψ^{h-1} aggiunte a K, e con y_1 l'infinità delle Ψ^{h-1} che passano per K, avremo il valore $\rho_1=x_1-y_1-1$ per la dimensione della serie segata su K, fuori dei punti fissi, dalle Ψ^{h-1}.

Si tratterà di provare che $\rho_1=\rho-z$.

Perciò si osservi che le superficie Ψ^t d'un ordine *arbitrario* t, passanti per la curva composta $C+K$, segano su α *tutte* le curve

(*) Cfr. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare...* (" Rendic. di Palermo ", t. VII).

(**) Si badi che, in questo ragionamento, per gruppo (CK) deve intendersi l'insieme di *tutti* i punti comuni a C e a K, ivi compresi anche quelli che cadono sulla linea doppia (cfr. colla nota (**) a piè della pag. 770).

(***) Castelnuovo, *Sui multipli...*

d'ordine t, passanti per la sezione di $C+K$ con α (*). Ciò posto, diciamo $[h]$ l'infinità delle curve d'ordine h segate su α dalle Ψ^h: allora vi saranno $\infty^{[h]-z}$ di tali curve, passanti inoltre pel gruppo G; e queste, per l'osservazione precedente, costituiranno il sistema di tutte le curve d'ordine h passanti per la sezione della curva $C+K$ col piano α; onde risulterà:

$$x_1 = x - [h] - 1, \quad y_1 = y - [h] + z - 1,$$

dalle quali rilevasi:

$$\rho_1 = x - y - 1 - z = \rho - z,$$

c. d. d.

4. — Il lemma dimostrato conduce immediatamente alla conclusione accennata alla fine del n° 2.

Se, invero, si sceglie abbastanza alto l'ordine l della superficie S condotta per C, la curva K avrà un numero così elevato di punti doppi (sulla linea doppia di F) che le superficie d'ordine $m-4$ passanti per C e pei punti doppi di K, conterranno in conseguenza l'intera linea doppia di F, cioè saranno aggiunte ad F. In forza del lemma, si conclude pertanto che queste aggiunte segano su K una serie completa.

In particolare, quando non esistano φ^{m-4} passanti per C, la serie $g_{\nu+s}$, segata su K dal sistema $|C+K|$, risulterà non speciale.

5. — Siamo ormai in grado di assegnare un limite inferiore per la dimensione r del sistema lineare $|C|$.

Infatti, l'indice di specialità i di questo sistema, uguaglia l'indice di specialità della serie $g^d_{\nu+s}$, segata su K dal sistema $|C+K|$, onde:

$$d \leq \nu + s - \omega + i.$$

Ricordando le relazioni (1), (2), (3) del n° 2, si trova:

$$r > p_a + n - \pi + 1 - i.$$

(*) Il ragionamento semplicissimo con cui si giustifica quest'asserzione, trovasi al n° 2 della citata Nota: *Sulla deficienza della serie caratteristica...*

Otteniamo così il teorema:

Sopra una superficie di genere aritmetico p_a, *ogni curva, irriducibile o no, di caratteri virtuali* n, π *e d'indice di specialità* i, *per cui sia:*

$$p_a + n - \pi + 1 - i > 0,$$

appartiene sempre ad un sistema lineare di dimensione:

$$r > p_a + n - \pi + 1 - i.$$

6. — Supponiamo ora che il sistema lineare $|K|$ appartenga ad una serie continua di curve, non lineare, la quale risulti composta di ∞^p sistemi lineari completi, non equivalenti.

Indicando con $|\overline{K}|$ un sistema generico della serie, diverso da $|K|$, cerchiamo di costruire il sistema:

$$|C + K - \overline{K}|.$$

Occorre perciò considerare la serie $\overline{g}_{\nu+s}$ segata da $|C+K|$ su una curva $\overline{K}$. Questa serie può essere speciale, e può essere deficiente; ciò che a noi importa è questo: l'indice di specialità di $\overline{g}_{\nu+s}$ non può superare quello della $g_{\nu+s}$ segata da $|C+K|$ su K.

Infatti, un gruppo $\overline{G}_{\nu+s}$ di $\overline{g}_{\nu+s}$, variando con continuità insieme a $\overline{K}$, può ridursi ad un gruppo $G_{\nu+s}$ di $g_{\nu+s}$ su K, e ciò senza che il genere della curva $\overline{K}$ diminuisca. Poichè in un tale passaggio al limite, l'indice di specialità del gruppo non può decrescere, si conclude che il sistema:

$$|C + K - \overline{K}|,$$

corrispondente ad una $\overline{K}$ generica, esisterà certamente se:

$$p_a + n - \pi + 1 - i > 0;$$

ed anzi avrà una dimensione:

$$> p_a + n - \pi + 1 - i.$$

In tal caso $|C|$, come $|K|$, apparterrà quindi ad una serie ∞^p di sistemi lineari non equivalenti.

Di qui segue il teorema:

Se sopra una superficie un sistema lineare di caratteri π, n, i, *tali che*

$$p_a + n - \pi + 1 - i > 0,$$

appartiene ad una serie continua ∞^p *di sistemi lineari non equivalenti* (p > 0), *ogni altro sistema analogo apparterrà ugualmente ad una serie* ∞^p *di sistemi lineari non equivalenti.*

7. — Resta da valutare p in funzione dei generi geometrico ed aritmetico (p_g, p_a) della superficie. E per questo occorre fare uso del teorema che " la serie caratteristica di un sistema continuo completo, è essa pure completa ".

Consideriamo il sistema lineare $|L|$ che contiene le sezioni di F colle superficie di ordine l assai elevato, e designamone con Π, N, il genere ed il grado. La dimensione di $|L|$ vale (n° 2):

$$R = p_a + N - \Pi + 1.$$

Sopra una curva generica L, le superficie aggiunte φ^{m-4}, segano la serie *completa* $g_t^{p_g-1}$ residua della serie caratteristica g_N^{R-1} di $|L|$ (rispetto alla serie canonica). Quest'affermazione non è infatti che un caso particolare di quella con cui si chiude il n° 2.

Segue da ciò (pel teorema di Riemann-Roch) che la g_N^{R-1} è contenuta in una serie completa $g_N^{p_g+N-\Pi}$. Ora questa serie completa è la serie caratteristica di un sistema continuo $\{L\}$ contenente $|L|$; la dimensione di $\{L\}$ vale dunque:

$$p_g + N - \Pi + 1.$$

Si vede poi che $\{L\}$ sarà composto di infiniti sistemi lineari, non equivalenti; e la dimensione di un sistema generico $|L$ della serie varrà:

$$\overline{R} \geq p_a + N - \Pi + 1.$$

Ma $|\overline{L}|$, variando con continuità, può tendere ad $|L|$, ed in questo passaggio al limite, $\overline{R}$ non decresce; dunque:

$$\overline{R} = R,$$

ed $\{L\}$ consta di $\infty^{p_g-p_a}$ sistemi lineari.

Si conclude così che:

Sopra una superficie di generi p_g, p_a, *ogni sistema lineare di curve, i cui caratteri* π, n, i, *soddisfino alla disuguaglianza:*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0,$$

appartiene ad una serie $\infty^{p_g - p_a}$ *di sistemi lineari non equivalenti.*

Si può avere un'effettiva contraddizione all'enunciato per $p_a + n - \pi + 1 - i < 0$.

Così se imponiamo al sistema $\{L\}$, di cui sopra, $R + p_g - p_a - \delta$ punti base indipendenti ($\delta < p_g - p_a$), avremo un sistema algebrico *completo* di dimensione δ, la cui curva generica ha appunto i caratteri:

$$N' = \Pi + \delta - p_g - 1, \quad \Pi' = \Pi, \quad i' = i,$$

soddisfacenti alla relazione:

$$p_a + N' - \Pi' + 1 - i' = \delta - (p_g - p_a) - i < 0.$$

Parma, 18 aprile 1905.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Maggio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Allievo, Carutti, Pizzi, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Manno e Chironi.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 30 aprile 1905.

Il Presidente comunica un manifesto per un concorso indetto dall'Associazione costituzionale di Milano ad un premio di lire 500 da conferirsi a chi presenterà il migliore *Studio comparativo sui vari cespiti d'entrata delle finanze comunali nei grandi centri urbani dei diversi Stati.*

Del Socio corrispondente Giuseppe Biadego è presentato d'ufficio l'opuscolo: *Cesare Betteloni, Paralipomeni*, Venezia, 1905 e due altri scritti su pittori veronesi.

Il Direttore della Classe Ferrero fa omaggio del fasc. 5°, vol. VII degli *Atti della Società di archeologia e belle arti per la provincia di Torino*, testè pubblicato.

Invitato dal Presidente il medesimo Socio Ferrero legge la relazione da lui scritta in unione col Socio Manno intorno alla memoria del prof. Arturo Segre, *La questione sabauda e gli*

avvenimenti politici e militari che prepararono la tregua di Vaucelles. Approvata a voti palesi la relazione, la Classe delibera con votazione segreta unanime che lo studio del prof. SEGRE sia accolto nelle *Memorie* accademiche.

Per l'inserzione negli *Atti* sono presentate:

1° dal Socio ALLIEVO una sua nota: *La nuova scuola pedagogica ed i suoi pronunciati*;

2° dal Socio DE SANCTIS un breve scritto del Dr. Giuseppe CORRADI: *Note sulla guerra tra Tolemeo Evergete e Seleuco Callinico.*

LETTURE

La nuova scuola pedagogica ed i suoi pronunciati.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

Oggidì noi assistiamo ad una vivissima lotta tra una nuova scuola pedagogica e la pedagogia filosofica e tradizionale. Il positivismo nato mezzo secolo fa ed annunciandosi siccome il solo ed universale rappresentante della scienza ha voluto innovare di sana pianta la scienza dell'educazione rigettando siccome vecchia, stantìa e contraria allo spirito del tempo la pedagogia quale si venne svolgendo attraverso i secoli sino a noi. È dessa fondata la pretesa di questi novatori? È egli vero che fuori del positivismo non si dà scienza, e che perciò la pedagogia non è scienza se non è anch'essa positivistica? È essa giusta l'accusa e la condanna, che pronunciano contro la pedagogia filosofica? Io ristringo tutta la presente controversia a questo punto: secondo i positivisti, la pedagogia filosofica va rigettata perchè si fonda sopra un concetto dell'uomo fantastico e contrario alla realtà ed all'esperienza, fuori della quale è impossibile la costruzione di qualsiasi scienza.

Ciò posto, io dimando: qual è il concetto dell'uomo, su cui si fonda la pedagogia filosofica? L'uomo, soggetto dell'educazione, è una vivente armonia di due distinte sostanze, anima e corpo, una persona fornita di intelligenza conoscitiva, di attività volontaria, di sensitività fisica, conscia di se medesima, arbitra del proprio operare, che afferma la propria individualità col vocabolo *io*. Questo concetto dell'uomo, ben lontano dall'essere fantastico e campato in aria, è affatto rispondente alla realtà, ha per sè il consenso del genere umano, è suffragato dalla notissima sentenza *mens sana in corpore sano*, è attinto dalla stessa esperienza interna, ossia dal senso intimo, giacchè basta raccoglierci in noi stessi, interrogare la propria coscienza per rilevare che ciascuno di noi è una mente informante un orga-

nismo corporeo, una dualità di nature coesistente nell'unità dell'io. " Nostra omnis vis in animo et corpore sita: animi imperio, corporis servitio magis utimur. Alterum nobis cum Diis, alterum cum belluis, commune est „ (Sallustio, 1).

Posto questo concetto dell'uomo a fondamento della pedagogia, noi abbiamo siccome necessaria conseguenza un'educazione, che risponde al suo sublimissimo còmpito, qual è quello di formare il carattere. Infatti dacchè l'alunno di sua natura è un'energia, un'attività non cieca o fatale, ma personale, cioè intelligente, libera, conscia di sè, consegue che è lui il primo fattore della propria educazione, che va educato in guisa che impari a pensare da sè, ad operare con libertà di volere e colla coscienza del proprio dovere. Così appunto si formerà il carattere, giacchè uomo di carattere è colui, che pensa con verità e colla propria testa, è arbitro del suo operare e conforma le sue azioni esterne coi suoi interiori convincimenti, sempre mirando all' ideale divino della sua perfezione. La fiacchezza de' caratteri, la rilassatezza de' costumi e la conseguente ipocrisia e slealtà dell'operare si manifestano là dove vien meno negli animi questa coscienza della dignità personale umana, questo sentimento della forza interiore del nostro io, illuminato dall'idea del dovere morale e religioso. Un'educazione siffatta è necessaria in tutti i secoli, presso tutte le genti, perchè risponde alla natura umana, e la natura è la stessa sempre e da per tutto. Quindi si scorge quanto ingiustamente si accusi la pedagogia filosofica di essere vecchia e contraria allo spirito della modernità, come se abbia fatto il suo tempo.

Ora volgiamoci alla nuova pedagogia positivistica e vediamo se il concetto dell'uomo, su cui si fonda, conduca ad una educazione veramente umana nel giusto senso della parola. L'uomo, secondo i placiti del positivismo, non è un soggetto sostanziale conscio della sua personalità individua singolare, bensì un intreccio di fenomeni psichici e fisiologici, che non appartengono a nessun io, come a loro principio supremo e generatore. L' io è un'illusione. L'uomo appartiene anch'egli al mondo della natura, epperciò i fenomeni interni, in cui si svolge la sua vita, sono anch'essi, come i fenomeni esterni della natura, determinati da leggi necessarie ed ineluttabili. La libertà è un'illusione. Quale guisa di educazione consegua da questo concetto antro-

pologico, si pare da sè. Dacchè l'alunno non possiede una sostanzialità personale, per cui possa attribuire a se stesso i fenomeni, che succedono in lui, dacchè non può affermare, che i tali pensieri, i tali sentimenti, i tali voleri sono propriamente suoi, perchè l'io non esiste, riesce impossibile la formazione del carattere, siccome quello, che posa sulla coscienza, che l'io ha della sua attività personale. Dacchè l'alunno non possiede il libero dominio del suo operare, ma è dominato da un determinismo insuperabile, anche per questo il carattere diventa un'impossibilità assoluta, perchè esso importa essenzialmente la libertà personale dell'io; e per di più torna inutile ogni opera, ogni cura, ogni fatica, con cui altri si argomenti di imprimere all'educazione dell'alunno questo o quell'altro indirizzo conforme ad un disegno premeditato: la natura farà lei sola anche a vostro dispetto, e nessuna vostra forza varrà ad attraversarle l'inesorabile cammino. Così le due persone dell'educatore e dell'educando scompaiono in un vortice di fenomeni, che si succedono nel loro fatale periodo.

Certamente i nostri novatori respingono queste idee, le quali distruggono sin dalle sue fondamenta l'educazione umana, ma la logica è inesorabile. Anch'essi ci parlano della necessità imperiosa di formare il carattere dell'alunno, di promuovere lo sviluppo spontaneo della sua attività mentale, di educarlo alla libertà del pensiero; ma in tal caso la logica li costringe ad accogliere il concetto filosofico dell'uomo, da cui discendono tutte queste conseguenze pedagogiche, e rigettare il concetto antropologico positivistico da cui fioriscono conseguenze pedagogiche diametralmente opposte.

L'empirismo positivistico in pedagogia.

Pronunciato fondamentale della nuova scuola pedagogica è questo, che la scienza dell'educazione va costrutta sull'unica base dell'esperienza, all'infuori della quale non si dà rigoroso sapere di sorta. Siccome il positivismo nega la realtà della sostanza e riduce l'essere tutto quanto a meri e nudi fenomeni, così l'esperienza viene ad essere la facoltà, che apprende i fatti attinenti all'educazione, mentre la ragione è facoltà, che ha per oggetto le verità universali e necessarie, senza delle quali non

si dà scienza nel vero senso della parola, ma puro ed inconsistente empirismo. Ed anzi tutto giova notare che la nuova scuola, mentre proclama di non voler accogliere nella cerchia della scienza altro che fatti, inconseguente a se medesima rinega alcuni fatti di singolarissima importanza. Giacchè è un fatto irrepugnabile, che l'educatore e l'alunno, l'uno di fronte all'altro, sentono di essere non già meri fenomeni insieme implicati, bensì due persone vive e reali, che hanno ciascuna affetti, intendimenti e voleri suoi proprii, ed affermano la loro individualità col vocabolo *io*; sentono di essere attività libere, consapevoli di sè, arbitre del proprio operare. Ora la nuova scuola proclama illusorii questi due solennissimi fatti, che sono il fondamento primo dell'opera educativa.

Ora viene l'esaminare, se coi soli fatti ammanniti dall'esperienza si possa costrurre la scienza pedagogica. L'uomo è un soggetto educabile. Questo concetto semplicissimo ed elementare trascende la sfera dell'esperienza. Essa mi apprende bensì, che gli individui umani da me percepiti sono suscettivi di educazione; ma chi mi assicura, che tutti quanti gli altri innumerevoli individui umani, che esistono ed esisteranno, sono anch'essi educabili? (1). È la ragione la quale riconosce la nota di educabilità in tutte le persone umane, dovunque si trovano. Ecco qui un concetto universale, che trascende l'esperienza e si deve alla ragione. Inoltre l'esperienza mi dice quello, che è di fatto, non quel che debb'essere; mi apprende cioè che l'uomo viene realmente educato, ma non già che lo debba essere; è dessa la ragione, che muovendo dal concetto della persona umana ne argomenta che l'educazione le è necessaria ed essenziale. Così la sola esperienza non vale a somministrarci la verità universale e necessaria dell'educabilità umana.

L'educazione ha davanti di sè un ideale supremo, su cui tien fisso lo sguardo, un tipo di perfezione, su cui cerca di modellarsi l'opera concorde dell'educatore e dell'alunno. Qui si para

(1) Che anzi l'esperienza storica mi apprende essa stessa in contrario, che l'educabilità non si riscontra in tutti quanti gli individui della specie umana senza eccezione di sorta. Infatti la storia ci attesta che la schiavitù personale era piaga schifosa che deturpava la civiltà greca e romana, e si negava ai servi il diritto ad essere educati, relegandoli nell'ignobile rango de' bruti.

in tutta la sua assoluta impotenza la facoltà dell'esperienza, la quale imprigiona tutto il magistero educativo dentro le angustie della nuda realtà. L'ideale, sia esso proprio dell'arte, o della scienza, o della virtù, o dell'educazione, di qualunque specie esso sia, trascende la sfera della realtà ed i fatti dell'esperienza. Poichè la realtà finita tutta quanta è sempre oscurata da imperfezioni e difetti, l'ideale splende nella sua serena purezza; i fatti sono di loro natura sfuggevoli e transitorii, l'ideale vero non tramonta mai. Certamente l'ideale non deve straniarsi dal mondo della realtà tanto da diventare assolutamente inaccessibile e perdersi in una vana e disperata utopia, ma neanco deve abbassarsi a segno da confondersi colla realtà sempre imperfetta e difettosa. Esso non potrà mai essere tradotto in atto in tutta la sua sublime purezza, *perchè a risponder la materia è sorda*; nel che mostra di avere in sè alcunchè di sovrumano e di celeste.

Ciò posto, l'educazione abbisogna di un ideale suo proprio, senza di cui andrebbe alla ventura, smarrendosi in un cieco empirismo; e quest'ideale trascende di sua natura il mondo dei fatti e dell'esperienza, e dalla ragione soltanto ci può essere rivelato. E veramente la storia e l'esperienza ci mostrano l'educazione non quale debb'essere, ma quale è co' suoi pregi inseparabili da' suoi difetti e dalle macchie che la deturpano, quale fu od è data di fatto presso i diversi popoli, nei diversi secoli. Nessuna nazione per quantunque incivilita e colta può additarci l'educazione sua propria siccome il tipo sovrano ed unico, su cui va modellata quella di tutte le altre, sia perchè nessuna va scevra di difetti (1), sia perchè ogni nazione ha un'impronta sua propria, secondo cui va educata, sia assai più perchè all'ideale particolare educativo proprio di ciascun secolo e di ciascun popolo sovrasta l'ideale supremo di tutta l'umanità. Nè giova

(1) Nell'educazione orientale l'alunno era sacrificato all'assoluta ed esclusiva immobilità delle caste ed allo sconfinato dispotismo del supremo imperante. L'educazione ellenica risplendeva di grandi e cospicui pregi; ma la personalità dell'individuo e la dignità dell'uomo scomparivano davanti all'onnipotenza della statolatria. L'alunno era educato in servizio dello Stato: fare di lui un buon cittadino, che non aveva altri diritti ed altri doveri, se non quelli che gli venivano dallo Stato, era il fine supremo dell'educazione greca.

opporre in contrario, che possiamo foggiarci l'ideale dell'educazione raccogliendo qua e là tutti i pregi, che si riscontrano nella storia e nell'esperienza delle diverse educazioni particolari e sceverandone i difetti; perchè questo lavoro di scelta, affinchè riesca all'intento, abbisogna d'un criterio superiore, che trascende e precede la storia e l'esperienza.

Giudizio comparativo intorno la pedagogia filosofica e la positivistica.

Una scienza pedagogica senza verità universali e necessarie, un'educazione senza ideale, ecco le conseguenze, che derivano dal principio, che l'esperienza è la norma unica e suprema della disciplina pedagogica. Giunti così a questo punto della nostra breve critica diremo noi dunque, che la pedagogia filosofica sia di tutto punto perfetta e superiore ad ogni appunto della critica, e che per lo contrario la nuova scuola pedagogica sia niente più che un tessuto di errori, di incertezze, di gratuite asserzioni? Recisamente questo io non affermo; chè sarebbe una sentenza non conforme a verità, se fosse accolta lì per lì, senza schiarimenti di sorta.

In riguardo al primo di questi due punti, necessita far distinzione tra la pedagogia filosofica in se stessa considerata ed i suoi cultori. Oggettivamente riguardata, essa si fonda sopra un principio essenzialmente vero ed inconcusso, quale è quello della natura umana riposta nella personalità dell'io, e nel suo procedimento adopera non la sola esperienza disgiunta dalla ragione, nè la sola ragione astratta, che disdegna la realtà dei fatti, bensì entrambe queste due potenze conoscitive, e l'una in armonia coll'altra. Quindi essa nel suo progressivo sviluppo attraverso i secoli accoglie nel proprio organismo siccome vere e scientifiche tutte quelle cognizioni, che logicamente rampollano dal suo principio supremo; e siccome la natura umana è sempre essenzialmente la stessa in tutte le genti, in tutti i secoli, così la pedagogia filosofica, che su questo principio si fondamenta, non potrà mai trovarsi in conflitto collo spirito vero del tempo ed è feconda di un progresso indefinito. Che se la consideriamo in rispetto a' suoi cultori, uopo è riconoscere che essa nelle pagine della sua storia presenta qua e là difetti e mancamenti

più o meno gravi, opinioni e teoriche malferme, insussistenti, esagerate; ma queste non sono conformi al suo principio fondamentale, epperò non vanno attribuite ad essa, nè incorporate col suo organismo. Così nella schiera de' suoi cultori si riscontrano alcuni, che non hanno tenuto in tutto quel conto che si merita l'educazione fisica, sacrificandola in gran parte alla mentale; altri che nella coltura dell'intelligenza hanno dato troppa importanza all'esercizio della memoria a danno della riflessione e del giudizio; altri che nell'educazione morale e religiosa hanno esagerata l'importanza dell'autorità e della fede a danno della libertà e della ragione; ma tutti questi pedagogisti caddero in tali difetti, perchè non seppero applicare dirittamente il principio fondamentale alle parti molteplici della scienza pedagogica.

Venendo al secondo punto, nessuno mai, che abbia fior di senno, rigetterà siccome sciupato, fallito e contrario al vero tutto il lavoro della nuova scuola pedagogica. Anch'essa ha le sue parti buone e commendevoli accanto alle malsane e morbose; ha messo in bella luce alcuni punti, che non erano stati sufficientemente lumeggiati; ha posto in rilievo alcuni fatti educativi mediante un'analisi sottile ed accurata; ha dato un nuovo impulso all'educazione fisica ed alla coltura del pensiero; ma il principio fondamentale, su cui essa posa, è radicalmente sbagliato; epperò tutte le verità, che essa contiene nella sua dottrina, non le può logicamente ammettere, se non a condizione di rigettare il suo principio supremo, mentre la pedagogia filosofica le può accogliere tutte quante, perchè rientrano nel principio che le è proprio.

La nuova scuola pedagogica e la critica.

È un principio inconcusso di critica scientifica, storica e sociale, che tra una civiltà, che tramonta ed un'altra, che spunta rimane qualche elemento comune e conciliatore, che sta come anello e vincolo di congiunzione tra l'una e l'altra, sicchè l'antico si innova e si trasforma sotto il nuovo spirito del tempo. Tutto muta, niente si distrugge; un edificio costrutto sulle ruine non regge. In virtù di questo principio occorreva anzitutto che la nuova scuola pedagogica sin dal suo esordire instituisse una critica seria, calma, profonda intorno la pedagogia filosofica tra-

dizionale riguardata nelle opere de' suoi più illustri rappresentanti, sincerando le parti buone e vere, che hanno diritto di essere rispettate e conservate, e le parti morbose e stantìe, che vanno abbandonate. Ma non così essa ha adoprato. Cerchiamo questo lavoro critico nelle opere de' più celebri rappresentanti e promotori della nuova scuola pedagogica, e non lo troviamo. Vediamo anzi che essi lanciano contro la pedagogia filosofica gravi e vaghe accuse senza dimostrarle; che disconoscono e fraintendono i principii fondamentali, su cui essa posa; che bene spesso nella costruzione delle loro teorie scambiano le loro gratuite e dogmatiche asserzioni per verità dimostrate; che menano vanto di certe scoperte come di novità originali loro proprie, mentre assai prima della loro comparsa già stavano registrate nella storia della pedagogia e loro non spetta altro merito se non quello di averle esagerate. Discendiamo ai particolari.

La nuova scuola pedagogica e le sue accuse.

Una delle più gravi accuse mosse alla pedagogia tradizionale è questa, che essa altro non vede, altro non contempla nell'alunno se non un'anima da educare, ma un'anima astratta, vana, disgiunta dai fenomeni psichici e fisiologici, in cui essa vive, separata dal corporeo organismo, e quindi priva di fondamento e di sviluppo, sicchè l'uomo viene educato per una vita oltremondana chimerica ed illusoria (dicono essi), e non per la vita presente, che si agita e si svolge in seno della natura come suo unico ed universale ambiente. Nulla di più insussistente ed erroneo. La pedagogia filosofica riconosce nell'alunno un'anima razionale non già separata dal corpo, ma con esso vitalmente congiunta in unità di persona, sebbene da esso distinta, un'anima, che sviluppa di continuo le sue energie in una successione di fenomeni, che formano la sua vita, epperò vuole un'educazione, che si estenda a tutto quanto l'uomo nella dualità delle sue sostanze e nell'unità della sua persona, alla vita temporanea ed alla futura. I nostri novatori fanno senza dell'anima razionale distinta dal corpo, facendone una funzione dell'organismo, e riducono tutto l'umano soggetto ad un insieme complessivo di fenomeni senza la personalità dell'io, e riescono ad una specie di educazione affatto opposta; ma hanno essi di-

mostrato il principio fondamentale, su cui posano la loro dottrina pedagogica?

Alla vecchia scuola si muove quest'altra accusa, che essa trascurava la coltura e l'educazione dei sentimenti. L'accusa è ben singolare e strana in bocca a costoro, che esaltano il culto della scienza siccome il sommo di tutta quanta l' educazione umana, come se l'uomo fosse tutto quanto un'intelligenza, che pensa e conosce, e non altresì un cuore, che sente. Basta leggere l'operetta pedagogica (1) dello Spencer per rimanerne onninamente convinti. Egli esalta tanto la scienza da farne il fondamento delle arti belle ed il principio generatore della religiosità, ma in realtà la scienza quale egli la intende, tutta quanta rinchiusa nei cancelli del mondo fenomenico, non è niente di tutto questo, e la stessa scienza veracemente intesa ha bensì dei punti di intimo contatto coll'arte, colla morale e colla religiosità, ma di sua stessa natura essenzialmente se ne distingue.

L'educazione fisica venne trascurata dalla pedagogia filosofica; ecco un'altra censura, a cui occorre una risposta. Il soggetto educando è una sintesi vivente di due distinte sostanze, anima e corpo, spirito e materia: ecco il principio, su cui si regge la pedagogia filosofica. Dunque vanno in lui coltivate e svolte entrambe queste sostanze, e l'una in armonia coll'altra: ecco la conseguenza pedagogica, che per logica necessità fluisce da quel principio. *Mens sana in corpore sano.* Che in alcuni secoli e presso alcuni pedagogisti l'educazione fisica non sia stata apprezzata in tutta la sua importanza e l'abbiano più o meno negletta, schiettamente lo riconosciamo; ma questa trascuranza non va addebitata alla pedagogia filosofica, essendo affatto contraria al suo principio fondamentale, bensì a' suoi cultori, che smarrirono di vista quel principio, ed alle condizioni sociali più o meno lontane dalla vera civiltà. Che se per lo passato su questo punto si peccava talvolta per difetto, oggidì i nostri novatori hanno trasceso nell'estremo opposto. Di presente all'educazione fisica si attribuisce un'importanza esagerata e sproporzionata affatto colla coltura dello spirito, tantochè nel dicastero della pubblica istruzione essa tiene una divisione speciale tutta sua propria, ed al culto della ginnastica educativa si sono con-

(1) *Educazione intellettuale, morale e fisica.*

sacrate pubbliche scuole. Del che non è da stupire, dacchè si va proclamando che l'educazione deve fare dell'uomo anzi tutto e sopra tutto *un buon animale*, mentre il magistero educativo deve sovranamente adoprarsi a fare dell'alunno un uomo, che pensa da senno e rettamente vive, subordinando alla coltura dello spirito quella del corpo come strumento e mezzo a fine superiore. Anzi tutto occorre essere un galantuomo, e lo si potrebb'essere anche nel caso, in cui il *buon animale* non facesse mostra di sè; che anzi talvolta l'ossequio alla santità del dovere esige il sacrificio del benessere animale e della vita medesima.

La nuova scuola pedagogica annovera nel suo seno alcuni seguaci dell'evoluzionismo darviniano, i quali accusano la vecchia pedagogia di posare sopra una psicologia astratta e dualistica, per cui mancava di salde basi scientifiche, adoprava un metodo puramente soggettivo ed astratto e toglieva di mezzo ogni raffronto tra i fenomeni psichici dell'uomo e quelli degli animali. Tutte queste accuse presuppongono, che l'evoluzionismo, a cui si appoggiano, sia una verità scientifica rigorosamente dimostrata, ma cadono l'una dopo l'altra, dacchè il Darwinismo è una mera ipotesi sostenuta da pochi pensatori, che lo scambiano per un teorema scientifico dimostrato. Arroge che anche riguardato come una pura ipotesi bisognevole di conferma, l'evoluzionismo è ben lontano dallo adempiere i difetti ingiustamente attribuiti alla pedagogia filosofica e rinnovare di sana pianta la scienza educativa nelle sue basi, nel suo metodo, nelle sue attinenze sociali.

La nuova scuola pedagogica e le sue scoperte.

Se le accuse mosse dai novatori reggano alla critica, e se essi mostrino di essersi formato un giusto ed imparziale concetto della dottrina da loro combattuta, ne pare di averlo a sufficienza chiarito. Ma non si stanno contenti alle accuse: passano a glorificare i risultati dei loro lavori e menano vanto di scoperte originali loro proprie. Già lo abbiamo riconosciuto in generale, che la nuova scuola pedagogica, quando per buona sorte si mostrò inconseguente a' suoi principii psicologici, ha contribuito su parecchi punti al progresso della scienza educativa. Ora rimane a chiarire e mettere in sodo, se tutti i suoi vanti siano fondati in realtà.

1. — *Il metodo intuitivo.*

Si va ripetendo che alla nuova scuola pedagogica è dovuto il merito di avere introdotto e promosso siccome proprio dell'insegnamento elementare il metodo intuitivo fondato sull'osservazione degli oggetti e sulle lezioni di cose, proscrivendo il metodo dominante siccome meramente mnemonico, meccanico ed astratto. Ma a tutti è noto che il metodo fondato sull'osservazione degli oggetti già era stato proposto e saggiamente attuato, per tacere di molti altri pedagogisti, da Giovanni Amos Comenio (1592-1671), autore della *Didactica magna* e dell' *Orbis pictus*; e in quel medesimo secolo Volfango Ratich non solo proclamava la massima, che tutto debb'essere *fondato sull'osservazione e sull'esperienza*, ma lanciava una ricisa condanna contro tutto il passato, e voleva il trionfo assoluto della ragione. *Vetustas cessit, ratio vicit.* In quella massima, in questa sentenza c'era tutta la nuova scuola pedagogica del tempo nostro: anche essa ripete: tutto quanto il sapere posa sull'esperienza, bando alla vecchia pedagogia. Le così dette lezioni di cose, su cui si fonda il metodo intuitivo od oggettivo, non sono una novità introdotta dalla scuola positivistica, giacchè esse già erano state saggiamente praticate nelle scuole elementari sotto nome di nomenclatura dal Pestalozzi in Isvizzera, da Vitale Rosi, da Ferrante Aporti, da Vincenzo Troya in Italia.

L'insufficienza del metodo esclusivamente intuitivo si fa vieppiù manifesta a chi ponga mente che esso rimane tutto quanto circoscritto nella cerchia degli oggetti, che cadono sotto la percezione de' sensi corporei esterni, e si chiarisce affatto impotente all'apprendimento di quelle conoscenze, che hanno per oggetto il mondo interiore dell'anima. Nessuno può mettere in dubbio che il fanciullo debba essere ammaestrato altresì nello studio di se medesimo, coltivando in lui il senso intimo e rivolgendo la sua attenzione a quei fenomeni interni, intorno a cui si svolge la sua vita psichica nelle sue molteplici forme. Ora gli è evidente che nessuno dei sensi fisici esterni, su cui si fonda il metodo così detto intuitivo od oggettivo, può essere adoperato per siffatto genere di conoscenze.

2. — *L'autodidattica.*

In sentenza de' nostri novatori, la vecchia pedagogia trattava il discepolo siccome un vaso da riempiere, un automa da foggiare, un cieco credente alla parola dogmatica del maestro. Essi lo hanno elevato alla coscienza della sua attività mentale, gli hanno restituito il libero dominio del proprio pensiero, lo hanno reso artefice del proprio sapere, sostituendo l'autodidattica all'insegnamento meccanico, autoritario, pedantesco. A chiarire se e quanto di vero vi sia in siffatta sentenza è pregio dell'opera disaminare per bene in che veramente dimori l'autodidattica, misurarne l'estensione e segnarne i limiti, ricercarne il fondamento e l'origine psicologica, additare lo scopo finale, a cui è ordinata. Io non mi perito di avvertire, che una compiuta e seria analisi critica dell'autodidattica riguardata sotto tutti i suoi aspetti invano si cerca nelle opere dei nostri novatori, che pure così sovente ne fanno parola come di una loro originale scoperta.

L'autodidattica, se si sta al puro significato del greco vocabolo (αὐτὸς *ipse, stesso*, e διδάσκω *insegno*), riguarda esclusivamente l'educazione intellettuale e potrebbe venir definita siccome l'attitudine o l'arte di insegnare a se medesimo, di ammaestrare se stesso, di istruirsi da sè; ma riguardata in senso generalissimo ed ampiamente esteso questa parola potrebbe significare l'attitudine non solo d'istruir se medesimo, ma di educare se stesso sotto ogni riguardo ed in tutto l'insieme delle proprie potenze costitutive dell'umana natura.

Qui viene opportuno come punto di mossa di questo esame un passo notevole del Degerando, il quale al capo primo del primo libro dell'opera *Du perfectionnement moral, ou de l'éducation de soi-même*, così scrive: " Giustamente i filosofi hanno avvertito, che l'istruzione solida è quella sola che l'alunno trae dal suo proprio fondo; che non è vero insegnamento quello che trasmette nozioni bell'e fatte, bensì quello che abilita a formarsi da se stesso buone nozioni. Ciò, che essi hanno detto delle facoltà intellettuali, si applica ad un modo alle facoltà morali; e come vi ha per il pensiero una coltura *autodidattica*, così evvi per l'anima una coltura spontanea, quella da cui dipende ogni

reale progresso nel perfezionamento „ (1). Da questo passo agevolmente si raccoglie, come l'autore assai prima de' nostri novatori abbia pronunciato il vocabolo *autodidattica*, ne abbia espresso il vero concetto ed abbia notata la giusta corrispondenza, che esiste tra l'ammaestramento di se medesimo e la formazione del proprio carattere.

È cosa di fatto che il fanciullo sin dalla prima età percependo coi proprii sensi gli oggetti della natura fisica circostante ed esercitando i suoi primi giudizi sui fatti percepiti e sulle cose osservate, acquista un notevole corredo di cognizioni intorno il mondo corporeo, alla famiglia, ai proprii simili, che non deve alla parola del maestro, ma alla virtù del proprio pensiero. Basti avvertire come egli, non per anco uscito dalla seconda infanzia, giunga in poco più di quattro anni al possesso di pressochè tutto il patrimonio del linguaggio materno, ed adoperi all'uopo i vocaboli appresi componendoli in proposizioni, frasi e periodi e variandone la desinenza a tenore delle norme grammaticali da lui intuite, ma non apprese da verun libro, da nessun maestro (2). Qui abbiamo l'autodidattica nella sua forma schietta e genuina, l'autodidattica affatto naturale, spontanea, diretta, immediata, indipendente del tutto da ogni magistero esteriore: è il fanciullo, che ammaestra se medesimo, è l'inventore delle proprie conoscenze: qui il maestro non ha che fare nè punto, nè poco: il suo maestro è lui stesso, come lo sarà nell'età virile, quando avrà compiuta la sua vita scolastica, e scruterà col suo libero pensiero gli ardui problemi della scienza (3).

---

(1) Opera citata, tomo 1, pag. 17, ediz. quinta.

(2) Consulta la mia opera *Studi antropologici*, pag. 180-182.

(3) Un esempio di questa autodidattica mirabilissimo e piuttosto unico che raro ci porge la storia del pensiero in Biagio Pascal. Suo padre aveva notato in lui ancora fanciullo una singolarissima attitudine al ragionare astratto; ma volendo si applicasse allo studio delle lingue vive, fece del suo meglio perchè ignorasse perfino l'esistenza ed il nome delle matematiche, che sono scienze di puro ragionamento, ma non potè schermirsi dal dargli una vaga definizione della geometria, di cui egli aveva udito pronunciare il nome in una conversazione. Biagio Pascal non contava allora che dodici anni, e meditando su quella vaga definizione, tracciava di nascosto col carbone delle figure di varie forme, ne immaginava una definizione, ne rintracciava le proporzioni, formolava assiomi e principii, e costruendo dimostrazioni, concatenando teoremi giunse da sè sino alla XXXII proposizione del 1° libro di Euclide.

Ma vi sono altri svariatissimi ordini di cognizioni, alle quali l'alunno non perviene colla sola ed esclusiva virtù del proprio pensiero, e che tuttavia non riceve già bell'e fatte dalla parola altrui. Quando il maestro, destramente giovandosi del metodo inventivo od euristico, che da Socrate era stato adoperato con somma sapienza e singolare efficacia, conduce passo passo l'alunno per via di accorte e concatenate dimande a scoprire verità ancora ignote, abbiamo qui una nuova forma di autodidattica, che chiameremo mediata, indiretta, perchè interviene l'opera del maestro: le cognizioni sono acquistate dal discepolo, sono sue, una conquista del suo pensiero, ma conquistate non le avrebbe, se il maestro non gliene avesse additata la via.

Avvi un terzo ordine di cognizioni, in cui l'autodidattica vien meno affatto ed è costretta a riconoscere i proprii limiti. A ragion d'esempio, nessuna potenza di ragionamento individuale, nessuna maestria di dialogo euristico varrà a scoprire la verità storica, che Annibale sconfisse al Ticino l'esercito romano. Giova però osservare, che anche le cognizioni di siffatto genere, sebbene siano dovute all'autorevole parola altrui, possono tuttavia contribuire indirettamente all'autodidattica, quando siano dal maestro impartite con tale criterio e saggio intendimento, che non solo aumentino il sapere dell'alunno, ma lo addestrino a pensare da sè, inspirandogli la coscienza della sua attività mentale.

Determinato così il concetto dell'autodidattica, misurata la estensione e segnati i limiti, viene il ricercarne l'origine ed il fondamento ed additare lo scopo, a cui è ordinata. L'io umano è un soggetto personale, e quindi fornito di una energia pensante sua propria, per cui aspira scientemente e liberamente alla conoscenza della verità, siccome suo naturale obbietto: ecco l'origine ed il fondamento dell'autodidattica. Ma la personalità umana individua è limitata per natura, e quindi bisognevole di un intervento esteriore: ecco la ragione dei limiti, che circoscrivono l'autodidattica. Questi limiti furono disconosciuti dal Jacotot, come mi venne chiarito nel mio opuscolo *Jacotot ed il suo metodo di emancipazione intellettuale.*

L'autodidattica non è fine a se medesima, bensì è ordinata ad uno scopo superiore, il quale risiede nell'αὐταρχεία secondo la

bella espressione di Aristotele, ossia nel governo di se medesimo mediante la formazione del carattere. Imperocchè un intimo vincolo di armonica corrispondenza congiunge insieme nell'umano soggetto il pensare ed il volere, il conoscere e l'operare per modo che la vita intellettiva illumina e sorregge la vita attiva, e l'idea trova la sua incarnazione e la finalità sua nel fatto. Di che consegue che il dominio de' proprii atti e delle proprie potenze, il governo di tutto se stesso, l'indipendenza dell'animo, l'operare da sè, presuppone come sua condizione necessaria ed assoluta il pensare da sè, l'ammaestrare se stesso, il meditare ed il riflettere con tale spontaneità ed energia, che la verità conosciuta sia una giusta conquista della nostra virtù intellettiva. Chiunque abbandona alla ventura il suo pensiero e passivamente accoglie le conoscenze o le percezioni, che gli vengono dal di fuori senza assimilarsele e farle sue, mai non giungerà a procacciarsi quella fermezza di proposito, e quella costanza di volere e quella saldezza incrollabile di convincimento, che costituiscono l'uom di carattere e gli assicurano il governo di se medesimo. Certo è che l'ammaestrarsi da sè non è ancora l'educarsi da sè, e l'autodidattica per sè sola non costituisce l'αὐταρχεία, perchè altro è il puro pensare, ed altro il volere e l'operare; ma non è men certo che la libera signoria di noi medesimi importa il dominio del proprio pensiero.

Premesso questo studio analitico dell'autodidattica, ognuno vede agevolmente che i nuovi pedagogisti nello esaltarla come fanno e proclamarla siccome una loro scoperta, si mostrano in una flagrante contraddizione coi principii fondamentali della loro psicologia. All'uopo basta l'avvertire che l'autodidattica si regge tutta quanta sulla personalità dell'io, riguardato come un soggetto sostanziale fornito di una individualità singolare, per cui è consapevole che l'energia pensante, di cui è fornito, è tutta sua propria, e che gli atti intellettivi, in cui si svolge, vengono da lui ed a lui appartengono come loro principio originario e comune soggetto. Ora i fautori della nuova psicologia rinnegano apertamente la libera attività e la personalità dell'io umano riducendolo ad un insieme complessivo di fenomeni mentali, che non appartengono a nessun soggetto e si succedono a tenore di leggi ineluttabili, facendo dell'anima umana una mera funzione dell'organismo corporeo.

3. — *L'adattamento.*

Ecco uno de' tanti nuovi vocaboli, che il positivismo contemporaneo ha introdotto nella scienza pedagogica, reputando di averla con ciò arricchita di un nuovo rilevantissimo concetto; ma anch'esso non può sfuggire al severo esame della critica.

Anzi tutto non pare che l'autodidattica tanto esaltata e con tanto calore propugnata dai nuovi pedagogisti sia conciliabile coll'adattamento, essendochè quella rivela l'attività interiore dello spirito, che pensa e si ammaestra da sè, questo invece accenna ad uno stato passivo dell'animo, che accoglie in sè l'impressione di un agente esteriore e si conforma alla sua virtù plasmatrice. Ma addentriamoci nell'esame di questo concetto e rendiamoci conto dei significati diversi, in cui può essere assunto il nuovo vocabolo.

Una dimanda si presenta spontanea, alla quale occorre rispondere. L'educazione, voi sentenziate, è un adattamento; ma io vi dimando: intendete voi di significare, che l'educatore debba acconciare il suo magistero alla persona dell'alunno, o per lo contrario che l'alunno debba conformarsi in tutto il suo esplicamento all'opera dell'educatore? Nel primo caso, la sentenza è profondamente vera, ma il concetto, che voi proclamate, non è un concetto nuovo e tutto vostro proprio; giacchè assai prima di voi ed assai più di voi la vera e soda pedagogia aveva sempre solennemente proclamato che l'educatore deve riconoscere nell'alunno non uno schiavo da foggiare a suo capriccio, bensì una persona intelligente e libera di sè. Aggiungerò ancora che sostenendo questa sentenza voi contraddite alla vostra dottrina psicologica, la quale rinnega la personalità sostanziale dell'umano soggetto. Nel secondo caso, nulla di più insussistente e di erroneo, quanto l'affermare che l'alunno debba adattare tutto quanto e quale egli è al lavorìo ed agli intendimenti di chi lo educa, diventando così una pallida copia di lui sino a perdere la personalità sua propria. Se così fosse, egli non sarebbe più il primo fattore della propria educazione, e l'educazione medesima verrebbe a perdere il suo essenziale carattere personale, per cui essa apparisce veramente umana e radicalmente si differenzia dall'educazione de' bruti. Nessuno mai negherà che l'alunno debba accogliere con animo docile ed attento le cure che

gli prodiga l'educatore e farne suo pro, apprezzarne i saggi consigli, prestare alla sua autorità una ragionevole obbedienza, e lavorare concorde con lui intorno la grand'opera del proprio perfezionamento: ciò nullameno egli conserverà intatta la sua libertà personale, e quindi non sarà l'educatore, che lo modellerà a sua voglia, ma sarà pur sempre lui, che facendo tesoro dell'opera dell'istitutore, darà a se medesimo un atteggiamento conforme al suo carattere e rispondente al suo ideale.

Nella nuova scuola pedagogica il vocabolo *adattamento* ha un significato speciale, che giova sottoporre ad un attento esame. Essa raccolse questo concetto dalla biologia, dove tiene il luogo suo proprio e naturale (1), e lo trasportò nel campo educativo. L'uomo appartiene alla natura, in essa vive e si svolge siccome nel suo essenziale ambiente; e siccome nel regno immenso della natura il vivente, a qualunque specie appartenga, è quale lo fa essere l'ambiente in cui vive, e non gli è possibile svolgersi e conservare la propria esistenza se non a condizione che si adatti al proprio ambiente, ad esso conformando ed atteggiando il suo organismo, così la conservazione ed il perfezionamento dell'uomo sono determinati dal mondo esteriore, in cui la natura lo ha posto. Adattare l'alunno all'ambiente, ecco l'educazione; conformarlo al mondo fisico e sociale, che lo avvolge, secondo lo spirito dominante del tempo, ecco il còmpito supremo del magistero educativo.

Questo concetto posto come supremo principio pedagogico non regge alla critica. Che l'alunno debba essere educato in armonico accordo colla natura fisica circostante, colla famiglia e colla nazione, a cui appartiene, coll'organamento sociale, in cui vive, col grado di civiltà e collo spirito proprio del tempo, è una verità già riconosciuta e proclamata dalla pedagogia filosofica. Poichè l'alunno non è una monade solitaria ed isolata, chiusa ad ogni comunicazione esteriore, bensì abbisogna della convivenza di altri esseri, a fine di espandere la sua vitalità

(1) Nelle scienze naturali appellasi adattamento la facoltà, che possedono gli esseri viventi della natura, di acconciarsi ad un genere di vita o ad un ambiente particolare e di modificare i loro organi per adattarsi all'uno ed all'altro. In virtù di questa facoltà gli organismi possono sostenere i cangiamenti del nutrimento, che provengono dai lenti o rapidi rovescii del suolo o dai cataclismi tellurici.

interiore e compiere il suo esplicamento. Ma egli possiede una personalità sua, che non può essere sacrificata al mondo fisico e sociale; è fornito di una libertà interiore, che gli conferisce il dominio di se medesimo, sicchè egli è quale vuol essere, non quale lo fa la necessità insuperabile dell'ambiente; non potrebbe vivere una vita comune nel consorzio con altri esseri se anzi tutto non vivesse in se medesimo di una vita tutta sua propria; non potrebbe mettersi in conformità di accordo coll'ambiente, se da prima non fosse in concorde armonia con sè stesso; non potrebbe acconciarsi alle impressioni del grande organismo della natura, se anzi tutto non sentisse il vitale influsso dell'organismo corporeo suo proprio: infine egli aspira ad un ideale della vita futura, il quale non può trovar luogo nella cerchia dell'ambiente della natura tutto circoscritto ad un punto del tempo e dello spazio.

Tutte queste considerazioni fanno manifesto che il concetto dell'adattamento, quando sia giustamente inteso, fa parte del supremo principio pedagogico, ma non lo costituisce esso solo. Per lo contrario, riguardato quale sta nell'intendimento della nuova scuola pedagogica, esso si chiarisce del tutto discorde dalla verità. Infatti essa attribuisce all'ambiente un'efficacia assoluta sui singoli individui compresi nella sua cerchia, mentre sono appunto i singoli viventi che lo formano ciascuno coll'attività sua propria. Essa considera l'ambiente fisico e sociale siccome dominato da leggi e forze ineluttabili, per cui mai non può essere altro da quello, che è, epperò la natura adatta essa stessa l'alunno all'ambiente per necessità insuperabile, e così riesce affatto inutile il magistero educativo. Essa vuole che l'educazione sia informata dallo spirito del tempo, e non avverte che questo spirito contiene elementi morbosi, che vanno eliminati, elementi buoni e salutari, che vanno conservati e svolti, e che al di sopra di esso sovrasta lo spirito universale dell'umanità.

4. — *La scuola, funzione sociale.*

La scuola è una funzione sociale, ecco un altro pronunciato della nostra pedagogia, che la critica non può passare sotto silenzio. È una proposizione assai complessa, che va ricercata

ne' suoi diversi sensi e disaminata in tutti i suoi punti. Sottoposta all'analisi essa viene a scomporsi in tre distinti elementi, che sono il concetto di scuola, il concetto di società, il concetto di funzione, che esprime il rapporto tra l'una e l'altra. Occorre premettere un breve studio analitico di questi tre concetti a fine di pronunciare un sicuro giudizio intorno il proposto pronunciato.

Si presenta primo al nostro esame il concetto della scuola, siccome quello, che può dare un significato particolare agli altri due termini. La scuola, ben si sa, è palestra di studio, è il santuario del sapere, è il tirocinio del pensiero, che lavora per l'acquisto della conoscenza e della verità. Ma è tutto qui? No certamente. La scuola non deve soltanto diffondere nello spirito degli alunni una luce intellettuale arida ed astratta, ma (per usare qui una bella espressione di Dante: *luce intellettual piena d'amore* (1), ed il maestro deve mostrar *intelletto d'amore*. Non è luogo sacro soltanto al Vero, ma altresì al Bello, al Buono, al Divino. Poichè nell'alunno il pensiero, che medita, sta indisgiungibile dal cuore, che ama, dalla volontà, che opera; sono tre potenze, che appartengono all'unità del medesimo io. Non è giusto il dire: qui si istruisce, ma non si educa nè punto, nè poco; qui si educa soltanto, ma non si istruisce in verun modo. Istruzione ed educazione sono due termini inseparabili, che si chiamano a vicenda. L'alunno è una unità vivente ed indisgiungibile, che ad un tempo intende, sente e vuole, e la scuola da lui frequentata deve rispecchiare questa unità il meglio possibile.

Dal concetto della scuola passiamo a quello di società, altro elemento contenuto nel pronunciato, che stiamo esaminando. Considerata nella sua essenza generica ed astratta, essa va concepita una unione di più persone, che cospirano insieme liberamente e scientemente al medesimo fine. Il principio generatore della società umana è la persona, e siccome la persona è essenzialmente costituita dalla intelligenza conoscitiva e dalla libera volontà, perciò il cospirare scientemente e liberamente allo stesso fine, torna essenziale alla società, di qualunque forma essa sia. Se non che i fini particolari, a cui può mirare la convivenza umana, sono molteplici e diversi, sebbene tutti vadano a metter

(1) *Paradiso*, canto 30, verso 40.

capo ad un fine universale comune a tutta l'umanità; epperò la società generale viene a specificarsi in società distinte e speciali secondo i fini particolari, che si propone. Primeggiano fra di esse la società domestica, la religiosa, la civile, ossia la famiglia, la Chiesa, lo Stato.

Premesso così il concetto della scuola e della società, viene lo esaminare il rapporto tra l'una e l'altra, espresso dal vocabolo *funzione*. La scuola è una funzione della società in genere, o della società in ispecie? Ed in questo secondo caso, è una funzione della società domestica, o della religiosa, o della civile? Anzi tutto è innegabile, che la scuola ha colla società una così intima colleganza da non poter sussistere separata (1). Imperocchè essa non è già un chiostro solitario nel deserto, ma sorge e si muove in mezzo alla convivenza umana e ne sente lo spirito animatore. Già essa stessa la scuola presenta l'aspetto di una società di indole speciale, poichè dentro la sua cerchia convivono anime ancora fanciulle, insieme unite tutte quante dall'inspirazione della parola magistrale. La società domestica è anch'essa una scuola affatto speciale, come lo è il tempio, come lo è il mondo civile. L'universo intiero apparisce una immensa scuola, dove tutti i viventi imparano la vita sotto il magistero della somma sapienza. Ma non basta riconoscere che esiste un rapporto di colleganza tra la scuola e la società; si tratta di vedere se questo rapporto debba essere considerato come una funzione nel vero e proprio senso della parola. Funzione è proprietà speciale di un determinato agente. Quando diciamo, a ragion d'esempio, che l'amministrazione della giustizia è una funzione del giudice o del magistrato, intendiamo di significare che è una proprietà tutta sua, un'appartenenza sua propria, un atto siffattamente dipendente da lui, avente in lui la sua ragion d'essere, che senza di esso l'amministrazione della giustizia tornerebbe impossibile.

(1) Sotto questo riguardo la scuola può recare un immenso servigio alla convivenza umana, favorendo con mezzi speciali ed efficaci lo schiudersi e lo svolgersi delle vocazioni personali, sicchè l'alunno venga educato conforme alle sue attitudini individuali ed occupi nel mondo sociale il posto suo proprio, che gli è da natura segnato. " Non scholae (scrisse Seneca) sed vitae discendum ".

Ciò posto, io affermo ricisamente che la scuola non può, non debb'essere una funzione della società, perchè ne verrebbe essenzialmente snaturata. Infatti, la scuola è un santuario di persone, ossia di creature intelligenti e libere, e non già una agglomerazione di bruti o di cose. Ora la persona non è uno strumento ai voleri altrui, ma è una creatura sacra, fornita di diritti, che vanno rispettati da qualunque potere sociale, da qualunque autorità umana, il diritto all'esistenza, alla verità, alla felicità, alla virtù, sicchè se ad esempio la prosperità di un popolo intiero costasse la schiavitù o la distruzione di una sola creatura umana, già per ciò stesso dovrebb'essere detestata come un delitto. Orbene, ponete che la scuola sia una funzione, una proprietà, un'appartenenza della società e soggiaccia al suo assoluto dominio, e allora gli alunni non verranno più educati siccome persone, che appartengono a sè stesse, ed ordinate ad un fine, da cui hanno diritto di non essere deviate, bensì come mancipii del volere sociale, come cose o strumenti in servizio della società.

I nostri novatori sentenziando che la scuola è una funzione sociale, non intendono di parlare della società domestica, nè tanto meno della religiosa, ma unicamente della civile, e più esplicitamente del potere governativo, eliminando così l'opera dei privati cittadini. Così la scuola diventa un feudo dello Stato, il quale rimane il supremo educatore della nazione, usurpando un diritto assoluto ed illimitato di tutta quanta l'istruzione e manomettendo ogni libero insegnamento privato. Io ho confutato altrove (1) questa dottrina liberticida, che fa dei privati cittadini altrettanti pupilli, ai quali il governo misura il pane della scienza fatto di suo gusto e manipolato a suo arbitrio, anche quando una nazione è pervenuta ad un cospicuo grado di civiltà. Qui, mi starò pago di aggiungere che là, dove vige la forma di reggimento costituzionale, il ministro che regge la pubblica istruzione, è pur sempre un personaggio politico, mentre la politica, questa turbolenta consigliera, dovrebb'essere eternamente bandita dal santuario della scuola, illuminato dalla luce serena della verità. Nè qui vuolsi passar sotto silenzio l'erroneo concetto dei

(1) Vedi *Lo Stato educatore ed il ministro Boselli*, pag. 9-28; e *La scuola educativa*, pag. 72-74.

positivisti intorno l'educazione, assorbendola tutta quanta nella pura istruzione, come se le altre potenze dello spirito umano non avessero diritto ciascuna ad una coltura speciale sua propria. È noto come per lo Spencer la scienza sia per se stessa poesia, arte, morale e religione, confondendo così l'una coll'altra le diverse manifestazioni dell'anima umana.

Conclusione.

Abbiamo chiamato a rassegna i principali pronunciati della pedagogia positivistica, che a noi parvero o in tutto, o in parte disformi dalla verità; ed ora a mo' di conclusione andremo notando le parti vere e salde, che essa contiene, ricercando se esse siano veramente sue originali scoperte, e se siano conciliabili colla nuova dottrina psicologica inaugurata dal positivismo.

Quanto al primo punto, nessuno può disconoscere che non poche verità ed opinioni, che la nuova scuola pedagogica proclama come sue scoperte, già erano state vedute e proclamate da altri pedagogisti assai prima che il positivismo avesse veduto la luce del giorno. A ragion d'esempio l'autodidattica, ossia l'attitudine di pensare da sè, di istruire ed ammaestrar se medesimo, già era compresa in quel gran principio della pedagogia filosofica tradizionale, il quale prescrive che la coltura dell'intelligenza non debb'essere meramente materiale, ma altresì ed assai più formale, che cioè non basta arricchire la mente del discepolo di molte e svariate cognizioni, ma giova formare il suo intelletto addestrandolo a pensare da sè, a progredire da sè nell'acquisto del sapere. Così pure che l'alunno debba essere educato e cresciuto in armonia coll'ambiente sociale, dove è chiamato a svolgere la sua vita, è verità già riconosciuta ed espressa in quell'antico adagio: Non per la scuola vuolsi imparare, bensì per la vita; val quanto dire, la scuola accoglie dalla famiglia l'uomo ancora fanciullo, lo forma uomo adulto, fatto cittadino del gran mondo sociale. Che se la nuova pedagogia presenta verità, le quali non si riscontrano in quella antica e mostrano aria di novità, ben si può affermare senza tema di errare, che esse sono conciliabili colla pedagogia filosofica.

Ora, veniamo al secondo punto, che è di altissimo rilievo. Qui, ci si presentano numerosissime e solenni verità pedagogiche

esplicitamente riconosciute ed altamente proclamate, sia dalla pedagogia filosofica tradizionale, sia dalla positivistica, verità che formano per così dire la sostanza di tutta la scienza educativa ed hanno con sè il suffragio di tutti i secoli. Tali sono ad esempio lo sviluppo de' sensi, la coltura del sentimento morale e religioso, la formazione del carattere, l'armonia tra l'educazione fisica e la mentale e via discorrendo. Orbene, queste verità pedagogiche sono esse logicamente conciliabili colla psicologia positivistica? Può egli il positivista ammetterle senza contraddire ai principii, che egli professa intorno l'uomo e l'anima umana? È questo un grave problema, che si impone alla critica, e che quando sia risolto a dovere, pone il positivista nell'alternativa di abbandonare o la sua psicologia o la sua dottrina pedagogica.

È noto che la pedagogia dipende logicamente dalla psicologia antropologica, dalla quale attinge il suo principio informatore ed il suo indirizzo supremo, tantochè una dottrina psicologica particolare genera un sistema pedagogico conforme a sè. L'uomo in tanto può essere educato in quanto e come è conosciuto: l'opera educativa ha suo natural fondamento nello studio dell'umano soggetto. Or bene, qual'è la dottrina del positivista intorno l'uomo e l'anima umana? Voi sentenziate con tutta sicurezza e fuor d'ogni ambage: 1° che l'io umano, ossia l'affermazione della nostra sostanzialità personale ed individua, è una vana parola, e che perciò ognuno di noi non è un vero essere sussistente, bensì un flusso e riflusso di fenomeni, che si perdono nel gran mare dell'essere, di pensieri, di sentimenti, di volizioni, che non appartengono a nessuno; 2° che tutti questi fenomeni sono dominati da leggi e forze ineluttabili, sicchè la libertà del volere è una vera illusione; 3° che l'anima umana è una funzione dell'organismo e che perciò nell'umano composto non havvi alcunchè di distinto e di superiore all'organismo corporeo, tantochè le più alte idealità dello spirito, le più sublimi aspirazioni dell'anima vanno ricercate e studiate nella psiche del cervello o nei movimenti dei centri nervosi, ed i più grandi problemi, che agitano l'esistenza umana, vanno a risolversi in una questione di nervi; 4° che non esiste un *al di là* del terreno orizzonte, dove si stendano i nostri immortali destini. Tutto questo voi affermate ricisamente: è psicologia vostra questa.

Ora, io vi dico: siate logici. Io vi dimando: se l'alunno non possiede una personalità sua propria, superiore ai fenomeni passeggieri, che avvengono in lui, se non è un io, che pensa, sente e vuole, ma è una successione di pensieri, di sentimenti e di voleri, come mai si può ammettere la formazione del carattere, il quale è la più energica e viva affermazione dell'io, che domina i suoi sentimenti, i suoi pensieri colla costanza del volere ed è consapevole che sono suoi, e li indirizza ad un determinato scopo? Se la libera volontà è una illusione, come potete parlare di educazione morale, la quale trae con sè la responsabilità del nostro operare e quindi suppone che siamo arbitri delle nostre azioni? Se l'anima umana è una funzione dell'organismo corporeo e quindi la vita umana sotto tutte le sue forme non può svolgersi se non dentro la cerchia dell'organismo, come mai e perchè mai educherete l'alunno alla dura e perpetua lotta dello spirito, che non esiste, contro gl'ignobili istinti e le passioni animali? Se non vi è un *al di là* di questo terreno orizzonte, cioè la vita oltremondana, se non vi è un al di sopra della natura, cioè Dio, come potete parlare dell'educazione religiosa? Voi ben vedete che qui la vostra dottrina pedagogica è in una stridente contraddizione colla vostra dottrina psicologica, mentre le verità pedagogiche, di cui discorriamo, hanno il loro natural fondamento nella psicologia filosofica, da voi ripudiata, la quale concepisce l'uomo siccome una persona, che in sè armonizza un'anima razionale ed un organismo corporeo.

Così tutte le parti morbose e fallaci, che si riscontrano nella nuova dottrina pedagogica accanto alle verità riconosciute, traggono la loro origine dall'erroneo concetto psicologico. L'uomo è di troppo abbassato al di sotto della sua natura (1), e quindi

(1) Questa tendenza a deprimere la natura umana si manifesta nella scelta medesima di alcuni punti di studio, che sono affatto proprii delle scienze naturali, e che i nostri novatori trasportarono di botto nel campo della scienza pedagogica. Già ho avvertito più su, che essi tolsero dalla biologia il concetto dell'adattamento degli animali e delle piante al loro naturale ambiente e ne fecero una sconveniente applicazione all'educazione umana. Il medesimo va detto del potere di inibizione, che or non è molto venne avvertito in fisiologia per indicare un atto fisiologico, il quale sospende una funzione, un'attività nervosa e muscolare senza notevole lesione. Mentre

vien meno il sentimento della dignità umana. Ecco il perchè in tutto il fervido e persistente lavorìo della nuova scuola pedagogica manca l'inspirazione pedagogica; manca il pensare grandioso, elevato, che raccoglie una moltiplicità svariatissima di idee particolari in una potente ed organica unità; manca quel soffio di idealità, che innalza lo spirito dell'educatore al sentimento del suo arduo e sublime magistero. Se noi pigliamo tra mano i volumi, anche più celebrati, dei nuovi pedagogisti, vi troviamo una congerie continuata di considerazioni, parte vere e giuste, parte ingegnose e sottili, parte insussistenti ed erronee, ma non concatenate logicamente insieme da comporre un organismo scientifico. Basta all'uopo ricordare il volume dello Spencer, dove le tre parti dell'educazione, *intellettuale*, *morale* e *fisica*, non sono fra di loro collegate da nessuna congiuntura ideale e sono discusse successivamente senza un concetto supremo, che le informi.

Certamente si mostrerebbe ingiusto verso la nuova scuola chi le negasse il merito di avere efficacemente contribuito all'incremento della scienza pedagogica; ma dall'altro lato è giuocoforza riconoscere, che nel corso delle sue indagini ha passato sotto silenzio argomenti e problemi pedagogici di altissimo rilievo. Ai giorni nostri la scienza e l'arte educativa presentano specialissimi oggetti di studio, che per la loro somma importanza morale e sociale si impongono alla coscienza dei pensatori ed attraggono a sè tutta la loro meditazione. Tale, fra gli altri, è l'argomento che riguarda le attinenze tra l'educazione maschile e la femminile, argomento, che già da assai tempo venne me-

---

questo potere di arresto si va tuttora studiando tra i fisiologi senza essere stato elevato ad una sicura teoria, mentre in psicologia non presenta che incerte e deboli traccie, e se ne ignorano affatto le leggi, i novatori lo hanno voluto trasportare a marcia forza nel campo pedagogico ed ora si stillano il cervello per trovare modo di educarlo. Tutto quello, che essi vanno finora escogitando su questo punto, non è che una rifrittura di quanto la psicologia filosofica già aveva posto in sodo intorno le reciproche influenze tra l'anima ed il corpo, e quindi intorno la necessità di sospendere l'azione dei sensi esterni per favorire l'intimo raccoglimento del pensiero, e frenare l'impeto delle passioni e dei turbamenti interni per compiere un atto morale. Già gli stoici avevano sentenziato ἀπέχου καὶ ἀνέχου: sopporta ed astienti.

ditato e discusso (1), ma che oggidì si ripresenta sotto forma affatto nuova ed assume una gravità singolare nell'organamento sociale contemporaneo, in cui la donna è arditamente entrata nell'arringo della vita pubblica e civile, contendendo all'uomo il campo di attività, che prima era occupato da lui solo. Ora, ed Augusto Comte, e lo Spencer, ed il Bain, questi tre illustri promotori del positivismo contemporaneo, nelle loro dottrine pedagogiche passarono sotto il silenzio questo rilevantissimo punto della scienza educativa.

Io non so davvero quale accoglienza faranno a questo mio qualunque siasi lavoro critico i seguaci della nuova scuola pedagogica, nè se tampoco si degneranno di leggerlo. Essi dormono tranquilli sul guanciale del loro dogmatismo, e se mai taluno ardisce di *rompere* loro *il sonno nella testa* (2) essi si contentano di rispondere: la pedagogia filosofica ha fatto il suo tempo, e giace morta e sepolta. Colla maggior sicurezza del mondo van ripetendo i loro pronunciati come se fossero assiomi indiscutibili, non bisognevoli di veruna dimostrazione, e s'immaginano che il tribunale della critica non è fatto per loro. Costoro mal comprendono e peggio respingono l'ufficio della critica, il quale non si ristringe a contrapporre i loro pronunciati positivistici a quelli della pedagogia filosofica; chè in tal caso sarebbero pronti a rispondere: *Nous avons changé tout cela*. La critica spinge assai più oltre le sue disamine. Essa nota le contraddizioni, in cui si avvolgono i nostri novatori, le gratuite asserzioni scambiate per teoremi solidamente dimostrati, la novità esagerata, i problemi o trascurati, o troncati a mezzo o superficialmente discussi, le smodate promesse mal rispondenti alla realtà, le erronee interpretazioni delle dottrine contrarie e sopratutto una cieca fidanza nei loro pronunciati. Una scuola, che sdegni di rispondere a siffatto sindacato della critica, già per ciò stesso si condanna da sè, perchè al ragionamento che è il fattore della scienza, sostituisce il dogmatismo, che ne è la negazione assoluta (3).

---

(1) Consulta il Dialogo di Platone, *La Repubblica*, libro V.

(2) Dante, *Inferno*, canto IV, verso I.

(3) Vedi la mia Prolusione *Delle condizioni attuali della pubblica educazione*, pag. 9. Torino, 1886.

Note sulla guerra tra Tolemeo Evergete e Seleuco Callinico

di GIUSEPPE CORRADI.

I.

La terza guerra di Siria, o meglio il Λαοδίκειος πόλεμος, si svolse durante i primi anni senza che le truppe di Tolemeo III Evergete incontrassero grave opposizione da parte di Seleuco II Callinico. Questi trovatosi impreparato a resistere all'improvviso assalto dell'Egitto, si era ritirato probabilmente nella Lidia, ove sorgeva la potente fortezza di Sardi, e di là aveva cercato di raccogliere e riordinare quanto ancora restava delle forze dei Seleucidi, e di formarsi alle spalle una base sicura, mentre nel 243 si disponeva a riconquistare la Siria e le satrapie orientali del suo impero, che due anni prima erano passate sotto il dominio di Tolemeo (1).

A questa guerra offensiva allude due volte la importantissima iscrizione di Smirne (2): ἐπειδὴ πρότερόν τε καθ' ὃν καιρὸν ὁ βασιλεὺς Σέλευκος ὑπερ|έβαλεν εἰς τὴν Σελευκίδα (lin. 1-2), e appresso: νῦν τε ὑπερ|βεβληκότος τοῦ βασιλέως εἰς τὴν Σελευκίδα (lin. 12-13). Varie questioni sorsero intorno a questa iscrizione. Io intendo appunto occuparmi innanzi tutto della Seleucide che vi troviamo menzionata.

Che cosa s'ha da intendere per questa regione Σελευκίς? Il Beloch, opponendosi all'opinione comune che identificava la Seleucide di questa iscrizione con quella che Strabone colloca nella Siria settentrionale, mise innanzi l'ipotesi che col vocabolo generico di Σελευκίς fossero indicate le regioni dell'Asia Minore

(1) Iustin., XXVII, 1; Cardinali, *Della terza guerra Siriaca e della guerra fraterna*, in " Rivista di filologia classica ", XXXI (1903), pag. 433 sgg.; Beloch, *Griechische Geschichte*, Band III, Abt. 1, pag. 695 sgg. e Abt. 2, pag. 450 sgg.

(2) CIG., 3137; Michel, *Recueil d'Inscriptions Grecques*, N. 19; Dittenberger, *Orientis Graeci Inscriptiones selectae*, I, N. 229.

che ancora obbedivano al re di Siria (1). Anzitutto bisogna osservare che questa denominazione si trova anche in un ben noto decreto di Ilio il quale contiene alcune notizie relative ai primi anni del regno di Antioco Sotere (2). Qui è detto che Antioco dovette intervenire colla forza per ricondurre alla pace ed all'antico benessere τὰς μὲν πόλεις τὰς κα(τὰ) τὴν Σε|λευκίδα, περιεχομένας ὑπὸ καιρῶν δυσχερῶν διὰ τοὺς ἀποστάντας | τῶμ πραγμάτων (lin. 4-6); ed a queste città vengono contrapposti i dominî Seleucidici situati al di qua del Tauro, ricordati in questo decreto con quella espressione che era allora diciam così ufficiale, per indicare i possedimenti dell'Asia Minore: νῦν τε παραγενόμενος ἐπὶ τοὺς τόπους τοὺς ἐπὶ τάδε τοῦ Ταύρου (lin. 12). Il valore che dobbiamo dare a quest'ultima frase ci è chiaramente indicato da Polibio. Seleuco III Cerauno, succeduto al Callinico quando era già scoppiata la guerra contro Attalo I di Pergamo, πυνθανόμενος..... πᾶσαν ἤδη τὴν ἐπὶ τάδε τοῦ Ταύρου δυναστείαν ὑφ' αὑτὸν πεποιῆσθαι, παρωρμήθη βοηθεῖν τοῖς σφετέροις πράγμασιν, ὑπερβαλὼν δὲ μεγάλῃ δυνάμει τὸν Ταῦρον, κτλ (3). Quindi è evidente che la Seleucide ricordata nella iscrizione di Ilio, essendo ben distinta dall'Asia Minore, va cercata al di là del Tauro, e lo stesso deve dirsi della Seleucide dell'iscrizione di Smirne.

Per queste osservazioni va respinta anche l'ipotesi del

(1) Beloch, *Seleukos Kallinikos und Antiochos Hierax*, in " Histor. Zeitschrift ", N. F., Bd. XXIV, pag. 502, n. 1. All'ipotesi del Beloch si oppose anche il Bouché-Leclercq, *Le règne de Seleucus II Callinicus et la critique historique*, in " Revue des Universités du Midi ", Nouv. Sér. III (1897), pag. 133 sgg., scritto che non mi è stato possibile consultare.

(2) CIG., 3595; Michel, *Recueil*, 525; Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 219; Niese, *Geschichte der griech. u. mak. Staaten*, II, pag. 74 e 133, n. 6.

(3) Polyb., IV, 48, 7-8. Seleuco III partì insieme con Acheo (ἅμα τούτῳ διὰ τὴν οἰκειότητα συνυπερέβαλε τὸν Ταῦρον, IV, 48, 6) dalla Siria del nord che costituiva allora il nucleo principale del regno seleucidico, essendo l'Asia Minore rimasta ad Antioco Ierace (Iustin., XXVII, 2, 10 sgg.). Polibio (IV, 48, 3) parlando di Acheo e del suo dominio sull'Asia Minore usa la stessa frase che ha usato per Attalo: κρατῶν μὲν τῆς ἐπὶ τάδε τοῦ Ταύρου; cfr. anche Polyb., III, 3, 4; V, 77, 1 ecc. Strabone usava l'espressione Ἀσία ἡ ἐντὸς τοῦ Ἅλυος ed anche ἡ ἐντὸς τοῦ Ταύρου (cfr. Strab., II, p. 126; XIII, p. 624), come i Romani *Asia cis* od *intra Taurum*: il nome di *Asia Minor* appare solo in Orosio, I, 2, 26.

Droysen, il quale identifica questa provincia Σελευκίς con la parte orientale della Cappadocia, limitata a sud dal Tauro, ad oriente dall'Eufrate (1). Veramente Appiano facendo una enumerazione delle regioni sottomesse a Seleuco I dice: ἦρξε (Σέλευκος) Μεσοποταμίας καὶ Ἀρμενίας καὶ Καππαδοκίας τῆς Σελευκίδος λεγομένης κτλ. (Appian., *Syr.*, 55); ma dal fatto che una parte della Cappadocia era detta " Seleucide „ è arbitrario sia ricavarne col Beloch che questo vocabolo si estendesse ad indicare anche tutti gli altri possedimenti di Seleuco nell'Asia Minore, sia identificare con essa, come fece il Droysen, la Σελευκίς delle iscrizioni. In Appiano il vocabolo Σελευκίς non è usato come sostantivo per indicare da sè una regione (col qual valore appare invece nelle due iscrizioni ed in Strabone), ma piuttosto serve come aggettivo a specificare la parte della Cappadocia di cui Appiano voleva parlare (2).

Il Sokoloff pensò ad una lacuna in questo testo e propose di aggiungere un καὶ prima di τῆς Σελευκίδος λεγομένης, intendendo così non più una parte della Cappadocia, ma una regione a sè (3). In realtà nel testo di Appiano non mi sembra che vi sia traccia di guasto alcuno. Seleuco I, sconfitto Lisimaco a Corupedio (282 av. Cr.), pensò di sottomettere tutta l'Asia Minore e di passare poi in Europa; ma le provincie del nord, come la Bitinia, poterono conservare la loro indipendenza, ed anche il tentativo che egli fece contro la Cappadocia non fu molto fortunato (4). Tuttavia, se la Cappadocia figurava tra i possedimenti di Seleuco, è naturale che appunto in tale occasione fosse in parte passata in potere di lui, e che questa parte avesse preso il nome di Σελευκίς per distinguerla dalla Cappadocia che si era conservata indipendente. Quindi, anzichè correggere arbitrariamente il testo di Appiano, dobbiamo ritenere che era necessaria questa specificazione.

Vediamo ora se siano meglio sostenibili le altre congetture

(1) Droysen, *Histoire de l'Hellénisme* (trad. franc.), II, pag. 709; cfr. III, pag. 247.

(2) Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 219, n. 4.

(3) Sokoloff, *Der Antiochos der Inschriften von Ilion*, in " Beiträge zur alten Geschichte „, IV (1904), pag. 105.

(4) Memnon, 9 sgg. (FHG., III, pag. 532); Trog., *Prol.*, XVII.

del Sokoloff. Egli studiando più largamente degli altri la quistione della Seleucide affermò che la ribellione a cui accenna l'iscrizione di Ilio va identificata con la ribellione di Molone, satrape della Media, ad Antioco III, e che per la Seleucide di cui si fa qui menzione si deve intendere una provincia di questo nome formatasi nella regione adiacente al corso inferiore del Tigri e dell'Eufrate, con capitale Seleucia sul Tigri (1). Una conferma a questa ipotesi vuole trovarla anche nella iscrizione di Smirne. Basandosi sul fatto che in questa iscrizione si suppone che il re sia andato molto lontano, egli afferma che " während der ärgsten Zeit war der König weit entfernt (vielleicht zurückgedrängt von den Feinden), überschritt (ὑπερέβαλεν) den weiten Weg zu der Seleukis ", nella qual regione le circostanze lo portarono poi una seconda volta, e che a questo lunghissimo viaggio dalla parte settentrionale della Siria fino a Seleucia sul Tigri si adatta molto bene l'ὑπερβαλεῖν dell'iscrizione (2). Tuttavia queste due espressioni ὑπερέβαλεν ed ὑπερβεβληκότος εἰς τὴν Σελευκίδα restano chiarissime, dietro i passi citati di Polibio in cui si trovano analoghe indicazioni, ammettendo un passaggio dall'Asia Minore nella Siria attraverso il Tauro; e se si voglia anche concedere che le espressioni della epigrafe alludano ad una grande distanza, questa rimane spiegata riferendola non già ad un punto di partenza della Seleucide di Siria, ma a Smirne stessa, o almeno a qualche punto da essa non molto distante, poichè là si trovava Seleuco prima di iniziare l'offensiva contro Tolemeo (3).

(1) Sokoloff, mem. cit., pag. 102 sgg.; Polyb., V, 40-56. Polibio parla diffusamente di questa ribellione; ma le parole dell'iscrizione di Ilio male si adattano tanto (lin. 2 sgg.) alle importanti spedizioni che compiè Antioco III al principio del suo regno contro i ribelli della Media e della Persia, e contro l'Egitto, quanto (lin. 12 sgg.) alla sua impresa contro Acheo nell'Asia Minore. Cfr. Droysen, op. cit., I, pag. 285; II, pag. 659; Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 219, n. 11.

(2) Sokoloff, mem. cit., pag. 104 e 105.

(3) Iustin., XXVII, 2, 2 sgg. Non è poi affatto dimostrato che il nome Σελευκίς sia stato dato a tutta la provincia per la grandezza ed importanza di Seleucia sul Tigri. È vero che Seleucia era più grande di Antiochia stessa (Strab., XVI, p. 749), ma non è provato che questa abbia dato il nome alla regione in cui sorgeva; e sarebbe del resto anche strano che due provincie dello stesso regno (la regione sul corso inferiore del Tigri e dell'Eufrate e la Siria settentrionale) venissero indicate collo stesso nome.

Tutt'altro che trascurabile mi sembra invece nel nostro caso il silenzio assoluto delle fonti intorno a questa regione che sarebbe stata una delle importanti provincie seleucidiche dell'est, se essa comprendeva Seleucia sul Tigri, sua capitale, e vicino a questa κώμη Κτησιφῶν λεγομένη μεγάλη (Strab., XVI, p. 743), numerose altre città vicine ad esse e Babilonia stessa, poichè queste, secondo il Sokoloff, sono le città che dobbiamo intendere sotto l'espressione αἱ πόλεις αἱ κατὰ τὴν Σελευκίδα dell'iscrizione di Ilio. Polibio, il quale a proposito della ribellione di Molone ci dà tanti particolari sulle persone e sui luoghi, parla ripetutamente di Seleucia e mai di una " Seleucide „; ed anche Strabone, che si occupa con sufficiente larghezza di queste regioni, parlando dell'Assiria (XVI, p. 743) dice che un tempo ne era capitale Babilonia, ora invece lo è Seleucia sul Tigri, ma non accenna affatto ad una provincia Σελευκίς sul corso inferiore del Tigri e dell'Eufrate.

Così mi sembra tolta ogni difficoltà all'identificazione della Σελευκίς che ricorre nelle iscrizioni con la regione di questo nome che si stendeva nella Siria settentrionale.

La Siria secondo Strabone (XVI, p. 749) era divisa in cinque parti: la Commagene, la Seleucide di Siria, la Celesiria, la Fenicia e la Giudea. La Seleucide era limitata a ponente dal Mediterraneo, confinava a nord colla Cilicia, dalla quale era divisa per mezzo dell'Amano, e colla Commagene; ad oriente confinava coll'Eufrate, a sud colla Fenicia, la Celesiria e le popolazioni nomadi degli Arabi Sceniti (1). Essa era detta anche τετράπολις, e secondo la testimonianza di Posidonio comprendeva, come la Celesiria, quattro satrapie; ma per mancanza di notizie più particolareggiate non possiamo stabilire entro quali limiti fosse compresa ciascuna di esse. Noi del resto non ne conosciamo nemmeno con sicurezza i nomi, sebbene i moderni sembrino accordarsi nel ritenere che esse prendevano il nome dalle quattro città principali: " Ἀντιόχεια ἡ ἐπὶ Δάφνῃ, Σελεύκεια ἡ ἐν Πιερίᾳ,

(1) Strab., XVI, p. 749; cfr. p. 739 e 765. A sud il confine della Seleucide era segnato in parte dall'Eleutero (Strab., XVI, p. 753; Ptolem., V, 15, 4), non dallo stato libero di Arado come pensò la Corvatta, *Divisione amministrativa dell'impero dei Seleucidi*, in " Rendiconti dell'Accademia dei Lincei „, Cl. di Scienze morali, Ser. V, vol. X (1901), pag. 161.

'Απάμεια, Λαοδίκεια; tutte colla capitale omonima „ (1). Ma ciò non risulta punto da Strabone: egli dice solo che la Seleucide era detta τετράπολις perchè, sebbene in essa vi fossero molte città, le più importanti erano quelle quattro di cui dà il nome, ed aggiunge poi che essa era divisa in quattro satrapie (2). Soltanto di una di esse conosciamo con sicurezza il nome ed è la satrapia di Apamea, ἡ περὶ 'Απάμειαν σατραπεία, la quale doveva certo essere la più importante se in essa i Seleucidi lasciavano i 500 elefanti e la maggior parte dell'esercito, e se Diodoto, governatore di essa, potè battere monete autonome e tentare di farsi re (3). Il Beloch per la satrapia di Seleucia cita un frammento di Diodoro, ma in esso non si tratta già del nome della satrapia, bensì della città in cui lo stratego o satrapè Αἰσχρίων aveva la sua residenza (4). S'aggiunga che nel papiro di Gourob s'incontra un nome Κιλιαι che fu corretto in Κιλι(κί)ᾳ; ma forse non è da escludere che qui ci troviamo di fronte al nome alquanto alterato di una di queste satrapie (5).

---

(1) Corvatta, l. c., ed il Bevan, *The House of Seleucus*, I, pag. 208: " We know that the Seleucis consisted of the four satrapies of Antioch, Seleucia, Apamea and Laodicea „. Cfr. Niese, op. cit., II, pag. 94; Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 291; Haussoullier, *Études sur l'histoire de Milet et du Didymeion*, pag. 95, vorrebbe intendere quattro ὑπαρχίαι, ma è un'ipotesi che non pare troppo fondata.

(2) Strab., XVI, p. 749: ἡ δὲ Σελευκίς... καλεῖται δὲ τετράπολις καὶ ἔστι κατὰ τὰς ἐξεχούσας ἐν αὐτῇ πόλεις, ἐπεὶ πλείους γέ εἰσι, μέγισται δὲ τέτταρες, 'Αντιόχεια ἡ ἐπὶ Δάφνῃ καὶ Σελεύκεια ἡ ἐν Πιερίᾳ καὶ 'Απάμεια δὲ καὶ Λαοδίκεια... E appresso (XVI, p. 750): οἰκείως δὲ τετραπόλει καὶ εἰς σατραπείας διῄρητο τέτταρας ἡ Σελευκίς, ὥς φησι Ποσειδώνιος, εἰς ὅσας καὶ ἡ Κοίλη Συρία.

(3) CIG., 4474; Le Bas-Waddington, *Inscr. d'Asie Mineure*, 2720; Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 262; Strab., XVI, p. 752; Babelon, *Les Rois de Syrie*, CXXXVIII e pag. 135; Niese, op. cit., III, pag. 277 sgg.

(4) Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 291; Diod., XXXIII, 28: περὶ μὲν γὰρ τὴν Μεσοποταμίαν ἣν Διονύσιος ὁ Μῆδος, περὶ δὲ Κοίλην Συρίαν οἱ περὶ τὸν Σαρπηδόνα καὶ Παλαμήδην, ἐν δὲ τῇ παρὰ θάλατταν Σελευκείᾳ Αἰσχρίων. Qui la città è ben specificata sia dall'aggiunta παρὰ θάλατταν, sia dalla preposizione ἐν, mentre prima le satrapie sono indicate con περὶ.

(5) 'Αρίβαζος ὁ ἐν Κιλιαι στρατηγός, Mahaffy, *Flinders Petrie Papyri*, II, 45, pag. 145: Köhler, " Sitzungsber. der Berl. Akad. „, 1894, pag. 445 sgg., e le osservazioni del Wilcken, *Griech. Papyrusurkunden*, pag. 52. La correzione in Κιλικίαι è tanto più incerta in quanto mi pare evidente, contrariamente a quello che comunemente si crede, che nel papiro si parli soltanto

In conclusione dobbiamo dunque ritenere che dai documenti che ci rimangono è attestata l'esistenza di una sola regione chiamata Σελευκίς, la quale faceva parte della Siria settentrionale, e che finora conosciamo con sicurezza il nome di una sola delle quattro satrapie in cui la Seleucide di Siria era divisa.

II.

Varie cause hanno ritardato la spedizione di Seleuco contro Tolemeo nella Siria settentrionale, fra le quali va anche ricordata la discordia che scoppiò nella corte Seleucidica e che degenerò poi in una guerra aperta fra Seleuco Callinico ed il fratello suo Antioco Ierace.

Molto si discusse su questa guerra fraterna, e la critica moderna sembra ormai accordarsi nel riferirla dopo il 240 av. Cr., dopochè cioè Seleuco e Tolemeo ebbero conclusa fra di loro la pace (1).

Le nostre fonti principali sulle relazioni di Seleuco con Antioco sono Giustino e la traduzione armena di Eusebio (2), importantissima sia per le notizie che ci dà sugli avvenimenti, sia e ancor più per le indicazioni cronologiche le quali debbono servirci di guida in mezzo agli avvenimenti assai confusi di questi anni, e delle quali, data la serietà della fonte, possiamo abbastanza fidarci. Vediamo se le due fonti sono in contraddizione fra loro, come si è spesso ritenuto, o se invece è possibile accordare il racconto di Giustino con quello di Eusebio.

Eusebio parla esplicitamente della successione di Seleuco II ad Antioco Teo, della discordia nella corte di Siria, della guerra

di un'azione della flotta egiziana contro le coste della Siria, e non si accenni punto ad operazioni navali contro la Cilicia; ma di questo tratterò forse in altra occasione.

(1) Bevan, op. cit., I, pag. 192 sgg.; Bouché-Leclercq, *Histoire des Lagides*, I, pag. 258 sgg.; Cardinali, mem. cit., pag. 439; Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 1, pag. 696 sgg.; III, 2, pag. 450 sgg. Le altre ipotesi seguìte dai moderni intorno alle relazioni tra la guerra di Siria e la guerra fraterna sono già state riassunte dal Bouché-Leclercq, in " Revue des Univers. du Midi ", vol. cit., e dal Cardinali, mem. cit., pag. 441 sgg.

(2) Iustin., XXVII, 2; Euseb., ed. Schoene, I, 251.

di Seleuco nell'Asia Minore contro le truppe Tolemaiche e contro Antioco Ierace, del suo tentativo contro Mitridate di Cappadocia, della guerra offensiva di Seleuco nella Siria e della ripresa delle ostilità fra i due fratelli (1). Qui adunque vengono considerati due periodi distinti della così detta guerra fraterna, uno più breve svoltosi durante la terza guerra di Siria, l'altro più importante svoltosi dopo che questa ebbe termine.

I moderni, basandosi sul fatto che tanto Giustino quanto Trogo Pompeo (*Prol.* XXVII) non accennano alla prima fase della guerra fraterna, alterando arbitrariamente l'ordine che le notizie hanno in Eusebio, fusero in un solo i due periodi di questa guerra che vi sono menzionati, identificarono la battaglia di Ancira con la spedizione che è accennata in Eusebio contro Mitridate di Cappadocia (2), e riferirono poi tutto questo gruppo di avvenimenti agli anni che seguirono la conclusione della pace tra Seleuco e Tolemeo (3). Bisogna però qui osservare che se Giustino facendo un compendio delle Storie di Trogo Pompeo tace della prima parte di questa guerra sia per la poca importanza e la breve durata che essa ebbe, sia perchè la sua attenzione era rivolta a riassumere la guerra più importante di Seleuco coll'Egitto, non è detto che egli almeno implicitamente non l'ammetta. Seleuco, sconfitto dall'Evergete e costretto a riparare in Antiochia (241), scrisse al fratello Antioco domandandogli aiuto contro Tolemeo, e offrendogli in compenso la signoria dell'Asia al di qua del Tauro. Antioco dunque in questo momento non solo non era soggetto a Seleuco, ma doveva essere con lui in lotta aperta, poichè qui è considerato in possesso di forze militari proprie (4). L'offerta della signoria dell'Asia ci

(1) Euseb., I, 251; cfr. le osservazioni a questo testo fatte dal Carrière presso Bouché-Leclercq, l. c.

(2) Trog., *Prol.*, XXVII, *item (Seleuci bellum) in Asia adversus fratrem suum Antiochum Hieracem, quo bello Ancyrae victus est a Gallis.* V. appresso il testo di Eusebio.

(3) Il Niebuhr, *Historischer Gewinn aus d. arm. Uebersetzung d. Chronik d. Eusebius*, in " Abhandl. der Berl. Akad. ", 1819 = *Klein. Schrift.*, I, pag. 179 sgg., poneva la guerra fraterna anche dopo la guerra di Seleuco contro Arsace. Alcuni, come il Müller ed il Droysen, la riferivano durante la guerra Siriaca.

(4) Iustin., XXVII, 2, 6, *inde ad Antiochum fratrem litteras facit (Seleucus), quibus auxilium eius implorat oblata ei Asia intra finem Tauri montis in praemium latae opis.*

indica che Antioco aveva già tentato colla forza di formarsi un dominio indipendente dal fratello; quindi il testo di Eusebio, anzichè essere alterato, trasportando il passo in cui si parla dell'invasione della Siria da parte di Tolemeo prima di quello in cui si parla di Antioco Ierace (1), deve servirci di guida per integrare una lacuna, facilmente spiegabile del resto, nella narrazione di Giustino e nel prologo di Trogo Pompeo.

Naturalmente Antioco, che si trovava tra i dieci ed i dodici anni, non avrebbe potuto da sè nè pensare nè dirigere una guerra (2); ma in questo tempo egli diventa piuttosto uno strumento nelle mani di Laodice, e si trova a Sardi presso Alessandro, governatore della città e fratello di Laodice (3). Laodice nel 246 aveva fatto proclamare re il primogenito Seleuco, e si trovava in buoni rapporti col figlio durante i primi anni della guerra di Tolemeo (4). Poco dopo invece si volge contro Seleuco, quando forse questi, passato il più grave pericolo, essendo Tolemeo costretto a ritornare in Egitto, volle liberarsi dalla tutela della madre e dalla sua ingerenza negli affari del regno (5). Di qui la scissione nella famiglia reale, che finisce in una guerra aperta tra i due fratelli.

Resta quindi assodato che la guerra fraterna scoppiò mentre l'Egitto era ancora in lotta contro Seleuco, il quale venne

---

(1) Cardinali, mem. cit., pag. 442 sgg.

(2) Iustin., XXVII, 2, 7; Beloch, " Histor. Zeitschrift „ l. cit. e *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 451 sg.

(3) Euseb., I, 251, *adiutorem enim et suppetias Alexandria etiam habebat (Antigonus), qui Sardianorum urbem tenebat, qui et frater matris eius Laodikae erat; nec non Galatas in duobus praeliis auxiliatores habuit.* Questa la lezione dello Schoene, ma i nomi proprî sono in questo testo alquanto alterati. Così va corretto *Alexandria* od *Alexandriae* (Zohrab-Mai) in *Alexandrum*, ed *Antigonus* in *Antiochus*. Cfr. quanto all'età di Antioco le osservazioni del Babelon, *Les Rois de Syrie*, LXXI.

(4) Euseb., l. c.; Iustin., XXVII, 1, 1; *Papiro di Gourob*, in Mahaffy, *The Flinders Petrie Papyri*, II, 45, pag. 145 sgg., col. II, lin. 7; *Ancient Greek Inscr. of the Brit. Mus.*, III, 403, lin. 134; Hieron., in Daniel., XI (Migne, *Patrologia Latina*, XXV, pag. 561), *ingressus est (Ptolemaeus) provinciam regis... Seleuci cognomento Callinici qui cum matre Laodice regnabat in Syria.*

(5) Euseb., l. c.; Plut., *De frat. am.*, 18; Cardinali, mem. cit., pag. 438; Bouché-Leclercq, *Hist. des Lagides*, I, pag. 258.

così a trovarsi contemporaneamente di fronte a due forti nemici. Ed allora dobbiamo ritenere che gli avvenimenti nell'Asia Minore si siano succeduti a questo modo. Seleuco, con l'esercito che dovette allestire nel periodo di tempo in cui si trovò costretto a starsene sulla difensiva al di qua del Tauro potè assalire le truppe egiziane che si trovavano nella Lidia, le vinse e le obbligò a chiudersi in Efeso ove le tenne assediate, ma non potè prendere la città. Efeso doveva allora essere validamente sostenuta dall'armata egiziana, contro la quale Seleuco non poteva operare perchè le sue navi erano state disperse da una tempesta (1). Verso questo tempo però Antigono Gonata, vinta la lega che contro di lui si era formata nella Grecia, pensò anche di riaffermare la supremazia Macedonica sull'Egeo e rifarsi contro l'Egitto delle perdite inflittegli da Tolemeo Filadelfo nelle Cicladi. La guerra marittima finì con la sua sconfitta ad Andro (2); ma allora i Rodì, vedendo nel troppo assodarsi della supremazia Egiziana nell'Egeo un grave pericolo per i loro commerci, uscirono dalla neutralità in cui si erano tenuti fino allora, e batterono presso Efeso l'armata di Tolemeo co-

---

(1) Iustin., XXVII, 2, 1-3.

(2) Trog., *Prol.*, XXVII, *ut Ptolomaeus Adaeum denuo captum interfecerit et Antigonum Andro proelio navali prona vicerit*, dove il De Sanctis restituisce *per Sophrona*. Il Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 428 sgg., mette la battaglia di Andro in relazione con la spedizione di Antigono Dosone in Caria, seguito dal Delamarre, in " Revue de Philologie „, XXVI (1902), pag. 321; dal Cardinali, in " Rivista di Storia Antica „, N. S., IX (1904-05), pag. 93; dal Garofalo, in " Rendic. dell'Accad. dei Lincei „, Cl. di Scienze morali, Ser. V, vol. XI (1902), pag. 147; dal Costanzi, in " Bollettino di Filologia classica „, XI (1904-05), pag. 156. Vedi contro il Beloch le giuste osservazioni del Levi, *Le battaglie di Cos e di Andro*, in " Atti dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino „, vol. XXXIX (1903-04), pag. 632 sgg. Il passo di Plut., *Pelop.*, 2, su cui si fa tanto assegnamento per dimostrare che la battaglia di Andro fu una vittoria dei Macedoni, non prova assolutamente nulla. È la citazione fatta a memoria di un apoftegma relativo ad un combattimento navale cui aveva preso parte un Antigono. L'apoftegma si riferiva in origine, pare, alla vittoria di Antigono Gonata a Cos. Plutarco come ha confuso il Gonata col suo avo Antigono Monoftalmo (chè questo soltanto può essere stato designato con l'epiteto ὁ γέρων, ed ogni correzione qui è arbitraria), così ha confuso con la battaglia di Cos un altro combattimento navale dei Macedoni di cui aveva un languido ricordo.

mandata da Cremonide (1). Seleuco intanto, scoppiata l'inimicizia col fratello, si rivolse contro di lui, lo sconfisse nella Lidia e lo assediò nella rocca di Sardi. Non potendo prendere quella fortezza Seleuco si volse contro Mitridate di Cappadocia, al cui aiuto forse era ricorso Antioco, più per prevenire questo nuovo nemico con una diversione verso oriente che per condurre contro di lui una vera guerra; ma fu vinto e dovette ritornare nei suoi domini (2), dove finalmente potè allestire la spedizione contro Tolemeo nella Seleucide.

Inoltre mi sembra che qualche altra ragione si possa opporre alla identificazione della battaglia di Ancira con la spedizione di Seleuco contro Mitridate. Eusebio pone esplicitamente questa spedizione nella Cappadocia, mentre Ancira era situata ad occidente del fiume Halys, nel centro della regione che prese più tardi il nome di Galazia. Fin qui probabilmente si estendeva la Grande Frigia, e può darsi che ivi le milizie di Antioco unite ai Galli si siano incontrate con Seleuco (3). Ma il campo della battaglia di Ancira può essere cercato anche altrove, perchè Strabone parlando di Ancira della Galazia dice τούτων (cioè dei Galli Tectosagi) δ' ἦν φρούριον Ἄγκυρα ὁμώνυμος τῇ πρὸς Λυδίᾳ περὶ Βλαῦδον πολίχνῃ Φρυγιακῇ (4), e presso questa seconda Ancira, se pensiamo che il nucleo del dominio di Antioco era la Lidia, può essere avvenuto lo scontro tra Seleuco e le truppe di Antioco, ricordato nel prologo di Trogo Pompeo.

---

(1) Polyaen., V, 18; Michel, *Recueil*, 1152; Dittenberger, *Syll. Inscr. Graec.*[2] 224; cfr. su questi avvenimenti De Sanctis, *Questioni politiche e riforme sociali*, in " Rivista internazionale di scienze sociali ", Roma, 1894, fasc. XIII-XIV, estr. pag. 8 sgg., il quale però colloca la vittoria dei Rodî prima della battaglia di Andro.

(2) Euseb., I, 251, *in Lydiorum terra Seleukus vicit, sed neque Sardes, neque Ephesum cepit, Ptolomaeus enim urbem tenebat. Quum vero in Kappadokia et adversus Mithridatem secundus congressus esset duae myriades eius a barbaris caesae, ipseque occisus periit.* Così Aucher-Petermann; più esattamente Zohrab-Mai *profligatus evanuit.* Secondo il Carrière il senso preciso del testo armeno è: " disparu après sa défaite ".

(3) Euseb., l. c.: *Antigonus vero Kalliniki frater, magnam Phrygiam peragrans ad tributa incolas coëgit ducesque exercitus adversum Seleukum misit.*

(4) Strab., XII, p. 567; altrove è precisata la posizione di questa località: Μέκεστον ἀπ' Ἀγκύρας τῆς Ἀβαείτιδος, Strab., XII, p. 576. Così va respinta anche la spiegazione che dà il Bevan, op. cit., I, pag. 194 e n. 5.

Il Beloch, come il Cardinali, ponendo la guerra di Seleuco nella Lidia dopo la guerra di Siria, immaginò una rottura dell'armistizio concluso nel 241 o nel 240 tra Tolemeo e Seleuco, e pensò ad una alleanza tra Tolemeo ed Antioco Ierace, notando che in Eusebio la notizia *Ptolomaeus enim urbem tenebat* " wäre sinnlos, wenn Ptolemaeus neutral war „ (1). Qui viene ripetuto in parte lo stesso errore in cui cadeva il Niebuhr quando identificava l'Antioco, cui Tolemeo nell'anno 245 affidò l'amministrazione della Cilicia, con Antioco Ierace, ed immaginava fra di loro una lega contro Seleuco, la quale non ebbe luogo allora e probabilmente neppure più tardi (2). In realtà qui si tratta, mi pare, di cose distinte: di una guerra da tempo iniziata dalle truppe egiziane contro le quali Seleuco prendeva l'offensiva nell'Asia Minore, e poi della rottura delle relazioni col fratello che cercava di formarsi uno stato indipendente. Quindi, se troviamo degli avvenimenti che paiono in stretta relazione fra loro, dobbiamo ritenere soltanto che Antioco cercava di trar profitto degli imbarazzi suscitati a Seleuco dall'Egitto. E nel testo di Eusebio dobbiamo vedere due azioni militari separate, le quali

(1) Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 452; Cardinali, " Rivista di Filologia classica „ cit., pag. 441 e n. 4.

(2) Hieron., in Daniel., XI, 9 (Migne, *Patrol. Lat.*, XXV, pag. 561): *Ciliciam autem amico suo Antiocho gubernandam tradidit, et Xantippo, alteri duci, provincias trans Euphraten.* Niebuhr, *Kl. Schrift.*, I, pag. 277. Nella frase *amico suo* abbiamo evidentemente la traduzione latina del φίλος greco, col qual vocabolo doveva essere qui indicato un funzionario militare agli ordini di Tolemeo. Cfr. Bouché-Leclercq, *Hist. des Lagides*, I, pag. 254, n. 2. Secondo il Lenschau, *De rebus Prienensium*, in " Leipziger Studien „, XII (1890), pag. 204, questo Antioco va identificato con un personaggio dello stesso nome che si trova come arbitro in una contesa di confine tra Priene e Samo: [καὶ πάλιν ὅτε ἀνεφέρετο ἡ κρίσις ἐπ' Ἀν]τίοχον τὸν ὑπὸ τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου τεταγμένον, CIG., 2905, C, *Ancient Greek Inscr. of the Brit. Mus.*, III, 403, lin. 153. In questo caso oltre la Panfilia anche la Ionia sarebbe stata dagli Egiziani amministrativamente unita alla Cilicia (Haussoullier, *Études sur Milet*, pag. 136; Bevan, op. cit., I, pag. 189 e n. 5), e questa distesa di terre poteva ben essere affidata da Tolemeo ad uno dei suoi ufficiali, ma sarebbe stato troppo pericoloso il metterla nelle mani dell'Ierace. S'aggiunga che nel testo citato Antioco appare come un funzionario militare, poichè il Santippo cui è affidato il governo delle regioni al di là dell'Eufrate è considerato come un *alter dux*, onde Antioco, il solo governatore menzionato prima, era a sua volta considerato nello stesso ufficio.

in questo brevissimo compendio sono rimaste alquanto confuse. Questa ipotesi è confermata anche da un'analoga confusione che si nota poco appresso in Eusebio a proposito della fine di Antioco Ierace: *et anno primo centesimae tricesimae octavae olompiadis in Thrakiam fugere ab Attalo coactus post praelium in Karia factum, moritur* (1). Antioco è qui fatto passare direttamente nella Tracia dopo la sconfitta inflittagli da Attalo nella Caria, senza tener conto del suo nuovo tentativo fatto contro Seleuco nella Mesopotamia (2).

Anche le altre osservazioni del Beloch e del Cardinali non dimostrano meglio l'alleanza di Tolemeo con Antioco. Dirò in seguito della correzione delle date fornite da Eusebio. Qui osservo che se più tardi Antioco riceve aiuti contro i Galli dalle truppe Egiziane (3), ciò non prova nulla pel momento di cui discorriamo e può anche spiegarsi con una cooperazione determinata dalla necessità del momento, contro un pericolo minaccioso per tutti. Qualunque senso poi si voglia dare alle parole di Giustino ove dice che Antioco, sconfitto da Seleuco verso il termine del suo regno, riparò presso Tolemeo, resta sempre il fatto che egli fu posto sotto severa sorveglianza, dalla quale solo a stento potè sfuggire (4). Ricordiamo inoltre che la causa od il pretesto per cui Tolemeo s'era mosso contro la Siria era la difesa di Berenice e la vendetta che voleva prendere degli intrighi di Laodice (Iustin., XXVII, 1); ora invece Laodice sosteneva le parti di Antioco, presso il quale la troviamo dopo la guerra siriaca. Questa presenza di Laodice quindi non poteva favorire un'alleanza di Antioco con Tolemeo, il quale da ultimo pare essersi vendicato facendola uccidere (5). Inoltre a breve distanza

---

(1) Euseb., I, 253.

(2) Iustin., XXVII, 3, 6-7; Trog., *Prol.*, XXVII; Polyaen., IV, 17; Beloch *Griech. Gesch.*, III, 1, pag. 707, n. 2; Babelon, *Les Rois de Syrie*, CXCIII.

(3) Euseb., I, 251; Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 452.

(4) Iustin., XXVII, 3, 9, *igitur cum profugo (Antiocho) nusquam tutus locus esset ad Ptolomaeum hostem, cuius fidem tutiorem quam fratris existimabat, decurrit.* Il Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 452, nella frase *ad Ptolomaeum hostem* vuol vedere una semplice antitesi retorica, ma il contegno di Tolemeo ci deve rendere cauti nel giudicare del valore di questa espressione.

(5) Appian., *Syr.*, 65, καὶ Πτολεμαῖος ταῦτα τινύμενος Λαοδίκην τε ἔκτεινε; se la notizia in Appiano è fuori posto, non ne viene senz'altro che essa sia

troviamo che Tolemeo doveva essere in buoni rapporti con Seleuco se Stratonice, rifugiatasi a Seleucia sull'Oronte (allora in mano di Tolemeo) dopo il tentativo di ribellione a Seleuco, fu presa ed uccisa (1). Quindi dobbiamo ritenere che Tolemeo come durante la prima parte della guerra fraterna aveva agito del tutto indipendentemente, così nella seconda rimase probabilmente spettatore neutrale, e piuttosto desideroso di veder terminare queste lotte che cominciavano ad attirare l'attenzione dei Romani.

III.

Ordinate per quanto poteva le cose nell'Asia Minore, Seleuco Callinico intraprese la campagna offensiva nella Siria contro l'Egitto, e sul principio con grande fortuna, poichè riuscì a rialzare nel centro dell'impero la sua autorità (2), potè riconquistare le satrapie orientali e respingere verso il sud gli Egiziani obbligandoli a togliere l'assedio da Damasco e da Ortosia (3). Forse a questo punto Seleuco tentò a sua volta un assalto contro i possedimenti Egiziani nella Siria meridionale, ma la spedizione fu disgraziata ed egli dovette ritirarsi in Antiochia (4). La sua

---

falsa come pensano il Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 1, pag. 697, n. 2 ed il Bouché-Leclercq, *Hist. des Lagides*, I, pag. 258, n. 4. Cfr. Niese, op. cit., II, pag. 154.

(1) Seleuco guerreggiava allora contro i Parti. Iustin., XLI, 4, 7; 5, 1 sgg.; Strab., XI, p. 513; Agatharch., presso Ioseph., *C. Apion.*, I, 22 (FHG., III, pag. 196, fr. 19); Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 1, pag. 703 sg.; e sugli Arsacidi cfr. anche il recentissimo studio del Breccia, *Mitridate I il Grande di Partia*, in " Beiträge zur alten Geschichte „, V (1905), pag. 41. Il Niese, op. cit., II, pag. 168, ammette che Seleucia sull'Oronte " zur Zeit des Aufstandes der Stratonike syrisch war, später aufs neue in die Hände des Ptolemäos III fiel „, durante una guerra tra Tolemeo e Seleuco. Ma questa guerra è del tutto ipotetica.

(2) Buona parte della Cilicia e la Siria settentrionale dovettero passare dalla sua parte; Iustin., XXVII, 2, 5; Niese, op. cit., II, pag. 152; Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 1, pag. 699.

(3) Qui spetta la fondazione di Callinico, *Chron. Pasch.* ed. Bonn (1832), I, pag. 330, su cui v. oltre. Per Damasco ed Ortosia, Euseb., I, 251.

(4) Iustin., l. c.; Cardinali, mem. cit., pag. 438. Giustino, la cui narrazione è fatta tutta dal punto di vista ostile a Seleuco, esagera anche qui la portata della sconfitta.

situazione tornava ad essere gravissima, e allora ricorse per aiuti al fratello, promettendogli in compenso, come abbiamo visto, il dominio dell'Asia al di qua del Tauro. Antioco Ierace accettò e Tolemeo viste riunite contro di sè le forze dei due fratelli concluse con Seleuco una pace che secondo Giustino avrebbe dovuto durare dieci anni (1).

Quando avvenne la conclusione di questa pace? Il Niese la riferisce al 240 circa, il Bouché-Leclercq al 240/39 (2); ma l'ipotesi che fu più spesso seguìta è quella del Beloch il quale riferì questa pace al 237. Egli osservò che la notizia di Giustino: (*Ptolomaeus*) *in annos X cum Seleuco pacem facit*, non si può accettare essendo strana in questo tempo ed anche nel IV secolo la conclusione di una pace per un numero determinato di anni, e quindi suppose che nella fonte di Giustino i dieci anni si riferissero alla durata della guerra; sicchè, se essa principiò nel 246, si verrebbe per la data della pace al 237 circa (3). Il Beloch ricava questa data da un passo di Eutropio. Questi racconta che i Romani, pervenuti a grande gloria dopo la prima guerra Punica, mandarono ambasciatori al re Tolemeo per offrirgli aiuti *quia rex Syriae Antiochus ei bellum intulerat. Ille gratias Romanis egit, auxilia* [*a Romanis*] *non accepit. Iam enim fuerat pugna transacta.* E continua: EODEM TEMPORE *potentissimus rex Siciliae Hiero Romam venit ad ludos spectandos et ducenta milia modiorum tritici populo dono exhibuit.* E appresso: *L. Cornelio Lentulo Fulvio Flacco consulibus, quibus Hiero Romam venerat, etiam contra Ligures intra Italiam bellum gestum est et de his triumphatum* (4). Si può ben ammettere col Beloch che la

(1) IUSTIN., XXVII, 2, 6 sgg. Poco dopo scoppiarono di nuovo le ostilità tra Seleuco ed Antioco, e la nuova guerra fraterna ebbe per conseguenza la esclusione di Seleuco dall'Asia Minore.

(2) NIESE, op. cit., II, pag. 153 e n. 3; BOUCHÉ-LECLERCQ, *Hist. des Lagides*, I, pag. 259, n. 1; II, Append., pag. 389.

(3) BELOCH, " Histor. Zeitschrift „, vol. cit., pag. 504 sg.; in Giustino si dovrebbe leggere *post annos X*, e non *in annos X*. Cfr. BABELON, *Les Rois de Syrie*, pag. LXXI; PEDROLI, *Il regno di Pergamo*, pag. 14; HAUSSOULLIER, *Études sur Milet*, pag. 135.

(4) EUTR., III, 1 e 2. Il testo dà il nome di Antioco, e quindi il DROYSEN, *Hist. de l'Hellénisme*, III, pag. 373, n. 2, pensò che si riferisse ad Antioco II; altri invece lo riferirono alle guerre tra Antioco III e Tolemeo IV (GUIRAUD,

notizia di Eutropio derivi da Livio e che vada accettata questa attestazione; ma da ciò non deriva che le notizie contenute in questo tratto si debbano riferire tutte allo stesso anno, nè che la testimonianza di Eutropio sia " il caposaldo per stabilire la cronologia di questo periodo „ come parve al Cardinali (1). Qui in realtà è precisamente datata solo la venuta di Ierone a Roma, non già l'offerta di aiuti a Tolemeo contro la Siria, nè la conclusione della pace tra Tolemeo e Seleuco. Infatti la frase *eodem tempore* con cui queste notizie sono fra loro unite, ha in Eutropio un valore troppo indeterminato per potervi fondare qualche congettura. Dal fatto che *eodem tempore* è talvolta usato da Eutropio come equivalente di *eodem anno* (2), non possiamo senz'altro dedurre che anche in questo passo abbia un valore così ristretto e preciso, nel qual caso Eutropio probabilmente avrebbe dato prima i nomi dei consoli.

Non dimentichiamo che Eutropio usa la stessa espressione anche per indicare avvenimenti fra i quali intercede uno spazio di parecchi anni. Un esempio caratteristico lo abbiamo dove si parla della vittoria riportata dai Romani sui Galli (283 av. Cr.) e della dichiarazione di guerra ai Tarentini (281): *interiectis aliquot annis iterum se Gallorum copiae contra Romanos Tuscis Samnitibusque iunxerunt, sed cum Romam tenderent, a Cn. Cornelio*

De Lagidarum cum Romanis societate, Paris, 1879); ma allora si introduce una data troppo lontana da quella che il testo richiede. Forse la fonte di Eutropio (Livio od una epitome di Livio) ricordava qui Seleuco ed Antioco Ierace; questi dopo la sconfitta di Seleuco poteva sembrare il più forte avversario di Tolemeo, e quindi può essere rimasto menzionato nel compendio.

(1) Cardinali, mem. cit., pag. 440, n. 3. Fu osservato che difficilmente i Romani, mentre potevano aspettarsi la riscossa dei Cartaginesi ed erano minacciati dai Galli e dagli Illirî, avrebbero avventurato le loro forze contro un nemico che per ora non poteva recar loro danno. Perciò il Niese, op. cit., pag. 153, n. 4, nega ogni fede alle parole di Eutropio, e secondo lui non merita maggior credito Svetonio quando dice (*Claud.* 25) che l'imperatore Claudio trovò una lettera inviata a Seleuco (identificato con Seleuco II) promettendogli amicizia ed alleanza purchè lasciasse gli abitanti di Ilio esenti da tributo. Ma queste notizie non possono senz'altro essere considerate come apocrife; Haussoullier, *Études sur Milet*, pag. 131; Cardinali, l. c. Ciò prova che i Romani avevano allora già qualche relazione colle monarchie d'oriente.

(2) Eutr., IV, 16 e 18. Cfr. anche *quo tempore* III, 14, 3.

Dolabella consule deletae sunt. E continua: EODEM TEMPORE *Tarentinis, qui iam in ultima Italia sunt, bellum indictum est* (1). Altrove Eutropio dopo aver accennato alla guerra di Creta combattuta da Q. Cecilio Metello Cretico (68-67 av. Cr.), continua: QUO TEMPORE *Lybia quoque Romano imperio per testamentum Appionis, qui rex eius fuerat, accessit* (nel 96 av. Cr.) (2). Quindi Eutropio può condurci soltanto ad ammettere come termini estremi in cui fu conclusa la pace il 241/0 ed il 237, sebbene sia più vicino al vero il primo che non il secondo termine. E vediamone le ragioni.

Eusebio riferisce l'intervento di Seleuco nella Siria e la liberazione di Damasco e di Ortosia dall'assedio che vi avevano posto gli Egiziani al 242/41: *quae vero apud Damaskum et Orthosiam obsessio fiebat, finem accepit centesimae tricesimae quartae olompiadis anno tertio, quum Seleukus eo descendisset* (3). Il Cardinali accettando l'ipotesi del Beloch pensò che in Eusebio si trovasse un errore nella data e si dovesse leggere *centesimae tricesimae quintae* invece di *quartae*, sicchè l'assedio di Damasco e di Ortosia andrebbe trasportato al 238/37, e si dovrebbe ammettere che la guerra siriaca ripresa dopo un armistizio concluso nel 241 (Giustino) cessò con la pace definitiva del 237 (Eutropio) (4). Abbiamo

---

(1) EUTR., II, 10 e 11; PAIS, *Storia di Roma*, I, 2, pag. 447 e 542 sg. Notevole a questo riguardo è anche quest'altro passo: *Postea Samnites victi sunt a L. Papirio consule, septem milia eorum sub iugum missa. Papirius primus de Samnitibus triumphavit* (320 av. Cr.). EO TEMPORE *Ap. Claudius censor aquam Claudiam induxit et viam Appiam stravit* (312 av. Cr.). EUTR., II, 9. Cfr. PAIS, op. cit., pag. 388 e 508; per Appio Claudio, pag. 452. Un simile esempio in EUTR., VII, 4 e 5; cfr. anche, VI, 18. Eutropio del resto segue lo stesso uso anche con altre frasi; così *per haec tempora* serve per riunire avvenimenti che si riferiscono ora allo stesso anno (IX, 21), ora ad anni differenti (X, 13), come *per hoc tempus* (X, 4). Cfr. *per idem tempus*, EUTR., IV, 11; IX, 23. Inoltre per assicurarsi quanto poco sicura sia la cronologia dei fatti che Eutropio riferisce accanto ad altri sicuramente databili basta vedere le notizie raccolte in EUTR., II, 14 e 15; VI, 9-13; VII, 4-6.

(2) EUTR., VI, 11; BOUCHÉ-LECLERCQ, *Hist. des Lagides*, II, pag. 108. Il passo di Eutropio però potrebbe riferirsi ad un riordinamento allora avvenuto della provincia di Cirenaica che era stata costituita nel 74 av. Cr. MARQUARDT, *L'amministrazione pubblica romana* (trad. del SOLAINI), vol. I, pag. 500, n. 1.

(3) EUSEB., I, 251.

(4) CARDINALI, mem. cit., pag. 440 e 447.

già visto quanto poco probabile sia l'alleanza tra Tolemeo ed Antioco Ierace, ed è poi del tutto arbitrario mettere a questo modo le mani nel testo di Eusebio per accordarlo con ipotesi che sono così poco sicure. Il Beloch osservò come si trovino altri errori in queste notizie di Eusebio: così la morte di Antioco II è riferita all'Ol. 135, 3 invece che all'Ol. 132, 2 (1). Ma in questo caso abbiamo delle testimonianze contradditorie e dobbiamo cercare quale sia la vera, anzi Eusebio stesso ci fornisce gli elementi per correggere l'errore; nel caso nostro invece nulla viene ad urtare contro la data del 242/41, eccetto il diverso modo del tutto soggettivo di concepire la successione dei fatti avvenuti in questo tempo. Quindi come non va accettata la correzione del testo di Giustino e l'interpretazione di quello di Eutropio, dobbiamo anche respingere la correzione del testo di Eusebio, il quale invece senza alcuna alterazione ci deve essere di guida per stabilire lo svolgersi degli avvenimenti in questo periodo (2).

Con queste deduzioni s'accorda anche il già ricordato decreto di Smirne (3). In questo documento all'elogio della fedeltà dimostrata da Smirne segue l'enumerazione dei privilegi ad essa accordati dal re, il quale oltre la concessione dell'autonomia, dell'esenzione dai tributi, dell'integrità del territorio, riconobbe il carattere sacro e l'inviolabilità della città e del tempio di

(1) Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 454.

(2) Così resta infirmata anche l'ipotesi del Cardinali, mem. cit., pag. 438 e n. 7 (seguito del Beloch), che Giustino non alluda alla pace definitiva tra Seleuco e Tolemeo, ma solo ad un armistizio che sarebbe stato violato poi da quest'ultimo. Giustino ed Eutropio si riferiscono alla stessa pace; solo non c'è ragione d'ammettere un secondo periodo di guerra contro Tolemeo, nè la conclusione d'una pace tra Seleuco e Tolemeo al 237.

(3) Fondandosi sopra le frasi di questa iscrizione citate sopra, ἐπειδὴ πρότερόν τε... e νῦν τε ὑπερβεβληκότος... si ammettevano dal Droysen in poi due spedizioni di Seleuco nella Siria settentrionale. Ma le altre fonti parlano di una sola spedizione, e l'Haussoullier, *Études sur Milet*, pag. 129, ha dimostrato che anche le due frasi dell'iscrizione di Smirne si riferiscono ad un'unica spedizione. A torto non accettano questa interpretazione il Sokoloff, " Beiträge zur alten Gesch. „, vol. cit., pag. 104; il Bevan, op. cit., I, pag. 326, Append. K, ed il Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 229, n. 2; lo seguono il Cardinali, mem. cit., pag. 435, n. 2 e il Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 456 sg.

Afrodite Stratonicide, e prese anzi l'iniziativa di far conoscere questi privilegi nel mondo greco: ἔγραψεν δὲ καὶ πρὸς τοὺς βασιλεῖς καὶ τοὺς δυνάστας καὶ τὰς πόλεις καὶ τὰ ἔθνη ἀξι|ώσας ἀποδέξασθαι τό τε ἱερὸν τῆς Στρατονικίδος Ἀφροδίτης ἄσυλον εἶναι καὶ τὴμ πόλιν ἡμῶν ἱερὰν καὶ ἄσυλον (lin. 11 sg.).

L'iscrizione di Smirne è per questo punto completata da un decreto di Delfi nel quale abbiamo una delle risposte alla lettera di Seleuco (1). Gli abitanti di Delfi deliberano di approvare quanto Seleuco aveva proposto, e nel decreto si aggiunge: ἐντείλασθαι δὲ καὶ τοῖς θεωροῖς τοῖ[ς τὰ] | Πύθια ἐπαγγελλόντοις ἐπαινέσαι τὸν βασιλέα Σέλευκον ἐπί τε το[ύτοις] | καὶ τᾶι εὐσεβείαι καὶ τῶι ἐπακολουθηκέναι τῶι τοῦ θεοῦ χρησμῶ[ι] | καὶ θῦσαι τᾶι Αφροδίται (lin. 14 sgg.). Questo decreto ha grande importanza in quanto ci aiuta a datare con sufficiente precisione anche quello di Smirne e la spedizione di Seleuco nella Siria. Il Baunack ha fatto giustamente notare che siccome Seleuco salì sul trono nel 246, nel quale anno furono celebrati i giuochi Pitici, il 242 è l'anno in cui si celebrarono i primi giuochi Pitici a cui egli potè essere invitato; e poichè gli anni 226 e 222 (?) son troppo lontani, egli restringeva la data del decreto tra il 242 ed il 230 (2). L' Haussoullier propone il periodo di tempo compreso tra il 242 ed il 238, e crede che le Sacre Teorie incaricate di portare a Seleuco la risposta di Delfi, avessero l'incarico di invitarlo ai giuochi del 238 (3). Ma siccome il decreto di Delfi è anteriore a quello di Smirne, il quale si riferisce al tempo in cui Seleuco era passato nella Siria, dobbiamo ritenere col Beloch che i giuochi Pitici in quistione siano quelli del 242, e poichè essi avevano luogo nella tarda estate, l'ambasceria sia partita da Delfi al più tardi nella primavera di quest'anno (4). Però tenendo conto del tempo richiesto tanto per il viaggio degli ambasciatori quanto per il viaggio di coloro che potevano intervenire ai giuochi, ed anche del fatto che nel decreto si parla solo di istruzioni da darsi a questi ambasciatori di

(1) Couve, in " Bulletin de Corresp. Hellén. ", XVIII (1894), pag. 227, N. 1; Michel, *Recueil*, 258; Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 228.

(2) Collitz-Baunack, *Sammlung der Griech. Dialekt-Inschriften*, II, pagina 875 sgg., N. 2733.

(3) Haussoullier, *Études sur Milet*, pag. 123.

(4) Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 455; Bevan, op. cit., I, pag. 189, n. 2.

Delfi, mi sembra che si debba ammettere come data più probabile per questo decreto il 243. Prima di questa lettera il re aveva fatto a Smirne le concessioni alle quali ho accennato, che perciò devono spettare circa al principio del 243, quando Seleuco cercava di conciliarsi l'appoggio delle città dell'Asia Minore e stava organizzando la spedizione nella Seleucide. Poco dopo, mentre Seleuco compieva questa spedizione, Smirne concluse il trattato di alleanza con Magnesia del Sipilo, molto probabilmente nel 242 (1).

In questo tempo Seleuco riportò degli importanti successi sulle truppe Tolemaiche spingendosi fino all'Eufrate e nella Mesopotamia ove fondò Callinico, fondazione la quale, come indica lo stesso nome, deve essere stata fatta sul teatro di una brillante vittoria riportata sopra Tolemeo (2). Il *Chronicon Paschale* riferisce la fondazione di questa città all'Ol. 134, 1 (244/43 av. Cr.); ma sotto il consolato di Catulo e di Albino i quali furono in carica nel 242, ed è questa la data più comunemente seguìta (3).

---

(1) L'Haussoullier, *Études sur Milet*, pag. 118, riferisce a torto tutti i fatti menzionati nell'iscrizione di Smirne al principio del regno di Seleuco, cfr. Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 456; d'altra parte non c'è alcuna seria ragione per trasportare quel decreto all'autunno o all'inverno del 239, La frase νῦν τε ὑπερβεβληκότος τοῦ βασιλέως εἰς τὴν Σελευκίδα mi pare non lasci alcun dubbio per intendere che il re stava in quel momento effettuando la sua spedizione nella Siria. Le condizioni poi a cui allude il Beloch si erano verificate anche in questo tempo per le vittorie di Seleuco sulle truppe Tolemaiche e sul fratello, e dei Rodî sulla flotta dell'Egitto.

(2) Köpp, in " Rheinisches Museum ", XXXIX (1884), pag. 222. Il Köhler, " Sitzungsber. d. Berl. Akadem. ", vol. cit., pag. 445 sgg., suppose invece che la fondazione di questa città fosse connessa con la vittoria di Seleuco sopra Antioco nella Lidia, ma è ipotesi poco fondata; cfr. Cardinali, scr. cit., pag. 445 sgg. Anche il soprannome di Callinico che ebbe Seleuco (Appian., *Syr.*, 66; Polyb., II, 71, 4; Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 239, 240, 245), lo derivò dai prosperi successi ottenuti contro Tolemeo: Breccia, *Il diritto dinastico nelle monarchie dei successori d'Alessandro Magno*, in " Studî di Storia Antica " del Beloch, fasc. IV (1903), pag. 113. Per questi soprannomi presso i Seleucidi cfr. anche Kornemann, *Zur Geschichte der antiken Herrscherkulte*, in " Beiträge zur alten Geschichte ", I (1901), pag. 78 sgg.

(3) Le date del *Chronicon Paschale* non sono sempre sicure e vanno accettate con qualche esitazione: Niese, op. cit., II, pag. 152, n. 3. La data del 243 è accettata dal Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 1, pag. 699 e n. 2; III, 2, pag. 455 e 458

Mentre Seleuco riconquistava così buona parte dei territori perduti, le truppe di Tolemeo ripresero nella Siria l'offensiva e posero l'assedio a Damasco ed Ortosia; Seleuco dall'oriente accorse in aiuto delle città minacciate, respinse gli Egiziani, ma poco dopo vinto si ritirò come s'è detto in Antiochia, d'onde, dopo l'accordo col fratello, concluse la pace con Tolemeo.

Dalle osservazioni fatte fin qui mi sembra evidente che la cronologia del termine della guerra di Siria non può fondarsi nè sulle correzioni al testo di Eusebio, nè su Eutropio. L'unico elemento sicuro che ci resta è il racconto di Giustino in unione colle date che ci sono suggerite dal *Chronicon Paschale* e da Eusebio; e siccome tra la ritirata di Seleuco ad Antiochia e la conclusione della pace non è più ricordato alcun avvenimento, dobbiamo ritenere che Tolemeo, viste riunite contro di sè le forze di Seleuco e di Antioco, s'affrettò a concludere la pace o sulla fine del 241 o sul principio del 240.

A queste conclusioni ci riporta anche, come ben vide il Beloch, un decreto di Telmesso che spetta circa al febbraio del 240 (1).

Dall'insieme di questo decreto sembra risultare (cfr. lin. 8 sgg.) che la guerra di Siria, al tempo in cui fu emanato, doveva essere cessata; ma, come abbiam visto, non c'è alcuna ragione per ritenere, come fa poi il Beloch, che Tolemeo abbia violato poco dopo questo trattato, provocando una nuova guerra nella Siria nel 238/37, durante la guerra fraterna.

Si può quindi riassumere la cronologia approssimativa della terza guerra di Siria a questo modo:

246. Morte di Seleuco. Assassinio di Berenice (Iustin., XXVII, 1, 1-5). Operazioni dell'armata egiziana sulle coste della Siria (*Papiro di Gourob*).

245. Spedizione di Tolemeo nella Siria e nella Mesopotamia (Iustin., XXVII, 1, 6-9; Mahaffy, *Flinders Petrie Papyri*, II, N. XXIX e, pag. 101; iscrizione di Adulis, CIG., 5127). Seleuco con Laodice sta sulla difensiva nell'Asia Minore.

---

(1) Bérard, in " Bulletin de Corresp. Hellén. ", XIV (1890), pag. 162, N. 1; Michel, *Recueil*, 547; Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 55; Beloch, *Griech. Gesch.*, III, 2, pag. 454. Dato il diverso sistema di ricostruzione non può aver valore quanto dice il Droysen, *Hist. de l'Hellén.*, III, pag. 385, n. 3, per riferire la pace al 239.

Progressi della armata egiziana lungo le coste dell'Asia Minore e della Tracia (MICHEL, *Recueil*, 351; DITTENBERGER, *Syll. Inscr. Graec.*², I, 221; STOB., *Flor.*, II, pag. 66 (MEINEKE); POLYB., V, 34, 6-9).

244. Offensiva di Seleuco contro la flotta e le truppe egiziane nell'Asia Minore. Naufragio della armata siriaca. Vittoria di Seleuco nella Lidia e assedio di Efeso.

244 43. Battaglia di Andro. Vittoria navale dei Rodì. Scoppio delle discordie nella famiglia di Seleuco. Guerra fraterna nella Lidia. Spedizione nella Cappadocia.

243. Concessioni di Seleuco ad alcune città dell' Asia Minore. Preparativi per la spedizione di Siria.

243/42. Alleanza tra Smirne e Magnesia del Sipilo.

242. Vittorie di Seleuco nella Siria e nella Mesopotamia. Fondazione di Callinico. Assedio di Damasco e di Ortosia.

241. Liberazione di Damasco e di Ortosia. Sconfitta e ritirata di Seleuco in Antiochia.

241 o 240. Pace tra Seleuco e Tolemeo.

239 sgg. Ripresa delle ostilità tra Antioco Ierace e Seleuco. Battaglia di Ancira. Spedizione contro i Parti. Ribellione di Stratonice.

A questo modo ci riesce di accordare le notizie di Giustino con quelle di Eusebio senza alterare menomamente i testi, il che più o meno succede invece in quasi tutte le esposizioni che della terza guerra di Siria e della guerra fraterna si son fatte dai moderni. Secondo questa ricostruzione viene divisa in due parti non la guerra coll'Egitto che le nostre fonti riferiscono come cosa ininterrotta, ma le ostilità tra i fratelli che da Eusebio sono esplicitamente esposte in due riprese; e ciò non deve certo meravigliarci se pensiamo che più tardi, verso la fine del regno di Seleuco Callinico, scoppiò al di là del Tauro una nuova guerra fraterna.

Relazione sulla memoria del Prof. Arturo Segre: *La questione sabauda e gli avvenimenti politici e militari che prepararono la tregua di Vaucelles.*

Il prof. Arturo Segre, continuando i suoi studii sul ducato di Savoia, durante i regni di Carlo III e di Emanuele Filiberto (dei quali studii parte vide la luce nelle nostre pubblicazioni accademiche) in questo ultimo prende ad esame la preparazione e la conclusione della tregua di Vaucelles del 1556, la quale, sospendendo le ostilità tra Spagna e Francia, parve contrariare i disegni di Emanuele Filiberto intesi al ricupero de' suoi Stati. Oltre a documenti ed a lavori noti, l'autore, che ebbe principalmente in mira di studiare questa tregua per quanto essa ebbe tratto con la questione sabauda, si giovò di carte degli archivii di Torino, di Venezia, di Modena e di Mantova. Del materiale archivistico da lui adoperato diede un saggio, riproducendo in appendice otto documenti inediti.

L'autore è conosciuto per la sua accuratezza e la sua severità di metodo. Forse gli si può fare appunto di troppa abbondanza e minuzia di particolari. Ma non conviene dimenticare che gli studii del Segre sul ducato di Savoia nel secolo XVI si presentano nella forma modesta di monografie staccate, non come parti di un'opera organica. Chi col sussidio dei nuovi studii e di più ampie ricerche vorrà rifare la storia dei regni di Carlo III e di Emanuele Filiberto, tracciata con mano maestra dal Ricotti, troverà la sua impresa agevolata dalle pazienti indagini del Segre. Onde i sottoscritti, che, adempiendo l'incarico ricevuto, esaminarono questo lavoro manoscritto, ne propongono la lettura alla Classe.

A. Manno.
E. Ferrero, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Maggio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. CONTE TOMMASO SALVADORI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Naccari, Jadanza, Spezia, Guidi, Morera, Segre, Grassi, Guareschi, Parona, Mattirolo, Foà e Camerano, Segretario.

Il Socio Senatore D'Ovidio, Presidente dell'Accademia, scusa la sua assenza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente presenta: 1° *Dizionario di termini medici dal nome dell'autore*, inviato in dono all'Accademia dai fratelli Parona; 2° Arturo Issel: *Terminologia geografica; Osservazioni geologiche fatte nei dintorni di Torriglia; Osservazioni intorno alla frana del corso Firenze a Genova.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Dr. Marco Soave, *Sulle sostanze proteiche del muscolo*, ricerche chimiche, dal Socio Guareschi;

2° Dr. Carlo Severini, *Sopra gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati*, dal Socio Morera;

3° Dr. Gabriele Lincio, *Sul berillo di Vall'Antoliva e di Cosasca*, dal Socio Spezia;

4° Dr. Giuseppe Gola, *Sulla respirazione intramolecolare nelle piante palustri*, dal Socio Mattirolo;

5° Dr. Umberto Perazzo, *Ricerche sulla variazione dell'Hydrophilus piceus*, dal Socio Camerano.

Il Socio Segre presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del signor Ugo Amaldi, intitolato: *I gruppi conformi reali nello spazio.*

Il Presidente delega il Socio Segre ed il Socio Morera a prendere in esame il detto lavoro e a riferire in una prossima adunanza della Classe.

LETTURE

Sulle sostanze proteiche del muscolo.

Ricerche chimiche del Dr. MARCO SOAVE.

I.

A W. Kühne (1) è dovuta l'osservazione che il liquido o plasma muscolare ha la proprietà di spontaneamente rapprendersi o coagulare con separazione di una sostanza di natura albuminoide, che egli chiamò miosina; comportamento analogo a quello del plasma sanguigno dei vertebrati che, quando abbandona i vasi, pure spontaneamente coagula lasciando separare la comune fibrina. Operando con plasma preparato dal muscolo fresco di rana, Kühne aveva visto che la coagulazione spontanea avveniva lentamente a 0°, più rapidamente se si manteneva il liquido verso 40°; che essa invece aveva luogo immediatamente se al plasma si aggiungeva un acido, oppure il plasma stesso veniva lasciato cadere a goccie e diluito in molta acqua distillata.

Dai muscoli irrigiditi trattati con soluzione di cloruro di sodio al 10 % Kühne potè ottenere un liquido che non aveva più la proprietà di spontaneamente rapprendersi; ma che diluito con acqua distillata anch'esso lasciava precipitare la miosina. Osservò inoltre Kühne che lo siero, ossia il liquido che si aveva dal plasma muscolare dopo la separazione spontanea della miosina, coagulava se veniva scaldato verso 47°; che cioè detto liquido conteneva tuttavia della *miosina non rappresa.*

Secondo il concetto di Kühne non esisterebbe cioè nel plasma muscolare che una sostanza albuminoide principale, la miosina. La quale miosina avrebbe la proprietà di essere affatto insolubile nell'acqua, solubile nella soluzione di cloruro di sodio (5-10 %), negli acidi e negli alcali diluiti. Dalla soluzione nel cloruro sodico la miosina può essere precipitata per diluizione nell'acqua, o per saturazione della soluzione stessa con cloruro sodico in sostanza o per l'aggiunta di acidi. Sempre secondo le osservazioni di Kühne, la soluzione nel cloruro sodico che ha perduta

la proprietà di spontaneamente rapprendersi, scaldata a 55° incomincia a intorbidarsi e a 60° fornisce un coagulo colle stesse proprietà delle altre sostanze albuminoidi tipiche coagulate col calore.

Più tardi W. D. Halliburton (2), operando con muscoli di mammiferi, estrae e distingue due sostanze proteiche principali che chiama paramiosinogene e miosinogene: egli prepara il plasma trattando i muscoli con soluzione di cloruro di sodio (10 %) e separa i due prodotti per precipitazione frazionata con solfato di magnesio. Aggiungendo a 100 cc. di plasma salino gr. 50 di solfato di magnesio, si ha un precipitato costituito da paramiosinogene; aggiungendo in seguito al liquido filtrato ancora tanto solfato di magnesio da avere per 100 cc. gr. 94 di sale, precipita il miosinogene. Il quale miosinogene appartiene alle globuline e si trova nel plasma muscolare in quantità molto superiore al paramiosinogene.

Sono, secondo il fisiologo inglese, questi due corpi che formano, sotto certe condizioni, la parte del plasma che spontaneamente si rapprende, la miosina di Kühne.

Come nel plasma sanguigno esiste una sostanza madre della fibrina, il fibrinogeno, così, secondo Halliburton, esiste nel plasma muscolare la sostanza madre della miosina, il miosinogene, a cui va aggiunta l'altra sostanza di minor importanza, il paramiosinogene. Dalla unione dei due prodotti si ha, come si disse, la miosina, la quale però si lascia facilmente dissociare nelle due sostanze madri: è sufficiente per ciò che essa venga disciolta in una soluzione di sale neutro.

Le suddette sostanze generatrici della miosina esistono preformate nel muscolo fresco e possono direttamente essere estratte mediante soluzioni saline: nel muscolo irrigidito invece miosinogene e paramiosinogene non si trovano più presenti come tali e le soluzioni saline sufficientemente concentrate estraggono la miosina, dissociandola contemporaneamente nelle due sostanze generatrici.

E finalmente, sempre secondo Halliburton, esisterebbe nel muscolo un fermento, il miosinfermento, che può essere estratto dal muscolo allo stesso modo del fibrinfermento dal sangue; il miosinfermento è capace di coagulare una soluzione salina di miosina. Per cui il rapprendersi spontaneo della miosina è uno schietto fenomeno fermentativo.

Però prima delle ricerche di Halliburton e anche dopochè furono note le sue vedute, parecchi autori continuarono ad indicare col nome di miosina, nel senso di Kühne, prodotti ottenuti in vario modo: estraendo, ad esempio, il muscolo con soluzione di cloruro d'ammonio e saturando la soluzione stessa con cloruro sodico o cloruro ammonico fino a precipitazione completa: oppure facendo cadere goccia a goccia e diluendo nell'acqua il plasma salino, oppure scaldando detto plasma a 60°-65° (3).

Otto v. Fürth (4), nel corso delle sue ricerche tendenti a precisare le differenze fra i due componenti principali del plasma muscolare isolati da Halliburton, adotta la denominazione proposta da questo ultimo. Conclude infine coll'affermare che il paramiosinogene di Halliburton altro non è se non la miosina nel senso originale della parola e propone quindi di adottare la denominazione di miosina come la più vecchia e la più corta.

Il miosinogene di Halliburton poi non corrisponde al nome che porta, poichè nè esso fornisce la miosina, nè da essa proviene. Stando alle sue proprietà il miosinogene non è, secondo v. Fürth, nè un albuminato, nè una globulina, nè una nucleoglobulina, ma una *sostanza proteica sui generis*. Egli propone perciò che venga chiamato, con parola alquanto più corta e che ricorda la denominazione prima, miogene.

Ma quantunque parecchi autori abbiano in seguito accettato le idee di v. Fürth e la sua terminologia, neppure si può dire che sia ora sicuramente stabilita una distinzione netta fra questi due principali corpi proteici del muscolo, le differenze nel comportamento, secondo che osserva Cohnheim (5), potendo dipendere unicamente da ciò che l'un corpo rappresenti la sostanza proteica libera, l'altro un sale.

E l'analisi elementare non pare in grado di risolvere la questione, come dimostrano le cifre che qui sotto si riportano dal lavoro stesso di v. Fürth:

	Miosinogene	Miosina (Hühne e Chittenden)	Miosina (Chittenden e Cummins)
C =	52.93	52.79	52.82
H =	6.96	7.12	7.11
O =	22.80	21.97	21.90
N =	16.27	16.86	16.77
S =	1.04	1.26	1.27

Se si pensa che, secondo l'opinione di v. Fürth stesso più sopra riferita, il paramiosinogene di Halliburton altro non è se non la miosina di Kühne, si vede che fra le due principali sostanze proteiche del muscolo esiste, per quanto si riferisce alla composizione centesimale, quasi identità; e il dubbio che si possa trattare di una sostanza unica è dalla analisi elementare più che mai avvalorato.

Si comprende del resto come l'analisi elementare non possa avere grande valore nello studio di sostanze complesse, quali sono le sostanze proteiche: a differenza di ciò che avviene nello studio dei corpi organici a struttura più semplice, l'analisi elementare non può fornire qui che indicazioni vaghe.

Da molto tempo invece e con maggior vantaggio si è cercato di usufruire nello studio delle materie albuminoidi un tipo di analisi che tende a separare e a determinare le proporzioni quantitative di certi gruppi atomici relativamente semplici, di prodotti ben definiti, i quali si ottengono dalla scissione della mollecola albuminoide mediante l'azione di agenti speciali; i quali agenti possono essere gli acidi concentrati bollenti, gli alcali caustici, i fermenti, ecc. Come è noto, dall'azione dei sopranominati agenti dapprima si originano prodotti i quali conservano ancora i caratteri e la struttura complessa delle sostanze proteiche stesse, e cioè albuminati, albuminosi, peptoni; in seguito poi si fanno liberi prodotti i quali hanno perduto affatto i caratteri di sostanza proteica, gruppi organici relativamente semplici e cristallizzabili.

Per avere un' idea della complessità della mollecola delle sostanze proteiche tipiche basti accennare alle recenti ricerche di E. Abderhalden (6), il quale dalla idrolisi della edestina, la sostanza proteica che si ottiene facilmente cristallizzata dai semi di canapa, riuscì a separare 18 prodotti di scomposizione: glicocolla, alanina, acido amidovalerianico, leucina, acido αpirrolidincarbonico, acido oxyαpirrolidincarbonico, fenilalanina, tirosina, triptofano, serina, acido asparaginico, acido glutaminico, cistina, urea, acido diamidovalerianico, lisina, istidina, ammoniaca.

La maggior parte di questi corpi appartengono al gruppo dei monoamidoacidi e molti di essi erano conosciuti già da lungo tempo come prodotti di scomposizione delle sostanze proteiche; però le antiche determinazioni, fatta eccezione per l'acido aspa-

raginico e glutaminico e per la tirosina, non possono avere per difetto di metodo grande valore.

D'altra parte, il metodo escogitato da E. Fischer (6), basato sulla trasformazione dei monoamidoacidi nei rispettivi eteri etilici e nella separazione loro mediante distillazione frazionata nel vuoto, incomincia ora soltanto ad essere applicata nella analisi delle sostanze proteiche.

Una importanza tutta speciale invece ha assunto da alcuni anni la determinazione di alcune basi le quali si trovano costantemente, insieme coi monoamidoacidi, fra i prodotti di scomposizione delle sostanze proteiche; e cioè la arginina, la lisina, la istidina.

La arginina (7) venne trovata prima da E. Schulze nei lupini germinanti, e a Schulze e ai suoi allievi è dovuta la conoscenza della costituzione di questa base, che i lavori della scuola di Kossel dimostrarono in seguito essere la più largamente rappresentata fra i prodotti di scomposizione delle sostanze proteiche. Finora non si conosce alcuna sostanza proteica priva di arginina, la quale per contro entra persino nella proporzione di quattro quinti nella costituzione delle protamine, che formano fra le sostanze proteiche un gruppo ben distinto.

La lisina venne per la prima volta riscontrata da Drechsel fra i prodotti di scomposizione della caseina.

La istidina $C_6H_9N_3O_2$ è stata riscontrata per la prima volta da Kossel fra i prodotti di idrolisi della sturina, la protamina ricavata dallo sperma dello storione.

La sua struttura non è peranco chiarita, ma nel comportamento generale la istidina è molto simile alle due basi precedenti.

Non si tardò a dimostrare che tanto la lisina che la istidina sono dei prodotti, si può dire, normali di sdoppiamento delle sostanze proteiche; esse mancano in alcune protamine soltanto. La lisina poi manca ancora in alcune sostanze proteiche vegetali di un gruppo affatto speciale.

È la determinazione quantitativa di queste basi, applicata specialmente allo studio delle protamine, che ha permesso a Kossel di ottenere in questi ultimi tempi i suoi splendidi risultati nello sviluppo della chimica delle sostanze proteiche.

Ed è appunto l'analisi dei prodotti di idrolisi delle materie albuminoidi e la loro determinazione quantitativa che servirà in

avvenire a dimostrare che le differenze fra albumina e albumina possono essere non soltanto esteriori e superficiali ma molto profonde invece e sostanziali: le nozioni che così si acquisteranno sulla loro costituzione potranno chiarire la funzione fisiologica che le albumine sono chiamate a compiere negli organismi viventi animali e vegetali.

L'azoto introdotto nell'organismo animale viene eliminato, nelle condizioni fisiologiche, in massima parte sotto forma di urea; ora è evidente che diverso sarà il lavoro compiuto dall'organismo stesso a seconda che la sorgente di azoto sarà rappresentata da una sostanza proteica in cui il gruppo atomico contenente urea preformata sia più o meno abbondante. La arginina è il gruppo atomico in cui si trova l'urea legata all'acido diamidovalerianico; e la arginina, come è dimostrato dalle recentissime ricerche di Kossel (9), trova nell'organismo le condizioni per cui è facilmente scissa nei suoi componenti:

$$NH_2 . CNH . NH . C_3H_6 . CHNH_2 . COOH + H_2O =$$
$$NH_2 . CO . NH_2 + NH_2 . C_3H_6 . CHNH_2 . COOH.$$

Ora, la quantità di arginina contenuta nelle sostanze albuminoidi, come si ebbe già occasione di avvertire, può appunto variare in proporzioni assai sensibili; in alcuni tipi di albumina, le protamine, essa può raggiungere la proporzione dell'84 %, in altri tipi oscilla fra 10 e 20 %, in altri tipi ancora, come nelle albumine del mais, rappresenta appena alcuni centesimi.

Oggidì dunque non è più possibile considerare l'albumina quasi come un fattore costante nel bilancio del ricambio e credere di poter sostituire, nei calcoli fisiologici, un' albumina all'altra, come se fossero degli equivalenti dietetici, e non sarà più lecito, ad esempio, affermare *a priori* che l'albumina della carne abbia lo stesso valore nutritivo dell'albumina del latte e dell'albumina dei cereali.

Colle ricerche delle quali io rendo qui conto suggeritemi dal prof. A. Kossel, io mi sono proposto, analizzando i prodotti di scomposizione e precisamente determinando le basi essoniche, di stabilire se esista o meno una differenza sostanziale fra le due sostanze proteiche principali del muscolo. Alcuni autori, come

già si disse, non ammettono la divisione e la classificazione di Halliburton e di v. Fürth; altri, fra questi Cohnheim, la accettano con riserva.

E poichè non sarà forse senza importanza il confronto fra i risultati della analisi delle sostanze proteiche e quelli della analisi del muscolo *in toto*, così, seguendo l'ordine nel quale le esperienze vennero praticate, sarà fatta precedere la esposizione delle ricerche sul muscolo di bue e su quello di coniglio.

Io sono lieto di poter rendere qui al prof. A. Kossel vive grazie per i consigli e per gli aiuti dei quali mi è stato largo.

II.

A. Analisi del muscolo di bue.

Come mezzo di scomposizione si impiega l'acido solforico. Gr. 150 di muscolo finamente tritato vengono fatti bollire per 14 ore in pallone munito di refrigerante ascendente con una miscela di gr. 120 di ac. solforico concentrato e gr. 140 di acqua. Il pallone è posto a bagno di paraffina.

Per questo genere di esperienze si consiglia di impiegare una miscela fatta con una quantità di ac. solforico concentrato corrispondente circa a 3 volte il peso della sostanza (secca) da decomporre e a 6 volte il peso di acqua. Nel caso presente si è supposto che il muscolo contenesse il 74 % di acqua e il 26 % di sostanza secca.

Il liquido proveniente dall'azione dell'acido solforico, dopo raffreddamento è filtrato e portato a 1 litro: 10 cc. di esso, esattamente misurati, servono alla determinazione dell'azoto, secondo Kjeldahl. Si ha che l'azoto del liquido totale corrisponde a gr. 5,17.

La massa principale di liquido, portata a 2350 cc. in modo da avere una diluizione dell'ac. solforico corrispondente al 5 % viene ora precipitata con soluz. concentrata di ac. fosfowolframico. Il precipitato raccolto su filtro alla pompa è dal filtro stesso portato in mortaio e triturato accuratamente con acido solforico diluito (5 %), operazione che si ripete, allo scopo di lavare bene il precipitato, ancora un paio di volte.

Il filtrato e le acque di lavaggio insieme riunite si portano a volume di 7 litri: il dosaggio di azoto (fatto su campioni di 100 cc.) dimostra che l'azoto del filtrato è = gr. 3,143.

Per cui azoto del precipitato (fatte le opportune correzioni) = gr. 2,030.

Il trattamento con ac. fosfowolframico, che nel caso di sostanze proteiche pure potrebbe essere evitato, è fatto qui allo scopo di allontanare lo zucchero originariamente contenuto nel muscolo o che si fosse potuto originare dall'azione dell'ac. solforico e quelle altre sostanze che avrebbero in seguito potuto essere di nocumento nel trattamento coi sali di argento.

Il precipitato dell'acido fosfowolframico sospeso in acqua in larga capsula è ora decomposto con barite caustica in soluzione concentrata e calda.

La barite viene aggiunta fino a che il liquido abbia acquistato reazione marcatamente e persistentemente alcalina. Si filtra e il precipitato originatosi dall'azione della barite (miscuglio di solfato e fosfowolframato di bario) è accuratamente lavato facendolo bollire a più riprese con acqua. Il filtrato colle acque di lavaggio esattamente neutralizzato con HNO_3 viene evaporato a poco più di mezzo litro.

Notiamo che durante la decomposizione del precipitato dell'acido fosfowolframico con barite *non si è notato* lo sviluppo di traccia di NH_3.

Precipitazione dell'Arginina e Istidina. — Al liquido contenente le essobasi reso acido per HNO_3 si aggiunge per piccole porzioni del nitrato di argento finamente polverizzato, agitando continuamente, e facendo ogni tanto la prova per vedere se il sale di argento aggiunto è sufficiente. Per questo si pone in un vetrino da orologio, su fondo nero, dell'acqua di barite e con una bacchetta di vetro si lascia scorrere dall'orlo una goccia del liquido in esame. Se si forma un precipitato bianco, ciò indica che la quantità di sale d'argento non è sufficiente: si aggiungono nuove porzioni di $AgNO_3$ fino a che una goccia di prova in contatto con la barite determini la formazione di un precipitato giallo. A questo punto si aggiunge al liquido, per piccole porzioni, della barite finamente polverizzata fino a saturazione, in modo cioè che la reazione sia marcatamente alcalina. Si forma un precipitato che si raccoglie tosto su filtro alla pompa: dal

filtro si porta in mortaio, si tritura con acqua di barite e si rifiltra lavandolo ancora sul filtro stesso con acqua contenente sciolta un po' di barite.

Il precipitato è costituito dalla miscela del composto argentico di *istidina* e *arginina*: nel filtrato, comprese le acque di lavaggio, è contenuta la *lisina*.

Separazione della istidina dalla arginina. — Determinazione della istidina. — Il precipitato costituito dalla miscela del composto argentico di arginina e istidina sospeso in acqua acidula per acido solforico viene decomposto con H_2S: si filtra e il precipitato di Ag_2S a cui è unito anche del $BaSO_4$ viene lavato accuratamente facendolo bollire a più riprese con acqua. Il filtrato, colle acque di lavaggio, è evaporato a 1 litro: operando su campione esattamente misurato di 20 cc. la determinazione di azoto, si calcola la quantità di azoto appartenente alle sostanze precipitabili dall'argento e dalla barite. Si trova (fatte le opportune correzioni) azoto = gr. 0,889.

Il liquido si neutralizza ora esattamente con acqua di barite e a questo punto vi si aggiunge della soluzione di nitrato di bario, finchè si vede, operando se occorre su porzioni di filtrato, che essa non determina più la formazione di alcun precipitato.

Si filtra e si lava, come al solito, accuratamente il precipitato di solfato di bario facendolo bollire a più riprese con acqua. Il filtrato colle acque di lavaggio si svapora a piccolo volume, 300 cc. circa. Si aggiunge allora al liquido una soluzione di $AgNO_3$ fino a lieve eccesso, e cioè fino a che una goccia provata, nel modo già indicato, con acqua di barite, dia origine a un precipitato giallo.

Si può verificare che la reazione del liquido, primitivamente neutra, si è fatta acida; la si riconduce perciò, mediante acqua di barite, ad essere esattamente neutra, e da questo punto operando cautamente, col mezzo di una buretta ad esempio, si va aggiungendo per piccole porzioni dell'altra acqua di barite fino a precipitazione completa della istidina.

Come mezzo per riconoscere la completa precipitazione della istidina si approfitta del fatto che una soluzione di nitrato di argento ammoniacale dà luogo colla istidina alla formazione del composto argentico insolubile ($C_6H_7Ag_2N_3O_2$).

Aggiungendo dunque a piccole porzioni di liquido decantato

o filtrato qualche goccia di nitrato d'argento ammoniacale, finchè si osserva nella superficie di contatto dei due liquidi la formazione di un precipitato bianco, vuol dire che vi ha tuttavia in soluzione della istidina.

In questo caso si aggiungono nuove porzioni di barite e si ripete il saggio con il nitrato di argento ammoniacale, fino a che la prova non sia negativa: a questo punto tutta la istidina è precipitata. È forse superfluo aggiungere che le singole porzioni di prova sono riunite alla massa totale. Saggiando la reazione del liquido si potrebbe vedere che, ad onta della quantità relativamente grande di barite aggiunta per completare la precipitazione della istidina, essa è appena leggermente alcalina.

La separazione della istidina dalla arginina è dunque basata sulla circostanza che il composto argentico della istidina precipita già in soluzione neutra e completamente poi in soluzione leggermente alcalina: il composto argentico della arginina invece, in queste condizioni rimane ancora completamente in soluzione.

Si raccoglie il precipitato argentico di istidina e lo si lava accuratamente sul filtro, o meglio triturandolo in mortaio, con acqua. Il filtrato contiene la arginina.

Si procede alla purificazione della istidina (10) sospendendo il precipitato argentico in una quantità misurata di acido solforico e decomponendolo con H_2S; il filtrato, colle acque di lavaggio del precipitato di Ag_2S, si evapora per allontanare l'H_2S, lo si diluisce in modo che il liquido contenga il 2,5 % di H_2SO_4 e si precipita nuovamente la istidina con una soluzione di solfato mercurico aggiunto in non grande eccesso. Si raccoglie dopo 24 ore il precipitato mercurico, lo si decompone alla sua volta con H_2S, e il filtrato colle acque di lavaggio lo si libera per evaporazione dall'H_2S: in questo liquido ridotto a volume di 1 litro si dosa, operando su campione di 20 cc., l'azoto corrispondente alla istidina.

Si trova, fatte le opportune correzioni, *azoto della istidina*, gr. 0,189.

Per pesare la istidina allo stato di cloridrato si elimina dal liquido l'acido solforico aggiungendo acqua di barite fino a forte reazione alcalina: si precipita la barite in eccesso con una corrente di CO_2. Si filtra, lavando il precipitato accuratamente con acqua bollente, e si svapora a secchezza. Si riprende il residuo

con acqua bollente, separando per filtrazione il carbonato di bario ancora presente, e il filtrato lo si svapora previa neutralizzazione con HCl, in un largo crogiuolo di porcellana tarato. Il residuo cristallino viene poi seccato fino a peso costante nel vuoto e pesato.

Si ha gr. 1,0725 $C_6H_9N_3O_2$, $2HCl$ = gr. 0,197 di azoto.

Determinazione della arginina. — Il liquido dal quale venne separata la istidina si satura con barite finamente polverizzata e agitando di continuo: si raccoglie il precipitato su filtro alla pompa, e lo si lava, triturandolo prima in mortaio, con acqua di barite fino a scomparsa della reazione di acido nitrico (H_2SO_4 e $FeSO_4$). Il precipitato argentico di arginina sospeso in acqua acidula per ac. solforico lo si scompone ora con H_2S: si filtra, lavando accuratamente il solfuro d'argento con acqua bollente, si elimina dal filtrato l'H_2S portandolo poi a volume fisso di 1 litro. Il dosaggio di azoto su campione di 20 cc., dà, fatte le opportune correzioni, azoto della arginina gr. 0,500.

Per pesare l'arginina allo stato di nitrato (neutro), si elimina dal liquido l'acido solforico mediante la barite, l'eccesso di barite mediante una corrente di CO_2, e il filtrato, colle acque di lavaggio del precipitato, si svapora a secchezza. Il residuo si riprende con acqua bollente e la soluzione si evapora una seconda volta a secco allo scopo di eliminare ogni traccia di carbonato di bario.

La soluzione che si ottiene riprendendo con acqua questo nuovo residuo, si neutralizza con HNO_3 e la si concentra in crogiuolo di porcellana tarato.

Ridotta la soluzione a piccolo volume, si pone il crogiuolo in essiccatore dove si fa il vuoto e lo si lascia fino a che incominciano a formarsi i primi cristalli: la cristallizzazione si lascia poi avvenire nelle condizioni ordinarie.

Seccato a peso costante il residuo cristallino $C_6H_{14}N_4O_2 . HNO_3 + {}^1/_2 H_2O$ è uguale a gr. 2,371, corrispondente a 1,67 di arginina e a 0,530 di azoto.

Determinazione della lisina. — Il liquido contenente la lisina, acidificato con ac. solforico, è assoggettato all'azione prolungata di una corrente di H_2S: si separa il precipitato costituito da un miscuglio di solfato baritico e solfuro d'argento e lo si lava facendolo bollire a più riprese con acqua. Il filtrato, colle

acque di lavaggio, lo si svapora a 500 cc., con che viene scacciato anche l'H_2S. Lo si addiziona di H_2SO_4 in modo da avere di questo all'incirca il 5 % e lo si precipita con ac. fosfowolframico. La precipitazione la si ritiene completa quando, aggiungendo ad una porzione di filtrato un po' di reattivo, esso si mantiene limpido per lo spazio di 10 minuti.

Il precipitato lo si raccoglie su filtro alla pompa e lo si lava accuratamente con acido solforico diluito (5 %): il quale scopo meglio si raggiunge trasportando il precipitato in mortaio e triturandolo con l'acido solforico.

Il filtrato, colle acque di lavaggio, misura complessivamente 2600 cc.: il dosaggio di azoto, operato su 50 cc., dà in totale azoto = 0,087. Il quale azoto rappresenta la massima parte dell'azoto degli acidi monoamidici insieme all'azoto di qualche sostanza ancora ignota, non precipitabile dall'acido fosfowolframico.

Il precipitato di ac. fosfowolframico contenente la lisina è ora decomposto, nel modo già indicato, con barite. Si filtra e si lava con acqua bollente a più riprese il precipitato sul filtro: il filtrato, dopo eliminato l'eccesso di barite con una corrente di CO_2, si evapora a secco. Il residuo costituito da una specie di sciroppo colorato intensamente in giallo, si riprende con acqua, eliminando le ultime traccie di carbonato di bario, e si diluisce a mezzo litro.

Operando su 10 cc. la determinazione di azoto, si ha che l'azoto della lisina è complessivamente = 0,602.

Rigorosamente parlando però non si può calcolare direttamente l'azoto della lisina in questo modo: il precipitato determinato dall'acido fosfowolframico contiene sempre piccole quantità di acidi monoamidici e in alcuni casi anche altre sostanze basiche di scomposizione.

La lisina, secondo le indicazioni di Kossel, viene perciò precipitata come picrato $C_6H_{14}N_2O_2$, $C_6H_2(NO_2)_3OH$ e pesata come tale dopo ricristallizzazione dall'acqua. Ragioni di tempo mi hanno impedito nelle presenti ricerche di procedere a questa ulteriore purificazione della lisina e però le cifre che ad essa si riferiscono non possono essere considerate come assolute.

I risultati della analisi del muscolo di bue si possono riassumere nel modo seguente:

	Azoto in gr.		% dell'azoto totale	
Azoto totale	5.17		100	
A) Azoto basico, precipitabile dall'acido fosfowolframico .	2.03		39.24	
a) Azoto ammoniacale . .		0		0
b) „ della istidina . .		0.189		3.65
c) „ della arginina . .		0.500		9.67
d) „ della lisina . . .		0.602		11.64
B) Azoto non precipitabile dall'acido fosfowolframico .	3.14		60.73	

B. Analisi del muscolo di coniglio.

Il muscolo è preparato in questo caso dissanguando l'animale e facendo circolare per la vena giugulare una soluzione al 0,9-0,10 % di cloruro sodico a 35°-40°, con che si ottiene il tessuto affatto privo di sangue e perfettamente bianco.

Anche qui si impiegano gr. 150 di materiale che si fanno bollire per 14 ore con una miscela di gr. 120 di acido solforico concentrato e gr. 140 di acqua.

I particolari della analisi sono quelli già esposti. Una piccola variante è fatta a proposito della ricerca dell'ammoniaca. Il liquido proveniente dalla scomposizione del muscolo mediante la ebullizione con ac. solforico, prima di essere precipitato con ac. fosfowolframico, viene neutralizzato quasi esattamente con barite; si raccoglie e si lava con acqua bollente il solfato di bario riducendo il filtrato a volume fisso. Di questo filtrato 50 cc. sono distillati in corrente di vapor d'acqua in presenza di carbonato di bario: il distillato è raccolto in soluzione acida titolata allo scopo di poter calcolare l'ammoniaca. Anche qui la prova è negativa, così come era stata negativa col muscolo di bue.

Avvertiamo ancora che in questa, come nelle analisi successive, anche le cifre che si riferiscono alla arginina e alla

istidina sono state ottenute dosando direttamente l'azoto in quelle frazioni di liquidi dai quali le basi stesse avrebbero potuto essere ottenute e pesate allo stato di sale, rispettivamente di cloridrato o di nitrato.

I risultati dell'analisi del muscolo di coniglio concordano assai da vicino con quelli già esposti per il muscolo di bue e possono essere così riassunti:

	Azoto in gr.		% dell'azoto totale	
Azoto totale	4.57		100	
A) Azoto basico, del precip. acido fosfowolframico . .	2.08		45.70	
a) Azoto ammoniacale . .		0		0
b) „ della istidina . .		0.127		2.79
c) „ della arginina . .		0.478		10.45
d) „ della lisina . . .		0.512		11.19
B) Azoto non precipitabile dall'acido fosfowolframico .	2.49		54.51	

III.

Sostanze proteiche del muscolo.

Viene impiegato all'estrazione delle sostanze proteiche il muscolo di coniglio, perfettamente privo di sangue, ottenuto per dissanguamento dell'animale e contemporanea circolazione per la giugulare di soluzione fisiologica di cloruro sodico, così come è stato detto precedentemente.

Nella Memoria già citata di Kühne si trovano, per coloro ai quali possono interessare, i particolari della operazione.

Io colgo l'occasione per porgere al prof. O. Cohnheim vivi ringraziamenti per gli aiuti prestatimi in questa circostanza.

In una prima esperienza il muscolo, gr. 690, tritato con un comune tritacarne, viene in mortaio di porcellana accuratamente impastato con sabbia silicea di mare e agitato nel mortaio stesso con soluzione di cloruro sodico 0,9, 0,10 %.

Dopo un po' di tempo il liquido è decantato e passato per garza e il muscolo trattato con nuova soluzione salina; separata anche questa nuova soluzione, la massa viene sottoposta alla *Pressa idraulica*, riunendo il liquido che cola ai precedenti.

La massa è trattata una 3ª volta con cloruro di sodio, ma il liquido che così si ottiene non coagula più per l'azione del calore; appena appena esso accenna a farsi opalescente.

Il plasma salino risultante dall'insieme dei liquidi delle diverse fasi della estrazione è di color rossigno, opalescente, a reazione acida sensibile.

Si filtra e, data la natura del liquido, la filtrazione per carta si compie abbastanza sollecita.

Le varie operazioni per la preparazione del plasma che si inizia sul muscolo subito appena avvenuta la morte dell'animale durano non più di 4 ore.

Il plasma misura in totale cc. 3500.

Miosina. — Al plasma muscolare, preparato nel modo sopra indicato, si aggiunge ora una soluzione satura di solfato d'ammonio, così da avere per 2 volumi di plasma, volumi 1,5 di soluzione salina. Si forma tosto un precipitato voluminoso bianco che si separa parte in fondo, parte alla superficie del liquido, e costituito, secondo V. Fürth, da miosina (il paramiosinogene di Halliburton).

La miscela contiene all'incirca il 23 % di solfato d'ammonio e secondo le ricerche di V. Fürth il miogene (il miosinogene di Halliburton) non incomincia a precipitare se non quando la concentrazione del solfato d'ammonio arriva al 26-27 %.

Si lascia il tutto a sè per 20 ore: si raccoglie il precipitato su filtro e dal filtrato si precipita tosto il miogene nel modo che sarà indicato più innanzi.

La miosina raccolta sul filtro intanto viene lavata, dapprima triturandola in mortaio con soluzione di solfato d'ammonio preparata nelle proporzioni più sopra indicate (2 vol. acqua e 1,5 soluz. satura solfato ammonico) e poi con acqua bollente fino ad eliminazione di ogni traccia di solfato d'ammonio. A questo punto la sostanza viene compressa per bene fra carta bibula e poi triturata in mortaio con alcool assoluto e infine lavata con etere.

Si ottiene così la sostanza sotto forma di polvere finissima, bianca, che pesa, secca all'aria, gr. 14,4.

Miogene. — Il liquido dal quale venne separata la miosina per ulteriore saturazione con solfato d'ammonio, fornisce un nuovo abbondante precipitato, il miogene (miosinogene di Halliburton). Una prova fatta in piccolo dimostra che la precipitazione delle sostanze proteiche per saturazione con solfato d'ammonio è completa, poichè il liquido filtrato, anche se leggermente acidulato con acido acetico, si mantiene limpido per ebullizione. È perciò che invece di operare nella massa principale del liquido la precipitazione del miogene colla saturazione con solfato d'ammonio, detto liquido si addiziona di ac. acetico e lo si fa bollire per 5 minuti.

Si raccoglie sul filtro il coagulo, lo si lava con acqua bollente fino a eliminazione del solfato d'ammonio, poi con alcool ed etere nel modo già detto per la miosina. Triturando la sostanza si ottiene anche qui una polvere bianca fine che, secca all'aria, pesa gr. 16,24.

Dato lo scopo, già indicato, delle mie ricerche, ho creduto opportuno limitarmi alla separazione delle due sostanze proteiche tipiche del muscolo nel modo consigliato dagli autori, senza preoccuparmi di procedere ad una ulteriore purificazione, punto facile, data la natura delle sostanze, e di esito incerto. Piuttosto era desiderabile poter disporre di una quantità maggiore di materiale; ho provveduto quindi per una seconda preparazione, modificando alquanto i particolari del procedimento di estrazione, nella speranza di avere maggiore rendimento.

Come mezzo di estrazione, invece della soluzione fisiologica di cloruro sodico, si impiega qui il liquido di Ringer (1), il quale contiene per 1 litro di acqua distillata 0,1 gr. $NaHCO_3$, 0,1 gr. $CaCl_2$, 0,075 gr. KCl, 8 gr. NaCl. È necessario che i sali siano puri e che la soluzione sia fatta secondo l'ordine indicato, per evitare formazione di precipitato.

Questo è il liquido che si inietta pure invece della soluzione fisiologica di NaCl per la giugulare durante il dissanguamento dell'animale.

Ottenuto il muscolo affatto privo di sangue, bianchissimo, e triturato con un comune tritacarne, viene in apposita forma sottoposto a congelazione mediante l'acido carbonico liquido;

ridotto così a massa durissima, mediante il sussidio della macchina speciale ideata da Kossel (2), è finissimamente suddiviso, tanto da avere una pasta quasi impalpabile.

In queste condizioni la sostanza, gr. 612, è mescolata intimamente col liquido di Ringer, tre litri, previamente sfreddato verso 0° e il miscuglio è sottoposto a centrifugazione.

Dopo 10 minuti si separa il liquido limpido leggermente colorato in rossigno e sul materiale solido si ripete per altre due volte lo stesso trattamento: il liquido del trattamento ultimo dimostra l'esaurimento del tessuto muscolare essere completo. La massa solida è ancora spremuta con comune torchietto.

Il plasma salino così ottenuto che misura complessivamente cc. 5610, viene ora addizionato di una soluzione satura di solfato ammonico nelle proporzioni precedentemente indicate. Si forma tosto un precipitato apparentemente abbondante di miosina, che si raccoglie dopo 12 ore e si purifica nel modo già detto: dal filtrato si precipita per coagulazione il miogene. Si ottengono gr. 8,2 di miosina secca all'aria e gr. 29 di miogene.

Come si vede, mentre in questo caso è notevolmente superiore il rendimento in miogene, quasi del doppio, è invece inferiore il rendimento in miosina.

Nella prima esperienza la miosina ottenuta corrisponde al 0,08 e il Miogene al 2,35 % del muscolo fresco; nel secondo caso la miosina corrisponde a 1,33 e il miogene a 4,37 %.

Per l'analisi si riuniscono insieme rispettivamente i prodotti della prima e della seconda preparazione.

Prima di riferire i risultati dell'analisi della miosina e del miogene credo opportuno fare cenno ad un 3° prodotto estratto nella 2ª esperienza dal muscolo già esaurito col liquido di Ringer. Afferma v. Fürth (2) che la soluzione fisiologica di NaCl, quale mezzo solvente, è preferibile alle altre soluzioni saline concentrate, specialmente alla soluzione di NH_4Cl al 12-15 %, così come impiega Danilewsky, poichè la prima, ad una indifferenza fisiologica e chimica sulle sostanze proteiche stesse, unisce un maggior potere di estrazione. Secondo v. Fürth, un muscolo estratto 2 volte con soluzione di NaCl 0,6 % non cede più che traccie di sostanza proteica alla soluzione di NH_4Cl. Il che sarebbe in contraddizione con quanto ho potuto verificare in questa seconda esperienza, dove peraltro alla soluzione fisiologica di

NaCl era stato sostituito come mezzo solvente il liquido di Ringer.

Il materiale già esaurito con liquido di Ringer, come è detto più sopra, viene trattato dunque con soluzione di cloruro ammonico al 14 % e lasciato a sè per 24 ore; il trattamento è fatto necessariamente 24 ore dopo avvenuta la morte dell'animale.

Si filtra per carta, ottenendo un liquido opalescente, così come lo descrive Danilewski, che dimostra con piccoli saggi di coagulare fortemente per l'azione del calore e di precipitare pure abbondantemente per l'aggiunta di soluzione satura di $(NH_4)_2SO_4$: inoltre le ultime porzioni di liquido che filtrano mostrano la proprietà di rapprendersi spontaneamente.

Questo nuovo plasma salino è addizionato dunque di soluzione di solfato d'ammonio satura nelle proporzioni già indicate (2 vol. a 1,5 sol.). Si ottiene un precipitato abbondante bianchissimo a grossi fiocchi nastriformi. Si raccoglie, si lava prima con soluzione di solfato ammonico e poi, al modo solito, con acqua bollente, fino a eliminazione di tutto il solfato di ammonio, infine, con alcool ed etere. Si ottiene una polvere finissima, bianca, che, secca all'aria, pesa gr. 26,90, ciò che corrisponde al 4,39 % del muscolo fresco.

Si noti che il liquido da cui venne separato questo 3° prodotto per precipitazione con solfato ammonico, non contiene più traccia di sostanza proteica: fatto bollire, anche con aggiunta di qualche goccia di acido acetico, esso non mostra traccia di intorbidamento.

Nella speranza di poter ritornare su questo argomento, io mi limito ora a ricordare che i risultati della analisi di questo prodotto si accordano nelle cifre relative alla arginina, e soltanto in queste, colle cifre ottenute nell'analisi del miogene.

Analisi della Miosina.

Gr. 22,6 di sostanza secca all'aria si fanno bollire per 14 ore in pallone a refrigerante ascendente con gr. 67 di H_2SO_4 conc. e gr. 135 di acqua.

La sostanza si dimostra abbastanza resistente all'azione dell'acido, poichè dopo un'ora di ebullizione essa appare ancora poco alterata: la massa non schiumeggia e non dà effervescenza allo inizio della scomposizione. L'odore del liquido ha un qualche cosa di aromatico.

L'analisi del liquido di idrolisi dà:

	Azoto in gr.		% dell'azoto totale	
Azoto totale	1.666		100	
A) Azoto basico del precip. ac. fosfowolframico per diff.	0.462		35.81	
a) Azoto ammoniacale . .		0		0
b) „ della istidina . .		0.049		2.94
c) „ della arginina . .		0.0415		2.49
d) „ della lisina . . .		0.1755		10.75
B) Azoto non precipitabile dall'acido fosfowolframico.	1.204		64.19	

Analisi del Miogene.

Gr. 45,24 di sostanza si fanno bollire per 14 ore a refrigerante ascendente con gr. 135 di H_2SO_4 conc. e gr. 271 di acqua. La sostanza dimostra di essere più facilmente intaccabile della miosina con produzione di schiuma piuttosto abbondante allo inizio dell'operazione.

Nella decomposizione del precipitato dell'acido fosfowolframico con barite si nota sviluppo di ammoniaca, che per un lieve contrattempo non aveva potuto essere dosata ed eliminata precedentemente; contemporaneamente si sviluppa un odore che parrebbe di prodotti solforati e che ricorda il profumo di tartufi. Nulla di notevole nel corso della analisi, i cui risultati possono essere così riassunti:

	Azoto in gr.		% dell'azoto totale	
Azoto totale	4.90		100	
A) Azoto basico, precipitabile dall'acido fosfowolframico.	1.87		38.91	
a) Azoto ammoniacale . .	ammoniaca pres. ma non determin.			
b) „ della istidina . .		0.1645		3.35
c) „ della arginina . .		0.0315		0.64
d) „ della lisina . . .		0.761		15.51
B) Azoto non precipitabile dall'acido fosfowolframico .	3.03		61.09	

IV.

Riassunto e conclusioni.

I dati relativi all'azoto delle basi essoniche che si originano nella idrolisi del muscolo e delle sostanze proteiche del muscolo col mezzo dell'acido solforico possono essere così riassunti:

	Per cento dell'azoto totale		
	Istidina	Arginina	Lisina
Muscolo di bue	3.65	9.67	11.64
Muscolo di coniglio . .	2.79	10.45	11.19
Miosina	2.94	2.49	10.75
Miogene	3.35	0.64	15.51

Dalla quale tabella si deduce innanzi tutto che il muscolo di bue e quello di coniglio hanno pressochè la stessa composizione.

Le due sostanze proteiche principali del muscolo, la miosina e il miogene, secondo la terminologia di v. Fürth, sono da ritenersi sostanzialmente diverse.

Senza tener conto delle cifre che si riferiscono all'azoto della frazione lisina, alle quali, come già si disse, non si può attribuire un valore assoluto, acquista uno speciale significato la differenza sensibile nelle cifre dell'azoto della frazione arginina, il gruppo atomico più importante della molecola proteica. Si aggiunga che nell'un corpo, nel miogene, si è notata la presenza di azoto ammoniacale, che mancò affatto nella miosina.

Se poi si raffrontano i risultati avuti nella analisi delle sostanze proteiche, miosina e miogene, con quelli del muscolo, una differenza notevole si ha specialmente nelle cifre che si riferiscono all'arginina. Bisognerebbe ammettere che una parte delle basi essoniche, di arginina specialmente, si trovi nel muscolo allo stato libero o almeno sotto forma non legata alla molecola albuminoide.

Io ho trattato del muscolo di coniglio fresco, preparato nel modo già altrove descritto, con acqua distillata fredda: dopo alcune ore ho filtrato ripetendo il trattamento una seconda volta e una terza. Ho fatto bollire per parecchi minuti i liquidi riuniti, previa aggiunta di qualche goccia di acido acetico; il filtrato dal coagulo prodottosi ho concentrato a piccolo volume. Questo liquido non dà più la reazione del biureto o, per essere più esatti, dà tale reazione in modo appena sensibile. Si può dire eliminata quindi ogni traccia di albumina.

Gr. 100 di muscolo forniscono in questo modo un liquido nel quale si dosa azoto gr. 0,3304. L'analisi diretta di questo liquido, non sottoposto cioè all'azione idralizzante dell'acido solforico, conduce a risultati dai quali si calcola 7,62 % dell'azoto totale nella frazione istidina, 8,05 % nella frazione arginina, 26,27 % nella frazione lisina.

L'ipotesi che una parte delle basi essoniche possa esistere nel muscolo non legata alla molecola albuminoide, trova dunque appoggio anche in questi risultati, i quali io sono il primo a riconoscere che è necessario siano controllati operando con quantità maggiore di materiale.

Io sperò di ritornare sull'argomento che appare non privo di importanza anche per le questioni di indole fisiologica che vi si connettono.

Dall'Istituto fisiologico di Heidelberg e farmacologico di Torino.

BIBLIOGRAFIA

1. W. Kühne, " Arch. f. Anat. u. Physiologie „, 1859, p. 748. — " Lehrbuch d. physiol. Chem. „, 1868.
2. W. D. Halliburton, " Journ. of Physiology „, 8, 133 (1887). — " Lehrbuch der chem. Physiologie „, deutsch von Kaiser. Heidelberg, 1893.
3. A. Danilewsky, *Myosin, seine Darstellung...*, " Zeitschr. f. physiol. Chem. „, 5 (1881), 158 e 349; 7 (1882-1883), 124.
4. Otto v. Fürth, *Ueber die Eiweisskörper des Muskelplasmas*, " Arch. f. Exp. Path. u. Pharmakol. „, 36 (1895), p. 231.
5. O. Cohnheim, *Chemie der Eiweisskörper*. Braunschweig, 1904.
6. Emil Abderhalden, *Hydrolyse des Edestins*, " Zeitschrift f. physiolog. Chem. „, 37 (1903), 499.

— A. Kossel und D. Dakin, *Ueber die Arginase*, " Zeitschr. f. physiolog. Chem. „, 41 (1904), 321.

— E. Fischer, *Ueber die Ester der Aminosäuren*, " B. d. deutsch. chem. Ges. „, 34, I, 433 (1901). — *Ueber die Hydrolyse des Caseins durch Salzsäure*, " Zeitschr. f. physiolog. Chem. „, 33 (1901), 151 etc.

7. Per i lavori di Kossel e della sua scuola su questo argomento, si vegga la raccolta dello " Zeitschr. f. physiol. Chem. „ di questi ultimi anni.
8. A. Kossel u. F. Kutscher, *Beiträge zur Kenntniss der Eiweisskörper*, " Zeitsch. f. physiolog. Chem. „, 31 (1900-1901), 165.
9. A. Kossel u. K. D. Dakin, *Ueber die Arginase*, " Zeitschr. f. physiolog. Chem. „, 41, (1904), 321.
10. A. Kossel u. A. I. Patten, *Zur Analyse der Hexonbasen*, " Zeitschr. f. physiolog. Chem. „, 38 (1903), 39.
11. " Arch. f. d. Gesamm. Physiol. Pflüger „, 37 (1898), 544.
12. Otto v. Fürth, memoria citata, p. 234.
13. A. Kossel, *Apparat zur Zerkleinerung thierischer Organe*, " Zeitschr. f. physiol. Chem. „, 33 (1901), 5.

Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati.

Nota di CARLO SEVERINI.

Data l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

ove $f(x, y, y')$ rappresenta una funzione reale, ad un valore, delle variabili reali, x, y, y', finita ed assolutamente continua in un campo C, oltre al classico problema di Cauchy, che consiste nel trovare un integrale della (1), colla condizione che esso e la sua derivata assumano in un punto $x = x_0$ valori prestabiliti, si presenta l'altro di cercare un integrale, che in due punti distinti $x = a$, $x = b$, prenda valori assegnati A e B.

Il primo di tali problemi è stato oggetto di numerose ricerche, ed in questi ultimi tempi ampiamente discusso, tantochè l'esistenza del corrispondente integrale può ora asserirsi, senza bisogno di aggiungere nessun'altra ipotesi a quelle, che noi abbiamo sopra posto (*).

Ma altrettanto non si è fatto per il secondo. Di esso si è occupato Picard (**), nell'ipotesi che per ogni coppia di punti (x, y_1, y_1'), (x, y_2, y_2'), appartenenti al campo C e corrispondenti ad un medesimo valore di x, sia soddisfatta la condizione di Lipschitz:

$$|f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2')| \leqq \alpha |y_1 - y_2| + \beta |y_1' - y_2'|,$$

ove α e β indicano due costanti positive, finite.

(*) *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. II, Heft 2-3, S. 189.

(**) " Journal de Mathématiques ", 1890, 1893. *Traité d'Analyse*, T. III, pag. 94.

Nella presente Nota io faccio vedere che di questa condizione può anche qui farsi a meno, e, ponendo soltanto che la $f(x, y, y')$ sia finita ed assolutamente continua, dimostro che, se a, b, A, B soddisfano a certe condizioni (condizioni analoghe sono poste da Picard), esiste almeno un integrale dell'equazione data, che per $x = a$ ed $x = b$ assume rispettivamente i valori A e B.

Del metodo, che a tal'uopo sarà impiegato, mi giovo infine per accennare brevemente come, nel caso che esistano finite ed assolutamente continue le derivate parziali $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ e sotto le condizioni di Picard per a, b, A, B, si possa, estendendo alcune mie precedenti ricerche sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie (*), costruire una serie di polinomi razionali interi, che nell'intervallo $(a \ldots b)$ converge in egual grado, e rappresenta l'integrale ora detto (necessariamente unico); e quindi anche un polinomio razionale intero, che ivi ne differisce in valore assoluto per meno di una quantità positiva, prefissata piccola a piacere.

Il medesimo metodo serve allo studio di un'equazione di ordine qualunque n:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

per la quale c'è luogo a ricercare un integrale, che in m punti dati $x = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ m \leqq n)$ assuma, esso e le sue prime $\alpha_i - 1$ derivate $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n)$, valori assegnati (**); e

---

(*) " Rend. del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. „, Serie II, vol. XXXI (1898); Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1899.

(**) Ciò è stato fatto per altra via dal prof. Niccoletti, nel caso che la funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ delle variabili reali $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, oltre ad essere reale, ad un valore, finita ed assolutamente continua, soddisfi all'ipotesi di Lipschitz:

$$\left| f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}) \right| \leqq A \sum_0^{n-1}{}_k \left| y_1^{(k)} - y_2^{(k)} \right|,$$

ove A indica una costante positiva, finita. Cfr. la Nota: *Sulle condizioni iniziali che determinano gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie.* Questi Rendiconti, vol. XXXIII (1898).

per ultimo tutte queste ricerche sono estendibili ad un sistema di equazioni della forma:

$$\frac{d^{n_i} y_i}{dx^{n_i}} = f_i\left(x; y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_1^{n_1-1}}{dx_1^{n_1-1}}; y_2, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_2^{n_2-1}}{dx^{n_2-1}}; \ldots; y, \frac{dy_p}{dx}, \ldots, \frac{dy_p^{n_p-1}}{dx^{n_p-1}}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

§ 1.

1° Si consideri l'equazione (1) e, come sopra si è detto, sia $f(x, y, y')$ funzione reale, ad un valore, delle variabili reali x, y, y', finita ed assolutamente continua in un campo C, che supporremo definito dalle seguenti limitazioni:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$
$$-L \leqq y \leqq +L$$
$$-L' \leqq y' \leqq +L',$$

ove x_1 ed x_2 sono due quantità finite, qualunque, ed L, L' sono quantità finite, positive.

Porremo ancora, in questo primo §, che, per ogni coppia di punti (x, y_1, y_1'), (x, y_2, y_2'), appartenenti al campo C e corrispondenti ad un medesimo valore di x, si abbia:

$$(2) \qquad |f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2')| \leqq \alpha\,|y_1 - y_2| + \beta\,|y_1' - y_2')$$

α e β essendo due costanti positive, finite.

Sotto tali ipotesi vogliamo ricercare un integrale dell'equazione (1), che in due punti a e b dell'intervallo $(x_1 \ldots x_2)$ assume rispettivamente i valori A e B, compresi fra $-L$ e $+L$ (*).

Per semplicità di scrittura poniamo, ciò che non diminuisce la generalità delle nostre ricerche:

$$a = A = 0, \qquad b > 0.$$

(*) È questo, come abbiamo sopra accennato, il caso considerato da Picard. Noi qui ce ne occupiamo, seguendo una via diversa, allo scopo di trovare del problema una soluzione sotto condizioni per a, b, A, B, indipendenti dalle quantità α e β, cosa della quale avremo in seguito bisogno, quando, nel § 2, non ammetteremo più che la $f(x, y, y')$ soddisfi all'ipotesi di Lipschitz.

2° All'equazione (1) equivale il sistema:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' \\ \frac{dy'}{dx} &= f(x, y, y'). \end{aligned}$$

Consideriamo di questo gl'integrali che per $x = 0$ assumono i valori iniziali $y = 0$, $y' = y_0'$, essendo y_0' compreso fra $-L'$ e $+L'$. Siffatti integrali, come è ben noto, esistono certamente, se con G s'indica il massimo valore assoluto di y' e di $f(x, y, y')$ nel campo C, in tutto l'intervallo $(o \ldots k)$, ove k rappresenta la minore delle tre quantità:

$$(4)\qquad x_2, \quad \frac{L}{G}, \quad \frac{L' - |y_0'|}{G}.$$

Per ottenere questi integrali col *metodo delle approssimazioni successive* (*) si considera dapprima il sistema:

$$\frac{dY_1}{dx} = y_0'$$

$$\frac{dY_1'}{dx} = f(x, o, y_0'),$$

e da questo si deducono le funzioni Y_1, Y_1', aventi come valori iniziali, nel punto $x = 0$, rispettivamente i valori o ed y_0'; si forma poi il sistema:

$$\frac{dY_2}{dx} = Y_1'$$

$$\frac{dY_2'}{dx} = f(x, Y_1, Y_1'),$$

deducendone Y_2, Y_2' coi medesimi valori iniziali, e così di seguito.

(*) Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, T. II, III.

Si ha successivamente:

$$
(5)\quad \begin{cases}
Y_1 = y_0' x, & Y_1' = \int_0^x f(x, o, y_0')\,dx + y_0' \\
Y_2 = \int_0^x Y_1' dx, & Y_2' = \int_0^x f(x, Y_1, Y_1')\,dx + y_0' \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
Y_n = \int_0^x Y'_{n-1} dx, & Y_n' = \int_0^x f(x, Y_{n-1}, Y'_{n-1})\,dx + y_0' \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

e gl'integrali cercati del sistema (3) sono rispettivamente rappresentati, per tutti i punti dell'intervallo $(o \ldots k)$, dalle due serie:

$$(6)\quad Y_1 + (Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + \ldots + (Y_n - Y_{n-1}) + \ldots$$

$$(7)\quad y_0' + (Y_1' - y_0') + (Y_2' - Y_1') + \ldots + (Y_n' - Y'_{n-1}) + \ldots$$

I termini di queste due serie soddisfano, a causa della (2), alle disuguaglianze:

$$|Y_n - Y_{n-1}| \leqq G(\alpha + \beta)^{n-1} \frac{|x|^n}{n!}$$

$$|Y_n' - Y'_{n-1}| \leqq G(\alpha + \beta)^{n-1} \frac{|x|^n}{n!}.$$

Da tali disuguaglianze si deduce (*), che le serie (6) e (7) convergono in egual grado, anche quando, oltre alla x, si riguardino come variabili i valori iniziali nel punto $x = 0$, e però gli integrali del sistema (3) sono funzioni finite ed assolutamente continue di x e di tali valori iniziali.

Nella somma della (6) abbiamo dunque un integrale dell'equazione (1), funzione continua di x e di y_0', se, come occorre nel caso nostro, teniamo fisso il valore o nel punto $x = 0$.

(*) Cfr. Niccoletti, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*; " Rendic. della R. Accad. dei Lincei ", 1895.

3° Ciò posto, proponiamoci di vedere se il precedente integrale, rappresentato dalla (6), assume, per un qualche valore di y_0', il valore B nel punto $x = b$ $(b \leqq x_2)$.

Occorre anzitutto che si abbia:

$$b \leqq \frac{L}{G}, \qquad b < \frac{L'}{G}. \tag{8}$$

Deve poi essere a causa delle (4):

$$b \leqq \frac{L' - |y_0'|}{G}.$$

Se ne deduce che, per ogni b soddisfacente alle (8), il valore del suddetto integrale nel punto $x = b$ è una funzione continua di y_0' in tutto l'intervallo $(bG - L' \ldots L' - bG)$, e però esso risulta, in qualche punto di tale intervallo uguale a B, se ivi ammette un massimo ed un minimo, che comprendono B.

Ma, indicando con M il massimo, con m il minimo della funzione $f(x, y, y')$ nel campo C, ogni Y_n $(n = 2, 3, \ldots, \infty)$ ha in b un valore, che è compreso fra $\frac{mb^2}{2} + y_0'b$ ed $\frac{Mb^2}{2} + y_0'b$. Siamo dunque condotti a porre:

$$\frac{mb^2}{2} + (L' - bG)b \geqq B, \qquad \frac{Mb^2}{2} + (bG - L')b \leqq B$$

ossia:

$$Gb - \frac{B}{b} - \frac{mb}{2} \leqq L', \qquad Gb - \frac{B}{b} + \frac{Mb}{2} \leqq L'.$$

Concludiamo che esiste un integrale dell'equazione data (1), *il quale nel punto* $x = 0$ *assume il valore* o *e nel punto* $x = b$ *il valore* B $(o < b \leqq x_2,\ |B| \leqq L)$, *tutte le volte che si ha:*

$$\left\{\begin{array}{l} b \leqq \frac{L}{G}, \quad b < \frac{L'}{G} \\ Gb + \frac{B}{b} - \frac{mb}{2} \leqq L' \\ Gb - \frac{B}{b} - \frac{Mb}{2} \leqq L' \end{array}\right. \tag{9}$$

In particolare basterà che si abbia:

$$(10) \qquad b \leqq \frac{L}{G}, \quad b < \frac{L'}{G}, \quad \frac{(2G+G')b}{2} + \left|\frac{B}{b}\right| \leqq L',$$

ove G' rappresenta il massimo valore assoluto di $f(x, y, y')$ nel campo C.

A queste condizioni, come alle (9), si può sempre soddisfare, prendendo b e $\left|\frac{B}{b}\right|$ abbastanza piccoli.

Nel caso speciale di $B = 0$ le (9) diventano:

$$(9') \qquad \begin{cases} b \leqq \frac{L}{G}, \quad b < \frac{L'}{G} \\ Gb - \frac{mb}{2} \leqq L' \\ Gb + \frac{Mb}{2} \leqq L' \end{cases}$$

e le (10) si riducono alle altre:

$$(10') \qquad b \leqq \frac{L}{G}, \quad b \leqq \frac{2L'}{2G+G'}.$$

Un integrale, che si annulli negli estremi dell'intervallo $(0...b)$, può essere ivi identicamente nullo, se, per $y = y' = 0$ e per ogni x di tale intervallo, si ha:

$$f(x, y, y') = 0.$$

Nel caso contrario si può invece asserire l'esistenza di un integrale della (1), non identicamente nullo, che assume per $x = 0$ e per $x = b$ il valore 0.

A quest'ultima classe di equazioni appartiene l'equazione differenziale, lineare, non omogenea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By + C = 0,$$

ove A, B, C indicano funzioni finite e continue di x.

4° L'integrale, di cui sopra è stabilita l'esistenza, che assume nei punti $x = 0$, $x = b$ i valori 0 e B, non può dirsi unico.

Segnaliamo un caso, in cui è necessariamente unico, che si ha quando la funzione $f(x, y, y')$ non decresce al crescere di y e di y' nel campo dato C.

Sotto tali ipotesi infatti, riprendendo le formole (5), vediamo che, per un x fisso, l'integrale della (1), rappresentato dalla (6), è una funzione non decrescente di y_0' nell'intervallo $(bG-L' \ldots$ $\ldots L'-bG)$; e ciò basta al nostro scopo.

§ 2.

1° Noi siamo ora in grado di trattare il caso generale, in cui per la $f(x, y, y')$ si fa soltanto l'ipotesi che sia reale, ad un valore, finita ed assolutamente continua nel campo C.

Continueremo ad indicare con M ed m il massimo ed il minimo di $f(x, y, y')$ in C, e con G la maggiore delle tre quantità:

$$M, \ |m|, \ L'.$$

2° Ciò posto consideriamo le equazioni:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_\nu\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{11}$$

essendo le funzioni:

$$P_\nu(x, y, y') \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

reali, ad un valore, finite ed assolutamente continue nel campo C, soggette alle condizioni:

$$|f(x, y, y') - P_\nu(x, y, y')| \leqq g_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

nelle quali g_ν indica il termine generale di una successione di numeri positivi, decrescenti e tendenti allo zero; e finalmente tali da avere, per ogni coppia di punti (x, y_1, y_1'), (x, y_2, y_2'), appartenenti a C e corrispondenti ad un medesimo valore di x:

$$|P_\nu(x, y_1, y_1') - P_\nu(x, y_2, y_2')| \leqq \alpha_\nu |y_1 - y_2| + \beta_\nu |y_1' - y_2'| \tag{12}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

ove α_ν e β_ν sono quantità positive, finite, per ogni valore assegnato di ν, che possono però variare al variare di ν, e magari crescere oltre ogni limite.

Alle condizioni qui poste per le $P_\nu(x, y, y')$ è sempre possibile soddisfare, sapendosi costruire un polinomio razionale intero di x, y, y', che in tutti i punti di C differisca da $f(x, y, y')$, in valore assoluto, per meno di un numero positivo, prefissato piccolo a piacere (*).

Per ogni ν fisso, sono allora applicabili alle equazioni (11) le considerazioni del § precedente; e tutte le volte che b e B $(0 < b < x_2, |B| \leqq L)$ soddisfano alle condizioni (cfr. § 1, 3°, (9)):

$$(13) \qquad \begin{cases} b \leqq \dfrac{L}{G_\nu}, \quad b < \dfrac{L'}{G_\nu} \\[2ex] G_\nu b + \dfrac{B}{b} - \dfrac{m_\nu b}{2} \leqq L' \\[2ex] G_\nu b - \dfrac{B}{b} + \dfrac{M_\nu b}{2} \leqq L', \end{cases}$$

nelle quali M_ν, m_ν rappresentano rispettivamente il massimo ed il minimo di $P_\nu(x, y, y')$ nel campo C, e G_ν la maggiore delle tre quantità:

$$|M_\nu|, \ |m_\nu|, \ L',$$

esiste un integrale dell'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_\nu\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

che per $x = 0$ assume il valore 0 e per $x = b$ il valore B.

D'altra parte M_ν, m_ν, G_ν differiscono rispettivamente da M,

(*) Nelle Memorie: *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlichen Functionen einer reellen Veränderlichen*; " Sitzungsberichte der Königlich ", ecc., 1885, Weierstrass stabilisce il teorema in discorso per funzioni reali, ad un valore, finite e continue di una variabile reale, soggiungendo ad un certo punto (zweite Mittheilung), che il metodo è subito estendibile alle funzioni reali, ad un valore, finite ed assolutamente continue di più variabili reali. Tale estensione trovasi nel suo corso tenuto a Berlino l'anno 1884. Cfr. anche Ingrami, *Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali*, Bologna, Tipografia Gamberini e Parmeggiani, 1889. — Picard, *Traité d'Analyse*, Tome I. — Volterra, *Sul principio di Dirichlet*, " Rendic. del Circolo matem. di Palermo ", 1897. — Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*, " Bulletin des Sciences mathématiques ", 1898. — Mittag-Leffler, *Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle*, " Rendic. del Circolo mat. di Palermo ", 1900.

m, G, in valore assoluto, per meno di g_ν. È quindi chiaro che se b e B vengono scelti in base alle seguenti condizioni:

$$(14)\qquad \begin{cases} b < \frac{L}{G}, \quad b < \frac{L'}{G} \\ Gb + \frac{B}{b} - \frac{mb}{2} < L' \\ Gb - \frac{B}{b} + \frac{Mb}{2} < L', \end{cases}$$

quando ν è abbastanza grande, i medesimi valori di b e B soddisfano anche alle (13).

Noi intenderemo, in tutto il seguito di questo §, che b e B siano fissati in modo da soddisfare alle precedenti disuguaglianze; di più che g_1 sia già abbastanza piccolo, perchè, qualunque sia ν, anche le (13) risultino verificate, nel qual caso ognuna delle equazioni (11) ammette un integrale, che nel punto $x=0$ assume il valore 0 e nel punto $x=b$ il valore B.

3° Non possiamo asserire, come abbiamo sopra detto, che questo integrale sia unico. Osserviamo però che, se non è tale, le derivate di due differenti integrali hanno, a causa delle (12), valori diversi nel punto $x=0$, e quindi possiamo in ogni caso fissarne senza ambiguità uno, convenendo di riferirci sempre a quello, la cui derivata ha in tal punto il più piccolo valore; in modo da far corrispondere alla successione delle equazioni (11) una successione ben determinata d'integrali:

$$(15)\qquad y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_\nu(x),\ \ldots$$

che nei punti $x=0$, $x=b$ assumono tutti rispettivamente i valori 0 e B.

Questi integrali sono funzioni egualmente continue nell'intervallo $(0 \ldots b)$, perchè le loro derivate si mantengono sempre minori, in valore assoluto, di L'; e sono egualmente continue anche queste derivate, perchè le derivate seconde delle (15) non possono mai oltrepassare, in valore assoluto, la maggiore delle due quantità:

$$|M+g_1|, \quad |m-g_1| \ (*).$$

(*) Cfr. Arzelà, *Sulle funzioni di linee*, " Mem. della R. Acc. delle Sc. di Bologna ", 16 dicembre 1894.

Se ne deduce che la successione:

$$(16)\quad P_1(x, y_1(x), y_1'(x)),\ P_2(x, y_2(x), y_2'(x)),\ \ldots,\ P_\nu(x, y_\nu(x), y_\nu'(x)),\ \ldots$$

è pure composta di funzioni egualmente continue. Per essere infatti la $f(x, y, y')$ assolutamente continua, si possono determinare tre quantità finite, maggiori di zero, a_1, a_2, a_2', tali che, essendo (x_1, y_1, y_1'), (x_2, y_2, y_2') due punti di C, tutte le volte che si ha:

$$(17)\qquad |x_1 - x_2| \leqq a_1,\ \ |y_1 - y_2| \leqq a_2,\ \ |y_1' - y_2'| \leqq a_2',$$

ne discenda:

$$|f(x_1, y_1, y_1') - f(x_2, y_2, y_2')| \leqq \sigma$$

σ essendo un numero positivo, prefissato piccolo a piacere.

Corrispondentemente sarà:

$$|P_\nu(x_1, y_1, y_1') - P_\nu(x_2, y_2, y_2')| \leqq \sigma + 2g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty);$$

e, poichè g_ν tende a zero al crescere di ν, si vede facilmente, che è possibile determinare a_1, a_2, a_2' in modo, che dalle (17) seguano ancora le disuguaglianze:

$$(18)\qquad |P_\nu(x_1, y_1, y_1') - P_\nu(x_2, y_2, y_2')| \leqq 2\sigma \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Inoltre per la eguale continuità delle funzioni:

$$y_\nu(x),\ \ y'_\nu(x) \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

rimanendo sempre a_1, a_2, a_2' soggetti alla condizione ora detta. si può scegliere a_1 abbastanza piccolo, perchè risulti:

$$|y_\nu(x') - y_\nu(x'')| \leqq a_2,\ \ |y'_\nu(x') - y'_\nu(x'')| \leqq a_2',$$

ove x' ed x'' rappresentano due punti dell'intervallo $(0 \ldots b)$, che fra loro distano per meno di a_1. Risulta allora, a causa delle (18):

$$|P_\nu(x', y_\nu(x'), y'_\nu(x')) - P_\nu(x'', y_\nu(x''), y'_\nu(x''))| \leqq 2\sigma \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

e però, in ogni tratto di quell'intervallo, di ampiezza minore di a_1, tutte le funzioni (16) oscillano per meno di 2σ.

Potendosi scegliere σ piccolo a piacere, rimane così stabilito quanto abbiamo sopra asserito.

Colle funzioni (16) coincidono rispettivamente le altre:

$$\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^2y_2(x)}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2y_\nu(x)}{dx^2}, \quad \ldots, \tag{19}$$

che sono pertanto anch'esse egualmente continue nell'intervallo $(0 \ldots b)$.

4° Sia ora $v(x)$ una funzione limite continua della successione (15).

Si estragga da questa un'altra successione:

$$y_{t_1}(x), \; y_{t_2}(x), \; \ldots, \; y_{t_\nu}(x), \; \ldots. \tag{20}$$

convergente in egual grado a $v(x)$ in tutti i punti di $(0 \ldots b)$, e tale che si abbia:

$$t_{\nu+1} > t_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

È facile vedere come si possa ciò ottenere. Data ad esempio la solita successione:

$$g_1, \; g_2, \; \ldots, \; g_\nu, \; \ldots \tag{21}$$

di numeri positivi, decrescenti e tendenti allo zero, basterà prendere come funzione $y_{t_1}(x)$ quella, che ha il minimo indice, fra le infinite funzioni $y_\nu(x)$, che, in ogni punto dell'intervallo $(0 \ldots b)$, differiscono da $v(x)$, in valore assoluto, per meno di g_1; determinare poi la prima delle quantità (21), che è minore od uguale, in qualche punto di $(0 \ldots b)$, al valore assoluto della differenza $v(x) - y_{t_1}(x)$, e chiamare $y_{t_2}(x)$ quella, che ha il minimo indice, fra le infinite funzioni $y_\nu(x)$, che in tutti i punti di $(0 \ldots b)$ differiscono, in valore assoluto, da $v(x)$ per meno di detta quantità, e così di seguito.

Prendendo delle (20) le derivate prime e seconde, si hanno le altre successioni:

$$\frac{dy_{t_1}(x)}{dx}, \quad \frac{dy_{t_2}(x)}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{dy_{t_\nu}(x)}{dx}, \quad \ldots \tag{22}$$

$$\frac{d^2y_{t_1}(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^2y_{t_2}(x)}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2y_{t_\nu}(x)}{dx^2}, \quad \ldots \tag{23}$$

composte, per quanto è stato sopra detto, di funzioni egualmente continue, e che però ammettono ciascuna una funzione limite continua: tale funzione limite è di più unica perchè unica è la funzione limite continua $v(x)$, ammessa dalla (20). Le medesime successioni tendono dunque in egual grado nell'intervallo $(0 \ldots b)$ a queste loro funzioni limiti, le quali rappresentano quindi rispettivamente la derivata prima e la derivata seconda di $v(x)$.

Colla successione (23) coincide termine a termine l'altra:

$$P_{t_1}(x, y_{t_1}(x), y_{t_1}'(x)),\ P_t(x, y_{t_2}(x), y_{t_2}'(x)),\ \ldots.\ P_{t_\nu}(x, y_{t_\nu}(x), y'_{t_\nu}(x)),\ \ldots$$

tendente dunque anch'essa in egual grado a $\frac{d^2v(x)}{dx^2}$.

Proponiamoci ora di far vedere, che quest'ultima successione converge pure in egual grado ad $f(x, v(x), v'(x))$, con che risulterà:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = f\left(x,\ v(x),\ \frac{dv(x)}{dx}\right).$$

A tal'uopo indichiamo con c e c' due quantità finite, maggiori di zero, soggette alla condizione che, se per due punti (x, y_1, y_1') (x, y_2, y_2') di C, corrispondenti ad un medesimo valore di x, si ha:

$$(24) \qquad |y_1 - y_2| \leqq c, \qquad |y_1' - y_2'| \leqq c',$$

risulti:

$$(25) \qquad |f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2')| \leqq \sigma,$$

essendo σ il solito numero positivo, prefissato piccolo a piacere.

Potremo determinare un valore $t_{\nu'}$, dell'indice t_ν, tale che, per ogni $t_\nu > t_{\nu'}$, si abbia:

$$(26) \qquad |v(x) - y_{t_\nu}(x)| \leqq c, \quad |v'(x) - y'_{t_\nu}(x)| < c' \qquad (0 \leqq x \leqq b),$$

ed inoltre, qualunque sia il punto (x, y, y'), appartenente al campo C:

$$(27) \qquad |f(x, y, y') - P_{t_\nu}(x, y, y')| < \sigma.$$

Dalle (24), (25), (26) si ricava allora, per ogni $t_\nu > t_{\nu'}$:

$$|f(x, v(x), v'(x)) - f(x, y_{t_\nu}(x), y'_{t_\nu}(x))| < \sigma,$$

e da questa e dalla (27):

$$| f(x, v(x), v'(x)) - P_{t_\nu}(x, y_{t_\nu}(x), y'_{t_\nu}(x)) | \leqq 2\sigma,$$

che è quanto occorre al nostro scopo.

5° Abbiamo con ciò che precede stabilito, che $v(x)$ soddisfa all'equazione data (1):

Si ha anche:

$$v(0) = 0, \qquad v(b) = B.$$

Se infatti potesse $v(x)$ assumere, ad esempio nel punto $x=0$, un valore A diverso da zero, si potrebbe determinare una quantità positiva h, tale che la $v(x)$ e tutte le funzioni della successione (15) oscillassero, nell'intervallo $(o \ldots h)$, per meno di $\frac{|A|}{4}$, in modo che, per ogni x di quell'intervallo, risulterebbe:

$$| v(x) - y_\nu(x)) | \geqq \frac{|A|}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

Ciò contraddice all'ipotesi che sia $v(x)$ per tutto l'intervallo $(0 \ldots b)$ una funzione limite continua di quella successione.

Noi abbiamo dunque, colla sola condizione che f(x, y, y') *sia, nel campo* C, *reale, ad un valore, finita ed assolutamente continua, stabilito l'esistenza di un integrale dell'equazione:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

che nei punti x = 0, x = b *assume i valori* 0 *e* B.

S'intende che si suppongono verificate le condizioni (14), dalle quali, come nel § 1, si deducono le altre:

$$b < \frac{L}{G}, \quad b < \frac{L'}{G}, \quad \frac{(2G+G')b}{2} + \left|\frac{B}{b}\right| < L'.$$

§ 3.

1° Passiamo ora ad occuparci dell'ultima questione, a cui abbiamo in principio accennato, supponendo, come è stato detto, che esistano, finite ed assolutamente continue nel campo C, le derivate parziali $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$.

In tal caso si può in infiniti modi costruire un polinomio razionale intero di x, y, y', tale che esso e le sue derivate parziali rispetto ad y e ad y' rappresentino con una medesima approssimazione, fissata ad arbitrio, la $f(x, y, y')$, la $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ e la $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$ (*).

Potremo pertanto supporre d'ora innanzi che le funzioni:

$$P_\nu(x, y, y') \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

siano polinomi razionali interi di x, y, y', soddisfacenti nel campo C alle condizioni:

$$\left.\begin{aligned} &|f(x, y, y') - P_\nu(x, y, y')| \leqq g_\nu \\ &\left|\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{\partial P_\nu(x, y, y')}{\partial y}\right| \leqq g_\nu \\ &\left|\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} - \frac{\partial P_\nu(x, y, y')}{\partial y'}\right| \leqq g_\nu \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

2° Ciò posto si fissino b e B in modo che si abbia:

$$\frac{G'b^2}{2} + |B| < L$$

$$G'b + \left|\frac{B}{b}\right| < L'$$

$$\frac{\alpha b^2}{2} + \beta b < 1$$

ove α, β rappresentano i massimi valori assoluti rispettivamente di $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$; e si supponga il primo termine della successione (21) abbastanza piccolo, perchè, indicando con G'_ν

(*) Cfr. la mia Nota: *Sulle equazioni differenziali ordinarie, contenenti un parametro arbitrario,* " Rendic. del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. „, serie II, vol. XXXIII (1900).

il massimo valore assoluto di $P_\nu(x, y, y')$, con α_ν e β_ν quelli di $\frac{\partial P_\nu(x, y, y')}{\partial y}$ e di $\frac{\partial P_\nu(x, y, y')}{\partial y'}$, risulti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{G_\nu b^2}{2} + B < L \\ &G'_\nu b + \left|\frac{B}{b}\right| < L' \\ &\frac{\alpha_\nu b^2}{2} + \beta_\nu b < 1 \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

Allora ognuna delle equazioni (11) ammette nell'intervallo $(0 \ldots b)$ un unico integrale:

$$\bar{y}_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{28}$$

che assume il valore 0 per $x = 0$ ed il valore B per $x = b$ (*), e l'integrale $\bar{y}(x)$ dell'equazione data (1), relativo ai medesimi valori iniziale e finale, è dato (§ 2) dalla serie convergente in egual grado:

$$\bar{y}_1(x) + (\bar{y}_2(x) - \bar{y}_1(x)) + \ldots + (\bar{y}_\nu(x) - \bar{y}_{\nu-1}(x)) + \ldots$$

3° Applichiamo ora, partendo dalla funzione $\frac{Bx}{b}$, il *metodo delle approssimazioni successive* alle equazioni (11) (*).

Gl'integrali (28) risultano espressi per mezzo delle serie:

$$\bar{y}_\nu(x) = \bar{Y}_{1,\nu}(x) + (\bar{Y}_{2,\nu}(x) - \bar{Y}_{1,\nu}(x)) + \ldots + (\bar{Y}_{n,\nu}(x) - \bar{Y}_{n-1,\nu}(x)) + \ldots,$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{29}$$

ove le:

$$\bar{Y}_{1,\nu}(x), \ \bar{Y}_{2,\nu}(x), \ \ldots, \ \bar{Y}_{n,\nu}(x), \ \ldots \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

(*) Cfr. Picard, l. c.

s'intendono determinate mediante le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d^2\overline{Y}_{1,\nu}(x)}{dx^2} = P_\nu\left(x, \dfrac{Bx}{b}, \dfrac{B}{b}\right) \\[2ex]
\dfrac{d^2 Y_{2,\nu}(x)}{dx^2} = P_\nu\left(x, \overline{Y}_{1,\nu}(x), \dfrac{d\overline{Y}_{1,\nu}(x)}{dx}\right) \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\dfrac{d^2\overline{Y}_{n,\nu}(x)}{dx^2} = P_\nu\left(x, \overline{Y}_{n-1,\nu}(x), \dfrac{d\overline{Y}_{n-1,\nu}(x)}{dx}\right)
\end{array}\right\} \quad (\nu=1, 2, \ldots, \infty)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che successivamente s'integrano colle condizioni:

$$\overline{Y}_{n,\nu}(0) = 0, \quad \overline{Y}_{n,\nu}(b) = B \qquad (n,\nu=1, 2, \ldots, \infty),$$

per modo che si ha:

$$\overline{Y}_{n,\nu}(x) = \int_0^x P_\nu\left(z, \overline{Y}_{n-1,\nu}(z), \frac{d\overline{Y}_{n-1,\nu}(z)}{dz}\right)(x-z)dz + \frac{Bx}{b} -$$

$$- \frac{x}{b}\int_x^b P_\nu\left(x, \overline{Y}_{n-1,\nu}(z), \frac{d\overline{Y}_{n-1,\nu}(z)}{dz}\right)(b-z)dz \qquad (\nu=1, 2, \ldots, \infty).$$

Le $\overline{Y}_{n,\nu}(x)$ sono dunque polinomii razionali interi di x, e per la convergenza uniforme delle serie (29), indicando con n_ν un numero intero, positivo, dipendente da ν, opportunamente scelto, si può ottenere:

$$|\bar{y}_\nu(x) - \overline{Y}_{n_\nu,\nu}(x)| \leqq g_\nu \qquad \begin{pmatrix}\nu=1, 2, \ldots, \infty \\ 0 \leqq x \leqq b\end{pmatrix}.$$

Ne risulta:

$$\bar{y}(x) = \overline{Y}_{n_1,1}(x) + (\overline{Y}_{n_2,2}(x) - \overline{Y}_{n_1,1}(x)) + \ldots + (\overline{Y}_{n_\nu,\nu}(x) - \overline{Y}_{n_{\nu-1},\nu-1}(x)) + \ldots$$

e, se ν è abbastanza grande:

$$|\bar{y}(x) - \overline{Y}_{n_\nu,\nu}(x)| \leqq \sigma,$$

σ essendo la solita quantità positiva, prefissata piccola a piacere.

La questione posta in principio è così completamente risolta.

Torino, 20 aprile 1905.

Sul berillo di Vall'Antoliva e di Cosasca.

Nota del Dr. GABRIELE LINCIO.

(Con una Tavola).

Trovandomi, or sono due anni, a Craveggia in Val Vigezzo, mi recai a visitare la vicina località del piano dei Lavonchi, dove nel 1882 venne scoperta una varietà di berillo. Per giungere sul posto si segue per poco più di mezz'ora la strada mulattiera dell'alpe Marco costeggiando la riva destra del torrente Vasca. Là si rinviene il berillo, con tormalina nera, con spessartino e talora anche con columbite, incluso in massi di pegmatite isolati ai quali non di rado si mostra aderente del gneiss. Là si raccolsero inoltre due minerali, che vennero tenuti per eschinite e samarschite e che in causa della loro scarsezza non poterono venir definitivamente determinati (1).

Per maggiori dettagli in proposito rinvio il lettore alle pubblicazioni di G. Spezia, G. Strüver, A. Piccini ed A. Cossa (2). Qui vorrei invece parlare un po' più specialmente delle condizioni geologiche per poter stabilire poi un confronto con quelle riscontrate nelle due nuove località — Vall'Antoliva e Cosasca — delle quali tratterò in seguito.

In Craveggia adunque presso il piano dei Lavonchi, come potei raccogliere abbondante materiale di berillo, così mi convinsi, al pari degli autori precedenti, che sulla riva destra del torrente

(1) Una bella collezione dei minerali di Craveggia e di Val Vigezzo in generale, venne ordinata da G. B. Dell'Angelo, efficacemente coadiuvato dall'intelligente raccoglitore di minerali Pietro Zani. La collezione venne donata dal Dell'Angelo al Museo Galletti di Domodossola.

(2) G. Spezia, *Sul berillo di Craveggia*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, 1882. — G. Strüver, *Sulla columbite di Craveggia*, " Rendic. Acc. Lincei „, Roma, 1884. — A. Piccini, *Su d'un minerale che accompagna la columbite di Craveggia*, " Rendic. Acc. Lincei „, Roma, 1886. — A. Cossa, *Sulla composizione della colombite di Craveggia*, " Rendic. Accad. Lincei „, Roma, 1887. — G. Strüver, *Contribuzioni alla mineralogia della Valle Vigezzo*, " Rendic. Acc. Lincei „, Roma, 1889.

Vasca non si trovava in posto il giacimento della pegmatite berillifera. Cito quanto il Cossa scrive (l. c.) su quest'ultimo argomento in principio della sua nota: " Negli ultimi giorni della mia dimora in Val Vigezzo poi due giovani miei nipoti, che mi hanno sempre validamente aiutato nelle mie ricerche, ad un'ora circa dalla vetta del monte Zicchero che ergesi oltre la riva sinistra del torrente Vasca al di là del passo detto le bocchette di S. Antonio, trovarono una pegmatite formata da quarzo cinereo, grossi cristalli di tormalina nera e di feldspato simili a quelli che caratterizzano la pegmatite di Craveggia. Ora non è improbabile che continuando le ricerche in quella località si trovino insieme ai minerali ora menzionati anche il berillo e la colombite ". Però pur essendo quanto sopra riferito d'un certo interesse, si tratta qui solo d'una pegmatite trovata, senz'alcuna osservazione sul modo di giacimento, in una località già molto distante dal piano dei Lavonchi. Per questi motivi io pensai allora in Craveggia di estendere le mie ricerche sulla parte sinistra del torrente Vasca. Non essendovi dirimpetto al piano dei Lavonchi traccia di pegmatite, continuai sulla via dell'Alpe Marco fino al primo ponte, risalii per breve tratto il torrente sulla riva sinistra e da quella parte presi a percorrere la china del monte. Appunto sopra la località denominata Fracchia tra massi detritici rinvenni della pegmatite analoga a quella del piano dei Lavonchi e, cercando più in alto, potei scoprire la roccia in posto intersecata da filoni di pegmatite. La roccia che incassa questi filoni di pegmatite è pure un gneiss. I filoni di pegmatite lo traversano in direzioni diverse: in uno spaccato naturale potei vedere che essi si intersecano anche reciprocamente a mo' di grata. In altro spaccato pressochè verticale si scorgeva il gneiss incassante un grosso filone di pegmatite, il quale presentava al suo tetto una lente d'una roccia, riconoscibile a vista per un'amfibolite.

Mentre io m'occupava di tali ricerche in Craveggia, venni a sapere da Pietro Zani come egli avesse trovato dei cristalli di berillo anche in una località di Vall'Antoliva (1), e là li avesse

(1) Vall'Antoliva (anche Valtoliva) presso l'Alpe Campra, territorio di Druogno, a piè del Pizzo Marcio. Ci si va da Casa di Turbino (Ca d' Turbin), luogo che si trova a circa mezza strada da Domodossola a Santa Maria Maggiore (Val Vigezzo).

estratti dalla roccia in posto. Io mi feci condurre sul luogo, dove potei ben tosto costatare le stesse condizioni geologiche che sopra la Fracchia. Trovai dei massi detritici di pegmatite berillifera, poi vidi incassati nel gneiss alcuni filoni irregolari di pegmatite che si presentavano in parte denudati dall'erosione e non mostravano di contener berillo, ed infine su d'una rupe formata a gradinata e che viene solcata nel mezzo dal ruscello Antoliva osservai varii filoni e vene della stessa pegmatite qui ricca di berillo.

Anche in una pietraia presso Cosasca (1) mi venne dato di rinvenire il berillo. Qui i filoni di pegmatite sono spesso esili e si riducono a vene, ma tanto la roccia incassante che la pegmatite si presentano nella tipica forma delle due località succitate. Alcuni massi fessi lungo una vena di pegmatite mostrarono di contenere dei be' cristalli di berillo. Mentre nelle località di Craveggia e di Vall'Antoliva il gneiss incassante presenta spesso irregolarità e disturbi nella sua stratificazione, a Cosasca, come anche presso il ponte della Mizzoccola nelle vicine pietraie del comune di Trontano, si ha un bell'esempio di stratificazione disposta verticalmente. Dalla più grande di quest'ultime pietraie, che è anche la più bella dell'Ossola, vengono isolate delle immense e pianissime tavole di gneiss, le quali vengono poi tagliate a dimensioni maneggiabili. La fotografia inserta nella tavola valga a dar un'idea della località.

Nei tre giacimenti qui descritti i filoni della pegmatite berillifera sono adunque egualmente incassati in gneiss. Sarebbe ora cosa molto interessante il poter determinare le relazioni tra tali filoni e la roccia incassante, ma per questo occorrono estese e dettagliate osservazioni locali, ciò che per la regione di cui si tratta diverrebbe per sè l'oggetto d'uno studio geologico abbastanza complesso (2).

---

(1) La località si trova sulla riva sinistra del fiume Toce. Da Domodossola passando sul ponte in ferro della Mizzoccola vi si giunge in una mezz'ora.

(2) Avevo già steso questa mia nota, quando venni a sapere che l'ing. A. Stella del R. Ufficio Geologico, stava eseguendo il rilevamento geologico d'una parte della regione che ci interessa. Egli anzi nella sua comunicazione alla Società Geologica Italiana *Sulla Geologia della regione osso-*

Quando G. Spezia (l. c.) presso Craveggia sopra il piano del Lavonchio tra i varii massi detritici ne trovò uno costituito in parte da pegmatite berillifera e nel restante da un gneiss micromero molto schistoso, allora gli fu possibile di conchiudere che le masse pegmatitiche, nelle quali ha sede il berillo, " appartengano o a concrezioni o a riempimenti di litoclasi del gneiss ". Le mie osservazioni sulle roccie in posto si confarebbero al secondo caso.

Ora non è forse senza interesse che nell'Ossola sull'allineamento Craveggia-Pallanzeno (1), al quale allude lo Spezia, si trovano anche i due nuovi punti Vall'Antoliva e Cosasca nella stessa massa di gneiss, denominata dal Gerlach " massa di gneiss del Monte Rosa " (2).

Riferisco qui brevemente il risultato delle mie osservazioni sul materiale raccolto. Già fu detto che la roccia incassante la pegmatite di Craveggia è un gneiss. Esso si mostra al microscopio costituito essenzialmente da quarzo, plagioclase, ortoclase, biotite e da pochissima muscovite. La roccia poi che si rassomiglia ad un'amfibolite e che appare in forma di lenti

---

lana contigua al Sempione (" Boll. Soc. geol. ", vol. XXIII, 1904, fasc. I), accenna alla grande diffusione delle pegmatiti da lui costatate in posto in molti punti della massa gneissica che attraversa obliquamente la Val Vigezzo da S. Maria Maggiore fino al confine svizzero.

Inoltre egli gentilmente mi comunicò d'aver rilevate tali pegmatiti in più punti del versante montuoso sopra Toceno, Vocogno e Craveggia; più a monte nella Valle Isornino non solo nel Bacino del Rio Vasca, ma anche in quello del Rio Rodeggia fino a Monte Zicchero ed anche oltre la cresta; inoltre sui due fianchi della Valle Loana specialmente verso ovest a Costa di Fracchia; finalmente nei versanti che costeggiano la Val Vigezzo da Zornasco a Villette, ed oltre fino al confine, dove i nuovi tagli della strada rotabile per Locarno gli offrirono buoni dati d'osservazione, che egli si riserva di coordinare. — Sono tutte pegmatiti più o meno granatifere, spesso tormalinifere. Il berillo fu da lui trovato nella massa pegmatitica principale del contrafforte che scende da Monte Zicchero verso Regione Rodeggia, all'altitudine di 1600 m. circa. Del resto S. Traverso nella sua citata *Geologia dell'Ossola*, 1895, già fece accenno alla diffusione delle pegmatiti in Val Vigezzo.

(1) G. B. Traverso trovò fin dal 1868 il berillo con spessartino e tormalina nera in una specie di pegmatite presso Pallanzeno. In proposito vedi Gastaldi: " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1871, pag. 282. Inoltre S. Traverso, *Geologia dell'Ossola*, 1895, pag. 137.

(2) Gerlach, *Die Penninischen Alpen*, pag. 97.

o noduli a contatto colla pegmatite sopra la Fracchia, insinuandosi anzi talora nella medesima con forti curve e pieghe, la vidi pure sul piano dei Lavonchi, e di quest'ultima già parla il Traverso (1). Secondo le mie osservazioni al microscopio essa è composta principalmente da stanghette d'orneblenda di color verde giallastro e da circa altrettanto plagioclase con ortoclase; poi si trovano disseminati nella stessa abbondanti granelli d'epidoto, mentre il quarzo non v'appare che in piccola quantità. Perciò si tratterebbe d'un'amfibolite feldspatica. Pure degno di menzione è che il feldspato della pegmatite, il quale si trova incluso nella massa talora in cristalli assai grossi e ben terminati, visto in sezione sottile al microscopio mostra splendidamente l'intreccio del microclino ed inoltre per interposizione di albite nella nota forma di fuso o di fiamme acquista il carattere d'una tipica micropertite microclinica.

La roccia incassante la pegmatite di Vall'Antoliva si mostra, osservando il materiale raccolto presso il ruscello Antoliva, formata da feldspato, nella maggior parte ortoclase e poco plagioclase, da quarzo, da biotite e da muscovite; osservando invece il materiale raccolto ad alcune centinaia di metri dal ruscello Antoliva presso un potente filone di pegmatite, la roccia incassante di quest'ultimo viene ad avere una un po' differente composizione, cioè feldspato, nella maggior parte ortoclase con un po' di microclino e scarso plagioclase, quarzo, biotite e quasi nessuna traccia di muscovite.

Finalmente la roccia incassante la pegmatite della pietraia di Cosasca si mostrò costituita da ortoclase, plagioclase, quarzo, biotite e muscovite.

Qui va notato come fatto caratteristico, che la pegmatite di questi tre giacimenti in gneiss è berillifera e che il berillo da parte sua vi si trova con la stessa paragenesi: lo si rinviene incluso nella pegmatite ed accompagnato dallo spessartino e dalla tormalina nera.

Tanto in Vall'Antoliva che presso Cosasca lo spessartino mostra le forme cristallografiche {110} e {211}, e cioè una volta prevale l'una forma, altra volta l'altra e non di rado si trovano

(1) S. Traverso, *Geologia dell'Ossola*, 1895, pag. 136-137.

anche in eguale sviluppo. Un tale abito cristallografico corrisponde del tutto a quello dello spessartino di Craveggia: G. Strüver (l. c. 1889) trovò su d'un cristallo del diametro di 17 mm. nel senso degli assi ortogonali quasi esclusivamente la forma }211{ con qualche piccolissima faccetta di }110{; su d'un altro più piccolo, del diametro di 6 mm., trovò invece la forma }110{ dominante colle faccie di }211{ strettissime.

Non trovai la tormalina con faccie terminali.

Il berillo, che generalmente ha un color verde lattiginoso e di rado e sullo stesso cristallo solo in alcuni punti possiede il bel colore dell'acquamarina, lo trovai colle forme prisma e base; però quest'ultima è assai rara.

I cristalli di berillo de' due nuovi giacimenti presentano spesso associazioni parallele di più individui ed accrescimenti concentrico-paralleli a mo' di quelli descritti per il berillo di Craveggia da G. Spezia (l. c.) e da G. Strüver (l. c. 1889). Come i detti individui si staccano facilmente l'uno dall'altro, così esaminati al microscopio in sezioni sottili secondo la base essi mostrano quasi sempre una qualche differenza tra loro: o il cristallo interno contiene più inclusioni che la cappa del cristallo esterno o viceversa, ovvero vi si riscontra un differente grado di pellucidità, ecc. (vedi Tav. fig. 3). Sembra quindi che dopo la formazione del primo individuo sia subentrata una pausa e che durante la medesima sia avvenuto qualche cambiamento nelle condizioni delle soluzioni mineralizzanti (1), sì che il berillo ne risentì l'influsso nella sua successiva formazione. Cristalli di berillo che osservati in sezione sottile mostrano una decomposizione, una caolinizzazione, internantesi a mo' di rete, sono abbastanza comuni. Già Spezia (l. c.) ascrisse l'opacità del berillo di Craveggia ad un principio di decomposizione.

Inoltre osservai come i due minerali della pegmatite, la tormalina nera ed il berillo, che già per sè col loro abito cristallografico lungamente prismatico e col loro colore attirano l'attenzione, si mostrano non di rado curvati, rotti e dislocati nelle loro parti, ma sempre ricementati. Appunto il cemento bianco, generalmente quarzo, appartenente alla massa pegma-

(1) Prese in senso lato, tanto per soluzioni idrotermali che per soluzioni fuse (schmelzflüssige Lösungen).

titica, fa risaltare chiaramente le fratture in questi minerali colorati.

L'osservazione di questo fatto ci permette d'argomentare in proposito d'alcuni fenomeni sincroni colla formazione dei filoni pegmatitici nei crepacci della roccia incassante. Sembra che, a causa di compressioni, ripiegamenti, trazioni, ecc., della roccia incassante, una discontinua e reciproca dislocazione delle pareti del crepaccio abbia cagionato le osservate fratture nei cristalli, che si sarebbero formati in un primo lacunoso riempimento pegmatitico del crepaccio e sarebbero stati poi ricementati durante un ulteriore o totale riempimento del crepaccio medesimo.

Senza un esatto rilievo geologico delle qui citate località e dintorni, colle poche osservazioni che potei fare in posto e sul materiale d'esame, mi perito di parlare intorno al modo di formazione dei nostri filoni pegmatitici e per ora propenderei solo a credere che essi, come apofisi d'un centro granitico, si siano formati per iniezione di magma con successivi e secondarii riempimenti ed infiltrazioni, dovuti al periodo pneumatolitico precedente la solidificazione del magma granitico centrale.

Qui mi siano permessi ancora alcuni cenni intorno alle inclusioni del berillo. Ne vennero osservate quattro sorte: inclusioni di liquido e gas, di mica, di clorite e di spinello. Una sol volta trovai alcuni minutissimi cristalli d'un granato giallo-bruno totalmente inclusi in un cristallo di berillo di Vall'Antoliva. Tale granato osservato attentamente con lente a forte ingrandimento mostrava pure l'abito cristallografico nettamente determinato dalle forme }110{ e }211{.

Le inclusioni di liquido si presentano in sottili canaletti esagoni che hanno l'orientazione del prisma }10$\bar{1}$0{ del berillo. Il loro abito è per lo più prismatico, ma il tabulare è pure comune (vedi Tav. fig. 1). Però va detto che le inclusioni irregolari a mo' di quelle del quarzo sono appunto le più frequenti. Esse variano in grossezza da quelle quasi impercettibili con ingrandimenti assai forti a quelle già distinguibili cogli ingrandimenti più deboli. Sovente le bollicine di gas a piccole dimensioni, tanto nei canali esagoni che in genere nei vani delle inclusioni più larghe, si trovano in vivace oscillamento. Non di rado le inclusioni di liquido nel berillo s'allineano in lunghe ed irregolari file che alla lor volta s'associano e si dispongono in piani diversamente inclinati nel cristallo (vedi Tav. fig. 2).

G. Spezia (l. c.) portando i risultati dell'analisi del berillo di Craveggia parla d'alcune esperienze fatte intorno all'acqua d'inclusione, esperienze che sono di grande importanza per una razionale preparazione del materiale d'analisi chimica. L'identità, quasi palese e confermata da tante affinità, del berillo di Craveggia con quello di Vall'Antoliva e Cosasca ne fa ammettere che il comportamento chimico di quest'ultimo non possa scostarsi guari da quello del primo (1). Spezia adunque trovò nel berillo di Craveggia 1,85 % di perdita per calore, la quale pare si debba ascrivere quasi totalmente ad acqua d'inclusione che egli non potè espellere completamente che al calor bianco. Egli ebbe, riscaldando sempre la stessa sostanza, dopo 3 ore a 150° la perdita di 0,08 %; dopo 2 ore a 350° di 0,17 %; dopo 3 ore al calor rosso scuro di 0,18 %; dopo 3 ore al calor rosso ciliegie di 0,37 %; infine dopo 3 ore al calore bianco la perdita di 1,05 %; cioè in totale una perdita di 1,85 %. Orbene, come egli viene a stabilire con un calcolo approssimativo che per espeller l'acqua d'inclusione di 1 μ di diametro da un granello di berillo (2) di 4 μ occorre una temperatura che già sorpassa i 300°, così con maggior ragione pe' granelli delle polveri impalpabili delle analisi, tra i quali egli trovò ancora di que' grossi fino a 12 μ di diametro, e specialmente per tali granelli con inclusioni più piccole di 1 μ, egli crede che la temperatura necessaria a rimuovere tutta l'acqua sarà molto maggiore, ammettendo che nell'inclusione non vi sia tensione preesistente.

Le inclusioni di mica e di clorite, osservate in sezioni basiche dei cristalli di berillo, si mostrano in forma di laminette incolori quasi sempre ordinate parallelamente al prisma ed alla base del berillo medesimo. Esse solo di rado giacciono disseminate senza regola. Alcuna volta queste inclusioni e quelle di liquido confinano nello stesso vano.

Ma anche lo spinello si trova incluso nel berillo ed è da notare che esso è sempre unito alla clorite. Esso sembra molto

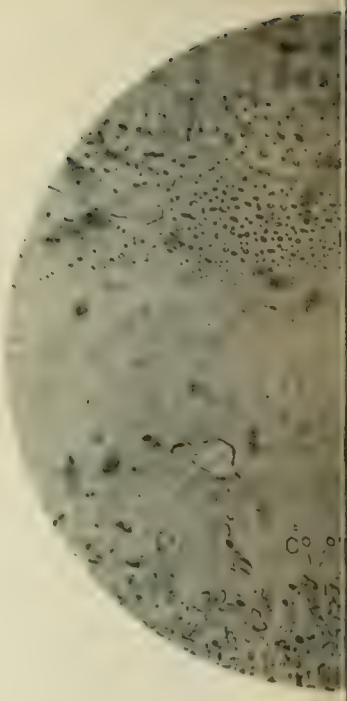
(1) Ad ogni modo, del berillo delle due nuove località venne riservato il miglior materiale, che spero potrà presto venir sottoposto all'esame chimico.

(2) Sospendendo in acqua per 10 minuti una polvere di berillo già impalpabile egli separò una polvere, i di cui granelli giungevano fino ai 5 μ di diametro.

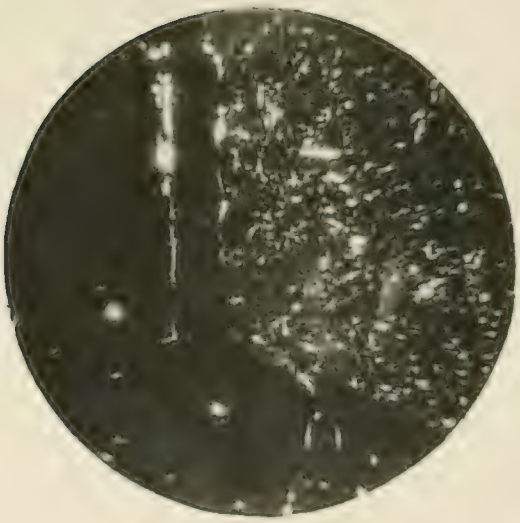
raro nel berillo di Craveggia: io non ve lo potei osservare che un paio di volte; mentre nel berillo di Vall'Antoliva e di Cosasca esso si trova molto diffuso. Nelle sezioni microscopiche lo spinello risalta molto bene nella massa del berillo accanto alle lamine incolori di clorite. Lo spinello ha un color verde chiaro e si presenta in granelli ed in cristalli. Con ingrandimenti di 300-450 volte lo si distingue nettamente incluso nel berillo in svariate posizioni e forme: si discernono e granelli, e cristalliti, ed ottaedri regolari ed irregolari e poi de' splendidi geminati secondo l'ottaedro. Come fu detto, allo spinello giace accanto una lamina di clorite; questa giace orientata nel berillo, quello pare di no (vedi Tav. fig. 7 ed 8).

La diffusione della clorite nel berillo è maggiore di quella della mica. Trattandosi qui di lamine incluse minutissime che in generale non raggiungono lo spessore del preparato, non si poterono fare determinazioni ottiche; la clorite poi venne ritenuta come tale per la forma ad esagono o trigono delle sue lamine incolori e per la sua debole rifrazione e birifrazione. Facendo uso della lente di Klein e circoscrivendo coll'iride alcune fra le più grandi di queste laminette incluse in sezioni basiche del berillo, ottenni oltre che l'imagine assiale di quest'ultimo anche quella della clorite, che si mostrò talora distintamente biassica, talora quasi uniassica: fenomeno del resto che pur esso non può servire che ad aggiunta d'un altro grado di probabilità per la determinazione della clorite.

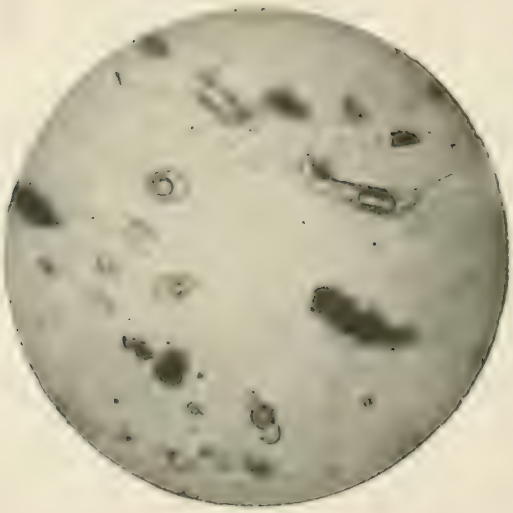
A spiegazione dell'orientazione delle inclusioni disposte secondo la base ed in direzione dell'asse *c* del berillo, si può ritenere che dopo la formazione d'un primo cristallo di berillo, subentrata una pausa, si siano depositati dalle soluzioni mineralizzanti tanto la mica che la clorite e così pure la clorite unita con lo spinello. Questi minerali aderirono alle faccie del primo cristallo di berillo, ma vennero tosto, riattivatosi per quest'ultimo un nuovo periodo d'accrescimento, inclusi da nuovi strati paralleli a que' fondamentali: cosa che andò ripetendosi le molte volte.



1

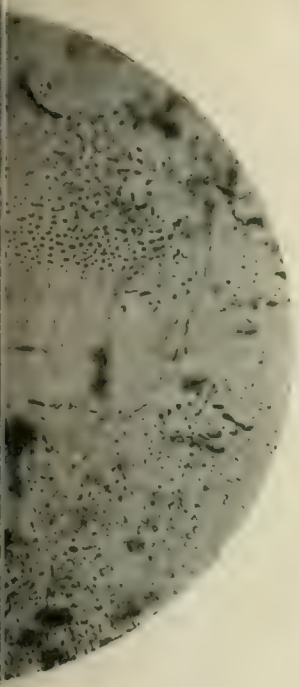


3

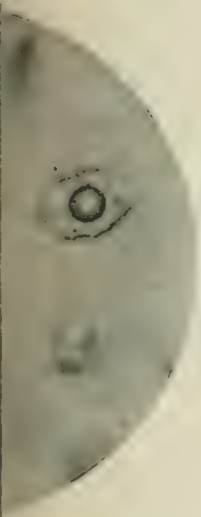


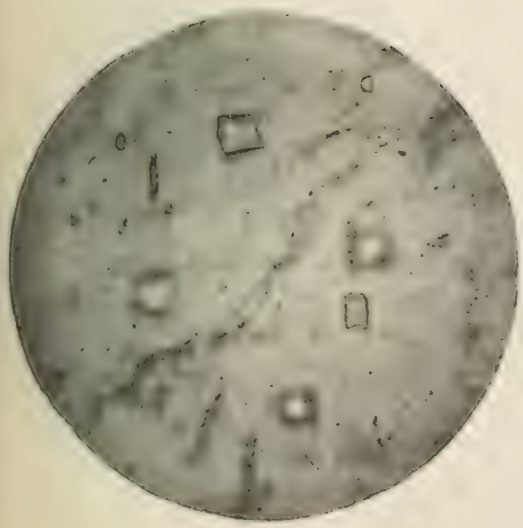
5

6

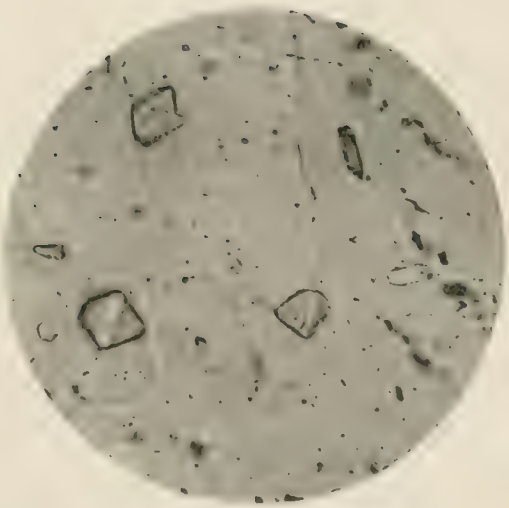


9





7



8

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Vedi pag. 9. Sezione d'un cristallo di berillo parallela ad una faccia di prisma. Il lungo canaletto presso il filo verticale s'estende in direzione dell'asse *c* del berillo. I canaletti sono qui prismatici e tabulari con o senza inclusioni di liquido e gas. Ingrandimento di circa 260 diametri.

Fig. 2. — Vedi pag. 9. Sezione basica d'un cristallo di berillo con un nembo di minutissime inclusioni disposte in piano inclinato. Si notino in basso i vani esagoni di varî cristalli negativi. Ingrandimento di circa 250 diam.

Fig. 3. — Vedi pag. 8. Sezione basica di due cristalli di berillo ad accrescimento parallelo, vista a nicol incrociati con ingrandimento di circa 13 diametri. Il cristallo interno è caratterizzato dalla grande quantità di inclusioni, mica, clorite, quarzo, ecc., l'esterno ne è quasi libero. Qui venne riprodotta solo una parte del gruppo, la quale mostra il limite di contatto dei due cristalli formato da due faccie di prisma intersecantisi a 120°.

Figg. 4 e 5. — Sezione basica di berillo con inclusioni ad uno ed a due liquidi con bollicina gasosa. Raffreddando con etere il preparato si ottiene un oscillamento delle bollicine gasose. Ingrandimento di 190 e di 120 diametri. La piccolezza e scarsità di tali inclusioni non permette di stabilirne la composizione chimica; così pure, dovendo esse venir osservate con ingrandimenti non inferiori a 400-450 volte, non è più possibile il verificare con certezza il comportamento dei liquidi e gas, raffreddando il preparato coll'etere.

Fig. 6. — Sezione d'un cristallo di berillo che include un ottaedro di spinello aderente a quarzo invece che a clorite. Non ne venne trovato che quest'unico esempio. Ingrandimento di circa 250 diametri.

Fig. 7. — Vedi pag. 11. Due geminati di spinello inclusi nel berillo con laminette di clorite, le quali appaiono allungate nella direzione dell'asse *c* del berillo. Ingrandimento di circa 180 diametri.

Fig. 8. — Vedi pag. 11. Due ottaedri ed un geminato di spinello inclusi nel berillo con relative laminette di clorite, le quali si mostrano allungate in direzione dell'asse *c* del berillo. Ingrandimento di circa 240 diametri.

Fig. 9. — Vedi pag. 5. Pietraia di Trontano.

Sulla respirazione intramolecolare nelle piante palustri.

Nota preventiva del Dr. GIUSEPPE GOLA.

Le condizioni nelle quali si svolge la vita delle piante palustri sono assai sfavorevoli al compiersi regolare della funzione respiratoria. Costrette a tenere buona parte dei loro organi sommersi sotto uno spesso strato di acqua assai lentamente rinnovantesi, o addirittura affondati in uno strato di melma, esse vivono in un' acqua povera o priva di ossigeno, o in una melma, nella quale i soli gas che vi si trovano sono prodotti di intensi fenomeni di riduzione e alcuni fortemente riduttori essi stessi.

Però non tutte le parti delle piante sono sottoposte a condizioni così sfavorevoli; gli organi fogliari e caulinari sono sempre più o meno provvisti di clorofilla e l'ossigeno prodotto dalla loro attività assimilatrice è più che sufficiente ai bisogni della respirazione. Sono le radici e i rizomi e più ancora i semi, i quali, affondati nella melma, sono privi dell'ossigeno necessario alla loro normale respirazione, specialmente quando questa si fa più intensa all'inizio dell'attività germinativa.

Queste particolari condizioni di vita non sono sfuggite all'osservazione dei botanici, i quali ne hanno fatto oggetto di studi accurati; tali ricerche però furono rivolte specialmente alla parte morfologica delle disposizioni adatte ad assicurare agli organi non verdi delle piante il rifornimento regolare di ossigeno.

Così conosciamo i pneumatodii di molti alberi palustri (*Taxodium, Sonneratia, Avicennia tomentosa, Laguncularia racemosa*) e gli speciali e noti tessuti aeriferi (aerenchimi), che servono alla conduzione dell'aria nelle parti sommerse delle piante. Nei semi di piante palustri è noto quanto siano frequenti gli apparecchi di galleggiamento che permettono il trasporto di essi sulle rive degli stagni dove non manca mai l'aria sufficiente; sappiamo pure come assai spesso le piante palustri inizino la loro vita da semi germinanti sulle rive e si spingano poi in

acque alte mediante stoloni o rizomi partenti dalle sponde. In molti casi le gemme ibernanti arricchitesi d'amido e staccatesi dalle piante, si affondano nell'autunno e germogliando all'inizio della buona stagione, non incontrano alcuna difficoltà a provvedersi di ossigeno per i plastidii verdi contenuti nei loro tessuti. Alcune piante della formazione delle Mangrove (*Rhizophora mucronata, Bruguiera eriopetala, Aegiceras majus*, ecc.) evitano, mediante la viviparità, le sfavorevoli condizioni di respirabilità nelle quali si troverebbero i semi affondati nella melma.

Vi ha tuttavia un numero relativamente piccolo di specie i cui semi possono trovarsi a cadere nel fondo di acque alte e che hanno una densità tale, da addentrarsi un po' nella melma, vale a dire in un ambiente, nonchè privo di ossigeno, assolutamente riduttore. Sono tra queste alcune ninfeacee (*Nelumbium, Victoria, Eurjale, Nuphar, Nymphaea*) e quelle del genere *Trapa*; nei semi di queste specie la germinazione è caratterizzata dall'apparire di organi speciali provvisti di clorofilla, ai quali si deve con tutta probabilità attribuire la funzione di produrre ossigeno per le piantine germinanti. Per mio conto ho potuto osservare nella *Trapa natans* che *è solo dopo che l'asse radicoforo si è colorato in verde che ha principio lo sviluppo delle radici secondarie e assimilatrici e dei cauli principali fogliferi.*

I semi caratterizzati dagli organi assimilatori testè indicati, durante la loro quiescenza e all'inizio del movimento germinativo sono assolutamente privi dell'ossigeno loro necessario al normale svolgersi dei fenomeni respiratorii; inoltre la diffusione dell'ossigeno eventualmente esistente nell'acqua è ostacolata dagli invogli talvolta assai sviluppati (*Trapa, Victoria, Nelumbium*) che difendono l'embrione o il perisperma. È quindi naturale il dedurre che in tale stadio della loro vita le piante in discorso debbano trovarsi in condizioni di asfissia e che i tessuti debbano esplicare la loro attività vitale come gli organismi viventi anaerobicamente.

La dimostrazione di questa ipotesi è uno dei problemi che mi sono proposto di risolvere durante una serie di ricerche in corso sulla fisiologia delle piante palustri; a questo scopo mi sono servito di semi di *Trapa natans*, di *Nymphaea alba* e di *Nuphar luteum*, nonchè di rizomi germinanti di queste due ultime specie e di piante in varii stadii di sviluppo di *Trapa natans*.

Per ora riferisco solo quanto ha riguardo alla *Trapa* ed ai rizomi germinanti di *Nymphaea* e di *Nuphar*, riservandomi in una prossima memoria più estesa di trattare ampiamente questi ed altri argomenti riferentisi alla fisiologia delle piante palustri.

Spaccavo i frutti di *Trapa* e ne estraevo il contenuto ponendolo subito in acqua, alla quale aggiungevo un po' di paraffina onde impedire lo schiumeggiare del liquido durante l'ebollizione; operavo la scelta degli achenii colla massima cura onde evitare qualsiasi traccia di tessuto non perfettamente sano e quindi eventualmente soggetto ad una fermentazione alcoolica d'origine putrefattiva. Circa 70 frutti erano sufficienti per una esperienza e il loro contenuto lo addizionavo con 200 cc. di acqua. Distillavo quindi il liquido in corrente di vapor acqueo fino a raccogliere 60-80 cc. di distillato; mi era facile con poche goccie di questo ottenere la colorazione verde col bicromato potassico e acido solforico concentrato; con una metà del liquido rimanente trattato con iodio e idrato potassico ottenevo la nota formazione del iodoformio; infine nella porzione residua ricercavo col nitrato d'argento ammoniacale la presenza dell'aldeide acetica, la quale, come è noto, ha comune coll'alcool la reazione colorata del bicromato e quella del iodoformio.

Le prime due reazioni mi fornirono sempre risultato positivo; negativa fu invece quella caratteristica dell'aldeide; tali saggi qualitativi se non assolutamente probanti non escludono tuttavia la presenza di alcool nel distillato.

Nei semi germinanti ripetei le analisi tenendo separati gli embrioni e l'apparato respiratorio; più tardi tenendo distinti gli embrioni da tutta la pianta verde più o meno evoluta. Potei sempre riscontrare nel parenchima amilifero dei semi la presenza di un corpo presentante le reazioni che ho indicato; nella porzione verde la presenza di esso non è costante, ma in rapporto, a quanto ho potuto osservare finora, coll'attività assimilatrice dei cloroplasti e inoltre ho potuto rilevare talvolta l'esistenza di traccie di sostanze riducenti il nitrato d'argento ammoniacale.

Per i rizomi delle Ninfeacee lavavo accuratamente la loro superficie ed esportavo poi con un coltello la parte esterna onde sottoporre a distillazione solo porzioni assolutamente vive e sane. Il distillato dei rizomi di ambo le specie presentava positiva la

reazione del bicromato e acido solforico e quella del iodio e idrato potassico. Anche nelle foglie provenienti da piante in via di germinazione potei verificare la presenza di alcool nel distillato, ma con una saltuarietà analoga a quella osservata nelle foglie di *Trapa*.

In tutti i casi però la quantità di alcool nelle parti verdi è stata sempre assai minore che nei tessuti di riserva.

Ripetei nel corrente anno le esperienze con quantità maggiore di materiale e sottoposi i liquidi distillati a ripetute ridistillazioni onde eliminare per quanto mi era possibile l'acqua. Potei così eseguire una serie di saggi coi risultati seguenti.

Reazione con bicromato di potassio e H_2SO_4; colorazione verde e sviluppo di aldeide acetica riconoscibile dall'odore e dalla riduzione del nitrato d'argento ammoniacale del quale aveva imbevuto una cartina esponendola ai vapori di aldeide.

Reazione con nitrato d'argento ammoniacale: risultato negativo.

Idrato potassico e iodio: formazione di iodoformio.

Ioduro di potassio, iodurato e idrato ammonico: Reazione negativa.

Acido acetico glaciale e H_2SO_4: formazione di etere etilacetico.

Cloruro di benzoile e idrato sodico: formazione di etere etilbenzoico.

Non vi ha dubbio quindi sulla presenza di alcool etilico nelle piante che ho studiato.

In questi ultimi anni venne già osservato l'alcool nei tessuti di alcune piante superiori ed anzi si trasse argomento da tale constatazione per negare alla formazione dell'alcool nelle cellule vegetali il carattere prima attribuito di indice sicuro di fenomeni di asfissia. Si ammise anzi essere questa produzione l'effetto normale dell'azione di un fermento, presente, se non in tutte, certo in molte cellule vegetali.

Nel caso delle piante palustri non può essere messo in dubbio che realmente qui l'alcool sia prodotto dai tessuti soggetti a penuria di ossigeno. Mazé, riferendosi ad esperienze sue e di altri, emise l'ipotesi che " on doit trouver l'alcool de préférence dans les cellules où la nutrition est la plus active, et non dans les tissus profonds du végétal „. Nel mio caso l'alcool

era più scarso nei tessuti verdi che in quelli di riserva, e scarso nella porzione verde, anche durante il periodo germinativo, nel quale i fenomeni di nutrizione sono certamente assai intensi, dato il rapido accrescimento delle piante palustri. Inoltre è da notare la coincidenza della presenza di alcool in quegli organi situati nella melma, vale a dire, sottoposti certamente a penuria di ossigeno.

Per ora mi limito a esporre solamente queste poche osservazioni tendenti a dimostrare come realmente si tratti nelle piante palustri che ho studiato di vera respirazione intramolecolare in condizioni di asfissia. Posso però fin d'ora aggiungere che ho constatato la presenza di caratteri anatomici e citologici i quali tendono anch'essi a provare l'esattezza di quanto affermo.

È questo, credo, il primo caso nel quale si verifichino nelle piante superiori dei fenomeni di asfissia in condizioni naturali di vita, e credo non sia fuor di luogo il dare notizia di questa singolare forma di adattamento, tra le tante alle quali si sono assoggettate le piante palustri.

Torino, R. Istituto Botanico. 20 Maggio 1905.

Ricerche sulla variazione dell' " Hydrophilus piceus „ Linn.

Parte Prima.

Nota di UMBERTO PERAZZO.

(Con una Tavola).

La presente Nota contiene alcune osservazioni e dati numerici relativi alla " variazione „ (assoluta e relativa) presentata da alcune serie d'individui di *Hydrophilus piceus* Linn., prese in esame.

La variazione " relativa „ (ovvero: variazione rispetto ad una conveniente misura base individuale) venne studiata coi noti procedimenti introdotti dal Prof. Camerano.

Si sono premesse alcune osservazioni d'indole generale occorse in questo esame, potendo eventualmente alcune di esse riuscir utile per ulteriori ricerche della stessa natura.

§ 1.

Sulla rappresentazione grafica della variazione.

Ha — com'è noto — importanza notevole per l'esatta e rapida interpretazione dei dati numerici offerti dalle misure (o da queste dedotti mediante riduzioni convenienti) la rappresentazione grafica, la quale agevola il confronto fra le entità o modalità della " variazione „ nelle diverse parti sottoposte a misura per individui di una stessa serie, o in una medesima parte in rapporto alle varie serie considerate. Varî procedimenti sono in uso per la costruzione effettiva di tali curve di variazione: accenneremo ai due tipi di curve che ci furono d'aiuto nel caso presente per stabilire i risultati esposti al § 5 (*).

(*) Si è omessa per ragioni di spazio la riproduzione delle curve stesse, visto il loro numero rilevante.

Un primo tipo può ottenersi — com'è noto — nel modo seguente: Fissato in un piano, per ogni carattere da esaminarsi in una data serie, un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si assumano come ascisse le lunghezze assolute osservate (ovvero multipli di esse secondo un dato numero), e come ordinata corrispondente ad ogni ascissa, un segmento rappresentante il numero di volte per cui si presenta quell'ascissa.

Analogamente assumendo come ascisse segmenti rappresentanti, rispetto ad una data unità di misura, i valori dei rapporti alla misura base, espressi in 360^{mi} di questa.

Nella fig. 1 è indicata una modalità di costruzione che può riescir comoda in pratica, permettendo in spazî relativamente ristretti di far comparire completamente i segmenti (ascisse) rappresentanti le lunghezze assolute o relative alla misura base, delle varie parti.

La rappresentazione di cui sopra mette in luce le eventuali differenze, anche minime, nello sviluppo di una medesima parte negli individui delle diverse serie: le differenze dunque in rapporto ai sessi, alle località, ecc. E per ogni carattere esaminato indica — oltre ai termini estremi della variazione (assoluta o relativa) coi corrispondenti indici di variabilità — come si distribuiscano le frequenze nei varî valori delle ascisse, quali di questi debbano considerarsi come anormali per il carattere che si considera ecc.

Altre curve di variazione si costruiscono facilmente come segue: Si suppongano ordinati gli individui di una data serie secondo i valori crescenti della misura individuale assunta come " base ". Fissato come dianzi un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si considerino tante ordinate parallele, susseguentisi ad uguali distanze ed in numero uguale agli individui della data serie — ai quali si faranno corrispondere.

Per ogni carattere, relativamente al quale si voglia stabilire l'andamento della variazione assoluta, si portino (fig. 2) in uno stesso senso, a partire dall'asse delle ascisse, sulle ordinate corrispondenti ai varî individui, segmenti eguaglianti le lunghezze assolute osservate per quel carattere (ovvero multipli di esse secondo un dato numero) e se ne congiungano successivamente gli estremi. Analogamente assumendo come ordinate segmenti

rappresentanti, rispetto ad un'arbitraria unità di misura, i valori dei rapporti alla " misura base ".

Le curve di tal tipo rappresentanti la variazione assoluta, determinano anzitutto il modo di variare simultaneo di due diverse parti del corpo negli individui di una stessa serie (*). E più precisamente: di stabilire se vi ha relazione concorde nel variare di due diverse parti poste a raffronto (per modo che un accrescimento dell'una porti di solito come conseguenza un accrescimento dell'altra), o se le variazioni nell'una e nell'altra parte sono fra loro indipendenti, o se vi è infine relazione discorde od antagonista (per modo che di solito un accrescimento nell'una parte porti quale conseguenza una diminuzione nell'altra). Può ancora da esse riconoscersi in modo immediato se e quali conseguenze possa portare un'anormalità di sviluppo d'una parte del corpo nello sviluppo di altre parti. Alle curve dello stesso tipo rappresentanti la variazione relativa spetta più particolarmente l'ufficio d'indicare le modalità di variazione delle varie parti col variare della " misura base ", a riconoscere per es. se il rapporto di una data dimensione alla " misura base " cresca, diminuisca, o si mantenga approssimativamente costante col crescere di questa: la curva corrispondente avrà la tendenza risp. ad innalzarsi o ad abbassarsi verso la parte verso cui si suppongono crescenti i valori della " misura base ", ovvero oscillerà attorno ad una parallela all'asse delle ascisse.

Hanno particolare interesse tali curve nello studio di varietà costituite da individui di mole (**) notevolmente inferiore (o superiore) alla normale, agevolando la ricerca delle eventuali variazioni nei rapporti di sviluppo delle varie parti del corpo in relazione ad una forte diminuzione (od aumento) della statura.

Analogamente dicasi per la risoluzione di particolari questioni specifiche; ed in molti casi occorrerà unicamente costruire le curve relative a quei caratteri, in rapporto ai quali si è posta la questione.

(*) Le varie ordinate di cui sopra e l'asse delle ascisse si suppongono naturalmente fissi (i medesimi) nella costruzione di tutte le curve che si vogliono porre a raffronto.

(**) Supposto che la " misura base " si sia scelta in guisa da rappresentare ad un dipresso la " statura " dell'animale.

Per lo studio delle diverse varietà contenute in una data specie, converrà (praticamente) segnare in modo particolare le ordinate corrispondenti agli individui che appartengono ad una data varietà: si renderà così facilmente manifesto se, in corrispondenza all'incontro con tali ordinate, qualcuna delle curve rappresentanti i varî caratteri avrà tendenza costante ad innalzarsi o ad abbassarsi ecc. Analogamente per lo studio del polimorfismo (v. fig. 2).

§ 2.

Coefficienti di variabilità assoluta e relativa.

Gli indici di variabilità introdotti dal Prof. Camerano determinano — com'è noto — per ogni dato organo sottoposto a misura, il campo di variabilità d'una sua dimensione rispetto alla misura base. Il confronto diretto degli indici di variabilità per uno stesso carattere in due diverse serie è utilissimo, ad es. per la determinazione della maggiore o minore variabilità negli individui dell'uno o dell'altro sesso, od appartenenti a diverse località, o in diverse fasi dello sviluppo ecc.

Altrettanto utile sarebbe il confronto fra le variabilità di due diverse parti del corpo negli individui di una stessa serie: però, dipendendo l'indice di variabilità in modo essenziale dalle dimensioni della parte a cui si riferisce, non sono direttamente confrontabili gli indici di variabilità relativi a due parti di dimensioni sensibilmente diverse (o — per dir meglio — il confronto fra tali indici non dice direttamente quale delle due parti sia " più variabile „ rispetto alla misura base).

Conviene perciò aggiungere alla considerazione di tali indici quella di altri due caratteri, che chiameremo nel seguito *coefficienti di variabilità relativa ed assoluta:* c_r e c_a, definiti: il primo come rapporto della differenza fra le " classi estreme C e c „ (ovvero valori massimo e minimo assunti dal rapporto alla misura base, espresso in 360^{mi} di questa) alla loro media aritmetica: $c_r = \frac{C-c}{\frac{1}{2}(C+c}$; il secondo come rapporto della differenza fra i termini estremi T e t (rispett. massimo e minimo) della variazione assoluta alla loro media aritmetica: $c_a = \frac{T-t}{\frac{1}{2}(T+t)}$.

Il coeficiente di variabilità relativa rimane invariato se in luogo di esprimere le varianti in 360^{mi} della misura base, si esprimono in 100^{mi} o 1000^{mi} ecc.: seguendo insomma un'altra qualsiasi divisione in parti uguali della misura base (Infatti, si passa — com'è noto — dal numero che esprime una variante in 360^{mi} della misura base a quello che la esprime in 1000^{mi} ad es., della stessa misura base, moltiplicando il primo per $\frac{1000}{360}$: ora, sostituendo nell'espressione $\frac{C-c}{\frac{1}{2}(C+c)}$ a C e c rispettivamente $C \times \frac{1000}{360}$ e $c \times \frac{1000}{360}$ l'espressione stessa non verrà mutata, quindi ecc.).

Osserviamo ancora che il coefficiente di variabilità relativa c_r è sempre compreso fra 0 e 2: Si ha per c_r il valor 0 allorchè si conserva costante il rapporto della dimensione che si considera alla misura base ($C = c$); il valor 2 allorchè si annulla per uno o più individui della serie, la dimensione considerata ($c = o$). Analogamente dicasi per il coefficiente di variabilità assoluta (*).

§ 3.

Materiale studiato, approssimazione tenuta nelle misure, misura base ecc.

Mentre relativamente numerose per ciascun individuo sono le parti (del dermascheletro) sottoposte a misura, il materiale

(*) V'ha un mezzo assai comodo per dedurre dalla rappresentazione grafica del 1° tipo ricordato (Fig. 1) dei limiti comprendenti un coefficiente di variabilità relativa. A partire dal punto di mezzo fra i punti che, sull'asse delle ascisse, rappresentano le classi estreme, si trasporti successivamente verso l'origine il segmento compreso fra i punti stessi, sino a sorpassare una prima volta l'origine. Se per ottenere ciò si è dovuto trasportare n volte il segmento, il coefficiente di variabilità sarà compreso fra $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n-1}$. Analogamente dicasi per il coefficiente di variabilità assoluta. — Sarebbero sufficienti per la determinazione di tali limiti i soli punti rappresentanti le " classi estreme ", o, rispettivamente, i termini estremi della variazione assoluta.

studiato non è molto abbondante: Proviene da due diverse località piemontesi (dintorni di Torino e Nizza Monferrato) e comprende 100 individui, dei quali 50 (26 ♂ e 24 ♀) catturati nei dintorni di Torino e 50 (25 ♂ e 25 ♀) a Nizza Monf. Delle 24 ♀ di Torino 10 appartengono alla 1ª forma (*), 13 alla 2ª ed 1 alla 3ª forma; delle 25 ♀ di Nizza Monf. 7 appartengono alla 1ª, 15 alla 2ª e 3 alla 3ª forma.

La mole limitata degli animali studiati rendeva necessaria una forte approssimazione nelle misure, resa possibile d'altra parte dalla rigidità delle parti sottoposte a misura. Per la quasi totalità delle misure è stata raggiunta l'approssimazione del decimo di millimetro colle cautele seguenti: per ogni misura vennero eseguite (alla lente) due diverse osservazioni, cercando di valutare i ventesimi di millimetro: assumendo in seguito un valor medio fra quelli dati dalle due osservazioni, quando la differenza loro non superava il decimo di millimetro: sottoponendo in caso diverso ad ulteriore esame la misura in questione. Comunque nelle espressioni delle misure assolute i ventesimi di millimetro non fossero sempre da ritenersi sicuri, era conveniente il tenerne conto (come s'è fatto) nei calcoli di riduzione mediante il coefficiente somatico.

Come misura fondamentale o base si è assunta per ogni individuo la " statura „ definita come somma delle seguenti lunghezze (tutte in senso longitudinale e contenute nel piano di simmetria dell'animale): *a)* Diametro antero-posteriore del labbro superiore (Fig. 3); *b)* id. del capo (visto dalla parte dorsale) sino al margine anteriore del peristoma (Fig. 3); *c)* diametro antero-posteriore del protorace (pronoto) (Fig. 5); *d, d')* Distanza fra il punto di mezzo della base dello scudetto ed il vertice del pic-

---

(*) Vⁱ i due lavori del prof. Camerano: *Polimorfismo nella femmina dell' " Hydrophilus piceus „,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XII (1877) e *Monografia degli idrofilini italiani*, ibid., vol. XIX (1884).

Le tre forme di ♀ a cui alludiamo sono così caratterizzate:

Elitra senza rialzo careniforme nel solco, presso il margine esterno		Iª forma
Elitra con un rialzo careniforme nel solco, presso il margine esterno	Rialzo interamente staccato dall'orlo esterno dell'elitra .	IIª forma
	Rialzo staccato dall'orlo esterno dell'elitra solo nella sua parte inferiore	IIIª forma.

colo angolo che la spina suturale di una elitra forma col margine posteriore di questa (Fig. 6) (*).

All'infuori della " statura „ le parti sottoposte a misura sono in numero di 55 per i maschi e di 52 per le femmine. Per ciascuna di queste parti (tutte appartenenti al dermascheletro) si è data una figura semischematica coll'indicazione precisa dei punti estremi che limitano la distanza presa in esame: figura che evita le lunghe e minute descrizioni che si renderebbero necessarie nel caso presente, per rendere il lavoro eventualmente proseguibile da altri, cogli stessi criterî.

§ 4.

Variabilità riscontrata in generale. Confronto fra le variabilità relative di varie parti sottoposte a misura.

Fra gli scopi propostici col presente lavoro eravi quello di riscontrare se la variabilità nel gruppo di animali a metamorfosi completa di cui ci occupiamo fosse sensibilmente minore che in altri gruppi — studiati — di animali ad accrescimento progressivo, ciò che *a priori* si dovrebbe ritenere, considerate le molteplici cause esterne che durante lo sviluppo possono agire sui varî organi, alterando i mutui rapporti fra le loro dimensioni. L'esame delle serie considerate conferma sensibilmente quest'induzione.

Anzitutto: la variazione assoluta per ciascuna delle varie parti sottoposte a misura è rappresentata nel caso nostro da un coefficiente compreso (salvo poche eccezioni) fra 0.143 ($^1/_7$) e 0.25 ($^1/_4$) (o — in altri termini — la differenza fra le dimensioni massima e minima osservate per ognuna di quelle parti è compresa fra $^1/_7$ ed $^1/_4$ del valor medio fra esse). La variazione assoluta della " statura „ in particolare è rappresentata dai coefficienti 0.159 ($^5/_{31}$ T); 0.179 ($^5/_{28}$ T); 0.143 ($^5/_{35}$ N); 0.145 ($^5/_{34}$ N).

Per la variazione relativa i coefficienti si trovano, all'in-

(*) Si è assunta per tale misura la media fra i valori d, d' relativi alle due elitre, ognuno dedotto a sua volta mediante almeno due osservazioni.

fuori di poche eccezioni, compresi fra 0.05 ($^1/_{20}$) e 0.20 ($^1/_5$): per lo più assumono valori compresi fra $^1/_{15}$ ed $^1/_7$.

Abbiamo posto a raffronto i dati dedotti dalle nostre osservazioni cogli analoghi — numerosissimi — contenuti nella fondamentale Memoria del Prof. Camerano: *Ricerche intorno alla variazione del Bufo vulgaris* Laur. (*). Tale raffronto mostra che, quantunque esistano dei caratteri nel *Bufo vulgaris* pei quali il coefficiente di variabilità relativa si presenta abbastanza basso (inferiore anzi a molti fra quelli relativi alle nostre serie), il coefficiente stesso si mantiene *in generale* superiore a tutti quelli calcolati per le nostre serie e vi hanno poi là parecchi caratteri, pei quali il coefficiente assume valori straordinariamente grandi rispetto a quelli del caso presente: per modo che, fra le parti del dermascheletro da noi sottoposte a misura, non ne esiste alcuna, la cui variabilità relativa possa paragonarsi a quelle presentate dai caratteri in questione.

Non abbiamo riscontrato differenze notevoli di variabilità (assoluta o relativa) sia fra i maschi e le femmine, sia fra gli individui appartenenti alle due diverse località considerate. Sono sensibili invece le differenze nel grado di variabilità relativa fra le diverse parti del dermascheletro, poste a raffronto. Fra queste accenniamo brevemente alle principali. Nel capo: fra le dimensioni più variabili v'hanno la lunghezza del labbro superiore (3) e del labbro inferiore (8); seguono: la larghezza del labbro inferiore (9) e del labbro superiore (4). Sensibilmente meno variabili sono la larghezza della parte anteriore del capo (5) e la distanza (6) fra le superficie laterali esterne dei due occhi. Nel protorace non v'hanno differenze apprezzabili fra le variabilità nella lunghezza (10) e nella larghezza massima (11). Nello scudetto è sensibilmente più variabile la lunghezza (12) che non la larghezza alla base (13) (**). Nella parte inferiore del torace

(*) " Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", serie II, tomo L (1900). Ci siamo serviti per il confronto specialmente della Tav. II^a annessa alla Memoria (nella quale sono graficamente rappresentate per ogni variante le classi estreme), operando a tale scopo nel modo indicato in una nota al § 2 (in fine).

(**) È questo un fatto interessante, poichè si collega ad una differenza specifica fra l'*Hydr. piceus* e l'*Hydr. pistaceus* Casteln.; relativa alla forma dei due scudetti. Si ha infatti che le due piccole sinuosità all'angolo infe-

hanno variabilità ad un dipresso eguali la lunghezza delle apofisi mesosternale e sternale (14-15) e le lunghezze del mesosterno (17), del metasterno (16) e dell'episterno (19); variabilità un po' minore presentano i diametri trasversali anteriore (20) e posteriore (21) — in ispecial modo quest'ultimo — del metasterno; la variabilità minima è presentata dalla lunghezza minima dello sterno (18). Nell'addome i quattro segmenti sottoposti a misura presentano una variabilità crescente dal maggiore (24) al minore (27). Nelle zampe posteriori la variabilità nelle lunghezze dell'anca (28), del femore (30) e della tibia (32) è notevolmente minore che negli articoli costituenti il tarso (35-38). Anche per le due spine (33, 34) i coefficienti di variabilità sono (di poco però) inferiori a quelli relativi agli articoli del tarso. Osservazioni analoghe possono farsi per le zampe mediane ed anteriori: nelle zampe mediane però la variabilità della tibia (41) è di poco inferiore a quella degli articoli del tarso. La dilatazione nel 5° articolo del tarso nei maschi (53) presenta ad un dipresso la stessa variabilità della lunghezza del 5° articolo stesso (52).

§ 5.

Differenze di sviluppo osservate in rapporto ai sessi. Alcune modalità di variazione.

Una notevole eguaglianza abbiam riscontrata anzitutto nei valori delle varianti in rapporto alle località. E le differenze sessuali — di lieve entità (*) — a cui accenneremo compaiono, e nella stessa misura approssimativamente, negli individui di entrambe le località: riporteremo perciò anche le minori differenze osservate.

La statura media si presenta sensibilmente maggiore nelle ♀ che nei ♂. Nel *capo* si hanno valori maggiori per le ♀ che per i ♂: nella lunghezza (2) della parte dorsale (**) e nella lar-

riore nello scudetto dell'*Hydr. piceus* tendono a scomparire quando diminuisce l'altezza dello scudetto: la forma dello scudetto tende allora a quella dell'*Hydr. pistaceus*.

(*) Avvertibili solo (mediante esame somatometrico) sopra un numero un po' rilevante di individui.

(**) Si sottintende, e ciò per tutto il seguito del paragrafo: valutata in 360^{mi} della misura base.

ghezza massima della parte anteriore (5). Nel *protorace* la lunghezza (10) si presenta maggiore nei ♂ che nelle ♀. L'apofisi mesosternale (14) si trova essere un po' maggiore nei ♂. Nella lunghezza minima del metasterno (16) si hanno valori maggiori per le ♀ che non per i ♂; l'opposto succede (in modo meno sensibile però) per il mesosterno (17). Un po' maggiori nelle ♀ sono i diametri trasversali anteriore e posteriore del metasterno (20-21), la larghezza massima dell'elitra (22), e le larghezze massime dei quattro segmenti dell'addome sottoposti a misura.

Si hanno pure differenze sensibili nello sviluppo degli articoli del tarso nelle zampe posteriori e mediane (art^{i} 2°, 3°, 4°, 5°). Di essi il 2° ed il 3° si presentano già sensibilmente maggiori nei ♂ che nelle ♀; per il 4° ed il 5° la differenza — nello stesso senso — è ancora più notevole. (Tali differenze provengono forse — per fenomeno di correlazione — dalla modificazione avvenuta per le modalità dell'accoppiamento nel 5° articolo del tarso delle zampe anteriori dei ♂. Tale articolo presenta non solo una dilatazione, ricoperta inferiormente di peli-ventose, ma anche in lunghezza ha un maggiore sviluppo che non nelle ♀: contemporaneamente hanno acquistato un maggiore sviluppo i quinti articoli nei tarsi delle altre zampe e conseguentemente — ma in misura minore (decrescente anzi dal 4° verso il 2° articolo) — anche i rimanenti.

Aggiungeremo ora alcune osservazioni, dedotte dall'esame delle curve del 2° tipo, di cui si disse al § 1. Anzitutto non esistono parti del dermascheletro — fra quelle da noi sottoposte a misura — per le quali il rapporto alla statura cresca o decresca *sensibilmente* col crescere di questa, in tutte le serie considerate (od almeno: in quelle relative ad un medesimo sesso). Non esistono altresì, nelle parti del dermascheletro considerate, differenze di sviluppo in corrispondenza alle tre diverse forme di femmine. (Tale risultato risulta stabilito in modo più sicuro per le due prime forme, poichè le ♀ della terza forma sono in numero assai inferiore a quello delle precedenti: si osservi però che nei pochi esemplari di quella forma si trovano gli stessi rapporti che nelle precedenti, nè v'hanno differenze nelle dimensioni assolute).

Le curve in questione ci hanno permesso ancora di seguire

simultaneamente l'andamento di varie coppie di caratteri posti a raffronto. Ci limiteremo a riportare poche osservazioni intorno al modo di variare simultaneo delle parti omonime nelle zampe. Si riscontra una notevole relazione concorde nello sviluppo dei femori e delle tibie (specialmente nelle zampe posteriori e mediane per queste ultime), minore concordanza si ha nello sviluppo delle anche, pochissima in quello delle spine. Negli articoli corrispondenti del tarso si ha di solito una notevole relazione concorde; scarsa concordanza invece fra la lunghezza del 5° articolo del tarso delle zampe anteriori dei maschi e la dilatazione dello stesso articolo.

§ 6.

Alcune osservazioni.

Abbiamo nei §§ precedenti considerata unicamente la variazione nelle dimensioni delle varie parti: le osservazioni seguenti sono rivolte invece ad altri caratteri: esse vengono estese pure a due altre raccolte d'individui, provenienti da Grosseto e da Alvito (Provincia di Caserta) (*).

1) Notiamo anzitutto riguardo al " rapporto numerico „ fra gli individui dei due sessi che nella collezione proveniente dal contorno di Torino (cui appartengono le due serie prime considerate) 42 sono i ♂ e 24 le ♀; in quella di Nizza Monferrato v'hanno 37 ♂ e 41 ♀; in quella di Alvito 146 ♂ e 133 ♀; infine 9 ♂ e 11 ♀ nella collezione di Grosseto. Tali cifre, assieme ai risultati d'una citata Nota del prof. Camerano su questo argomento permettono di supporre che la produzione dei ♂ e delle ♀ in tali animali sia ad un dipresso la stessa.

2) È interessante ancora la considerazione del rapporto numerico fra le diverse forme di ♀ in una stessa località. Esso risulta, per le raccolte di cui ci occupiamo, dall'unita tabella.

(*) Catturati questi ultimi in un piccolo lago (detto della " Posta „), a poca distanza da Alvito.

	1ª Forma	2ª Forma	3ª Forma
Torino (24 ♀)	10	13	1
Nizza Monferrato (41 ♀) . . .	14	22	5
Alvito (133 ♀)	59	59	15
Grosseto (11 ♀)	4	7	—
	87	101	21

Le ♀ della 3ª forma compaiono dunque in proporzione assai minore che non per le forme precedenti: Anche a tale riguardo i risultati della Nota dianzi citata concordano cogli attuali; e tale fatto, poichè verificato per raccolte d'individui di località molto diverse, assume una notevole importanza.

3) È noto come esistano molte forme di passaggio fra la 1ª e la 2ª forma di femmine: in tutte le raccolte esaminate abbiamo potuto osservare numerosi passaggi di tal natura. Dal confronto minuto di numerose ♀ delle tre forme siam giunti pure alla convinzione che vi sieno forme di passaggio fra la 2ª e la 3ª forma: esistono invero varî esemplari di ♀ nei quali il rialzo careniforme nel solco, presso il margine esterno dell'elitra assume proporzioni maggiori dell'usato, lambendo nella sua parte anteriore il margine stesso dell'elitra. A nostro avviso quindi vi sarebbe " continuità „ fra la prima e la terza forma, essendo queste collegate successivamente: 1) dalle forme di passaggio fra la prima e la seconda forma; 2) dalla seconda forma; 3) dalle forme di passaggio fra la seconda e la terza. Sarebbe da escludersi invece un passaggio diretto fra la prima e la terza forma.

4) Abbiamo potuto osservare ripetutamente che nell'accoppiamento (in acqua) degli idrofili, la parte dell'elitra soggetta nelle ♀ a modificazioni di forma è quella cui si appoggiano le proporzioni dilatate dei quinti articoli dei tarsi anteriori dei ♂ (e precisamente viene a trovarsi tale parte dell'elitra fra quelle dilatazioni superiormente e le unghie inferiormente). Riesce quindi naturale il supporre che esista una stretta relazione fra la variazione di quella parte dell'elitra e le modalità dell'accoppiamento. (Forse a queste ultime ancora è da riferirsi una

notevole differenza sessuale secondaria, osservata dal prof. Camerano, e consistente nella forma dell'apofisi mesosternale che si presenta fortemente incavata nei ♂ e piana, o leggermente incavata, nelle ♀).

5) Abbiamo accennato indirettamente alle due differenze sessuali secondarie più notevoli nell'*H. piceus* (dilatazione del 5° articolo del tarso e " incavatura „ nel mesosterno). Altre lievi differenze consistono — come si disse — nel maggiore o minore sviluppo in rapporto alla statura di certe parti del dermascheletro. Un'ulteriore differenza sessuale — probabilmente non avvertita sinora — si riscontra nelle zampe mediane. Nei ♂ le tibie delle zampe mediane portano nella loro parte terminale, e precisamente nella regione ove si articolano le due spine, un ciuffo di peli rossastri, analoghi ai peli natatorî che rivestono internamente i tarsi delle zampe posteriori e mediane. Tale carattere manca nelle ♀.

6) Accenniamo ora ad un carattere — poco visibile, ma degno d'interesse poichè molto costante, sia nei ♂ che nelle ♀ — che riguarda la punteggiatura del protorace: Consiste nella presenza di due terne di punti (Fig. 5) a poca distanza dal margine anteriore del protorace e disposte simmetricamente rispetto al piano di simmetria bilaterale: i punti in ciascuna delle due terne si succedono ad eguali distanze. I numerosi esemplari — delle varie località — osservati presentano *tutti* tale carattere di punteggiatura.

All'infuori di tale carattere e delle due " incavazioni punteggiate anteriori „ la punteggiatura del protorace è abbastanza variabile. Talora il protorace si presenta ondulato-rugoso.

Notevolmente costante è un carattere di punteggiatura del labbro superiore, consistente in due serie di punti fra loro vicinissimi, disposte alla radice del labbro superiore e simmetricamente rispetto al piano di simmetria bilaterale.

Nello scudetto la punteggiatura è abbastanza variabile: nel maggior numero dei casi si presenta privo di impressioni puntiformi; frequente relativamente è il caso di una sola impressione, ma non è raro che si abbiano due, tre o più punti, più o meno impressi: per lo più allora si dispongono irregolarmente rispetto ai margini dello scudetto e sono meno distinti. Molto raramente si presenta ondulato o rugoso.

7) Fra gli individui delle varie località non abbiamo riscontrato differenze molto notevoli. Complessivamente può dirsi che le dimensioni negli individui di Nizza Monferrato sono leggermente superiori a quelle degli individui delle altre località considerate. Negli esemplari di Alvito si trovano più frequentemente le colorazioni intensamente nere. La colorazione rossigna al margine inferiore esterno delle elitre ed alla parte inferiore-posteriore del protorace si presenta di solito poco evidente, e talvolta non si presenta affatto per gli esemplari di Alvito e di Grosseto: mentre in generale è spiccatissima in quelli delle due località piemontesi e specialmente di Nizza Monf. (pei quali spesso si propaga alla parte posteriore del prosterno ed alle anche ed ai femori delle zampe anteriori). Il colore delle antenne e dei palpi è per gli esemplari di Nizza Monf. molto più chiaro che non in quelli di Alvito ed anche (in misura minore però) delle altre località. Accenniamo infine ad una particolarità di colorazione che si riscontra, talora spiccatissima, negli individui delle due località piemontesi, e specialmente di Nizza Monf.: La porzione trapezoidale lievemente impressa del peristoma che segue immediatamente al labbro superiore presenta spesso negli esemplari di quelle località una striscia di colore variabile fra il giallo ed il rosso cupo: Gli esemplari di Alvito e di Grosseto presentano di solito pochissimo appariscente, o non presentano affatto tale striscia.

Fig. 1

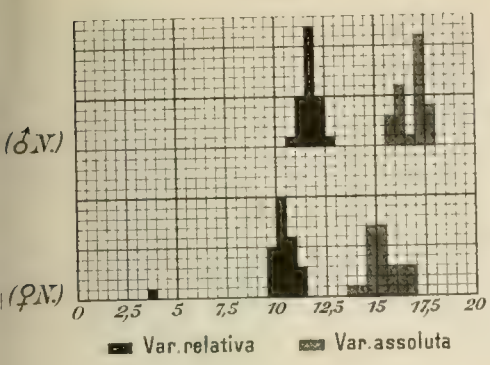
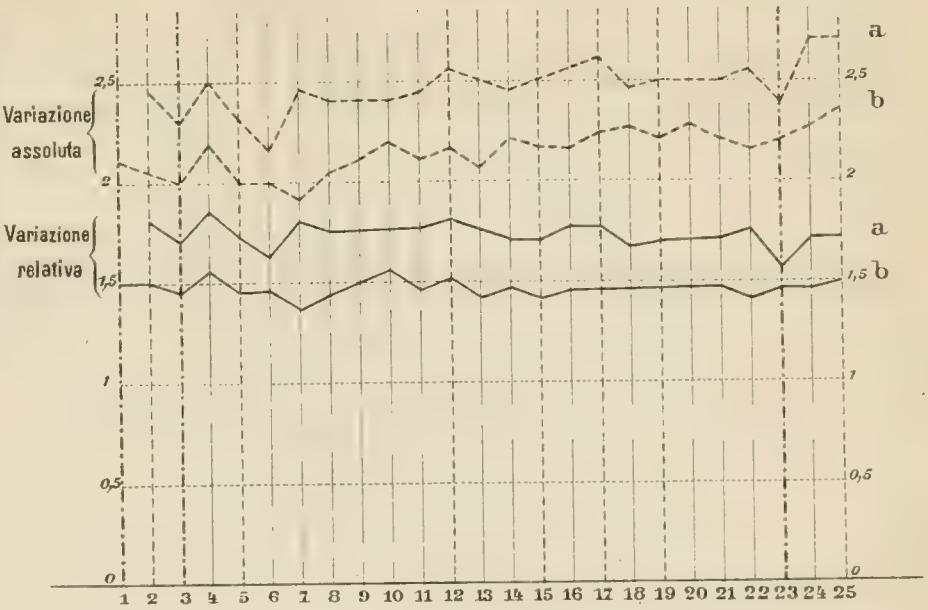


Fig. 2



(*Variazione assoluta:* Scala 20:1)

Fig. 3

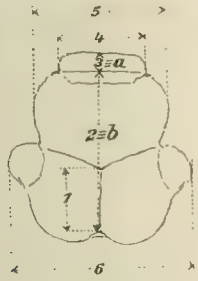


Fig. 5

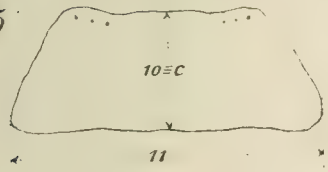


Fig. 6

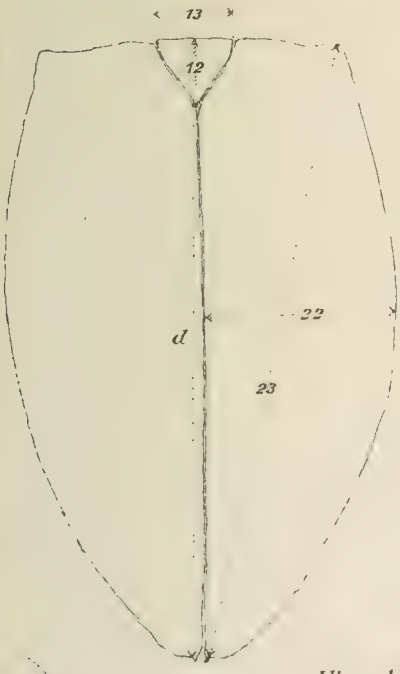


Fig. 7

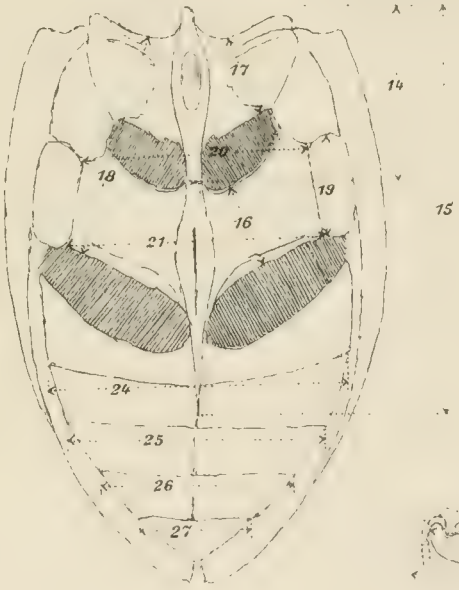


Fig. 4

Fig. 8

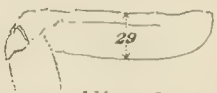


Fig. 9

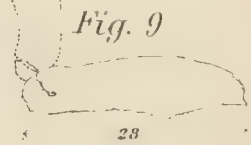


Fig. 10

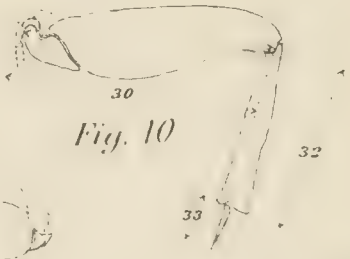


Fig. 11

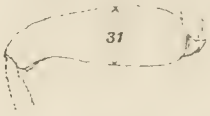


Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 19

Fig. 22

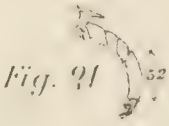
Fig. 18

Fig. 17

Fig. 16

Fig. 20

Fig. 21



Lit. Salussolia, Torino

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Esempi di rappresentazione grafica assoluta e relativa. 1° tipo. Lunghezza 4° articolo del tarso: zampe posteriori (♂ e ♀ Nizza Monf.).

Fig. 2. Id. 2° tipo. *a*) Lunghezza 5° articolo del tarso: zampe posteriori (♀ Nizza Monf.) — *b*) Id. zampe anteriori (♀ Nizza Monf.)

(Le ordinate segnate a tratti staccati - - - - -, a tratto continuo —, a punti e tratti - · - · - · - corrispondono ordinatamente a ♀ della 1ª, 2ª, 3ª forma.

Fig. 3. — *Capo* (dalla parte dorsale). 1) Diametro antero-posteriore del fronte — 2) Id. del capo (dalla parte dorsale) — 3) Id. del labbro superiore — 4) Larghezza del labbro superiore — 5) Larghezza massima della parte anteriore del capo — 6) Distanza fra le superficie laterali esterne dei due occhi.

Fig. 4. — *Capo* (dalla parte ventrale). 7) Diametro antero-posteriore del capo (dalla parte ventrale) — 8) Id. del labbro inferiore — 9) Larghezza del labbro inferiore.

Fig. 5. — *Protorace.* 10) Diametro antero-posteriore del protorace (pronoto) — 11) Larghezza massima del protorace (id.).

Fig. 6. — *Scudetto ed elitre.* 12) Diametro antero-posteriore dello scudetto — 13) Larghezza dello scudetto (alla base) — 22) Larghezza massima dell'elitra — 23) Diametro obliquo massimo dell'elitra.

Fig. 7. — *Sterno ed addome.* 14) Lunghezza dell'apofisi mesosternale — 15) Lunghezza totale dell'apofisi sternale — 16) Lunghezza minima del metasterno — 17) Id. del mesosterno — 18) Id. dello sterno — 19) Lunghezza massima dell'episterno — 20) Diametro trasversale anteriore del metasterno — 21) Id. posteriore — 24) Diametro trasversale massimo del 2° segmento visibile dell'addome — 25) Id. del 3° segmento — 26) Id. del 4° segmento — 27) Id. del 5° segmento.

Fig. 8, 9, 10, 11, 12, 13. — *Zampe posteriori.* 28) Lunghezza dell'anca — 29) Larghezza dell'anca — 30) Lunghezza del femore col trocantere — 31) Larghezza massima del femore — 32) Lunghezza della tibia — 33) Id. della spina inferiore — 34) Id. della spina laterale interna — 35) Id. del 2° articolo del tarso — 36) Id. del 3° articolo — 37) Id. del 4° articolo — 38) Id. del 5° articolo.

Fig. 14, 15, 16, 17. — *Zampe mediane.* 39) Lunghezza dell'anca — 40) Id. del femore col trocantere — 41) Id. della tibia — 42) Id. della spina inferiore — 43) Id. della spina laterale interna — 44) Id. del 2° articolo del tarso — 45) Id. del 3° articolo — 46) Id. del 4° articolo — 47) Id. del 5° articolo.

Fig. 18, 19, 20, 21, 22. — *Zampe anteriori.* 48) Lunghezza dell'anca — 49) Id. del femore — 50) Id. della tibia — 51) Id. della spina laterale esterna — 52) Id. del 5° articolo del tarso — 53) (♂) Larghezza della dilatazione del 5° articolo del tarso — 54) (♂) Lunghezza dell'unghia maggiore — 55) (♂) Id. dell'unghia minore.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Maggio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 14 maggio 1905.

Il Sindaco di Cherasco notificò per dispaccio telegrafico all'Accademia il decesso del Socio corrispondente comm. G. B. Adriani, avvenuto il 16 maggio. Il Presidente inviò condoglianze, incaricando il Sindaco stesso di rappresentare l'Accademia ai funerali. Il Direttore della Classe Socio Ferrero legge una breve commemorazione del defunto, che è inserita negli *Atti*.

D'ufficio è presentato il volume: *Romualdo Bobba - Cinquant'anni d'insegnamento (1854-1904)*, Torino, 1905, fatto stampare dai figliuoli per omaggio affettuoso al loro genitore.

Il Socio Chironi offre all'Accademia, con parole d'elogio, le seguenti pubblicazioni:

1° Arrigo Solmi, *Ademprivia; studi sulla proprietà fondiaria in Sardegna*, Pisa, 1904;

2° Cesare Bertolini, *Appunti didattici di diritto romano*, Torino, 1905, fasc. 1° e 2°.

Il Socio De Sanctis, incaricato col Socio Cipolla di riferire intorno alla dissertazione del prof. Augusto Mancini, *Sulla interpretazione e sulla fortuna dell'egloga IV di Virgilio*, legge la relazione, che essendo stata approvata dalla Classe, compare negli *Atti*. Quindi, a voti segreti unanimi, la Classe delibera che lo scritto del Mancini sia ospitato tra le *Memorie* accademiche.

Il Socio Cipolla presenta per gli *Atti* una nota del professore F. Bazzi, *Brevi appunti in contributo alla storia dell'assedio di Verrua (1625)*, e per le *Memorie* una monografia del prof. P. Gribaudi, *La geografia di S. Isidoro di Siviglia*. Il Presidente designa a riferire intorno a quest'ultima il Socio proponente Cipolla ed il Socio Renier.

LETTURE

GIOVANNI BATTISTA ADRIANI

Parole commemorative del Socio ERMANNO FERRERO.

Il decano dei nostri corrispondenti, anzi il più anziano di tutti gli ascritti alla nostra Accademia, ci ha lasciato. Il 16 di questo maggio Giovanni Battista Adriani è morto placidamente in Cherasco, dov'era nato l'11 di agosto 1823, aveva fatto i primi studii e da trent'anni aveva riportato la sua dimora.

L'Adriani, sin da giovanetto, ebbe amore per le lettere e per la storia e per il loro insegnamento: tenne scuola a Casale Monferrato presso i Padri Somaschi, suoi maestri e poscia suoi confratelli; a Racconigi, dal 1846 al 1853, nel R. Collegio per i figli dei militari, dove fu professore di storia e di geografia ed anche direttore degli studii. Da suoi discepoli intesi ch'era ottimo insegnante: non ne poteva dubitare chiunque lo udì parlare in pubblico con chiarezza d'idee, con parola fluida ed elegante.

Col 1851 principia e col 1876 si chiude la serie delle pubblicazioni dell'Adriani, non copiosa per numero, ma di mole ponderosa. Nel libro del Manno: *L'opera cinquantenaria della R. Deputazione di storia patria* è registrata la bibliografia dell'Adriani: nè qui tutta la ripeto. E neppure non prendo ad esame i suoi libri, ove si mostrò assiduo ed abile ricercatore, accurato lettore, felice interprete di documenti. Illustrò la sua Cherasco, uomini notevoli e chiare famiglie di essa (1). Vercelli gli deve

(1) *Degli antichi signori di Sarmatorio, Manzano e Monfalcone, indi degli Operti fossanesi.* Memorie storico-genealogiche corredate di molti documenti inediti (nel vol. II delle *Narrazioni sulle famiglie nobili della monarchia di Savoia* (racc. del P. Angius), ed a parte, Torino, 1853; 4°, pp. 566). — *Memorie della vita e dei tempi di monsignor Giovanni Secondo Ferrero Ponziglione, referendario apostolico, primo consigliere ed auditore generale del principe cardinale Maurizio di Savoia,* con un saggio di lettere e monumenti inediti raccolti ed illustrati, Torino, 1856; 4°, pp. 702. — *Monumenti sto-*

l'edizione largamente illustrata de' suoi statuti (1): sperò altrettanto Alba per la raccolta degli antichi suoi atti contenuti in un codice prezioso dell' Archivio milanese; ma l'impresa, per lungo tempo meditata, fu abbandonata (2).

Una missione affidatagli dalla Deputazione di storia patria gli fornì occasione di descrivere codici e carte di archivii e di biblioteche della Francia meridionale (3). Per opera sua copia di nuovi documenti trovò posto nel secondo volume *Chartarum* degl'*Historiae patriae monumenta*, e videro la luce le scritture del Beato Oglerio da Trino, abate del monastero di Lucedio nel secolo XII, conservate in un codice della biblioteca dell'Università (4). Stampando una vita inedita del cardinale Prospero Santa Croce, ch'ebbe parte notevole nelle faccende diplomatiche della corte papale dalla fine del pontificato di Paolo III al principio di quello di Pio V, le unì copiose annotazioni (5), dalle

---

rico-diplomatici degli archivi Ferrero-Ponziglione e di altre nobili case subalpine dalla fine del secolo XII al principio del secolo XIX, raccolti ed illustrati, Torino, 1858; 4°, pp. 692. — *Indice analitico e cronologico di alcuni documenti per servire alla storia della città di Cherasco e delle antiche castella di sua dipendenza, dal secolo X al XVII* ecc., Torino, 1857; pp. 166. — *Cherasco* (nel *Dizion.* del Casalis, Append. (XXVIII), 1856, p. 149-187). — *Diario del congresso e della pace di Cherasco e delle varie calamità che desolarono il Piemonte negli anni MDCXXX e MDCXXXI* edito per la prima volta, ecc., Torino, 1863; 4°, pp. 150. — Altri lavori minori.

(1) *Hist. patr. mon., Leg. mun.* II, Taurini, 1876, p. 1088-1584; ed. a parte: *Statuti del comune di Vercelli dell'anno MCCXLI aggiuntivi altri monumenti storici dal MCCXLIII al MCCCXXXV* ora per la prima volta editi ed annotati, Torino, 1877; 4° e 8°, pp. CLX-904.

(2) Ripresa e condotta a fine dai prof. Milano, Gabotto ed Eusebio per cura della Società storica subalpina.

(3) *Sopra alcuni documenti e codici manoscritti di cose subalpine od italiane conservati negli archivi e nelle pubbliche biblioteche della Francia meridionale con un cenno delle principali antichità di quella contrada*, Torino, 1855; 8°, pp. 78.

(4) *Beati Oglerii de Tridino, abbatis monasterii Laucediensis, ordinis Cisterciensium in dioecesi Vercellensi, opera quae supersunt* etc., Augustae Taurinorum, 1873; 8°, pp. LXV-243.

(5) Scrisse un lavoro numismatico, che fu la prima sua pubblicazione scientifica: *Lettere e monete inedite del secolo XVI appartenenti ai Ferrero-Fieschi, antichi conti di Lavagna e marchesi di Masserano*, illustrate con nuove annotazioni, Torino, 1851; 4°, pp. 44.

quali trasse due libri, sulla dominazione francese in Piemonte nel secolo XVI e su Ginevra ed i principi di Savoia, che mostrano come l'Adriani sapeva pure scrivere la storia, non la sola illustrazione ai monumenti storici. E lode, che pur troppo non si può dare a tutti i nostri scrittori di cose storiche, l'Adriani scriveva bene.

Egli formò pure una ricca collezione di monete antiche e moderne, italiane e straniere, e di medaglie, massimamente italiane, circa quindicimila pezzi; radunò ancora anticaglie, sigilli, pergamene, autografi, libri rari ed altre cose pregevoli. Nel 1896 donò alla sua città tali raccolte, serbandosene l'uso sino alla morte.

L'Adriani amò gli onori più di quanto sembra convenire ad uomo di studio e sopra tutto di Chiesa. Niuno però negherà che gli onori da lui ricevuti non fossero meritati; anzi il suo ingegno e la sua dottrina gli davano diritto ad altri maggiori. Ebbe coscienza del proprio valore; non presunzione di valer di più e che gli altri valessero di meno; sempre fu pronto a dar lode a chi ne reputava degno.

In quest'Accademia, a cui l'Adriani si compiaceva di appartenere da più di mezzo secolo (1), ho desiderato dargli quell'ultimo saluto, che, mal mio grado, non ho potuto dare alla sua salma nei solenni funerali del giorno 18.

Fanciullo ancora, conobbi l'Adriani, e da lui spesso mi recava a fargli vedere monete antiche, che mi dilettava di raccogliere. Egli mi accoglieva con bontà; m'incoraggiò nei primi passi negli studii; con affetto mi ha sempre accompagnato in essi; grande il debito della mia riconoscenza verso di lui; vivo il rincrescimento di non saper meglio manifestarlo.

(1) Nominato Socio corrispondente il 15 dicembre 1853.

Brevi appunti in contributo alla storia dell'assedio di Verrua (1625).

Nota del Dr. FRANCESCO BAZZI.

Nell'Archivio comunale di Crescentino si conservano carte riguardanti l'assedio di Verrua del 1625. Da queste sono ricavati quasi tutti gli appunti che qui abbiamo raccolto.

Mentre Carlo Emanuele I, respinto a mano a mano da tutte le piazze che egli aveva occupate poco prima contro Genova, ripiegava in Piemonte, il Governatore di Milano, Don Gomez Suarez de Figueroa, Duca di Feria, alla testa di venticinquemila fanti e cinquemila cavalli, con venti cannoni, dalla Lombardia scendeva nel Monferrato. Mossosi da Grana Monferrato, l'8 agosto 1625 giungeva alla confluenza della Dora Baltea col Po e poneva l'assedio alla fortezza di Verrua, colla persuasione di prenderla in meno di tre giorni senza usare il cannone, e di continuare quindi la marcia sopra Torino (1).

A difesa di Verrua accorse Carlo Emanuele co' suoi e coi Francesi del Maresciallo di Créquy in numero di diecimila uomini circa. Il 9 era riuscito a far entrare nella piazza un migliaio circa di Savoiardi, sotto il comando di Francesco Damas, conte di Saint-Réran. Egli poi aveva posto il campo tra il fiume Po e Crescentino, sulla sponda sinistra; aveva congiunto con un ponte di barche le due rive del fiume e ne aveva assicurati gli sbocchi con due fortini ben muniti. Sulla destra del fiume in una piccola pianura, che si stende ad oriente della rocca di Verrua, aveva posto un campo trincerato e l'aveva affidato ai Francesi. A mezza costa, a nord della fortezza, era un altro fortino detto di Vernatel, dal reggimento francese che durante l'assedio vi alloggiò. Alla sinistra del Po, sulla Dora Baltea, i

(1) Arch. Civico di Crescentino. Dichiarazioni autentiche Pettenati, 1625. Documento pubblicato da Giuseppe Buffa, in *Breve cenno storico della città di Crescentino, con appendice e documenti.* Torino, 1857.

Savoiardi avevano ancora costrutto e fortificato un altro piccolo ponte, per cui avevano aperto l'adito a Chivasso ed a Torino.

Il borgo di Verrua, composto di una cinquantina di case, veniva a trovarsi come nel centro di un triangolo, i cui tre vertici erano costituiti dalla Rocca o Castello, da un altro colle a mezzodì, su cui sorgeva la parrocchia di S. Giovanni Battista e da un terzo ad oriente detto la Torrazza. Il borgo ed il castello erano difesi da un debole muro. A sud del borgo, di un' aia campestre avevano formato una specie di mezza luna, distaccata dal muro: ultima fortificazione verso il nemico.

Nell'Archivio di Stato di Torino (1) esiste una tavola a disegno di questo assedio di Verrua, ove si designa inoltre una chiesa di S. Francesco con batteria, posta su di un colle fra il Castello ed il colle della Torrazza già indicato.

Le colline che sorgono, a guisa di corona, a sud di Verrua, erano state occupate dagli Spagnuoli; i quali inoltre avevano estese le loro trincee ad oriente, nella piccola pianura mentovata, sotto le trincee francesi. La destra verso Casale era tenuta dal conte di Sultz, la sinistra verso Chivasso dal conte di Serbellon. Gli Spagnuoli erano sotto il comando immediato di Don Gonzales di Cordova; i Tedeschi sotto il comando del conte di Chambourg. Il duca di Feria, che aveva il supremo comando, aveva preso gli alloggiamenti dietro gli Spagnuoli, sotto un' altura, a sud della fortezza che assediava (2).

Il giorno 11 agosto gli Spagnuoli aprirono il fuoco contro il fortino della parrocchia. Ma non è nostro scopo narrare minutamente i fatti dell'assedio, che da molti furono studiati (3), sibbene di accennare soltanto ai particolari, sui quali trovammo qualche documento, sopratutto nell'Archivio di Crescentino, dove finora ricerche non erano state fatte.

Mentre adunque si andava svolgendo accanita e terribile la lotta fra assedianti ed assediati, Carlo Emanuele, che attendeva

---

(1) Feudi del Monferrato, mazzo 67.

(2) D. Ferdinando De-Ribera, *Relatione dell'assedio di Verrua*. Torino, 1625. – Alexandre de Saluces, *Histoire militaire du Piémont*. Turin, 1818, T. III, pag. 261 sgg.

(3) Pochi anni or sono se ne occupò anche Ch. Dufayard, *Le connétable de Lesdiguières*. Paris, 1892, p. 562 sgg.

alcuni rinforzi dalla Francia, il 12 ottobre partì alla volta di Torino, lasciando il comando del campo al figlio Vittorio Amedeo. In quest'occasione consegnò a D. Lodovico Cavorretto un' istruzione coll'intento di " informare il Conestabile di Lesdiguières " dello stato delle cose di Verrua, facendo notare che la tar- " danza delle truppe del Marchese di Vignoles per i suoi Stati, " sarebbe stata di grande pregiudizio ai medesimi, come altresì " alla riputazione di S. M. Cristianissima; e di sollecitarne per- " tanto la venuta per la Tarantasia, avendone l'A. S. dato gli " ordini per le loro tappe secondo il desiderio del predetto Co- " nestabile „ (1). Il Duca ingiunge al Cavorretto di esagerare lo stato delle cose, il pericolo di uno smacco, del disonore suo e dei Francesi se si tardasse ancora a mandare i detti soccorsi, dimostrando esser impossibile che sì pochi soldati potessero tener fronte agli assedianti, guardar le trincee francesi e piemontesi; tanto più che gli Spagnuoli stavano ultimando un ponte sul Po a Pontestura, per il quale dovevano giungere da un giorno all'altro diecimila fanti e mille cinquecento cavalli per muovere contro il campo di Crescentino.

Abboccatosi poi il Duca a Torino col Conestabile il 24 ottobre, decise di arrischiar battaglia. Intanto, credendo sempre imminente l'arrivo degli Spagnuoli da Pontestura, fece pervenire a Crescentino quel maggior numero di truppe che potè riunire in Piemonte.

Ma per ben altro scopo il Feria aveva fatto costrurre il ponte: per ritirarsi al di là del Po con tutte le sue truppe, abbandonando Verrua. Infatti verso il finir d'ottobre gli Spagnuoli andavan rimovendo i pezzi di alcune batterie. Il 9 del novembre, giorno in cui finalmente era giunto al campo il Marchese di Vignoles, si apprese la notizia che il Duca di Feria, infermo, si faceva trasportare a Pontestura, lasciando il comando del campo d'assedio a Don Gonzales di Cordova. Gli Spagnuoli sospesero i loro lavori e col 15 tutta l'artiglieria era passata a Pontestura.

Al mattino del 17 giunse a Crescentino il Lesdiguières " et " dopo disinato se ne andò a Verrua ove v'era anco S. A. et

(1) Archivio di Stato: Negoziazioni colla Francia, mazzo 8.

" alli ventidue ore li nostri fecero attaccar dalli francesi una
" scaramuccia contro il nemico nel Giaretto et andarono li nostri
" a poco a poco all'alto guadagnando li posti nimici, le moschet-
" tate che si tiravano dagli uni e dagli altri erano tanto spesse
" e continuative che non si potevano numerare, insomma quella
" sera li nostri si portarono valorosamente, smarriti li nimici,
" perchè li nostri cannoni durante la scaramuccia affrettavano
" più che mai e mai cessarano di tirare tutta quella sera, che
" ne uccisero parecchi „ (1).

Il documento allude all'assalto dei Francesi alle trincee, che gli Spagnuoli conservavano nel piano di Verrua e sui ridossi dei colli che ivi declinano. I posti nemici furono espugnati dopo un vivissimo combattimento, che durò tre ore. Il Duca di Savoia ed il Conestabile di Francia assistevano all'attacco dall'alto della Rocca.

Gli Spagnuoli, guidati dal Cordova, abbandonarono il campo sotto Verrua poche ore appresso, nella notte tra il 17 ed il 18 novembre, inseguiti dalla cavalleria degli alleati.

E così finiva l'assedio di Verrua, in cui vecchi storici si accordavano generalmente nell'affermare che morissero ventimila dei nemici (2).

Su questa cifra fa le sue riserve il Cibrario (3), che dice di accordarla a meno. Infatti dalla attenta lettura della " Relatione dell'assedio „ non parrebbe possa risultare siffatta strage; anche se noi vogliamo tener calcolo del numero piuttosto considerevole di quelli che debbon esser morti di malattia o per altre cause estranee alla guerra. Ma la stessa " Relatione „, in tono un po' enfatico, pone la cifra di ventimila; e probabilmente gli altri storici, il Guichenon compreso, di qui hanno riportato questo numero.

Del resto si potrebbe forse venire a simile cifra anche per altra via. Il già più volte citato documento dell'Archivio Civico

---

(1) Arch. Civico di Crescentino: Dichiarazioni autentiche Pettenati, 1625.

(2) De-Ribera, *Relatione* cit. — A. De Saluces, Op. cit., t. III, 271, scrive che morirono circa 20.000 spagnoli.

(3) *Specchio cronologico acquisti e perdite nei domini di Casa Savoia*, che si trova in *Origini e Progresso delle istituzioni della Monarchia di Savoia sino alla costituzione del Regno d'Italia.*

di Crescentino afferma che gli Spagnuoli del Cordova, al momento della fuga, non salivano più che a quattromila uomini.

A proteggere questa ritirata erano venuti altri quattromila fanti del Conte di Mansfeld. Alessandro di Saluzzo poi narra che quando il Duca di Savoia propose al Lesdiguières di attaccare il campo di Pontestura, subito dopo la rotta, ivi non rimanevano più di quattordicimila uomini. Orbene se noi sottraessimo da questi quattordicimila gli ottomila (gli ultimi quattromila assedianti ed i quattromila provenienti da Pontestura a proteggere la ritirata) che lasciarono Verrua nel momento della fuga, avremmo la cifra di seimila uomini; che potrebbe esser costituita dai soldati, i quali dovettero accompagnare il Duca di Feria infermo, il 9, e poi scortare le artiglierie, che, in diverse riprese fino al 15 novembre, erano partite da Verrua alla volta di Pontestura. Gli Spagnuoli che, in conclusione, rimanevano dell'esercito assediante, non comprendendo i quattromila del Mansfeld, non superavano i diecimila; quindi gli altri, che mancano per giungere ai trentamila, sarebbero morti all'assedio.

Gli storici sono generalmente d'accordo nel designare il giorno in cui avvenne la fuga degli Spagnuoli. Il documento citato dell'Archivio Civico di Crescentino dice che " la notte li " nimici si levarono e presero la fuga ".

Vi ha però uno scherzo poetico di un militare del presidio di Verrua (1), il quale discorda in ciò dalle altre testimonianze storiche; ma non sapremmo realmente qual credito dare alla sua asserzione. Lo scherzo dice che gli Spagnuoli:

" ...Fugent via com tang mat
Cont i so bander nel sac
Senza batter el tambor
E partendes ai set hor
Han lassà quel bel Castel
Dond han pers ol so cervel
Con l'assedi di tre mes
Chan ben mo imparà ai so spes
A vorè fa dol gradas... "

In un' edizione speciale della " Relatione " del De-Ribera,

(1) *Fischiada Navarinesca sopra la fuga de Spagnuoli da Verrua composta da Pasqualin da Mazorbo.* Stampà li 22 Novembre l'an del 25.

esistente all'Archivio di Stato di Torino (1), è inserta una produzione poetica di circostanza e piuttosto abbondante, in lingua latina ed italiana, sulla ritirata ignominiosa dell'esercito spagnuolo dall'assedio. Da essa appare che questa avvenne nel cuore della notte. La stessa cosa risulta da un " Consiglio di Stato sopra la fuga degli Spagnuoli da Verrua „ (2).

Per ciò che riguarda le fortificazioni di Verrua durante questo assedio, in una biografia manoscritta di Vittorio Amedeo I (3), è detto che Carlo Emanuele I provvide Verrua di un valoroso reggimento, fortificò la piazza " onde poi l'applicazione di un " esercito formidabile andò a rompere il credito della propria " possanza in un vano assedio d'uno scoglio di terra „.

Con ciò si accorda la descrizione che ne fa il De-Ribera (4), il quale, diffondendosi in maggiori particolari, dice che il Castello non era altro che una vecchia casa con una torre all'antica, con un solo appartamento e senza baluardi, fossi e bastioni o altra fortificazione. Il borgo, che dice composto di una cinquantina di fuochi, era circondato da un vecchio muro con torri rotonde all'antica, senza fosso.

Verrua non doveva esser certo grandemente munita, come appare anche da una iscrizione marmorea, che ci vien detto (5), fosse più tardi murata sopra una porta del Castello:

EXIGUA ET CELEBERRIMA } 1
VERRUCA
QUAM CAR. EMM. I SAB. DUX
IMMUNITAM FORTISSIME DEFENDIT
2 } CAR. EMMANUEL II
VT IPSA SESE DEFENDERET
COMMUNIVIT

Di questa lapide esistono ancora due frammenti, i quali, rinvenuti a caso ed in diverso tempo fra le antiche macerie e

(1) Archivio di Stato: Provincia d'Asti, mazzo 23.
(2) Id. id.
(3) Archivio di Stato: Storia della Real Casa, mazzo 16.
(4) Op. cit.
(5) Dall'attuale proprietario del Castello, Marchese Invrea; dalla cortesia del quale avemmo pure il testo dell'iscrizione.

fra i ruderi della fortezza, furono, or non è molto, riuniti ed incastrati in un muro interno del Castello.

Il frammento contrassegnato col numero 2 venne pubblicato nel 1880 dall'Avv. Vittorio Del Corno nel 3° volume degli " Atti della Società d'Archeologia e Belle Arti ", a proposito di un suo studio intitolato: *Le Stazioni di Quadrata e di Ceste lungo la strada romana da Pavia a Torino.*

Il Del Corno pare propendesse a crederlo frammento di una lapide dell'epoca romana. Ma se noi consideriamo il frammento numero 1, scopertosi più tardi, e lo confrontiamo col frammento numero 2; la medesima qualità e levigatura del marmo, la medesima forma e dimensione delle lettere, e sopratutto la combinazione perfetta delle parole frammentarie col testo dell'iscrizione surriferita, provano abbastanza chiaramente che ambedue i frammenti appartengono non già ad una lapide romana, ma bensì alla lapide che si sa aver fatta murare sulla porta del Castello, il Duca di Savoia, Carlo Emanuele II.

Notiamo di passaggio che una modificazione della presente iscrizione si trova in un' altra iscrizione, che D. Emanuel Tesauro (1) dedicava al Duca Carlo Emanuele II.

...EXIGUAM, SED CELEBREM VERRUCAM, HOSTIUM OCULIS INFESTAM
QUAM AVUS IMMUNITAM DEFENDIT;
NEPOS ITA MUNIIT, UT SESE IPSA POSSIT DEFENDERE.

Lo stesso Tesauro (2) ne riporta un'altra, che esisteva incisa in marmo su di altra porta del Castello:

LODOVICO XIII AUXILIANTE
CAROLO EM. IMPERANTE
VICTORE FILIO PROPUGNANTE
HISPANO, GERMANO, SARMATA
ITALOQUE PROFLIGATO
VERRUCA SERVATA

(1) *Theatrum Statuum Regiae Celsitudinis Sabaudiae Ducis*, tomo I.
(2) Id. id., tomo II.

La medesima è riferita dal De-Ribera (1), ma di essa non ci pervenne alcun frammento, se non forse uno, di cui venimmo, or non è molto, a cognizione; ma su cui non sapremmo per ora pronunciarci. Il Dufayard riferisce pure (2) tale iscrizione ed aggiunge che sull'arco di trionfo eretto nella terra leggevansi queste parole: *Verrucae oppidum Carlo Emanuele Sabaudiae duce solo propugnante incassum tentatum.*

Il De-Ribera (3) attestava esistere un'altra lunga iscrizione incisa sulla roccia istessa; ma oltre che nessuna traccia, non se n' ha altra memoria.

Tornando alle fortificazioni, di cui si trattava, all'Archivio di Stato, *materie militari*, abbiamo una relazione di tutte le piazze fortificate del Duca di Savoia. Vi si parla anche di Verrua, ma pare che si riferisca a fatti posteriori all'assedio. Sicchè non se ne può dedurre che Verrua fosse cinta da valide fortificazioni.

I danni materiali che recarono al borgo ed ai dintorni sia le truppe nemiche che le alleate, dovettero essere certamente rilevantissimi.

Il documento citato dell'Archivio Civico di Crescentino afferma che fin da quando i Francesi eran venuti a porre il campo presso Crescentino, sulle rive del Po, avevano " rovinato tutte " le cascine del finaggio di Crescentino e Verrua, niuna eccet- " tuata, e portati via tutti gli usci, finestre e solari et anco " ogni sorta di ferramenta per farsi le loro case, sempre conti- " nuando sino all'ultimo giorno, e ne hanno scoperte molte..... " portando via li legnami tanto grossi che piccoli e non si è

(1) Op. cit., in cui asserisce sia stata sostituita ad un'altra, che esisteva fin dai tempi delle antiche guerre coi Marchesi di Monferrato:

" Quando questo porco pigliarà l'uua
Il Marchese di Monferrato pigliarà Verrua ".

Sulla porta del Castello " si vedeua un porco in piedi ch'apriva le fauci per aggiungere un grappolo d'uua pendente sopra il suo capo ".

Con qualche modificazione, e riferendola all'assedio posto dai Francesi nel 1704-1705, la cita pure un ms. dell'Archivio parrocchiale di S. Giovanni Battista in Verrua.

(2) Pag. 566.

(3) Op. cit.

" mai veduto tanto smarimento, il che ha causato un'influenza " e mortalità, sendo morti la maggior parte dei capi di casa, " massime Consiglieri „. Quando poi, messi in fuga gli Spagnuoli, i Francesi partirono alla volta di Livorno, " nel partirsi che " hanno fatto..... hanno dato il fuoco alle loro abitazioni a danno " dei poveri terrieri, che speravano ricuperare gli assi e legnami " per riedificare le cassine „. Il Castello, stando al documento, non ebbe a patir danno alcuno durante questo assedio, " sebben " abbino del tutto et affatto col cannone rovinato il borgo „.

Oppressi da tanti mali, i poveri abitanti di Verrua indirizzavano al Duca di Savoia una petizione, nella quale, dipingendo lo stato miserando in cui era stata ridotta la loro terra in questa occasione per il servizio prestato a S. A., e facendo rilevare la mortalità avvenuta nelle persone, l'estinzione quasi totale delle famiglie, la perdita del bestiame e d'ogni sorta di vettovaglie, l'abbruciamento delle case ed altre sofferenze, disordini e violenze infinite commesse dai nemici sulle loro persone e sulle loro proprietà, supplicavano vivamente di esser consolati. E chiedevano: 1° di esser liberati per cinquant'anni da ogni carico ordinario e straordinario verso S. A., e perchè non andasse deserto e disabitato il territorio di Verrua, esser esenti dalla legge urbana; 2° fosse loro concesso qualche soccorso, acciocchè potessero imprendere la riedificazione delle case e della chiesa; 3° fosser loro spedite vettovaglie, perchè, essendo rimasti privi di ogni cosa, non perissero di fame.

Assentì il Duca alle suppliche dei suoi sudditi e concesse a tutti gli abitanti di Verrua esenzione per anni venti da ogni carico ordinario e straordinario, dichiarando esenti dalla legge urbana tutti i forestieri che venissero ad abitarvi, purchè si consegnassero all'ordinario del luogo, il quale doveva farne relazione a S. A. Promise inoltre di provvedere affinchè fossero soddisfatti anche per ciò che riguardava il secondo punto della loro petizione.

Infatti, nell'elenco dei Parroci di S. Giovanni Battista in Verrua (1), troviamo: " Anno 1623 - R. D. Petrus Franciscus " Costa a Pettinengo; obiit in Februario 1663 (hic per biennium

(1) Archivio Parrocchiale di S. Giovanni Battista in Verrua.

" habitavit in arce donec Communitas restauravit Domum et " Ecclesiam dirutas extra arcem extantes) „.

A quali anni si riferisce il *biennium* della parentesi? Qui molto probabilmente si accenna alla distruzione della chiesa avvenuta durante l'assedio del 1625. Risulterebbe adunque che il buon Duca concorse realmente alla riedificazione della Chiesa due anni dopo, nel 1627.

Per ciò che concerne il terzo punto della supplica, rispose che nell'occasione che si doveva mandare colà un delegato per visitare il luogo e far riparare alle rovine, gli si darebbe ordine d'informarsi della quantità degli abitanti e si provvederebbe al soccorso (1).

La scrittura del Duca porta la data di Torino del 2 gennaio 1626 (2).

Da altra carta risulta inoltre che il Duca aveva concesso ai Verrucani di comprar sempre senza " daciti e altro gabello „ merci e vettovaglie nel luogo di Crescentino (3).

Per altra concessione da parte del Duca di Mantova, potevano recarsi coi loro bestiami e merci in qualsiasi luogo degli Stati del Monferrato, immuni da ogni " dacito e dal solito di- " falco sulla roba loro „ (4).

Il 27 gennaio dello stesso anno il Duca concedeva pure la esenzione da ogni tributo, per un decennio, al luogo di Crescentino, esentandolo inoltre dalla legge urbana per i forestieri che venissero ad abitarvi (5).

---

(1) Nell'Archivio Civico di Crescentino si ha infatti, colla data del 21 marzo 1626, la nota di una visita e perizia dei danni recati dalle soldatesche durante l'assedio di Verrua del 1625.

(2) Archivio di Stato: Feudi del Monferrato, mazzo 67.

(3) Id. id.

(4) Id. id.

(5) Archivio Civico di Crescentino: Lettere originali di Principi sabaudi.

Relazione sulla Memoria del Prof. Augusto Mancini, intitolata: *Sulla interpretazione e sulla fortuna dell'Egloga IV di Virgilio.*

L'ultimo decennio è stato contrassegnato da una rifioritura di studî sull'egloga IV di Virgilio. Si stanno sempre di fronte l'interpretazione messianica sostenuta p. e. di recente con ardore e forse non senza esagerazioni da Salomone Reinach, il quale nell'egloga non vede che un carme religioso, e l'interpretazione che esclude ogni elemento messianico, sostenuta fino all'estreme conseguenze dal Sudhaus, il quale nulla affatto vuol vedere nell'egloga che oltrepassi la cerchia del pensiero greco-romano.

Tra le teorie estreme molti sono i tentativi di mediazione; tra questi deve registrarsi l'interpretazione proposta dal prof. Augusto Mancini dell'Università di Messina nella memoria su cui abbiamo l'onore di riferire all'Accademia.

Secondo il Mancini non è punto da escludere che Virgilio abbia attinto direttamente o indirettamente a fonti giudaiche; ma l'egloga " è sostanzialmente la celebrazione del rinnovamento, simboleggiato nel ritorno dell'età aurea, del mondo greco-romano dopo la pace di Brindisi ". Per ciò che riguarda il *puer* il Mancini cerca di dimostrare che esso " è un elemento importante, ma non necessario, d'occasione, e che a torto si è considerato come il principale dell'egloga ". Non l'inizio dell'età aurea dipende dal *puer*; ma il *puer* casualmente nasce a cavallo fra un' età ed un' altra, il che non è merito nè demerito.

La polemica sulla quarta egloga non cesserà con la memoria del Mancini; e non sarà forse difficile opporgli che, se il poeta avesse della pace di Brindisi fatto il centro della sua concezione del rinnovamento del mondo, avrebbe celebrato esplicitamente quella pace, come egli non ha fatto in alcun modo. Il Mancini, il quale ammette che le fonti di Virgilio abbiano potuto fornirgli già congiunta la venuta di un *puer* o di un re al sospirato rinnovamento, trova tanto più significativo " il fatto che la na-

scita del *puer* Virgilio abbia ridotto ad un avvenimento concomitante „. E l'osservazione non è priva di acume; ma altri forse opporrà che qualcosa più di una semplice concomitanza è implicata dalla posizione, direi quasi, centrale, che il fanciullo ha nell'egloga. Ed è a questo punto da notare che, pur considerando l'egloga come un carme genetliaco per un figlio di Pollione, non resta affatto esclusa l'interpretazione messianica, come nei vaticinî ebraici talora con la profezia messianica s'intesse e si compenetra strettamente l'allusione a fatti presenti o prossimi.

Ma queste possibili obbiezioni non tolgono che la dissertazione del Mancini debba considerarsi come molto importante, sia per la grande erudizione con cui ha trattato la sua tesi, sia perchè ne ha preso occasione per occuparsi di non poche questioni particolari sulla interpretazione di varî passi dell'egloga e sulle sue relazioni con gli oracoli sibillini e con le dottrine stoiche; per modo che porta indubbiamente contributi non dispregevoli alla esegesi di Virgilio e allo studio delle sue fonti.

Non poco interesse ha anche la seconda parte della memoria del Mancini in cui si discorre dell'interpretazione dell'egloga presso i Padri. E se, com'è naturale, alcuno potrà trovare che i passi citati meritino ulteriore esame e in particolare che troppo rilievo sia dato a qualche citazione o allusione occasionale, sono in ogni caso molto importanti i materiali raccolti e sempre degne di considerazione le osservazioni del Mancini in proposito.

In base a quel che s'è esposto, tenuto conto anche della forma rigorosamente scientifica adoperata dal Mancini e della ottima cognizione che egli dimostra delle numerose pubblicazioni moderne relative al suo argomento, la Commissione propone che la sua memoria sia ammessa alla lettura nella Classe.

C. Cipolla,
G. De Sanctis, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Giugno 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANDREA NACCARI

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: FILETI, JADANZA, GUIDI, FOÀ, MORERA, SEGRE, GRASSI, PARONA e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* accademici le note seguenti:

1° Dr. Cesare AIMONETTI, *Determinazioni di gravità relativa nel Piemonte eseguite nell'estate dell'anno 1904 coll'apparato pendolare di Sterneck*, dal Socio JADANZA;

2° E. ALMANSI, *Sull'equilibrio dei sistemi disgregati*, dal Socio MORERA;

3° *Una proprietà degli archi elastici*, nota del Socio Camillo GUIDI;

4° Dr. Giacomo PONZIO, *Su alcuni nuovi acidi della serie oleica;* Nota III: *Derivati dell'acido 2,3 oleico*, dal Socio FILETI.

Il Socio SEGRE, anche a nome del Socio MORERA, legge la relazione sulla memoria del prof. Ugo AMALDI, intitolata: *I gruppi conformi reali dello spazio.* La relazione conchiude per l'accoglimento della memoria nei volumi accademici. La Classe alla unanimità approva la relazione e in seguito pure all'unanimità e con votazione segreta approva la stampa della memoria del Dr. AMALDI nei volumi accademici.

Il Socio CAMERANO presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Dr. Luigi COGNETTI DE MARTIIS, intitolato: *Gli Oligocheti della regione neotropicale*, Parte I. Il Presidente incarica i Soci SALVADORI e CAMERANO di esaminare la memoria e di riferirne in una prossima seduta.

LETTURE

Determinazioni di gravità relativa nel Piemonte eseguite nell'estate dell'anno 1904 coll'apparato pendolare di Sterneck.

Nota del Dott. CESARE AIMONETTI.

Le determinazioni di gravità di cui è oggetto la presente nota, furono eseguite nei mesi di luglio, agosto e settembre 1904 allo scopo di completare la serie di determinazioni che mi era proposto di eseguire nel Piemonte.

Nel rendere conto di tali osservazioni, sento il dovere di ringraziare l'On. Presidenza della Commissione Geodetica italiana per il valido aiuto morale e materiale datomi, l'Illmo Prof. Jadanza, direttore del Gabinetto di Geodesia dell'Università di Torino, che gentilmente mise a mia disposizione tutto il materiale scientifico che mi è stato necessario; l'Illmo Prof. Boccardi, direttore dell'Osservatorio Astronomico, ed i suoi assistenti Dott^ri^ Balbi e Nicolis, che si incaricarono gentilmente di fare le determinazioni del tempo, il personale degli uffici telegrafici di Torino e dei luoghi di osservazione che validamente mi coadiuvarono nella trasmissione dei segnali cronografici, e tutte le gentili persone che con grande cortesia mi agevolarono in tutti i modi il mio còmpito.

La conoscenza dell'andamento del cronometro d'osservazione è della massima importanza in questo genere di determinazioni. Il miglior modo di dedurlo sarebbe quello di eseguire in ogni stazione, prima e dopo, le osservazioni pendolari, e possibilmente nelle sere intermedie, delle appropriate determinazioni di tempo. Questo metodo, già da me tenuto in precedenti determinazioni (1),

(1) Cfr. *Determinazione della gravità relativa nel Piemonte* (" Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXIV, 1899) — Cfr. Id. (" Atti della R. Acc. delle Sc. ", vol. XXXVIII, 1903).

è troppo faticoso per un osservatore solo che debba durante il giorno attendere alla determinazione delle oscillazioni pendolari, ed alla sera a quella del tempo: di più richiede in ogni stazione una permanenza maggiore causata dal dover preparare anche la stazione per la determinazione del tempo, e dall'incertezza delle condizioni meteoriche. Per cui, desiderando di eseguire il maggior numero possibile di stazioni nei mesi concessimi dalle vacanze, pregai l'Illmo Prof. Boccardi di permettere di servirmi, per le mie osservazioni, del tempo determinato all'Osservatorio astronomico di Torino. Egli gentilmente aderì alla mia domanda, mise a mia disposizione per i confronti un eccellente cronometro Nardin N° $\frac{17}{7360}$ a tempo medio, ed incaricò i signori Dott^{ri} Balbi e Nicolis, astronomi in questo Osservatorio, di determinarne lo stato assoluto mediante osservazioni di tempo, eseguite periodicamente. Allora chiesi ed ottenni dal Ministero delle poste e telegrafi che fosse riattivata la comunicazione telegrafica già esistente tra l'Osservatorio astronomico e l'Ufficio telegrafico centrale di Torino, e di poter comunicare direttamente coll'Osservatorio dagli uffici telegrafici dei luoghi di stazione per alcuni minuti ogni sera, dopo la chiusura di detti uffici.

A tale scopo disposi nella sala stessa in cui sono collocati i cronometri un cronografo Hipp, munito di due penne, una comandata direttamente dal cronometro Nardin e l'altra comunicante col filo di linea per mezzo di un *relais*. Un opportuno commutatore permetteva di inserire nel circuito un tasto trasmettitore nel caso che si volesse corrispondere, od escluderlo per ricevere i segnali cronografici. Sul circuito comunicante col filo di linea erano inoltre inseriti un reostato ed un milliamperometro per regolare la intensità della corrente che veniva sempre mantenuta di 10 milliampère. Per gentilezza del sig. Comm. Sassernò e del Cav. Donadio, direttori dell'Ufficio centrale telegrafico di Torino, fu posto in ogni luogo a mia disposizione, per quanto fu possibile, sempre un circuito diretto con Torino, cioè senza apparati inseriti lungo la linea; in caso diverso si è avuto cura di fare in modo che gli apparati inseriti lungo la linea fossero esclusi durante le comunicazioni. In ogni caso si è sempre cercato per ciascuna stazione di mantenere in identiche condizioni

sia l'apparecchio ricevitore, sia il circuito conduttore, affinchè sull'andamento del cronometro non avessero influenza sensibile i fenomeni di induzione lungo la linea stessa.

In ogni luogo di stazione l'apparecchio trasmettitore consisteva in una tavoletta munita di un tasto, di un piccolo ricevitore ad orecchio e di un commutatore per inserire il cronometro nel circuito. Tale apparato veniva collegato al filo di linea in modo da sostituire completamente l'apparecchio trasmettitore e ricevitore dell'Ufficio telegrafico.

Per le misure di gravità mi servirono due cronometri: uno il cronometro Plaskett N° 5190 a tempo medio e l'altro Frodsham N° 3576 a tempo siderale ed a contatto elettrico. Siccome questo serviva tanto per le osservazioni pendolari, quanto per prendere i confronti coll'Osservatorio, e quindi veniva tutte le sere trasportato all'Ufficio telegrafico, così mi servii del cronometro Plaskett come regolatore. Perciò in ogni stazione esso veniva collocato nel luogo scelto per le osservazioni pendolari e non ne era più rimosso che a determinazione finita. Esso veniva confrontato ogni sera col cronometro Nardin dell'Osservatorio nel seguente modo: pochi minuti prima dell'ora stabilita per le comunicazioni telegrafiche si prendeva un confronto del Plaskett col Frodsham: indi questo veniva portato nell'Ufficio telegrafico, e, dopo scambiato i segnali convenuti, si inseriva nel circuito per 30^s, quindici prima e quindici dopo l'istante corrispondente al minuto primo, per due minuti consecutivi, e tali segnali venivano ripetuti nel caso che fosse necessario. Ricevuto i segnali convenuti e indicanti che la trasmissione era avvenuta regolarmente, si riportava il Frodsham nel locale delle osservazioni pendolari e si confrontava di nuovo col Plaskett. Da questi due confronti, ridotti all'istante della comunicazione telegrafica, si dedussero gli stati assoluti, e quindi gli andamenti orari del Plaskett.

Dagli andamenti orari del Plaskett si dedussero poi gli andamenti orari del Frodsham durante le osservazioni pendolari, prendendo numerosi confronti prima, durante e dopo la serie delle osservazioni stesse. I confronti del Frodsham col Plaskett furono sempre presi ad orecchio: essendo il primo a tempo siderale ed il secondo a tempo medio, l'errore che si poteva commettere era trascurabile: infatti, prendendo il confronto nel-

Stazione	Luogo di osservazione	Posizione geografica	Altezza sul mare	Natura del sottosuolo	Densità media del sottosuolo
Torino (Osservatorio)	Sotterraneo nel Palazzo Madama . .	φ = 45°04′08″ θ* = — 4 46 01	232m,7		2,5
Lanzo	Locale nel collegio convitto maschile	φ = 45 16 14 θ = — 4 58 28	540	alluviale serpentina	1,9-2 2,5
Susa	Locale nell'edificio delle scuole elementari femminili	φ = 45 08 13 θ = — 5 24 27	500	micascisto	2-2,5
Avigliana	Palazzo comunale: camerone già adibito a scuola	φ = 45 08 38 θ = — 5 3 27	506	serpentina	2,5
Rivarolo Can.	Locale nell'edificio delle scuole element.	φ = 45 20 00 θ = — 4 43 45	304	alluviale	1,8
Locana	Scuola elem. situata accanto al campanile della parrocchia (punto geodetico) .	φ = 45 25 03 θ = — 4 59 35	613	serpentina	2,5
Verrès	Cantina del palazzo comunale . . .	φ = 45 40 05 θ = — 4 45 43	388	gneiss e serpent.	2,6
Ivrea	Locale nelle scuole elementari femminili (dette di S. Francesco) . . .	φ = 45 28 00 θ = — 4 34 26	244	diorite	2,7
Santhià	Locale nelle scuole elementari maschili	φ = 45 22 00 θ = — 4 16 40	185	diluvium	1,8

* Ovest da M. Mario.

Stazione	Luogo di osservazione	Posizione geografica	Altezza sul mare	Natura del sottosuolo	Densità media del sottosuolo
Biella	Locale nelle scuole comunali maschili	φ = 45°34′02″ θ = — 4 24 05	421^{m}	gneiss	2,7
Domodossola	Locale nel palazzo comunale . . .	φ = 46 07 00 θ = — 4 9 27	275,83	id.	2,6
Gravellona (Toce)	Scuola elementare femminile . . .	φ = 45 55 40 θ = — 4 1 15	211	granito	2,7
Pallanza	Scuola elementare, attigua all' ufficio postale e telegrafico	φ = 45 55 25 θ = — 3 54 03	210	micascisto	2,4
Arona	Locale nel collegio convitto maschile	φ = 45 45 45 θ = — 3 53 42	210	id.	2,4
Romagnano (Sesia)	Scuola elementare	φ = 45 38 03 θ = — 4 04 00	266	porfidi	2,5
Varallo (Sesia)	Locale dell'asilo infantile Vietti . .	φ = 45 48 52 θ = — 4 12 00	451	roccie cristalline varie	2,5
Alagna (Sesia)	Locale privato	φ = 45 51 22 θ = — 4 31 00	1191	gneiss	2,6
Caluso	Locale annesso all'oratorio festivo . .	φ = 45 18 41 θ = — 4 33 55	350	terreno morenico	1,9

l'istante in cui le battute dei due cronometri sono in coincidenza, si ha un'incertezza nell'apprezzare tale istante che non supera i 5^s; ora, avvenendo una coincidenza ogni 6^m circa, ossia ogni 360^s, l'errore commesso non arriva certamente a $0^s,02$.

In ogni stazione, il luogo di osservazione fu scelto sempre accuratamente, in modo che fosse lontano da rumori o strade frequentate per evitare ogni possibile tremito nei muri. Di solito si fece stazione in locali destinati alle scuole comunali, che durante l'estate erano vuoti.

Le indicazioni relative ai luoghi di stazione, come anche le posizioni geografiche, le altezze sul mare e la natura e densità del sottosuolo sono contenute nel prospetto alle pagine precedenti. Le posizioni geografiche si ricavarono dalla carta d'Italia alla scala di 1 : 50 000; le altezze sul mare furono nella maggior parte delle stazioni dedotte con misure dirette dai capisaldi della livellazione geometrica; i dati relativi alla natura e densità del sottosuolo mi furono gentilmente comunicati dal chiar^{mo} Prof. Baretti, professore di mineralogia e geologia nel R. Istituto Tecnico di Torino.

L'apparecchio adoperato è quello posseduto dal Gabinetto di Geodesia della R. Università, e che ha servito già per le altre determinazioni da me eseguite in Piemonte (1). Esso consta dei quattro pendoli portanti i N^i 41, 42, 45, 46 e di due sostegni, uno a pilastro e l'altro a mensola. Come nelle altre determinazioni da me fatte, così anche in queste mi servii unicamente del sostegno a mensola: questa veniva fissata al muro per mezzo di tre robusti chiodi a vite ingessati solidamente nel muro. La stabilità della mensola veniva dapprima provata col sottoporla allo sforzo di 10 kg. in tutte le direzioni, dopo di che, prima di intraprendere le osservazioni pendolari, veniva fatta un'ulteriore verifica nel seguente modo: disposto un pendolo libero ed in riposo sulla mensola, si esercitavano su di essa con un opportuno dinamometro, dieci sforzi di 5 kg. ad intervalli regolari di 1^s, dopo dei quali si osservava se il pendolo si

(1) Per la descrizione ed uso di tale apparato cfr. *Determinazione relativa della gravità terrestre a Torino fatta nel 1896* (" Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXII, 1897).

era messo in movimento: in nessuna stazione il pendolo ha assunto dopo questi sforzi un'oscillazione sensibile.

Il metodo tenuto nelle osservazioni pendolari fu il solito, consistente nel determinare dieci volte l'intervallo corrispondente a 50 coincidenze, osservando prima gli istanti di 11 coincidenze consecutive, indi, calcolato l'istante della 51ª coincidenza ed osservati gli istanti di questa e delle 9 coincidenze successive, si avevano per differenza dieci valori del tempo corrispondente a 50 coincidenze, da cui si deduceva il valore C dell' intervallo compreso tra due coincidenze consecutive. Da questa si dedussero le durate s di oscillazione colla formula:

$$s = \frac{C}{2C-1}.$$

Nella maggior parte delle stazioni i pendoli si fecero oscillare tre volte ciascuno: in qualcuna si fecero oscillare due volte soltanto, perchè in esse si escluse una serie di osservazioni che non presentavano il grado di attendibilità delle altre a cagione di incertezze nei confronti cronometrici determinati telegraficamente. Per la riduzione poi delle durate d'oscillazione s dei quattro pendoli all'ampiezza infinitesima, alla temperatura di 0° ed al vuoto mi sono servito delle correzioni seguenti, di cui le due ultime furono determinate gentilmente dallo stesso sig. Col. V. Sterneck quando curò la costruzione dell'apparato. Esse sono:

Correzioni per l'ampiezza α di oscillazione:

$$\alpha = -\frac{1}{16}\left(\frac{a'}{R'}\right)^2 s.$$

Correzione per la temperatura:

$T = -45{,}47$ unità della 7ª decimale di s per ogni grado centigrado.

Correzione per la densità D dell'aria:

$\delta = -555D$ in unità della 7ª decimale di s.

Le temperature furono lette prima e dopo ogni oscillazione pendolare ai due termometri a lungo bulbo Woitacek, N° 37 e 109, a scala arbitraria: le loro equazioni, determinate mediante parecchie serie di confronti con tre termometri Baudin, risultarono:

$$T_{37} = (L - 4{,}253)\,1{,}735$$
$$T_{109} = (L - 5{,}211)\,2{,}269.$$

Le letture barometriche per determinare la densità dell'aria furono fatte ad un barometro aneroide Naudet, di grande modello, e confrontato prima e dopo il viaggio con un barometro Fortin.

Osservazioni per determinare la correzione del cronometro Nardin all'Osservatorio astronomico di Torino.

Queste osservazioni furono eseguite dal sig. Dott. Balbi, astronomo aggiunto in detto Osservatorio e dal Dott. Nicolis, assistente, osservando il passaggio di 5-8 stelle al cannocchiale dei passaggi (circolo meridiano) di cui una circumpolare, una zenitale e l'altra australe per dedurne le costanti strumentali.

Data 1904	Tempo cronometrico	Correzione ΔT del Nardin	Andamento medio diurno nell'intervallo
15 Luglio	$7^h,36$	$+3^h36^m04^s,71$	
			$-0^s,365$
20 „	7 ,66	36 02 ,80	
			0 ,408
23 „	7 ,44	36 01 ,58	
			0 ,729
26 „	7 ,24	35 59 ,40	
			0 ,645
30 „	7 ,24	35 56 ,82	
			0 ,724
2 Agosto	7 ,14	35 54 ,65	
			0 ,608
5 „	6 ,59	35 52 ,84	
			0 ,879
9 „	6 ,72	35 49 ,32	
			0 ,493
12 „	6 ,32	35 47 ,85	
			0 ,780
18 „	6 ,00	35 43 ,18	
			1 ,329
25 „	5 ,54	35 33 ,90	
			1 ,735
2 Settembre	5 ,70	35 20 ,01	
			2 ,049
6 „	3 ,29	35 12 ,02	

Da questi dati risulta che fino al 12 agosto il cronometro mantenne un andamento abbastanza regolare e d'altronde, essendo state fatte le determinazioni di tempo ad intervalli di pochi giorni l'una dall'altra, mi servii degli andamenti diurni segnati nella precedente tabella. Dal giorno 9 agosto in poi si vede che l'andamento cresce sensibilmente in valore assoluto da un intervallo all'altro: perciò, essendosi anche fatte le determinazioni del tempo ad intervalli maggiori, pensai di esprimere i valori di Δt mediante la formula empirica:

$$\Delta t = a + bt + ct^2,$$

essendo abc dei coefficienti che dedussi col metodo dei minimi quadrati dalle osservazioni corrispondenti ai giorni 9, 12, 18 e 25 agosto e 2, 6 settembre.

La formula trovata risultò:

$$\Delta t = + 3^h 35^m 49^s,44 - 0^s,4410\, t - 0^s,0326 t^2.$$

L'error medio dell'unità di peso risultò $m = 0^s,27$ e gli errori medî delle tre costanti risultarono rispettivamente:

$$m_a = \pm 0^s,22; \quad m_b = \pm 0,04; \quad m_c = \pm 0,0015.$$

Da quella formola si dedusse l'andamento diurno:

$$du = \frac{d\Delta t}{dt} = - 0,4410 - 0,0652 t$$

con un errore medio dell'andamento diurno $m_u = \pm 0^s,04$.

Con questa si calcolarono gli andamenti riportati nella seguente tabella, la quale contiene oltre agli andamenti orari del Nardin, dedotti dalle osservazioni del tempo, anche quelli del Plaskett, dedotti dai confronti telegrafici, e quelli del Frodsham, dedotti, come si è detto, dal Plaskett, mediante numerosi confronti presi durante le osservazioni pendolari, come pure la corrispondente correzione Δu da farsi alla durata di oscillazione s dei pendoli.

Data	Andamento orario del Nardin	Andam. orario del Plaskett ded. dal Nardin	Andam. orario del Frodsham ded. dal Plaskett	Δu
19 Luglio	— 0,015	— 0,058	— 0,057	— 80
24 "	0,030	0,077	0,077	109
25 "			0,080	113
27 "	0,027	0,094	0,068	96
29 "		0,090	0,024	34
31 "	0,030	0,058	0,061	86
3 Agosto	0,025	0,087	0,074	104
4 "		0,086	0,069	97
6 "		0,074	0,071	100
7 "	0,037	0,074	0,062	87
9 "		0,076	0,026	37
10 "	0,020	0,066	0,022	31
12 "	0,026	0,050	0,046	65
13 "	0,028	0,097	0,084	119
16 "	0,037	0,052	0,042	59
17 "	0,039	0,075	0,047	66
19 "	0,045	0,097	0,029	41
21 "	0,050	0,087	0,037	52
22 "	0,053	0,079	0,050	71
24 "	0,058	0,064	0,044	62
25 "	0,061	0,073	0,048	68
28 "	0,069	0,075	0,083	117
29 "	0,072	0,087	0,081	114
31 "	0,077	0,074	0,118	166
3 Settemb.	0,086	0,039	0,084	119
4 "	0,088	0,084	0,130	183
6 "	0,094	0,057	0,142	200

Nelle osservazioni fatte a Caluso nei giorni 27, 28 e 29 settembre, l'andamento del cronometro Plaskett fu determinato invece mediante un teodolite e col metodo delle osservazioni dei passaggi di stelle orarie nel verticale della polare. Mi ha servito a ciò un teodolite Simms a microscopi micrometrici avente l'approssimazione di 1″, a cannocchiale centrato, coll'obbiettivo di apertura mm. 47 e distanza focale cm. 35, munito di un reticolo avente 5 fili verticali ed uno orizzontale, e con livella mobile avente il valore di una parte uguale a 1″,48 ± 0,02. Esso fu adoperato disponendolo su un pilastrino stabile ed in ogni

sera si osservarono da 6 ad 8 stelle orarie metà col cerchio verticale ad est e metà ad ovest. Le formule usate sono quelle già adoperate in simili determinazioni, e nei calcoli relativi mi sono servito delle tavole dell'Albrecht (1). Le posizioni apparenti delle stelle si ricavarono dalla *Connaissance des temps*. Come orologio d'osservazione s'adoperò il Frodsham dal quale mediante confronti presi prima e dopo ogni osservazione col Plaskett si dedusse lo stato assoluto di questo. Da questo poi, mediante numerosi confronti, si dedusse l'andamento del Frodsham durante le osservazioni pendolari.

I risultati ottenuti sono dati nella seguente tabella:

Data	N° di stelle osserv.	Tempo cronom.	Correzione ΔT del Frodsham	Errore medio	Correzione ΔT del Plaskett	Tempo cronom.	Andam. orario del Plaskett	Andam. orario del Frodsham	Δu
1904 Sett.		h	m s		m s	h			
26	4	19,50	—14 51,52	±0,16	—39 11,12	19,56			
							—0,014		
27	6	19,50	—14 54,96	±0,04	—39 11,45	19,50		—0,152	—214
28								—0,159	—224
							—0,039		
29								—0,177	—250
30	8	19,50	—15 05,23	±0,08	—39 14,25	19,30			

Terminata la serie di stazioni, rifeci nell'aprile 1905 la stazione all'Osservatorio, per esaminare se i pendoli erano rimasti invariabili: in questo mi servii delle determinazioni del tempo fatte all'Osservatorio, e dedussi l'andamento del Frodsham mediante confronti cronografici col pendolo Cavignato. I risultati delle osservazioni pendolari in ogni stazione, colle rispettive medie, sono contenuti nella seguente tabella:

(1) Cfr. Albrecht, *Formeln und Hülfstafeln für Geographische Ortsbestimmungen*. Leipzig, 1894.

Durate di oscillazione dei pendoli ridotte a 0°, al vuoto ed all'ampiezza infinitesima.

Stazioni e date	Pendoli			
	41	42	45	46
Torino (1ª staz.)	0s,5080290	0s,5076857	0s,5080404	0s,5083400
19 luglio	0334	6888	0438	3417
Medie	0312	6872	0421	3408
Lanzo	0294	6809	0352	3354
24 e 25 luglio	0262	6802	0344	3316
	0292	6805	0367	3339
Medie	0283	6885	0354	3336
Susa	0662	7206	0730	3729
27 luglio	0670	7189	0744	3734
	0676	7198	0735	3726
Medie	0669	7198	0736	3730
Avigliana	0204	6735	0268	3244
29 luglio	0187	6720	0268	3252
	0177	6733	0293	3261
Medie	0189	6729	0276	3252
Rivarolo Canav.	0072	6601	0145	3128
31 luglio	0072	6586	0145	3125
	0087	6595	0152	3134
Medie	0077	6594	0147	3129
Locana	0525	7045	0583	3572
3 e 4 agosto	0511	7048	0590	3561
	0505	7034	0584	3554
	0510	7029	0577	3553
Medie	0513	7039	0583	3560
Verrès	0415	6941	0493	3478
6 e 7 agosto	0421	6950	0489	3460
	0432	6973	0516	3465
			0507	3473
Medie	0423	6955	0501	3469

Stazioni e date	Pendoli			
	41	42	45	46
Ivrea	0s,5079968	0s,5076530	0s,5080057	0s,5083045
9 e 10 agosto	9967	6493	0064	3023
	9983	6523	0079	3050
Medie	9973	6515	0067	3039
Santhià	0,5080398	0,5076929	0,5080453	0,5083437
12 e 13 agosto	0329	6877	0434	3411
	0262	6882	0342	3325
	0267	6765		3328
Medie	0314	6863	0410	3375
Biella	0102	6634	0197	3195
16 e 17 agosto	0118	6616	0185	3169
	0106	6625	0204	3179
Medie	0109	6625	0195	3181
Domodossola	0235	6705	0290	3291
19 agosto	0207	6720	0291	3287
Medie	0221	6697	0290	3289
Gravellona Toce	0022	6535	0113	3090
21 e 22 agosto	0014	6533	0102	3082
	0016	6517	0098	3078
Medie	0017	6528	0104	3083
Pallanza	0039	6528	0121	3109
24 e 25 agosto	0018	6532	0116	3086
	0014	6522	0096	3091
Medie	0024	6537	0111	3095
Arona	0122	6647	0214	3200
28 e 29 agosto	0121	6653	0208	3184
	0102	6644	0214	3186
Medie	0115	6648	0212	3190
Romagnano S.	0145	6668	0252	3213
21 agosto	0139	6656	0239	3213
Medie	0142	6662	0245	3213

Stazioni e date	Pendoli			
	41	42	45	46
Varallo Sesia	0s,5080017	0s,5076557	0s,5080121	0s,5083106
3 e 4 settembre	0053	6594	0160	3141
	0010	6547	0113	3097
Medie	0027	6566	0131	3115
Alagna Sesia	0763	7286	0851	3835
6 settembre	0754	7286	0851	3830
Medie	0758	7286	0851	3832
Caluso	0308	6842	0402	3347
27, 28, 29 sett.	0281	6805	0374	3349
	0279	6795	0370	3338
	0256	6792	0363	3342
Medie	0281	6808	0377	3344
Torino (2ª staz.)	0302	6833	0394	3370
18 e 19 apr. 1905	0285	6809	0390	3373
	0276	6832	0381	3375
	0290	6841	0403	3363
Medie	0288	6829	0392	3370

Confrontando le due stazioni fatte a Torino prima della serie di determinazioni e dopo la medesima, si notano le seguenti differenze:

	Pend. N. 41	Pend. N. 42	Pend. N. 45	Pend. N. 46
Torino 1ª staz.	0,5080312	0,5076872	0,5080421	0,5083408
„ 2ª „	0288	6829	0392	3370
Differenze	— 24	— 43	— 29	— 38

Tali differenze non sono talmente piccole che possano senz'altro trascurarsi: esse manifestano una leggera contrazione nei pendoli. Ritenendo questa variazione come proporzionale al tempo, ridussi tutte le durate di oscillazioni al medesimo giorno 19 luglio 1905. Le durate di oscillazione di ciascun pendolo in ciascuna stazione, ridotte a tale epoca, sono contenute nella seguente tavola:

Stazioni	Pendoli			
	41	42	45	46
Torino . . .	0^s,5080312	0^s,5076872	0^s,5080421	0^s,5083408
Lanzo . . .	0283	6805	0354	3336
Susa	0670	7199	0737	3731
Avigliana . .	0190	6730	0277	3253
Rivarolo Can. .	0078	6595	0148	3130
Locana . . .	0514	7041	0584	3562
Verrès . . .	0424	6957	0502	3471
Ivrea	0,5079975	6518	0069	3041
Santhià . . .	0,5080316	6866	0412	3378
Biella . . .	0111	6628	0197	3184
Domodossola .	0223	6701	0293	3293
Gravellona . .	0020	6533	0107	3087
Pallanza . . .	0027	6542	0114	3099
Arona . . .	0118	6654	0216	3195
Romagnano S.	0146	6669	0249	3218
Varallo Sesia .	0031	6573	0135	3121
Alagna Sesia .	0762	7293	0855	3838
Caluso . . .	0288	6818	0384	3353

Calcolo dei valori di g.

Da queste durate di oscillazione ed assumendo come valore dell'accelerazione di gravità a Torino:

$$g_t = 9^m,80571$$

si deducono mediante le formole:

$$g_t - g_i = g_t \frac{(s_i + s_t)(s_i - s_t)}{s_i^2}$$

i seguenti *valori di* $g_t - g_i$ per i quattro pendoli, nelle diverse stazioni e la rispettiva media.

Stazioni	Valori di $g_l - g_i$				Medie	
	Pendolo N. 41	Pendolo N. 42	Pendolo N. 45	Pendolo N. 46		
Lanzo	— 0,000112	— 0,000259	— 0,000260	— 0,000278	— 0,00023	$\pm$ 3,8.10^{-5}
Susa	+ 1382	+ 1266	+ 1220	+ 1246	+ 128	3,5
Avigliana . . .	— 0471	— 0549	— 0556	— 0598	— 054	2,6
Rivarolo Canavese	— 0903	— 1070	— 1054	— 1073	— 103	4,0
Locana	+ 0780	+ 0653	+ 0629	+ 0594	+ 066	4,0
Verrès	+ 0432	+ 0328	+ 0313	+ 0243	+ 033	3,9
Ivrea	— 1301	— 1368	— 1359	— 1416	— 136	2,3
Santhià	+ 0015	— 0023	— 0035	— 0116	— 004	2,7
Biella	— 0776	— 0943	— 0865	— 0864	— 086	3,4
Domodossola . .	— 0343	— 0661	— 0494	— 0444	— 049	6,6
Gravellona Toce .	— 1127	— 1310	— 1212	— 1239	— 122	3,8
Pallanza . . .	— 1100	— 1275	— 1185	— 1192	— 119	3,6
Arona	— 0749	— 0842	— 0791	— 0822	— 080	2,0
Romagnano Sesia	— 0641	— 0784	— 0664	— 0733	— 071	3,2
Varallo Sesia . .	— 1085	— 1155	— 1104	— 1107	— 111	1,5
Alagna Sesia . .	+ 1737	+ 1626	+ 1675	+ 1659	+ 167	2,3
Caluso	— 0093	— 0209	— 0143	— 0212	— 016	2,8
					Media	3,3

Compensazione delle osservazioni.

I risultati di $g_t - g_i$ contenuti nella precedente tavola si dedussero prendendo per ciascuna stazione la media dei quattro valori dedotti separatamente da ciascuno dei quattro pendoli. Trattandosi di pendoli di eguale lunghezza, si può ritenere che queste medie rappresentino i valori più probabili di $g_t - g_i$. Nondimeno ho creduto bene di applicare il metodo di compensazione indicato dal Ch.^{mo} Prof. Venturi (1), sia per avere un controllo delle durate di oscillazione dei quattro pendoli anche nella stazione fondamentale, e sopratutto per dedurre con metodo razionale l'error medio di una determinazione di gravità eseguita in questa campagna.

Tale metodo consiste nel determinare le correzioni δ da farsi alla durata di oscillazione dei singoli pendoli, in modo che, essendo $\Sigma\delta^2$ minimo, risultino eguali i rapporti delle durate di oscillazione dei quattro pendoli in due stazioni consecutive. Essendosi poi fatte le osservazioni nei diversi luoghi pressochè nelle stesse condizioni, ho ritenuto per semplicità le osservazioni di uguale peso.

Nelle tavole seguenti sono registrate le correzioni δ relative ai singoli pendoli, in unità della 7^a decimale del minuto secondo e le rispettive durate di oscillazione corrette.

---

(1) Cfr. A. Venturi, *Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre,* " Nuovo Cimento ", serie IV, gennaio 1900.

Correzioni delle durate di oscillazione.

Stazioni	Pendoli			
	41	42	45	46
Torino Osserv.	+ 20,4	— 11,5	— 1,6	— 7,2
Lanzo . . .	— 9,4	— 3,3	+ 6,6	+ 6,0
Susa	— 6,6	— 7,8	+ 13,4	+ 1,0
Avigliana . .	+ 1,6	— 10,2	+ 1,6	+ 6,9
Rivarolo Can. .	— 11,1	+ 0,1	+ 5,9	+ 5,2
Locana . . .	— 9,6	— 8,7	+ 7,4	+ 10,9
Verrès . . .	— 5,9	— 10,9	+ 3,1	+ 13,7
Ivrea	+ 5,4	— 9,4	— 1,6	+ 5,7
Santhià . . .	+ 6,5	— 15,5	— 2,5	+ 11,6
Biella . . .	— 1,5	— 9,7	— 0,6	— 7,6
Domodossola .	— 16,0	+ 34,0	+ 0,9	— 18,9
Gravellona . .	— 3,8	+ 11,4	— 3,8	— 3,8
Pallanza . .	— 2,1	+ 11,2	— 2,1	— 7,1
Arona . . .	+ 7,2	— 0,6	— 3,8	— 2,8
Romagnano .	+ 3,9	+ 9,2	— 12,0	— 1,0
Varallo . . .	+ 13,4	— 0,2	— 3,5	— 9,6
Alagna . . .	+ 4,9	+ 1,7	— 1,0	— 5,6
Caluso . . .	+ 2,7	+ 0,8	— 6,2	+ 2,7

Durate di oscillazione corrette.

Torino . . .	0,5080332	0,5076860	0,5080419	0,5083401
Lanzo . . .	0274	6802	0361	3342
Susa	0663	7191	0750	3732
Avigliana . .	0192	6720	0279	3260
Rivarolo . .	0067	6595	0154	3135
Locana . . .	0504	7032	0591	3573
Verrès . . .	0418	6946	0505	3485
Ivrea	0,5079980	6509	0067	3047
Santhià . . .	0,5080322	6850	0409	3390
Biella . . .	0109	6638	0196	3176
Domodossola .	0207	6735	0294	3274
Gravellona . .	0016	6544	0103	3083
Pallanza . .	0025	6553	0112	3092
Arona . . .	0125	6654	0212	3192
Romagnano .	0150	6678	0237	3217
Varallo . . .	0044	6573	0131	3111
Alagna . . .	0767	7295	0854	3832
Caluso . . .	0291	6819	0378	3356

L'error medio unitario ϵ, e quindi l'error medio E che compete ad ogni valore definitivo delle durate di oscillazione, risultarono rispettivamente:

$$\epsilon = 0^s,0000010.4$$

$$E = 0,0000005.6$$

e quindi l'error medio M_g da cui può essere affetto il valore di g, risulta:

$$M_g = \pm 0^m,00003,$$

valore che concorda colla media degli errori medî corrispondenti alle singole stazioni.

Mediante le durate di oscillazione corrette, e considerando uno qualunque dei quattro pendoli, p. es. il pendolo 41, ho calcolato di nuovo i valori di $g_t - g_i$, che risultarono, fino alla 5ª cifra decimale, eguali ai valori trovati precedentemente.

Con tali valori si dedussero quelli di g nelle diverse stazioni. A questi, applicando le correzioni:

$$+ g \frac{2H}{R}$$

dovuta all'altezza H del luogo di osservazione:

$$- g \cdot \frac{3}{2} \frac{\theta}{\theta_m} \cdot \frac{H}{R}$$

dovuta all'attrazione delle masse sottostanti alla stazione, e la correzione topografica (1), si ottennero i valori della gravità g_0 ridotta al livello del mare.

Questi risultati sono registrati nella tavola seguente, la quale contiene inoltre i valori della gravità teorica al livello del mare, calcolati colla formola:

$$\gamma_0 = 9^m,780\,(1 + 0,005310 \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

e le corrispondenti anomalie di gravità.

---

(1) Cfr. R. v. Sterneck, *Die Schwerkraft in den Alpen*, " Mitth. des k. u. militär-geograph. Instit. „, Bd. XI.

Stazioni	Gravità osservata g	Correzione per l'altitudine	Correzione per la massa sottost.	Correzione topografica	Gravità ridotta al livello del mare g_0	Gravità teorica γ_0	Anomalie di gravità $g_0 - \gamma_0$
	m				m	m	
Lanzo	9,80594	+166	— 56	+ 4	9,80708	9,80621	+ 87
Susa	443	154	52	17	562	609	— 47
Avigliana . .	625	156	52	3	732	610	+ 122
Rivarolo . . .	674	94	31	—	737	627	+ 110
Locana	505	189	63	28	659	634	+ 25
Verrès	538	118	42	23	637	657	— 20
Ivrea	707	75	27	2	757	639	+ 118
Santhià . . .	575	56	14	—	617	630	— 13
Biella	657	130	47	2	742	648	+ 94
Domodossola.	620	85	30	12	687	698	— 11
Gravellona . .	693	65	24	10	744	681	+ 63
Pallanza . . .	690	65	21	2	736	680	+ 56
Arona	651	65	21	1	696	666	+ 30
Romagnano .	642	82	28	—	696	654	+ 42
Varallo . . .	682	139	47	8	782	670	+ 112
Alagna	404	367	128	27	670	674	— 4
Caluso	587	108	28	—	667	625	+ 42

Adoperando invece pel calcolo di γ_0 la formola data dal Prof. Helmert (1):

$$\gamma_0 = 978^{cm},046 \{ 1 + 0,005302 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0,000007 \operatorname{sen}^2 2\varphi \}$$

ed applicando ai valori ottenuti la correzione $-0^{cm},015$, si avrebbero i seguenti valori di γ_0 e quindi di $g_0 - \gamma_0$.

---

(1) Cfr. F. R. Helmert, *Der normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau*, " Sitzungsberichte der K. Preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin „, XIV, 1901.

Nella mia nota: *Determinazioni di gravità relativa ecc.* (" Atti della R. Acc. delle Scienze „, vol. XXXVIII, 1903), a pag. 23, ho trascritto per isbaglio la formola di Iwanow, invece di quella di Helmert. I risultati citati furono però calcolati colle formole di Helmert.

Stazioni	γ_0	$g_0 - \gamma_0$
Lanzo . . .	$9^m,80641$	+ 67
Susa	629	— 67
Avigliana . .	630	+ 102
Rivarolo . . .	647	+ 90
Locana . . .	654	+ 5
Verrès . . .	677	— 40
Ivrea	659	+ 98
Santhià . . .	650	— 33
Biella . . .	668	+ 74
Domodossola .	718	— 31
Gravellona . .	701	+ 43
Pallanza . . .	700	+ 36
Arona . . .	686	+ 10
Romagnano .	674	+ 22
Varallo . . .	690	+ 92
Alagna . . .	694	— 24
Caluso . . .	645	+ 22

Dal Gabinetto di Geodesia della R. Università.

Torino, giugno 1905.

Sull'equilibrio dei Sistemi disgregati.

Nota di EMILIO ALMANSI.

I.

1. — In questa Nota esamino le condizioni d'equilibrio di una classe speciale di sistemi continui deformabili, che chiamo *Sistemi disgregati.*

Quelli ch'io prendo a considerare sono dei sistemi puramente ideali; ma esistono in natura dei corpi che si avvicinano, per le loro proprietà, a siffatti sistemi: tali, per es., la sabbia perfettamente asciutta, i terreni ghiaiosi, ecc.

Con maggiore approssimazione le proprietà dei miei sistemi si ritroverebbero in un corpo costituito da un grandissimo numero di particelle metalliche estremamente piccole, formanti una massa così compatta da potersi ritenere continua. E continui devono appunto immaginarsi quei sistemi disgregati che io considero.

Allo stato d'equilibrio tali sistemi godono essenzialmente di due proprietà:

a) Le pressioni interne soddisfano a quelle stesse condizioni che valgono per i solidi elastici ordinari.

b) Per un elemento qualunque di superficie situato nello spazio che occupa il sistema, l'angolo θ formato dalla normale uscente da una delle due faccie dell'elemento, colla pressione che agisce sulla faccia opposta, non può mai superare un certo valore Θ che dipende dalla natura del sistema.

Questa seconda è una proprietà ben nota, su cui non occorre insistere.

Quanto alla prima, consideriamo, per esempio, una sfera costituita di polvere metallica, sottilissima e compatta, tenuta in equilibrio da pressioni agenti sulla sua superficie. Non sarà

necessario che tali pressioni siano normali alla superficie stessa: ma l'angolo formato dalla pressione colla normale interna non dovrà in alcun punto superare Θ. Sussistendo l'equilibrio, noi potremo ritenere — ed in ciò consiste la proprietà *a)* — che la distribuzione delle pressioni, nell'interno della sfera, sia quella stessa che si avrebbe se essa fosse costituita da un solo pezzo metallico, se cioè tutte le particelle della sfera disgregata in equilibrio venissero saldate fra loro nei punti in cui già si trovano a contatto.

Nel mio lavoro ho creduto opportuno di non ammettere *a priori* le proprietà *a)* e *b)*, ma di ricavarle da altre ipotesi, due delle quali fondamentali: colla prima di esse stabilisco le deformazioni che un sistema disgregato può subire; colla seconda, supponendo un tal sistema a contatto con altri corpi, fisso la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio.

La formula in cui si traduce questa seconda ipotesi può considerarsi come l'espressione del principio dei lavori virtuali, nella sua forma più generale, purchè s'immagini che quando i punti del sistema si spostano, e lo spostamento è discontinuo sopra una superficie A, entrino in giuoco certe forze (le *forze d'attrito*) capaci di produrre quel lavoro che chiamo $\mathcal{L}_a$.

Tutto il primo capitolo della Nota è dedicato a stabilire le proprietà *a)* e *b)*. Nei successivi, ed in un'altra Nota che farà seguito a questa, esamino le conseguenze che si possono dedurre dalle proprietà dimostrate. I risultati a cui pervengo, quelli in special modo relativi al caso che una parte delle superficie che limita il sistema disgregato sia libera, non sono, a mio parere, del tutto privi d'interesse, e suggeriscono dei problemi, alcuni dei quali, fra i più semplici, ho potuto effettivamente risolvere.

Devo notare che i miei sistemi disgregati hanno qualche analogia coi *massifs pulvérulents* che il Boussinesq esamina in una lunga serie di pubblicazioni (*Comptes rendus*, a. 1873-1885); ma ne differiscono essenzialmente per le loro proprietà elastiche. Egli suppone che il coefficiente μ di Lamé non sia costante, ma proporzionale alla pressione media; ammette inoltre che sia verificata la condizione d'incompressibilità. Io ho creduto di mantenermi più vicino ai sistemi disgregati che si presentano in natura, adottando delle ipotesi che non allontanassero troppo i miei sistemi dai corpi elastici ordinari.

2. — I corpi disgregati naturali possono scomporsi in un numero grandissimo di particelle, più o meno deformabili, piccolissime, ma non piccole ad arbitrio. Io spingo, per così dire, al limite questa proprietà, e stabilisco in tal modo la seguente 1ª Ipotesi:

Un sistema continuo disgregato si può dividere in un numero qualunque di parti piccole ad arbitrio, ciascuna delle quali può muoversi, indipendentemente dalle altre, e deformarsi come un solido elastico.

Se dunque ξ, η, ζ denotano le componenti dello spostamento di un punto qualunque del sistema, le funzioni ξ, η, ζ potranno esser discontinue sopra una superficie che divida lo spazio da esso occupato in quante parti si voglia, od anche sopra una porzione soltanto di una tal superficie.

Naturalmente le discontinuità dovranno esser tali che le varie parti del sistema separate da quella superficie non penetrino le une nelle altre. Ciò porta come conseguenza che se le funzioni ξ, η, ζ non sono ovunque continue, lo spostamento, in generale, non sarà invertibile.

2ª Ipotesi. — *Supponendo il sistema disgregato a contatto con altri corpi, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio dell'intero sistema sia questa: che per ogni spostamento virtuale si abbia:*

$$\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_a \leqq 0, \tag{1}$$

ove $\mathcal{L}_E$ rappresenta il lavoro delle forze che agiscono sui corpi esterni, $\mathcal{L}_m$ ed $\mathcal{L}_e$ i lavori delle forze di massa e delle forze elastiche agenti sul sistema disgregato, $\mathcal{L}_a$ il lavoro delle forze d'attrito.

Diciamo S lo spazio occupato dal sistema disgregato, XdS, YdS, ZdS le componenti della forza di massa che agisce sull'elemento dS attiguo al punto (x, y, z), $\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, $\zeta = \delta z$ le componenti dello spostamento virtuale di questo punto. Avremo:

$$\mathcal{L}_m = \int_S (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, dS, \tag{2}$$

od anche:

$$\mathcal{L}_m = \Sigma \int_{S_i} (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, dS_i,$$

ove con S_i denotiamo una qualunque delle parti in cui lo spazio S è diviso dalla superficie sulla quale ξ, η, ζ sono discontinue, completata, se occorre, con altre superficie.

Il *lavoro delle forze elastiche* supporremo sia espresso dalla formula:

$$\mathcal{L}_e = \Sigma \int_{S_i} \delta W dS_i,$$

W denotando una funzione definita negativa, omogenea di 2° grado, delle sei quantità ϵ_{12}, ϵ_{22}, ϵ_{33}, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$, $\epsilon_{31} = \epsilon_{13}$, legate dalle formule:

$$(3) \qquad \epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ ecc.},$$

alle componenti u, v, w dello spostamento che subisce un punto qualunque nel passaggio da uno stato particolare del sistema, lo *stato naturale*, a quello stato che attualmente si considera.

Osserviamo che se un sistema disgregato allo stato naturale, che indicheremo con S_0, lo dividiamo in un numero qualunque di parti (1ª ipotesi), e moviamo ciascuna parte *senza deformarla*, le componenti di deformazione ϵ_{11}, ϵ_{12}, ecc., nel secondo stato, che diremo S_0', saranno ancora nulle. In uno stato qualunque del sistema, troveremo per le quantità ϵ_{11}, ϵ_{12}, ecc. gli stessi valori, a qualunque stato come S_0, S_0' ecc. ci si riferisca per calcolare u, v, w. Ciò è quanto dire che per i sistemi disgregati si deve ammettere l'esistenza d'*infiniti stati naturali*. Ora noi supporremo che un sistema disgregato in uno stato qualunque possa sempre riportarsi ad uno stato naturale mediante una deformazione rappresentata da funzioni $-u$, $-v$, $-w$ finite e continue, con tutte le loro derivate, in tutto lo spazio occupato dal sistema.

Tali risulteranno pure le funzioni ϵ_{11}, ϵ_{12}, ecc.

Si ha:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{11}} \delta\epsilon_{11} + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{12}} \delta\epsilon_{12} + \ldots\ldots$$

Ma $\delta\epsilon_{11} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, ecc.; onde ponendo:

$$(4) \qquad p_{11} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{11}}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{12}}, \ldots,$$

avremo:

$$\mathcal{L}_e = \Sigma \int_{S_i} \left\{ p_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + p_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \ldots \right\} dS_i.$$

I coefficienti che figurano in W supporremo siano finiti e continui colle loro derivate prime rispetto ad x, y, z. Tali risulteranno pure le funzioni $p_{11}, p_{12}, \ldots\ldots$

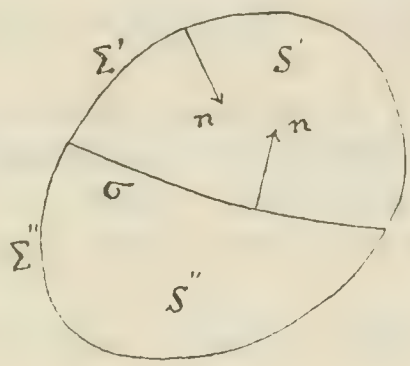
Il *lavoro delle forze d'attrito* $\mathcal{L}_a$ sia nullo quando le funzioni ξ, η, ζ sono ovunque continue. Se ξ, η, ζ sono discontinue sopra una superficie A, supporremo che sia:

$$\mathcal{L}_a = -\int_A L\mu dA, \tag{5}$$

ove μ *è la grandezza del vettore differenza geometrica fra gli spostamenti di due punti infin.te vicini a* dA, *e situati dalle due parti di questo elemento;* L *una quantità sempre positiva, indipendente dalla grandezza di* μ.

Sul valore di L dovremo più avanti aggiungere qualche altra ipotesi. Vediamo intanto a quali resultati conducono le ipotesi fatte.

3. — Sviluppiamo la formula (1) supponendo che le funzioni ξ, η, ζ siano discontinue sulla superficie Σ che limita lo spazio S occupato dal sistema disgregato, e sopra una superficie σ, la quale divida lo spazio S in due parti S' ed S''.



Poniamo:

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_e' + \mathcal{L}_e'',$$

ove:

$$\mathcal{L}_e' = \int_{S'} \left\{ p_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + p_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \ldots \right\} dS',$$

ed $\mathcal{L}_e''$ ha un'espressione analoga.

Eseguiamo nella formula precedente un'integrazione per parti. Diciamo perciò Σ' quella porzione di Σ che insieme a σ limita S'; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni della normale n, rivolta verso S', in un punto qualunque di Σ' e di σ; e poniamo:

$$\mathrm{H}_1 = \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \text{ ecc.}$$

$$p_1 = p_{11}\cos\alpha + p_{12}\cos\beta + p_{13}\cos\gamma, \text{ ecc.} \tag{6}$$

Si otterrà:

$$\mathcal{L}_e' = -\int_{S'} (\mathsf{H}_1\xi + \mathsf{H}_2\eta + \mathsf{H}_3\zeta)\,dS' -$$

$$-\int_{\Sigma'} (p_1\xi' + p_2\eta' + p_3\zeta')\,d\Sigma' - \int_\sigma (p_1\xi' + p_2\eta' + p_3\zeta')\,d\sigma_0.$$

Negl'integrali estesi a Σ' e σ abbiamo indicato con ξ', η', ζ' i valori delle funzioni ξ, η, ζ dalla parte di S'.

Una formula analoga varrà per $\mathcal{L}_e''$. Nell'integrale esteso a σ in luogo di p_1, p_2, p_3 dovremo porre $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$, e in luogo di ξ', η', ζ' i valori ξ'', η'', ζ'' che le funzioni ξ, η, ζ assumono dalla parte di S''. Nell'integrale esteso a Σ'' ci conviene indicare ancora con ξ', η', ζ' i valori di ξ, η, ζ sulla faccia *interna*.

Sommando membro a membro queste due equazioni otterremo:

$$(7)\quad \mathcal{L}_e = -\int_S (\mathsf{H}_1\xi + \mathsf{H}_2\eta + \mathsf{H}_3\zeta)\,dS - \int_\Sigma (p_1\xi' + p_2\eta' + p_3\zeta')\,d\Sigma - \int_\sigma T\,d\sigma,$$

ove:

$$(8)\qquad T = p_1(\xi' - \xi'') + p_2(\eta' - \eta'') + p_3(\zeta' - \zeta'').$$

Se diciamo A l'insieme delle due superficie Σ e σ, ove le funzioni ξ, η, ζ sono discontinue, e nei punti di Σ indichiamo con ξ'', η'', ζ'' i valori che le funzioni ξ, η, ζ assumono sulla faccia *esterna*, potremo scrivere:

$$(9)\quad \mathcal{L}_e = -\int_S (\mathsf{H}_1\xi + \mathsf{H}_2\eta + H_3\zeta)\,dS - \int_\Sigma (p_1\xi'' + p_2\eta'' + p_3\zeta'')\,d\Sigma - \int_A T\,dA.$$

Una parte della superficie Σ può essere libera: ivi potremo attribuire a ξ'', η'', ζ'' valori arbitrarii.

Sostituiamo nella formula (1) ad $\mathcal{L}_m$, $\mathcal{L}_e$ ed $\mathcal{L}_a$ le loro espressioni date dalle formule (2), (9) e (5). Si otterrà:

$$(10)\quad \mathcal{L}_E - \int_S \left\{ (\mathsf{H}_1 - X)\xi + (\mathsf{H}_2 - Y)\eta + (\mathsf{H}_3 - \mathsf{Z})\xi \right\} dS -$$

$$-\int_\Sigma (p_1\xi'' + p_2\zeta'' + p_3\zeta'')\,d\Sigma - \int_A (L\mu + T)\,dA \lesseqgtr 0.$$

Nel caso particolare che le funzioni ξ, η, ζ siano continue anche sopra A, l'integrale esteso ad A sparisce. Al doppio segno $\lesseqgtr$ dovremo sostituire il segno d'uguaglianza, giacchè al-

lora la formula precedente dovrà sussistere anche se s'inverte il movimento: noi supponiamo che invertendo il movimento, il lavoro $\mathcal{L}_E$ cambi di segno.

Ciò porta come conseguenza che debba essere:

$$\mathcal{L}_E = \int_\Sigma (p_1\xi'' + p_2\eta'' + p_3\zeta'')\, d\Sigma, \tag{11}$$

e, in tutti i punti di S, $\mathsf{H}_1 - X = \mathsf{H}_2 - Y = \mathsf{H}_3 - Z = 0$, ossia:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} = X, \text{ ecc.} \tag{12}$$

Poichè d'altronde $\mathcal{L}_E$ non dipende dallo spostamento dei punti di S, la (11) dovrà esser valida anche se ξ, η, ζ sono discontinue sopra Σ. Onde la (10) diventerà:

$$-\int_A (L\mu + T)\, dA \lesseqgtr 0. \tag{13}$$

Ricordiamo che μ è la grandezza del vettore differenza geometrica fra gli spostamenti di due punti situati dalle due parti dell'elemento dA. Determiniamo il verso di questo vettore fissando che le sue componenti siano $\xi' - \xi''$, $\eta' - \eta''$, $\zeta' - \zeta''$. Inoltre diciamo P il vettore di componenti p_1, p_2, p_3. Avremo allora per la formula (8):

$$T = P\mu \cos(P, \mu),$$

ove P e μ, denotando le grandezze dei vettori, sono quantità essenz.^{te} positive. E la (13) si potrà scrivere:

$$\int_A \left\{ L + P\cos(P, \mu) \right\} \mu\, dA \gtreqless 0.$$

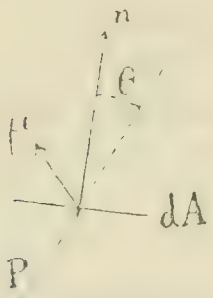
Affinchè questa condizione sia sempre verificata, dovrà essere

$$L + P\cos(P, \mu) \gtreqless 0, \tag{14}$$

per qualunque elemento di A, e per tutte le direzioni che può assumere il vettore μ. Poichè d'altronde la porzione σ di A è arbitraria, la cond. (14) dovrà esser verificata per qualunque elemento di superficie, situato nello spazio S, non esclusa la su-

perficie Σ. Ed allora la cond. (1) resulterà soddisfatta qualunque sia la superficie su cui le funzioni ξ, η, ζ sono discontinue.

Nell'applicare la formula (14) deve tenersi presente che se $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ denotano i coseni di direzione di una delle due normali ad un elemento dA, la quale indichiamo con n, il vettore P avrà per componenti $p_1 = p_{11}\cos\alpha + p_{12}\cos\beta + p_{13}\cos\gamma$, ecc.: il vettore μ sarà la differenza geometrica tra lo spostamento di un punto infinitamente vicino a dA, *situato dalla parte di* n, e lo spostamento di un punto situato dalla parte opposta.



Affinchè non vi sia compenetrazione di materia, evidentemente *è necessario che* μ *formi con* n *un angolo acuto, o al più retto.*

Dalle formule (6) e (12) si ricava, con considerazioni ben note, che $p_1 dA$, $p_2 dA$, $p_3 dA$ possono esser considerate come le componenti dell' azione che viene esercitata, attraverso l'elemento dA, sulla materia situata dalla parte di n. Dunque P denota la *pressione* (o *tensione*, se l'angolo θ formato da P con n è ottuso) esercitata sulla faccia dell'elemento dA *che guarda in senso opposto ad* n.

4. — Se il lavoro delle forze d'attrito fosse sempre nullo ($L = 0$), la formula (14) diventerebbe:

$$P\cos(P, \mu) \geqq 0,$$

ossia dovrebbe essere $\cos(P, \mu) > 0$ per qualunque direzione di μ formante un angolo acuto o retto con n: la qual condizione non è verificata se non quando P abbia la direzione di n. In questo caso il sistema disgregato si riduce ad un fluido.

Per qualunque sistema disgregato, se P ha ovunque la direzione di n, la cond. (14) è soddisfatta: giacchè allora sarà $\cos(P, \mu) = \cos(n, \mu) \geqq 0$, ed L è positivo per ipotesi. Onde sussisterà l'equilibrio: vale a dire: *un sistema disgregato sta sempre in equilibrio sotto l'azione di forze capaci di tenere in equilibrio un fluido.*

La reciproca, in generale, non è vera.

5. — Esaminiamo più a fondo la condizione (14), tenendo presente che $-L\mu dA$ rappresenta il lavoro (negativo) eseguito dalle forze d'attrito, quando le due particelle materiali separate da dA non hanno lo stesso spostamento.

In mancanza di esperienze dalle quali si possa ricavare con sicurezza l'espressione generale di L, noi dovremo adottare quelle ipotesi che si presentano come più naturali, e non sono in contraddizione coi dati che l'esperienza fornisce.

È utile premettere un'osservazione. Si potrebbe pensare che il lavoro d'attrito $-L\mu dA$ sia diverso da zero *soltanto* quando vi è sfregamento fra le due particelle materiali separate da dA, quando cioè lo spostamento relativo μ giace nel piano di dA. Se così fosse realmente, se cioè fosse $L=0$ per tutte le direzioni di μ che formano un angolo *acuto* con n, in virtù della formula (14) dovrebbe aversi, per tali direzioni di μ, $\cos(P, \mu) \gtreqless 0$. La pressione P dovrebbe perciò esser normale a dA. Le condizioni di equilibrio di un sistema disgregato coinciderebbero con quelle di una massa fluida: ciò che è in disaccordo coll'esperienza.

Noi dovremo quindi ritenere che L sia, in generale, diverso da zero, anche se μ non giace nel piano di dA.

Supporremo però che L sia nullo quando il distacco fra le due particelle separate da dA avviene normalmente a dA, quando cioè μ ha la direzione di n. Allora per la formula (14) dovrà essere $\cos(P, n) \gtreqless 0$, ossia la pressione P dovrà formare un angolo acuto con n, vale a dire dovrà essere effettivamente una *pressione*, e non una *tensione*.

Quando la pressione P è nulla si può ritenere che il lavoro d'attrito sia nullo per qualunque spostamento μ.

A parità di condizioni, il lavoro $-L\mu dA$ è, in valore assoluto, tanto più grande, quanto più grande è la pressione P che agisce su dA. Noi ci atterremo alla ipotesi più semplice: supporremo che esso sia proporzionale a P, vale a dire che L sia espresso dalla formula:

$$L = hP. \tag{15}$$

ove h denota una quantità positiva, indipendente dalla grandezza dei vettori P e μ, ma che potrà dipendere dalle loro direzioni.

Supponendo il sistema ugualmente costituito rispetto a tutte le direzioni uscenti da ogni suo punto, h dovrà conservare lo stesso valore quando si faccia rotare P e μ intorno ad n senza alterare l'angolo che μ forma con P: ossia h dovrà dipendere soltanto dagli angoli (P, n), (P, μ), (μ, n). Chiameremo θ, ϵ, ω questi tre angoli.

La formula (14), tenendo conto della (15) e sopprimendo il fattore P (escludo il caso $P = 0$), si potrà scrivere:

$$h(\theta, \epsilon, \omega) + \cos\omega \gtreqless 0,$$

od anche:

$$f(\theta, \epsilon, \omega) > 0, \tag{16}$$

ove f è una funzione la cui natura dovrà esser la stessa per tutti gli elementi di superficie passanti per uno stesso punto situato nell'interno del sistema disgregato.

Sugli elementi della superficie Σ la natura della funzione f potrà dipendere dalla natura dei corpi coi quali la superficie è a contatto. Per maggior chiarezza rappresenteremo con:

$$f_1(\theta, \epsilon, \omega) \gtreqless 0 \tag{17}$$

la condizione che deve esser verificata sulla superficie Σ.

Le cond. (16) e (17) dovranno esser soddisfatte per tutti i valori di ϵ ed ω che corrispondono a direzioni possibili di μ: a direzioni, cioè, formanti un angolo acuto con n.

Consideriamo la funzione $f(\theta, \epsilon, \omega)$ relativa ad un punto a situato nell'interno dello spazio S. Se teniamo costante l'angolo θ, e facciamo variare ϵ ed ω, varierà in generale il valore di $f(\theta, \epsilon, \omega)$. Indichiamo che $F(\theta)$ il suo limite inferiore. che dovrà esistere giacchè $f = h + \cos\omega$, ed h è sempre positiva. La cond. (17) si potrà sostituire coll'altra:

$$F(\theta) \gtreqless 0. \tag{18}$$

Già sappiamo che quando l'angolo θ è ovunque nullo, quando cioè su tutti gli elementi agisce una pressione normale, l'equilibrio sussiste. La cond. (18) dovrà dunque esser verificata per $\theta = 0$.

Anche sappiamo che θ non può superare $\frac{\pi}{2}$.

Fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ vi saranno in generale dei valori che soddisfano la cond. (18), e dei valori che non la soddisfano.

Diciamo Θ l'angolo il quale gode di questa proprietà: che la cond. (18) è soddisfatta per tutti i valori di θ compresi fra 0 e Θ, ma non pei valori immediatamente superiori.

Con ciò non si esclude che vi possano essere altri valori di θ, maggiori di Θ, pei quali la cond. (18) sia verificata.

Ora dico che se il sistema disgregato è in equilibrio, per nessun elemento di superficie passante per il punto a, l'angolo θ, che P forma con n, può superare Θ.

Infatti supponiamo che sopra un elemento dA, passante per a, agisca una pressione P che formi colla normale un angolo $\theta' > \Theta$. Per lo stesso punto a passano tre elementi (normali alle direzioni principali) sui quali agisce una pressione normale, pei quali cioè si ha $\theta = 0$. Considerando tutti gli elementi che passano per a, troveremo per θ tutti i valori compresi fra 0 e θ', e in particolare quelli immediatamente superiori a Θ, che non verificano la cond. (18). L'equilibrio non può dunque sussistere.

Ciò porta come conseguenza che la condizione $F(\theta) \geqq 0$, equivale perfettamente all'altra:

$$\theta \leqq \Theta, \tag{19}$$

ove Θ è una quantità il cui valore potrà variare da punto a punto: sarà costante se il sistema è omogeneo.

Noi arriviamo così alla proprietà fondamentale relativa ai sistemi disgregati in equilibrio. Tutte le conseguenze a cui essa conduce sono, con grande approssimazione, verificate dall'esperienza.

6. — La cond. (17) relativa agli elementi della sup. Σ che limita il sistema disgregato, chiamando, per un punto qualunque di Σ, $F_1(\theta)$ il limite inferiore della funzione f_1 relativa a quel punto, si potrà scrivere:

$$F_1(\theta) \geqq 0. \tag{20}$$

Questa condizione, come la (18), è certamente verificata per $\theta = 0$. Inoltre, per nessun elemento $d\Sigma$ può essere $\theta > \Theta$: altri-

menti sarebbe $\theta > \Theta$ anche per un elemento formante con $d\Sigma$ un angolo infinitamente piccolo, situato perciò entro S, e la condizione (19), per un tale elemento, non risulterebbe verificata.

Se tutti i valori di θ compresi fra 0 e Θ verificano la condizione (20), essa è superflua.

Se fra 0 e Θ vi sono dei valori di θ che non verificano la condizione (20), potrà darsi che questa si possa mettere sotto la forma:

$$\theta \lesseqgtr \Theta_1, \tag{21}$$

Θ_1 denotando una quantità che dovrà avere, in tutti i punti di Σ, un valore inferiore a Θ. Ma ciò non può esser dimostrato con un ragionamento analogo a quello fatto per la condizione (18), giacchè la (20) non deve esser verificata per tutti gli elementi di superficie che passano per un dato punto, ma soltanto per gli elementi di Σ. Sarebbe necessario aggiungere qualche altra ipotesi sul valore di L relativo agli elementi di Σ, per dimostrare che la condizione (21) equivale alla (20), come per i corpi disgregati che si presentano in natura è da ritenersi che sia.

Un caso su cui conviene di fermare l'attenzione si presenta quando sugli elementi di Σ sia sempre $L = 0$, vale a dire quando la superficie dei corpi coi quali è a contatto il sistema disgregato è una superficie senza attrito. Ripetendo un ragionamento già fatto, troveremo che in questo caso la pressione esterna deve esser normale alla superficie Σ, come accadrebbe se si trattasse di un fluido.

II.

1. — Abbiamo veduto che quando un sistema disgregato è in equilibrio, l'angolo θ formato dalla normale n ad un elemento dA, colla pressione P che agisce sulla faccia dell'elemento opposta ad n, non può superare un certo valore Θ, ben determinato in tutti i punti dello spazio occupato dal sistema.

In questo secondo Capitolo dedurremo alcune conseguenze dalla formula $\theta \leqq \Theta$. In particolare, supponendo che una porzione Σ_0 della superficie Σ che limita il sistema non sia a contatto con

corpi esterni, esamineremo le proprietà relative ai punti della superficie libera Σ_0.

Dimostreremo perciò il teorema seguente:

Se un elemento di superficie dA, *passante per un punto a del sistema, non è soggetto a pressione, nessun elemento passante per a è soggetto a pressione.*

Prendiamo il punto a come origine delle coordinate, una delle due normali a dA come asse delle z, gli assi delle x e delle y ad arbitrio.

La pressione che agisce su dA essendo nulla, avremo in a:

$$p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0.$$

Consideriamo un elemento dA' passante per l'asse della $y (\cos\beta = 0)$. Le componenti della pressione P che agisce su dA', per le formule (6), saranno:

$$p_1 = p_{11} \cos\alpha, \quad p_2 = p_{21} \cos\alpha, \quad p_3 = 0,$$

quindi:

$$P = \sqrt{p_{11}^2 + p_{21}^2} \,.\, \cos\alpha \,.\, (\text{val. as.}).$$

La componente normale di P è data in generale dalla formula:

$$N = p_1 \cos\alpha + p_2 \cos\beta + p_3 \cos\gamma.$$

Nel nostro caso sarà:

$$N = p_1 \cos\alpha = p_{12} \cos^2\alpha.$$

Se $p_{11}^2 + p_{21}^2$ fosse diverso da zero, il rapporto $\frac{N}{P} = \frac{p_{11}}{\sqrt{p_{11}^2 + p_{21}^2}} \cos\alpha$ rappresenterebbe il coseno dell'angolo θ formato da P colla normale a dA'. Col tendere di α a $\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ tenderebbe a zero; dunque θ, per valori di α abbastanza vicini a $\frac{\pi}{2}$, sarebbe certamente maggiore dell'angolo acuto Θ, onde la condizione $\theta < \Theta$ non risulterebbe verificata.

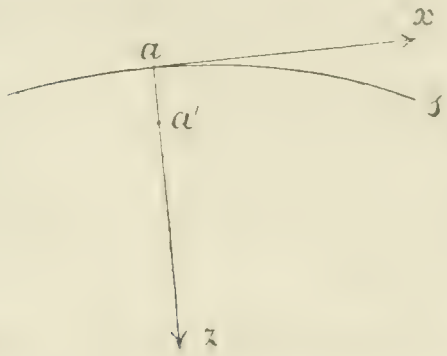
Dovrà quindi essere $p_{11}^2 + p_{21}^2 = 0$, e perciò $P = 0$. Ma dA' può rappresentare un elemento qualunque passante per a, l'asse delle y essendo arbitrario nel piano di dA: il teorema è dunque dimostrato.

2. — Dal teorema precedente segue che se una porzione Σ_0 della superficie Σ che limita il sistema disgregato non è a contatto con altri corpi, se cioè nessuna pressione agisce sopra i suoi elementi, la pressione sarà pure nulla su qualunque elemento di superficie che passa per un punto di Σ_0. In altre parole:

Le particelle materiali attigue alla superficie libera di un sistema disgregato in equilibrio, si trovano allo stato naturale.

In tutti i punti della superficie libera le sei tensioni $p_{11}, p_{12}, \ldots$, sono dunque nulle. Da ciò si riconosce che se un solido elastico sta in equilibrio sotto l'azione di certe pressioni applicate soltanto ad una porzione della sua superficie, un sistema disgregato, sotto l'azione di quelle stesse pressioni, in generale non potrà stare in equilibrio. L'essere infatti sugli elementi della superficie libera $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, vale a dire $p_{11}\cos(n, x) + p_{12}\cos(n, y) + p_{13}\cos(n, z) = 0$, ecc., non porta come conseguenza che debba essere $p_{11} = 0$, $p_{12} = 0$, ecc.

3. — Sia a un punto della superficie libera Σ_0 in cui essa ammetta un piano tangente determinato. Prendiamo il punto a come origine delle coordinate, la normale interna come asse delle z. Diciamo s la linea intersezione del piano xz con Σ_0.



Poichè nei punti di Σ_0 le pressioni p_{11}, p_{12}, ecc. sono tutte nulle, sarà nel punto a:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial s} = 0, \text{ ecc.}$$

ossia:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial p_{11}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial p_{11}}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0, \text{ ecc.}$$

Ma in a $\frac{dx}{ds} = 1$, $\frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0$. Dunque $\frac{\partial p_{11}}{\partial x} = 0$; e così $\frac{\partial p_{12}}{\partial x} = 0$, ecc. Analogamente per le derivate rispetto ad y. Quindi le formule (12) daranno:

$$\frac{\partial p_{31}}{\partial z} = X, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = Y, \quad \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = Z.$$

Sull'asse delle z prendiamo un punto a' infinitamente vicino ad a. Nel punto a' sarà, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$p_{31} = (p_{31})_a + \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right)_a dz, \text{ ecc.},$$

ossia, poichè $(p_{31})_a = 0$, $\left(\frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right)_a = X$, ecc.:

$$p_{31} = Xdz, \quad p_{32} = Ydz, \quad p_{33} = Zdz.$$

Ma p_{31}, p_{32}, p_{33} sono le componenti della pressione che agisce sull'elemento passante per a', normale all'asse delle z (e precisamente sulla faccia che guarda nel verso negativo dell'asse: v. Cap. I, § 4, in fine). Dunque:

La pressione che agisce sopra un elemento di superficie parallelo ed infinitamente vicino ad un elemento della superficie libera di un sistema disgregato, ha la direzione della forza di massa.

E poichè la pressione non può formare colla normale all'elemento un angolo maggiore di Θ:

In un punto qualunque della superficie libera di un sistema disgregato, la normale interna non può formare colla forza di massa agente in quel punto un angolo maggiore di Θ.

Se per es. si tratta di un sistema omogeneo *pesante,* l'angolo formato dalla normale alla superficie libera, colla *verticale*, non può superare un certo valore costante Θ che dipende dalla natura del sistema.

È ben nota questa proprietà dei corpi disgregati in equilibrio. L'angolo Θ vale all'incirca 45° per i terreni ghiaiosi: ha un valore notevolmente maggiore per la terra di consistenza ordinaria (v., p. es., Colombo, *Manuale dell'Ingegnere*, § 136).

4. — Abbiamo supposto (I, 5) che il sistema sia ugualmente costituito rispetto a tutte le direzioni uscenti da un suo punto qualunque. La funzione W (I, 2) assume allora una nota forma, in cui figurano due soli coefficienti. E le formule (4), tenendo conto delle (3), diventano:

$$(22) \quad p_{11} = -2m\frac{\partial u}{\partial x} - n\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right), \; p_{12} = -m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ ecc.}$$

ove m, n denotano due quantità positive che saranno costanti se il sistema, come ora supporremo, è omogeneo.

Dalle equazioni (12) e (22) si possono eliminare le tre funzioni u, v, w. Si ottengono in tal modo sei nuove equazioni, a cui, supponendo costanti X, Y, Z, possiamo dare la forma seguente:

$$(23)\quad \Delta^2 p_{11} = -2\kappa \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},\ \Delta^2 p_{12} = -2\kappa \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y},\ \ldots,\ \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

ove $Q = p_{11} + p_{22} + p_{33}$, e κ è una costante positiva.

La Q, come si ricava immediatamente dalle formule (23), è una funzione *armonica* ($\Delta^2 Q = 0$). Inoltre è sempre *positiva o nulla*, tali dovendo essere le tre pressioni normali p_{11}, p_{22}, p_{33}, giacchè in un sistema disgregato nessun elemento può esser soggetto a tensione (I, 6).

Queste proprietà della funzione Q ci permettono di dare una maggiore estensione al Teorema dimostrato nel § 1.

Supponiamo che sopra un elemento dA, passante per un punto a situato *nell'interno* dello spazio S occupato dal sistema in equilibrio, non agisca nessuna pressione. Nel punto a sarà, in virtù di quel Teorema, $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$, quindi $Q = 0$. Consideriamo una superficie sferica σ col centro in a e tutta situata entro S. Per il *Teorema della media* di Gauss, avremo $\int_\sigma Q d\sigma = 0$. Dovendo essere $Q \geqq 0$, sarà $Q = 0$ in tutti i punti di σ, quindi ancora nello spazio racchiuso da σ, e per una nota proprietà delle funzioni regolari armoniche, in tutto lo spazio S.

Ma non può esser $Q = 0$ se non essendo $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$; e l'annullarsi delle pressioni normali p_{11}, p_{22}, p_{33} porta come conseguenza che sia pure $p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0$, altrimenti sugli elementi di superficie normali agli assi agirebbero delle tensioni tangenziali, sarebbe cioè $\theta = \frac{\pi}{2} > \Theta$.

Potremo enunciare pertanto il seguente Teorema:

Se un elemento di superficie passante per un punto a, situato nell'interno di un sistema disgregato omogeneo in equilibrio, non è soggetto a pressione, nessun elemento del sistema è soggetto a pressione.

La dimostrazione non vale quando il punto a si trova sulla

superficie che limita lo spazio S occupato dal sistema, poichè allora non è possibile costruire la sfera σ tutta situata entro S.

5. — Noi vogliamo ora esaminare un caso particolare di equilibrio che ci porterà ad introdurre una nuova costante K dipendente da Θ.

Immaginiamo un cilindro disgregato, omogeneo, limitato da due sezioni normali all'asse. Le sue particelle non siano soggette a forze di massa. Sulla superficie laterale del cilindro agisca una pressione P', normale ed uniforme; sulle basi, una pressione P'', pure normale ed uniforme.

Se si trattasse di un solido elastico P' e P'' potrebbero aver qualunque valore. Nel caso di un fluido dovrebbe essere $P' = P''$. Per i sistemi disgregati dovremo trovare una condizione che si riduce a $P' = P''$ quando $\Theta = 0$.

Determiniamo le sei pressioni interne p_{11}, p_{12}, ecc. Si dimostra, in generale, che se lo spazio S occupato dal sistema è semplicemente connesso, il problema di determinare le sei pressioni in modo che siano verificate le eq. (12) e (23) e le condizioni in superficie, ammette un'unica soluzione. Nel nostro caso, prendendo l'asse delle z parallelo all'asse del cilindro, avremo, come facilmente si verifica:

$$p_{11} = p_{22} = P' \,, \quad p_{33} = P'',$$
$$p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0.$$

Sopra un elemento dA agirà una pressione P di componenti:

$$p_1 = P' \cos\alpha \,, \quad p_2 = P' \cos\beta \,, \quad p_3 = P'' \cos\gamma \,;$$

da cui:

$$(24) \quad P^2 = P'^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + P''^2 \cos^2\gamma = P'^2 + (P''^2 - P'^2)\cos^2\gamma.$$

La componente normale di P sarà:

$$N = p_1 \cos\alpha + p_2 \cos\beta + p_3 \cos\gamma = P'(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + P'' \cos^2\gamma =$$
$$= P' + (P'' - P')\cos^2\gamma.$$

Da queste formule si ricava:

$$N(P' + P'') = P^2 + P'P'',$$

ovvero:

$$\frac{N}{P}(P' + P'') = P + \frac{P'P''}{P}.$$

Ma $\frac{N}{P} = \cos\theta$. Dunque:

$$\cos\theta = \frac{P + \frac{P'P''}{P}}{P' + P''}.$$

Di qui vediamo che $\cos\theta$ è minimo, quando è minimo $P + \frac{P'P''}{P}$, vale a dire quando $P = \sqrt{P'P''}$. Dalla formula (24) risulta che P assume effettivamente questo valore, allorchè $\cos^2\gamma = \frac{P'}{P' + P''}$.

Il minimo valore di $\cos\theta$ sarà $2\frac{\sqrt{P'P''}}{P' + P''}$. Quindi la condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$ si potrà scrivere:

$$2\frac{\sqrt{P'P''}}{P' + P''} \gtreqless \cos\Theta,$$

ovvero:

$$4P'P'' - \cos^2\Theta(P' + P'')^2 \gtreqless 0,$$

od anche, dividendo per P''^2, e ponendo $\frac{P'}{P''} = \rho$:

$$4\rho - \cos^2\Theta(1 + \rho)^2 \gtreqless 0. \tag{25}$$

Introduco la costante:

$$K = \frac{1 - \operatorname{sen}\Theta}{1 + \operatorname{sen}\Theta},$$

che è sempre compresa fra 0 ed 1. I due valori di ρ che annullano il primo membro della disuguaglianza (25) sono K ed $\frac{1}{K}$. Per $\rho = 1$ esso ha il valore positivo $4\operatorname{sen}^2\Theta$. La disuguaglianza è dunque soddisfatta dai valori di ρ compresi fra K e $\frac{1}{K}$, e non da altri.

Per conseguenza dovrà essere:

$$K \lesseqgtr \frac{P'}{P''} \lesseqgtr \frac{1}{K}. \tag{26}$$

Questa è la condizione cercata. Se P' è minore di KP'', o maggiore di $\frac{1}{K}P''$, l'equilibrio del cilindro non può sussistere.

Per $\Theta = 0$ si ha $K = 1$, quindi $P' = P''$.

6. — Ritorniamo al caso generale di un sistema disgregato in equilibrio.

Per un suo punto qualunque a passano tre elementi ad angolo retto su cui agiscono pressioni normali. Sono queste le *pressioni principali*, che indicheremo con P', P'', P'''.

Mediante P', P'', P''' possiamo esprimere le componenti della pressione che agisce sopra un elemento qualunque passante per a. Dunque la condizione $\theta \leqq \Theta$ dovrà potersi esprimere mediante condizioni relative alle pressioni principali.

Vogliamo trovare queste condizioni.

Assumiamo perciò le direzioni principali relative al punto a come assi coordinati. Sopra un elemento dA passante per a agirà una pressione P di componenti:

$$p_1 = P'\cos\alpha, \quad p_2 = P''\cos\beta, \quad p_3 = P'''\cos\gamma:$$

onde sarà:

$$P^2 = P'^2\cos^2\alpha + P''^2\cos^2\beta + P'''^2\cos^2\gamma;$$

e detta N la componente normale di P:

$$N = P'\cos^2\alpha + P''\cos^2\beta + P'''\cos^2\gamma.$$

Se fosse $P' = P'' = P'''$, sarebbe $N = P$, $\cos\theta = \frac{N}{P} = 1$, $\theta = 0$: la condizione $\theta \leqq \Theta$ resulterebbe pertanto soddisfatta.

Se due delle pressioni P', P'', P''' fossero tra loro uguali, se per es. fosse $P''' = P''$, cadremmo in un caso analogo a quello considerato nel § 5, e ritroveremmo la condizione (26).

Supponiamo dunque che P', P'', P''' siano diverse tra loro.

Per semplicità scriveremo α, β, γ, in luogo di $\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma$; onde avremo:

$$P^2 = P'^2\alpha + P''^2\beta + P'''^2\gamma, \tag{27}$$

$$N = P'\alpha + P''\beta + P'''\gamma. \tag{28}$$

Cerco per quali valori di α, β, γ diventa minimo il rapporto $\psi = \frac{N}{P} = \cos\theta$. Si ha:

$$d\psi = \frac{PdN - NdP}{P^2}.$$

da cui:

$$2P^3 d\psi = 2P^2 dN - NdP^2 =$$

$$= 2P^2(P' d\alpha + P'' d\beta + P''' d\gamma) - N(P'^2 d\alpha + P''^2 d\beta + P'''^2 d\gamma),$$

o brevemente:

$$2P^3 d\psi = A d\alpha + B d\beta + C d\gamma,$$

ove:

$$(29) \qquad \begin{cases} A = 2P^2 P' - NP'^2, \\ B = 2P^2 P'' - NP''^2, \\ C = 2P^2 P''' - NP'''^2. \end{cases}$$

Le tre quantità positive α, β, γ verificano la condizione:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$

da cui:

$$(30) \qquad d\alpha + d\beta + d\gamma = 0.$$

Distinguiamo tre casi:

1° *Caso*: Tutte e tre le quantità α, β, γ sono diverse da 0 e da 1. Vediamo se allora ψ può esser minimo.

Si dovrebbe avere $d\psi = 0$, vale a dire $A d\alpha + B d\beta + C d\gamma$, per qualunque terna di valori attribuiti a $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ che verifichino la condizione (30); dovrebbe quindi essere $A = B = C$, ossia per le formule (29):

$$2P^2(P' - P'') = N(P'^2 - P''^2), \text{ ecc.},$$

e dividendo per la differenza $P' - P''$, che per ipotesi è diversa da zero:

$$2P^2 = N(P' + P''),$$

e analogamente:

$$2P^2 = N(P'' + P'''), \; 2P^2 = N(P''' + P').$$

Ora N è sempre positivo: perciò dovrebbe essere:

$$P' + P'' = P'' + P''' = P''' + P',$$

ossia $P' = P'' = P'''$, contrariamente all'ipotesi che le tre pressioni principali siano diverse tra loro.

Dunque ψ non diventa minimo per valori di α, β, γ diversi da 0 e da 1.

2° *Caso*: una delle tre quantità α, β, γ è uguale ad 1. Le altre due saranno uguali a zero: si ricadrà in una delle direzioni principali, per le quali $\cos\theta$ è uguale ad 1, ossia è massimo.

3° *Caso*: una delle tre quantità α, β, γ, p. es. γ, è uguale a zero; le altre due dovranno esser diverse da zero e da 1, altrimenti ricadremmo in una delle direzioni principali.

Il differenziale $d\gamma$ non è del tutto arbitrario, come nel primo caso: dovrà essere $d\gamma \gtrless 0$. Prendiamo $d\gamma = 0$, $d\alpha$ ad arbitrio, e per la cond. (30), $d\beta = -d\alpha$. Avremo allora:

$$2P^3 d\psi = (A - B)d\alpha.$$

Affinchè ψ possa esser minimo dovrà essere $A = B$, cioè, come si è veduto sopra,

$$2P^2 = N(P' + P''), \tag{31}$$

e tenendo conto delle formule (27) e (28), ove si faccia $\gamma = 0$:

$$2(P'^2\alpha + P''^2\beta) = (P'\alpha + P''\beta)(P' + P''),$$

ovvero:

$$P'^2\alpha + P''^2\beta = P'P''(\alpha + \beta).$$

Ma $\alpha + \beta = 1$: dunque:

$$P'^2\alpha + P''^2\beta = P'P'',$$

ovvero:

$$P^2 = P'P'',$$

cioè:

$$P = \sqrt{P'P''}.$$

Notiamo che P assume effettivamente il valore $\sqrt{P'P''}$ quando $\alpha = \frac{P''}{P' + P''}$, $\beta = \frac{P'}{P' + P''}$.

Per la formola (28) sarà:

$$N = \frac{2P'P''}{P' + P''},$$

quindi:

$$\cos\theta = \frac{N}{P} = \frac{2\sqrt{P'P''}}{P' + P''}.$$

Il minimo valore di $\cos\theta$ sarà questo, oppure una delle due espressioni analoghe $\frac{2\sqrt{P''P'''}}{P''-P'''}$, $\frac{2\sqrt{P'''P'}}{P'''-P'}$. Basterà pertanto che sia verificata la condizione:

$$\frac{2\sqrt{P'P''}}{P'+P''} \geqq \cos\Theta, \tag{32}$$

e le altre due analoghe, affinchè per ogni elemento dA passante per a si abbia $\theta \leqq \Theta$.

Ora noi abbiamo già esaminata la formula (32) (II, 5): essa conduce all'altra:

$$K \leqq \frac{P'}{P''} \leqq \frac{1}{K}. \tag{33}$$

Tra gli stessi limiti K ed $\frac{1}{K}$ dovranno esser compresi i rapporti $\frac{P''}{P'''}$, $\frac{P'''}{P'}$. Onde concludendo:

La condizione $\theta \leqq \Theta$, necessaria per l'equilibrio di un sistema disgregato, equivale all'altra che in ogni punto del sistema il rapporto fra due pressioni principali sia compreso fra K ed $\frac{1}{K}$.

Osservando che due delle pressioni principali relative ad un punto a rappresentano la minima e la massima delle pressioni P agenti sopra gli elementi che passano per a, potremo anche dire:

Se un sistema disgregato è in equilibrio, il rapporto fra le pressioni che agiscono sopra due elementi di superficie passanti per lo stesso punto è sempre compreso fra K ed $\frac{1}{K}$.

7. — Il sistema disgregato sia ora riferito a tre assi comunque diretti. Le pressioni principali, in un suo punto qualunque a, possiamo esprimerle in funzione delle sei pressioni $p_{11}, p_{12}, \ldots$ Perciò la condizione $\theta \leqq \Theta$ potrà anche esprimersi mediante condizioni relative a queste sei pressioni.

Noi non faremo, nel caso generale, la ricerca di tali con-

dizioni. Soltanto ricordiamo che le tre pressioni principali P', P'', P''' sono le radici dell'equazione:

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} p_{11}-x & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-x & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Da ciò segue che il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

è uguale al prodotto $P'P''P'''$ delle tre radici. Dunque: *in un sistema disgregato in equilibrio il determinante delle pressioni è sempre positivo.*

Se in un punto a fosse $D=0$, una delle tre pressioni principali relative a quel punto dovrebbe esser nulla: quindi, per la condizione (33) e le analoghe, anche le altre due; e perciò tutte le pressioni p_{11}, p_{12}, ecc.

8. — In un punto a di un sistema disgregato in equilibrio sia:

$$p_{31}=0, \quad p_{32}=0.$$

Cerchiamo, in questo caso speciale, le condizioni che devono esser soddisfatte dalle altre quattro pressioni. Più avanti ci sarà utile questa ricerca.

L'equazione (34) diventerà:

$$\begin{vmatrix} p_{11}-x & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22}-x & 0 \\ 0 & 0 & p_{33}-x \end{vmatrix} = 0$$

vale a dire:

$$\{(p_{11}-x)(p_{22}-x)-p_{12}^2\}\{p_{33}-x\}=0,$$

ossia:

$$\{x^2-x(p_{11}+p_{22})+p_{11}p_{22}-p_{12}^2\}\{p_{33}-x\}=0.$$

Le tre radici di questa equazione sono:

$$(35)\quad P' = p_{11} + p_{22} + R, \quad P'' = p_{11} + p_{22} - R, \quad P''' = p_{33},$$

ove:

$$(36)\qquad R = \sqrt{(p_{11} - p_{22})^2 + 4p_{12}^2}.$$

Il rapporto fra due qualunque delle tre quantità P', P'', P''' deve esser compreso fra K ed $\frac{1}{K}$.

Poichè $P' \geqq P''$, e $K < 1$, queste condizioni si riducono alle seguenti:

$$(37)\qquad P'' \geqq KP',$$

$$(38)\qquad KP' \geqq P''' \leqq \frac{1}{K} P''.$$

Esaminiamo la prima di esse. Sostituendo a P' e P'' le loro espressioni, avremo:

$$p_{11} + p_{22} - R \geqq K(p_{11} + p_{22} + R),$$

ossia:

$$R \leqq \frac{1-K}{1+K}(p_{11} + p_{22}),$$

e sostituendo a K il suo valore $\frac{1 - \operatorname{sen}\Theta}{1 + \operatorname{sen}\Theta}$:

$$R \leqq \operatorname{sen}\Theta\,(p_{11} + p_{22});$$

ovvero, trattandosi di quantità positive:

$$R^2 \leqq \operatorname{sen}^2\Theta\,(p_{11} + p_{22})^2;$$

e per la formula (36):

$$(39)\qquad (p_{11} - p_{22})^2 + 4p_{12}^2 \leqq \operatorname{sen}^2\Theta\,(p_{11} + p_{22})^2.$$

Dovrà poi esser verificata la condizione (38), che è compatibile colla (37): infatti, essendo $K < 1$, se $P'' \geqq KP'$ sarà a maggior ragione $KP' \leqq \frac{1}{K} P''$; e P''' potrà assumere un valore compreso fra KP' e $\frac{1}{K} P''$.

III.

1. — Dopo aver esaminate le proprietà generali relative ai sistemi disgregati in equilibrio, è naturale che ci domandiamo quali problemi si possono presentare intorno a sistemi di tal natura.

Per un solido elastico ordinario noi ci possiamo proporre di determinare lo stato di deformazione, e quindi le pressioni interne, conoscendo le forze di massa, e, in superficie, gli spostamenti u, v, w, ovvero le pressioni p_1, p_2, p_3.

Gli spostamenti u, v, w si suppongono calcolati riferendosi allo stato naturale, che per ciascun solido elastico è *unico* e ben determinato.

Invece per i sistemi disgregati noi abbiamo dovuto ammettere l'esistenza d'*infiniti* stati naturali. Se un sistema disgregato è in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, sono determinate in ogni suo punto le componenti di deformazione $\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$, ecc., ma non gli spostamenti u, v, w, i quali variano secondo lo stato naturale a cui ci si riferisce per calcolarli, e solo risultano determinati (a meno di uno spostamento rigido), purchè si aggiunga la condizione della continuità.

Da ciò resulta che in natura non si presenteranno problemi relativi all'equilibrio di corpi disgregati, nei quali figurino fra i dati gli spostamenti u, v, w. E noi non ci occuperemo di questa prima classe di problemi, che possono soltanto offrire qualche interesse da un punto di vista puramente analitico.

Potrà darsi invece che si conosca la pressione agente in superficie.

Se nessuna porzione della superficie Σ che limita il sistema disgregato è libera, e se per tutti gli elementi di Σ si conoscono le componenti p_1, p_2, p_3 della pressione esterna, il problema di determinare le sei funzioni p_{11}, p_{12}, ecc., si presenta come se si trattasse di un solido elastico ordinario. Esse devono in tutti i punti dello spazio S occupato dal sistema, verificare le equazioni (12) e (23), e alla superficie esser tali che p_1, p_2, p_3 assumano i valori assegnati. Conosciute le pressioni interne, si dovrà ricercare se la condizione $\theta \geq \Theta$ resulta ovunque verificata.

Ove ciò non accada, dovremo concludere che il nostro sistema, sotto l'azione di quelle forze, non può stare in equilibrio.

Ora supponiamo che una porzione Σ_0 di Σ sia libera. Come abbiamo dimostrato (II, 2), in tutti i punti di Σ_0 devono esser verificate le sei equazioni:

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = 0, \ldots \ldots \tag{40}$$

Se in tutti i punti della rimanente porzione Σ' di Σ fossero assegnate le componenti p_1, p_2, p_3 della pressione esterna, il problema, in generale, non ammetterebbe nessuna soluzione: giacchè ne ammette una sola quando il sistema è un solido elastico ordinario, quando cioè sulla superficie libera Σ_0 le condizioni (40) sono sostituite dalle altre, meno restrittive, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

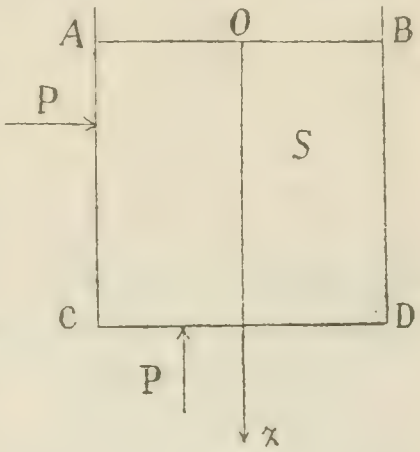
Se nei punti di Σ' non si ha nessun dato relativo alla pressione esterna, le equaz. (12) e (23), insieme alle (40) non saranno, in generale, sufficienti a determinare le pressioni interne in tutto il sistema. Ma a causa delle (40) resulteranno intanto eliminate infinite soluzioni, che nel caso di un solido elastico ordinario sarebbero possibili. E coll' aggiunta di altri dati, che pure lascino parzialmente indeterminata la pressione esterna nei punti di Σ', potrà darsi che, trattandosi di un sistema disgregato, il problema non ammetta più che un'unica soluzione.

Della condizione $\theta \leqq \Theta$ relativa ai punti dello spazio S che non appartengono a Σ_0, in generale non si può tener conto se non quando, tenendo conto degli altri dati, si siano già ottenute le espressioni, in tutto o solo in parte determinate, delle pressioni interne. Notiamo che se l'angolo θ resulterà ovunque compreso fra 0 ed un valore Θ_0 minore di $\frac{\pi}{2}$, potremo concludere che il sistema disgregato starà in equilibrio, purchè il valore di Θ relativo a quel sistema, non sia inferiore a Θ_0.

Di tal natura sono i problemi che si possono presentare intorno ai sistemi disgregati. Il punto fondamentale è questo: trovare quelle soluzioni delle equaz. (12) e (23) per cui sulla superficie libera Σ_0 resultano soddisfatte le condizioni (40), e sulla rimanente superficie Σ' altre condizioni che varieranno da caso a caso.

2. — Porterò un esempio, accennando ad un problema particolare, senza però svolgere i calcoli che ci condurrebbero troppo in lungo. Ciò potrà formare oggetto di una seconda Nota.

Lo spazio S occupato dal nostro sistema, che supporremo pesante ed omogeneo, sia una cavità cilindrica ad asse verticale. Il piano orizzontale AB rappresenti la superficie libera. La base inferiore CD e la superficie laterale di S siano a contatto con una superficie senza attrito: sopra ogni loro elemento agirà una pressione P normale.



Posta l'origine delle coordinate in un punto O di AB, assumiamo come asse delle z la verticale rivolta verso il basso. Nelle formule (12) sarà $X = Y = 0$, $Z =$ cost.

Se si trattasse di un liquido, avremmo in un punto qualunque di S:

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = Zz$$
$$p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0.$$

Se lo spazio S fosse occupato da un solido elastico, il problema non sarebbe determinato finchè non si conoscesse il valore della pressione esterna in tutti i punti della base inferiore e della superficie laterale.

Trattandosi di un sistema disgregato si trova che *tutte le soluzioni possibili* sono espresse dalle formule:

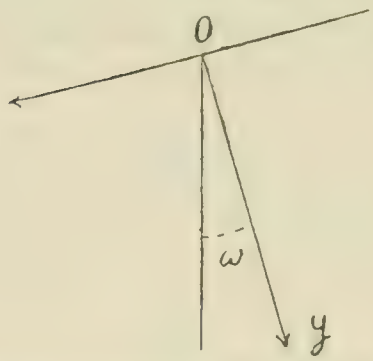
$$p_{11} = p_{22} = Cz, \quad p_{33} = Zz,$$
$$p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0,$$

ove C è una costante che rimane arbitraria finchè si tien conto soltanto delle eq. (12), (23) e (40). Affinchè poi in tutti i punti di S risulti verificata la condizione $\theta \leqq \Theta$ è necessario che C sia compresa fra KZ ed $\frac{1}{K} Z$.

Non deve far meraviglia questa indeterminatezza che ancora rimane, e che è nella natura stessa del problema: la superficie laterale della cavità cilindrica può esercitare sulla massa disgregata una pressione più o meno grande, senza che l'equilibrio venga turbato.

3. — Terminerò dando un esempio di sistema disgregato omogeneo pesante in equilibrio, con superficie libera non orizzontale.

Il piano xy sia verticale. Sarà allora $Z = 0$. L'asse delle y formi colla verticale l'angolo acuto ω, l'asse delle x un angolo pure acuto.



Le pressioni:

$$(41)\quad \begin{cases} p_{11} = Ay, \; p_{22} = Yy, \; p_{33} = By, \\ p_{12} = Xy, \; p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0 \end{cases}$$

ove A, B denotano due nuove costanti, soddisfano le eq. (12) e (23). Tutte le pressioni si annullano sul piano $y = 0$ a cui dovrà dunque appartenere la superficie libera.

Poichè $p_{31} = p_{32} = 0$, la formula $\theta \lesseqgtr \Theta$ darà luogo alle due condizioni trovate nel § 8 del Cap. II. La (39), sostituendo a p_{11}, p_{12}, p_{22} le loro espressioni, e sopprimendo il fattore y^2, diventa:

$$(A - Y)^2 + 4X^2 \lesseqgtr \operatorname{sen}^2\Theta\,(A + Y)^2.$$

Essa si trasforma facilmente nell'altra:

$$(42)\quad 1 + 2\operatorname{tang}^2\Theta - \frac{2}{\cos\Theta}\,\mathsf{H} \lesseqgtr \frac{A}{Y} \lesseqgtr 1 + 2\operatorname{tang}^2\Theta + \frac{2}{\cos\Theta}\,\mathsf{H}$$

ove:

$$\mathsf{H} = \sqrt{\operatorname{tang}^2\Theta - \operatorname{tang}^2\omega}\,.\;\left(\operatorname{tang}\omega = \frac{X}{Y}\right).$$

Perchè la quantità H sia reale è necessario che l'angolo ω sia minore di Θ, o al più uguale. Ciò poteva prevedersi, osservando che ω denota l'angolo formato dalla normale interna alla superficie libera, colla forza di massa (II, 3).

La cond. (38), tenendo conto delle formule (35), poi delle (41), e sopprimendo il fattore y, fornisce due limiti fra i quali deve esser compresa la costante B.

Se ω è uguale a Θ, sarà $\mathsf{H} = 0$, e, per la formula (42), $A = (1 + 2\operatorname{tang}^2\Theta)\,Y$. Si può dimostrare che in questo caso *non esistono altri stati d'equilibrio del sistema oltre quelli rappresentati dalle formule* (41).

Una proprietà degli archi elastici.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

Scopo di questa brevissima Nota è di mostrare una nuova interpretazione della *linea d'influenza della spinta* negli archi elastici reticolari, od in quelli a parete piena, con cerniere d'imposta, ovvero senza cerniere (nei quali ultimi vanno compresi anche gli archi in muratura), la quale interpretazione, oltre all'interesse scientifico, risponde ad un quesito d'importanza pratica qual è quello di determinare gli spostamenti verticali dei varî nodi, o dei punti dell'asse geometrico dell'arco, prodotti da un cedimento delle imposte, o da un difetto di costruzione negli archi metallici, o da una variazione di temperatura. A tale intento serve molto semplicemente la linea d'influenza della spinta dell'arco, sussistendo la notevole proprietà che *gli spostamenti verticali dei varî punti, prodotti dalle cause suddette, stanno ad una variazione della corda, come le corrispondenti ordinate della linea d'influenza della spinta stanno alla unità di carico,* od in altri termini, che *le ordinate della linea d'influenza della spinta rappresentano esse stesse in una determinata scala gli spostamenti suddetti.*

Per un arco con cerniere d'imposta la dimostrazione di questo teorema può essere la seguente. Sia $\Delta' l$ l'aumento graduale della proiezione orizzontale della corda dell'arco (nell'ipotesi più generale di un arco dissimmetrico) prodotto ad esempio da un cedimento delle imposte, ed H' la spinta orizzontale negativa che gradualmente ne deriva: il corrispondente spostamento verticale di un punto m (nodo, o punto dell'asse geometrico, secondo che l'arco è reticolare od a parete piena) sia δ'; sia poi Δl l'aumento della proiezione orizzontale della corda che verrebbe prodotto da un carico 1 applicato in m, qualora un'imposta fosse sosti-

tuita da un appoggio orizzontale scorrevole senza attrito. Dal teorema di reciprocità (*) risulta

$$1 \,.\, \delta' = H' \,\Delta l.$$

D'altra parte, se H è la spinta orizzontale prodotta dal carico 1 applicato in m si ha:

$$H' : H = \Delta' l : \Delta l$$

quindi

$$\delta' = \frac{H}{1} \,\Delta' l \tag{1}$$

che corrisponde al teorema sopra enunciato.

Questo teorema trova immediata applicazione alla ricerca delle deformazioni verticali prodotte da un cedimento d'imposta o da un difetto di costruzione. Per il caso di una variazione uniforme di temperatura basterà fare $\Delta' l = \alpha t l$ (α = coefficiente di dilatazione termica lineare, t = numero dei gradi di cui varia la temperatura) ricordando che una dilatazione termica positiva produce, come è noto, un effetto dello stesso senso di una diminuzione della corda dell'arco e viceversa; si deve poi aggiungere a δ' lo spostamento verticale termico $\alpha t y$, con che si ha:

$$\delta_t = \alpha t l \left(\frac{H}{1} + \frac{y}{l} \right). \tag{2}$$

Ad uguale risultato conduce la teoria dell'ellisse di elasticità, che applicheremo invece per dimostrare il teorema nel caso di un arco senza cerniere.

Per un arco senza cerniere, sia pure dissimmetrico, un aumento $\Delta' l$ della corda in direzione coniugata alla verticale (nel sistema dei pesi elastici applicati ai nodi di un arco reticolare, ovvero ai baricentri dei tronchi Δs in cui si divide l'asse geometrico di un arco a parete piena) senza rotazione d'imposta, dà origine ad una spinta $H'_{x'}$ negativa, agente secondo l'asse x' passante pel baricentro elastico dell'arco, e coniugato alla ver-

(*) W. Ritter, *Anwendungen der graph. Statik*, III, Zürich, 1900, ovvero C. Guidi, *L'Ellisse di elasticità nella Scienza delle Costruzioni*, Torino, 1904, od anche: *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, Parte 2ª, 4ª ediz., nº 187.

ticale nel sistema suddetto. Il corrispondente spostamento verticale δ' del punto qualunque m, secondo la teoria dell'ellisse di elasticità, e coi simboli adottati nella citata pubblicazione dell'autore (*L'Ellisse di elasticità* ecc.) ovvero nell'altra: *Lezioni*, ecc., Parte IV, 3ª ediz., nº 184 e seg., viene espresso da

$$\delta' = H'_{x'} \,.\, \lambda_2 \,.\, n \,.\, \eta_2 ,$$

nella quale, come è noto, λ_2 ed n sono rispettivamente la prima e la seconda distanza polare nella costruzione dei momenti centrifughi dei pesi elastici rispetto all'asse x' ed alle varie verticali, ed η_2 è l'ordinata corrente del *quinto* poligono funicolare, linea d'influenza della $H_{x'}$.

Ma dalla stessa teoria dell'ellisse di elasticità si ha ancora:

$$\Delta' l = H'_{x'} \,.\, \lambda_2 \,.\, v \,.\, n$$

dove $\lambda_2 \,.\, v \,.\, n$ è il momento d'inerzia di tutto l'arco elastico rispetto all'asse x', quindi:

$$\delta' = \frac{\eta_2}{v} \Delta' l = \frac{H}{1} \Delta' l$$

e però anche per questo tipo di archi, nel caso di una variazione di temperatura, sussiste la (2).

Controllando sperimentalmente gli spostamenti calcolati colla (2), si può avere una verifica degli sforzi interni generati da una variazione di temperatura negli archi elastici, ciò che in taluni casi può avere grande interesse anche per gli archi in muratura.

Torino, 11 giugno 1905.

Su alcuni nuovi acidi della serie oleica.

Nota III: *Derivati dell'acido 2,3-oleico.*

Del Dr. GIACOMO PONZIO.

Per completare lo studio dell'acido 2,3-oleico $CH_3.(CH_2)_{14}.CH:CH.COOH$ che ho descritto nella I parte di questo lavoro (1) dovevo ancora occuparmi del suo comportamento cogli idracidi e all'ossidazione: riferisco ora i risultati delle mie nuove ricerche aggiungendo qualche dato sperimentale a quelli allora pubblicati.

Riguardo al rendimento della reazione ho trovato che partendo da 100 gr. di acido stearico e passando successivamente per l'acido α-bromo- ed α-iodostearico si possono ottenere, senza alcuna difficoltà, gr. 21 di acido 2,3-oleico puro, fusibile a 59°.

Riguardo poi al bibromuro di quest'ultimo (o acido 2,3-bibromostearico $CH_3.(CH_2)_{14}.CHBr.CHBr.COOH$) mi sono accertato che esso si può preparare molto facilmente anche senza l'impiego di alcun solvente: basta aggiungere all'acido 2,3-oleico, polverizzato e contenuto in una boccetta a tappo smerigliato, la quantità teorica di bromo e raffreddare in ghiaccio durante la prima ora. Lasciando quindi il tutto in riposo per qualche giorno alla temperatura ordinaria, l'acido 2,3-oleico si trasforma completamente nel bibromuro fusibile a 72°, senza che si formi traccia di acido bromidrico.

Acido β-bromostearico $CH_3.(CH_2)_{14}.CHBr.CH_2.COOH$. — L'acido 2,3-oleico addiziona l'acido bromidrico secondo la regola generale degli acidi non saturi per la quale l'alogeno si fissa nella posizione più lontana dal carbossile. La reazione ha luogo

(1) " Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXXIX, adunanza del 13 marzo 1904.

lentamente a freddo, più rapidamente scaldando a 100° in tubo chiuso l'acido 2,3-oleico con una soluzione di acido bromidrico nell'acido acetico glaciale.

L'acido β-bromostearico è solubile a freddo in tutti i solventi organici ordinari, eccetto che negli eteri di petrolio, dai quali cristallizza in laminette bianche fusibili a 54°.

Gr. 0,3069 di sostanza fornirono gr. 0,1591 di bromuro d'argento.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{18}H_{35}BrO_2$
Bromo	22,05	22,03

Acido β-ossistearico $CH_3.(CH_2)_{14}.CHOH.CH_2.COOH$. — Si forma (assieme ad un po' di acido 2,3-oleico) scaldando l'acido β-bromostearico con potassa alcoolica in apparecchio a ricadere. Il prodotto della reazione si tratta prima con acido solforico diluito e poi con eteri di petrolio (nei quali l'acido 2,3-oleico è solubile) e si cristallizza dal cloroformio. Si ha così l'acido β-ossistearico in laminette bianche fusibili a 89° (1).

Gr. 0,2900 di sostanza fornirono gr. 0,7630 di anidride carbonica e gr. 0,3235 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{18}H_{36}O_3$
Carbonio	71,75	71,98
Idrogeno	12,35	12,03

È abbastanza solubile a caldo nell'alcool e nel cloroformio, pochissimo negli eteri di petrolio; solubile a freddo nell'etere.

Il suo *sale sodico* $CH_3.(CH_2)_{14}.CHOH.CH_2.COONa$, ottenuto neutralizzando la soluzione alcoolica dell'acido con carbonato sodico anidro, è solubile nell'acqua e cristallizza dall'alcool in prismetti bianchi.

Gr. 0,3477 di sostanza fornirono gr. 0,0750 di solfato sodico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{35}O_3Na$
Sodio	7,03	7,14

(1) Cristallizzando dallo stesso solvente e nelle stesse precise condizioni l'acido α-ossistearico, questo si fonde a 93°.

Nella letteratura chimica si trova già descritto come acido β-ossistearico un composto fusibile a 83°-85° ottenuto da Fremy per riscaldamento dell'acido solfostearico (preparato dall'olio d'olivo) con acido cloridrico (1) e da M. C. e A. Saytzeff (2) per azione dell'ossido d'argento umido su un acido iodostearico liquido, nel quale la posizione dell'alogeno era dedotta da una formula dell'acido isooleico che io ho dimostrato essere inesatta. L'ossiacido di questi chimici deve quindi certamente contenere l'ossidrile in altra posizione.

Acido 2,3-diossistearico $CH_3.(CH_2)_{14}.CHOH.CHOH.COOH$. — Si forma aggiungendo alla soluzione diluita e mantenuta a 0°, dell'acido 2,3-oleico in idrato potassico, la quantità teorica di permanganato all'1 %. Cristallizza dall'acetato d'etile in prismetti fusibili a 126° ed è solubile a freddo nella maggior parte dei solventi organici ed un po' a caldo anche nell'acqua.

Gr. 0,2400 di sostanza fornirono gr. 0,6004 di anidride carbonica e gr. 0,2510 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{18}H_{36}O_4$
Carbonio	68,22	68,35
Idrogeno	11,61	11,39

Un acido diossistearico cogli ossidrili supposti in posizione 2,3 e fusibile a 76°-78° era già stato preparato da M. C. e A. Saytzeff (3) per azione dell'ossido di argento sul bibromuro dell'acido isooleico. Che però il composto descritto da detti chimici non possa avere la costituzione che gli fu attribuita risulta da quanto ho detto nella I parte di questo lavoro.

Facendo l'ossidazione dell'acido 2,3-oleico colla doppia quantità di permanganato potassico, senza raffreddare e scaldando in ultimo a bagno maria, si ottiene acido palmitico, il quale, cristallizzato dall' alcool, si presenta in lamine splendenti fusibili a 60°.

---

(1) " Ann. de Chim. et de Phys. „ (2) *65*, 113 (1837).
(2) " Journ. f. Prakt. Chem. „ (2) *35*, 384 (1887).
(3) " Journ. f. Prakt. Chem. „ (2) *37*, 275 (1888).

Gr. 0,2607 di sostanza fornirono gr. 0,7202 di anidride carbonica e gr. 0,2944 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{16}H_{32}O_2$
Carbonio	75,34	75,00
Idrogeno	12,54	12,50.

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Giugno 1905.

Relazione sulla Memoria del Prof. Ugo Amaldi, intitolata: *I gruppi conformi reali dello spazio.*

L'importanza capitale che han preso nella Matematica moderna i gruppi continui di trasformazioni dà ragione del succedersi delle ricerche dirette a determinare varie sorta di gruppi ed a studiarne le proprietà. Ora, fra le trasformazioni puntuali dello spazio ordinario prendono un posto cospicuo le ∞^{10} trasformazioni conformi (il così detto gruppo delle inversioni). Il Professore Amaldi nella presente Memoria si propone appunto di determinare i gruppi *reali* continui che si posson comporre con siffatte trasformazioni.

A tal fine egli, ricorrendo ad una nota osservazione del Klein, riduce il problema all'altro dei gruppi reali di omografie dello spazio a 4 dimensioni, che mutano in sè una forma quadratica non rigata, a punti reali. I risultati noti su quest'argomento (come su altre trasformazioni possibili del primitivo problema dell'Amaldi) non mettevano la restrizione della *realtà*. Tenendo conto di questa, l'Autore vien condotto dal metodo accennato a ricercare anche i gruppi continui reali di movimenti non-euclidei dello spazio ordinario, completando ciò che già si sapeva intorno ad essi.

La determinazione dei varî tipi di gruppi vien fatta nel senso del Lie, cioè assegnando le formole che esprimono le trasformazioni infinitesime generatrici dei gruppi. Ma vengono pure esposte varie proprietà geometriche dei gruppi stessi.

Il lavoro del Prof. Amaldi, condotto con chiarezza ed eleganza, risolve una questione importante. Noi perciò proponiamo che esso venga accolto fra le Memorie dell'Accademia.

G. Morera
C. Segre, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Giugno 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pezzi, Brusa, Carutti, Chironi, Ruffini e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Allievo.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 28 maggio 1905.

Il Presidente si fa interprete della Classe inviando al Socio Allievo le condoglianze per la grave sciagura domestica che lo ha colpito ed augurandogli che negli studi, da lui con tanta alacrità coltivati, egli trovi un lenimento all'aspra ferita.

Sono presentate per gli *Atti* le note seguenti:

1° dal Socio Pezzi: Attilio Levi, *Appunti di lessicografia romanza*;

2° dal Socio Renier, in nome e sotto la responsabilità del Socio Cipolla: Roberto Cessi, *Prigionieri illustri durante la guerra fra Scaligeri e Carraresi (1386)*.

LETTURE

Prigionieri illustri durante la guerra fra Scaligeri e Carraresi (1386).

Nota di ROBERTO CESSI.

Fra tanta scarsezza di documenti di storia carrarese importantissime riescono le imbreviature di alcuni notai più antichi, che, vissuti alla corte del principe, ne rogarono gli atti sia pubblici che privati, conservando di molti memoria nei loro libri. In essi numerosi documenti della vita politica di quei fortunosi tempi ancor restano nascosti e da questi la storia degli ultimi principi carraresi sarà meglio illuminata, quando, con amorosa pazienza, saranno tutti pubblicati.

Non stimiamo perciò del tutto inutile raccoglierne in una breve silloge alcuni che si riconnettono a quelle gravi lotte fra Carraresi e Scaligeri per il possesso del Friuli (1), che funestarono tutta la Marca Trevigiana nell'ultimo scorcio del secolo XIV; lotta che trasse alla rovina l'una e l'altra signoria, travolte prima dalla potenza viscontea e poi dell'astuta politica veneziana.

Due battaglie in questa lotta hanno speciale importanza: lo scontro alle Brentelle del 25 giugno (e non luglio come altri scrisse anche recentemente) 1386 e l'altro di Castelbaldo dell'8 marzo 1387, ma specialmente il primo, combattuto a due miglia da Padova, dove erano giunte minacciose le milizie scaligere, e terminato col trionfo del Carrarese. La sconfitta riusciva alla potenza scaligera tanto più grave in quanto pareva stesse per scoccare l'ora del suo completo trionfo sui Carraresi, e già il signore di Padova, *pieno di intolerabil dolore, si aveva più volte*

(1) Per quanto concerne questa lotta cfr. Cogo G., *Il patriarcato di Aquileia e le aspirazioni dei Carraresi al possesso del Friuli (1381-89)*, in " Nuovo Arch. Ven. ", tomo VII (1898), pp. 223 sgg.

tratto per dolore il cappello e di quello dato sopra la sedia della loggia, dove è la cancelleria, dentro la corte, e con li denti rodendo per disdegno, e bavezando la detta bacchetta che lui aveva in mano, preso dal convulso, prevedendo l'imminente fine della sua signoria (1). Quel memorabile fatto d'arme aveva invece dimostrato quanto a questi quella fosse inferiore, non solo, ma l'avea anche d'un tratto annientata; la successiva battaglia di Castelbaldo segna l'ultimo tentativo di riscossa, infelice preludio di ingloriosa morte di una signoria tanto potente (2).

Nello scontro delle Brentelle tutto l'esercito scaligero era rimasto prigioniero del signore di Padova; lo stesso capitano generale, Cortesia Serego, fatto prigioniero, secondo il diritto di guerra medioevale era stato condotto dinnanzi al signore nemico invocando la consuetudine di buona guerra (3); i migliori capitani quali Ostasio da Polenta, Facino Cane (4), Ugolino dal Vermo ed altri aveano perduta la libertà, che, riottenuta, perderanno di nuovo a Castelbaldo, prigionieri per la seconda volta del Carrarese.

Narra Andrea Gatari (5) che il giorno dopo la vittoria alle Brentelle Francesco da Carrara volle vedere i condottieri di nome, le munizioni acquistate nella battaglia e quelle portate da

---

(1) Gatari Galeazzo, *Istoria padovana*, in Muratori, *Rer. Ital. Script.*, XVIII, col. 569.

(2) Veggasi la bibliografia in Cogo, op. cit., pag. 267. Nella cronaca di Galeazzo Gatari si hanno due redazioni dello scontro delle Brentelle (ed. cit., col. 527 segg. e col. 567 sgg.), delle quali la prima è erroneamente intitolata *La battaglia di Castagnaro ecc.*, ed è completa; nella seconda il racconto è incompleto. Nel cod. parigino della cronaca di Bartolomeo sono ambedue fuse in una sola. Cfr. Medin A., *La cronaca di Bartolomeo Gatari ecc.*, estr. dal " Nuovo Arch. Ven. ", XIII, 2, p. 28.

(3) Gatari A., ed. cit., col. 534, cfr. Pertile, *Storia del diritto italiano*, Padova, 1873-83, II, 1, pag. 422.

(4) I cronisti affermano concordemente che anche Filippino, figlio di Facino Cane, rimasto prigioniero del Carrarese, acconsentì col padre di passare al servizio di questi. Bisogna invece credere che o Filippino non prendesse parte allo scontro delle Brentelle, ovvero, fatto prigioniero, si riscattasse e ritornasse presso lo Scaligero. Infatti nel settembre dello stesso anno defeziona dallo Scaligero insieme ad Antonio Conixitano, Brunorio e Guterio e una forte schiera di soldati. Cfr. Cipolla, *La storia scaligera negli archivi di Siena*, in " Arch. Stor. It. ", disp. I del 1905, p. 60 sg.

(5) Andrea Gatari, *Istoria padovana*, in Muratori, XVII, col. 535 e sg

Verona ed infine *tutto il resto dei prigionieri e quelli da taglia*; secondo lo stesso cronista i *prigioni di condizione* furono trattenuti, mentre gli altri furono licenziati *secondo l'usanza di fatti d'arme e buona guerra*; e più avanti ancora dice che avuta *buona licenza*, questi, ciascuno secondo la loro condizione, furono tutti riscattati da Antonio della Scala. I documenti invece, che qui brevemente illustriamo e pubblichiamo, infirmano l'esattezza della testimonianza del cronista padovano ed in ciò più verace ci appare Galeazzo Gatari. *Delli cittadini veronesi e risentini*, egli dice, [il Carrarese] *lasciò fare a soldati loro tagie a suo modo, come meglio gli pareva, dove gran quantità di danaro venne a Padova per quelle tagie* (1).

Padova, repubblicana, vantava fra le molte e belle sue tradizioni fin dal 1213 speciali disposizioni, deliberate di comune accordo coi Vicentini e coi Veronesi, tendenti ad alleviare i dolori della prigionia degli infelici mercenari combattenti sotto le bandiere di questo o quel comune (2). Che al tempo, di cui trattiamo, fossero ancor in vigore, ci sembra assolutamente infondato; non accolte in nessuno dei codici statutari, neppure in quello più antico, non se ne conservava probabilmente neppur la memoria, sicchè, mentre in esse si legge *quod nullus caput debeat incarcerari et detineri*, e che non gli si deva vietare di *edere, bibere, vestire, ad necessitatem corporis ire, nec in turpi loco vel fetido debeat detineri*, troviamo il Cortesia *in teterrima vincula coniectus*, ove contrasse gravissima malattia, che gli procurò la morte poco dopo la sua liberazione (3).

I prigionieri, di cui si parla nei documenti qui pubblicati, invocano invece la consuetudine: i contratti sono stipulati in base a questa, nè si trova in essi alcun richiamo a convenzione di sorta o ad altro principio del diritto positivo. Poche disposizioni invero, concernenti questo momento della vita sociale, si trovano nelle raccolte giuridiche medioevali; questa materia

(1) Galeazzo Gatari, ed. cit., col. 533.

(2) Pertile A., op. cit., pag. 422, n. 96. Il P. dice di togliere il documento dal Verci, *Storia degli Ezzelini*, doc. 82: ma nè in questo lavoro, nè nella *Storia della Marca Trevigiana*, trovai il testo del documento.

(3) Marçagaie, *De modernis gestis* edito dal Cipolla nelle *Cronache antiche veronesi*, I, p. 75, in " Monum. della deput. veneta di storia patria ".

quasi sfugge alla severità di sanzioni giuridiche, come quella che meglio si adattava ad esser risolta caso per caso secondo le peculiari circostanze dei tempi. Così si forma una tradizione consuetudinaria, che, dalla primitiva efferatezza, si va mitigando in processo di tempo colla introduzione di sistemi meno crudeli, specialmente per opera delle compagnie di ventura (1).

Nel primo documento incontriamo Guglielmo de' Lisca e Daniele della Valle, commestabili equestri del Carrarese, i quali, fatti prigionieri da Alpreto di Alemagna, commestabile equestre degli Udinesi, *in acie bellicosa et partibus civitatis Austrie*, dichiarano pubblicamente a quali patti ottennero la loro libertà. Non possiamo determinare con precisione in quale scontro cadessero in mano degli Udinesi: ma, poichè il documento porta la data dell'8 marzo 1386, crediamo si tratti dell'assedio posto dagli Udinesi al castello di Brugnera negli ultimi mesi del 1385, o di uno dei fatti d'arme che ad esso seguirono, nel quale era stato fatto prigioniero lo stesso capitano Michele da Rabatta, non liberato neppure dopo l'intercessione del cardinale Demetrio, arcivescovo di Strigonia (2), del vescovo delle cinque chiese (3) e della regina d'Ungheria (4).

L'Alpreto, in presenza di Federico Savorgnano, capitano generale delle milizie udinesi, e di Pietro Morosini di Venezia, avea proposto ai due nobili come condizione di riscatto l'obbligo di rispondere al suo appello in qualunque parte d'Italia essi si trovassero. È questa la forma di riscatto preferita dai capitani mercenari, i quali, pur non essendo alieni di servirsi dei prigionieri di guerra come fonte di lucro, imponendo loro gravi taglie, spesso però preferivano vincolare a sè il maggior numero di soldati per servirsene in caso di bisogno. Ma i due nobili, non ignari delle male arti di questi avventurieri, che spesso giocavano sull'equivoco della parola, rifiutano il patto proposto *cum nimis difusa et lata sit Italia et quod etiam Francia possit includi*

(1) Pertile, op. cit., II, 421 e segg.

(2) Verci G., *Storia della Marca Trivigiana*, Venezia, 1790; doc. 20 febbraio 1386, XVII, n. 1848.

(3) Ivi doc. 21 febbraio 1386, n. 1386.

(4) Ivi doc. 22 febbraio 1386, n. 1851.

in ca, colle quali parole si vuol forse alludere ai rapporti internazionali di quel tempo fra Italia e Francia. A questa condizione gravosissima di perpetua servitù essi preferiscono la perdita delle loro sostanze, restringendo l'obbligo di servitù alla sola Patria, purchè non fossero impediti ad adempierlo dal loro signore; e così accetta l'avventuriero tedesco, a vantaggio del quale il contratto è stipulato: a lui solo infatti spettava il diritto di disporre dei due prigionieri, indipendentemente dall'interesse degli Udinesi, chè non si capirebbe altrimenti come mai non fosse interdetto ad essi per un certo periodo di tempo l'uso delle armi in favore del Carrarese, nè l'attenuante in caso di inibizione da parte del signore di Padova.

Il secondo documento è il contratto di riscatto di Ostasio da Polenta *ac omnes alii et singuli infrascripti captivi*: chi siano questi noi non lo sappiamo poichè il notaio, che rogò l'atto, non ne segnò i nomi. Ma probabilmente saranno di quei *homeni da nome, zoe capi de brigate et capitanei et mareschalchi,* come li chiama il cronista edito dal Simonsfeld (1), i cui nomi sono ricordati anche dagli altri cronisti contemporanei.

Narra Andrea Gatari (2) che Ostasio da Polenta, signore di Ravenna, *fu lasciato andare per grazia essendo egli cugino della Donna del figliuolo del Signore di Padova.* Il contratto, che pubblichiamo, invece attesta che il Carrarese non intendeva trattare in modo diverso e speciale il suo parente, chè Ostasio non è il solo favorito; nè certo avea ragione di favorirlo dal momento che non poteva correr buon sangue fra loro, se subito dopo la sua liberazione Ostasio riprende le armi in favore dello Scaligero e ricomparisce alla battaglia di Castelbaldo.

Non possiamo certo negare che le condizioni del riscatto siano tutt'altro che onerose, e ciò forse bastava per far pensare ai contemporanei ad un atto di deferenza fra gente legata da vincoli di sangue: ma ben altra deve esser stata invece la ragione, la quale appar chiara nel contratto di riscatto.

Il Carrarese proibisce ai prigionieri, compresi in esso, di

---

(1) *Zur deutschen Geschichte aus Venedig*, in " Forschungen zur deutschen Geschichte ", vol. XXI (1881), cap. IV, p. 517.

(2) Ediz. cit., col. 540.

riprendere per un periodo di due mesi le armi in favore di Antonio della Scala contro il Carrarese e tanto meno *esse ad offensam* dei territori del signore di Padova: ad essi invece si concedeva di potersi armare subito *ad defensam* dei castelli della Patria, non uscendo però dalle mura di essi, esclusi i serragli del Veronese e la linea dell'Adige. Inoltre per tutto il periodo di quella guerra non aveano il diritto di chiedere il riscatto di alcun soldato fatto prigioniero alle Brentelle, e, dacchè non ancora erano stati liberati il conte Morando dei Porciglia, Michele da Rabatta, fiorentino, Tommaso da Mantova, fatti prigionieri all'assedio di Brugnera, si invitavano Ostasio ed i suoi compagni ad interporsi per ottenerne la liberazione. Non si tratta però di una obbligazione formale di liberazione da parte dei contraenti e tanto meno di uno scambio di prigionieri, scambio che non era possibile, poichè quelli del Carrarese appartenevano alle milizie scaligere, gli altri tre invece erano prigionieri degli Udinesi. Che se, come appare dal nostro documento, il Carrarese era disposto non di mal animo verso gli Udinesi, nessuna concessione poteva fare allo Scaligero, che era il vero suo nemico. È piuttosto un tentativo di scambio, simulato sotto altre forme, colle quali si tentava l'animo degli Udinesi per ottenere la liberazione del Rabatta e dei suoi compagni, mantenuti ostinatamente in prigionia da questi: e questa è, secondo noi, la vera ragione delle miti condizioni di riscatto fatte ad Ostasio ed ai suoi compagni, pochi giorni dopo la battaglia (1° luglio 1386).

Piuttosto gravi invece furono le condizioni di riscatto imposte a Cortesia Serego, appunto perchè egli era capitano generale delle milizie scaligere.

Il Carrarese [doc. III] gli impose una taglia di 9000 ducati d'oro ed il Cortesia accettò, potendo riscattarsi colle proprie sostanze (1) e obbligandosi a pagarne 3000 appena toccato il territorio estense (il signore di Padova, per evitare l'immediata riunione dei prigionieri all'esercito scaligero, molti ne avea fatti passare per il territorio dell'Estense (2)) e gli altri 6000 dopo

(1) Quanto alle sostanze del Cortesia cfr. Biadego G., *Cortesia Serego e il matrimonio di Lucia della Scala*, Verona, 1903, pag. 24 sgg.

(2) Gatari A., op. cit., col. 536. Dal documento II però si deduce che Ostasio da Polenta e i suoi compagni non furono costretti a passare per

sei mesi dalla sua liberazione, rinunciando al beneficio di qualsiasi privilegio statutario delle città, presso il cui foro fosse citato in caso di contravvenzione ai patti stabiliti, e potendo dovunque essere citato, *quamvis ibidem domicilium non haberet, constituens se ibidem domicilium et locum habere.*

Il Marzagaia (op. cit., pag. 75) afferma che il Cortesia *mensibus aliquot castigationem passus* [*est*] e durante questi ammalò gravemente: che la prigionia del Cortesia durasse parecchi mesi è esatto, poichè l'accordo del riscatto è del 22 luglio 1387, posteriore cioè di più che un anno alla battaglia. Lo stesso Marzagaia poi altrove [op. cit., pag. 100] dice: *diro et execrabili carcere sub oste de Carraria coniectum, tetro pedore convictum, vite sue ad ultima laborantem, pro multa pecunia missum exigi ac liberari pedore, ad confines Ferrarie in Budelloni palustribus lembo miserrime victam extinxit.* Ed in ciò ci sembra più degno di fede che non Andrea Gatari (1), dal momento che dovea pagare la prima rata della taglia dopo aver posto piede nel territorio degli Estensi.

I documenti IV e V ci istruiscono sul modo con cui si procedeva al riscatto dei prigionieri. Il IV è una *carta solutionis* di 350 ducati, fatta a Luchino da Casate da Iacobo dei Capodivacca, il quale si era costituito mallevadore di Ugolino dal Vermo (2) pel pagamento della taglia a detto Luchino. Dopo aver ottenuta in questo modo la libertà il dal Vermo non s'era più fatto vivo e, trascorso il termine fissato, il Capodivacca, il 3 ottobre 1386, *nolens in hoc violare iusticiam et non contravenire promissis*, soddisfa al suo obbligo di fideiussore riservandosi l'azione di regresso verso il dal Vermo, non intendendo donargli detta somma.

Il V è il ricorso di un certo Bartolomeo del fu Paolo di Arquà, padovano, presentato dal suo procuratore Francesco dalle

---

il territorio estense. Per le relazioni fra Carraresi ed Estensi in questo tempo, cfr. Cessi B., *Venezia e Padova e il Polesine di Rovigo*, Città di Castello, 1904, pp. 42 e sgg.

(1) Op. cit., col. 540. Secondo il Gatari, il Cortesia sarebbe morto a Monselice, mentre attendeva l'arrivo del danaro pel riscatto.

(2) È ricordato da tutti i cronisti fra gli *homeni da nome*. Gatari A., col. 535. Gatari G., col. 531. Simonsfeld, op. cit., p. 517. *Chronicon estense*, in Muratori, XV, col. 515.

Api all'ufficio del Cavallo per esser rimborsato dagli eredi di Niccolò da Curtarolo, uno dei capitani dell'esercito carrarese durante la guerra cogli Scaligeri, del prezzo di riscatto, indebitamente da questi riscosso da Bernabone di Frescada, cittadino veneto, caduto prigioniero in mano di Bartolomeo nello scontro delle Brentelle. Il procuratore invoca la consuetudine *actenus observata*, che cioè *civis capiens alium civem civitatis, cum qua est guerra seu briga, potest imponere taleam*. Ed invero il prigioniero di guerra, come dice un giurista del sec. XVI, Pietro Bellino (1), *transit in potestatem* di colui che lo arresta, così che *nemo alius, qui sit eius partis, ius in eum possit acquirere, nisi a suis esset forte recuperatus*. Questa consuetudine avea la sua buona ragione di sussistere per evitare le risse fra i soldati. Dice infatti il citato giurista: *Neque dux belli prati debet aliter fieri, ne oriantur rixae inter suos, et ne cogantur pugnam deserere qui captivos faciunt*. A questo si avvicina il caso ricordato dal nostro documento. Bartolomeo aveva pattuito con Bernabone il prezzo del riscatto, poichè questi era *bonus et ydoneus captivus pro solvenda dicta talea*, e, condottolo a Padova, lo avea fatto rinchiudere nelle prigioni fino a che non avesse pagato la taglia. Niccolò da Curtarolo, invece, abusando evidentemente della sua autorità, costrinse colla violenza il prigione (gli strappò perfino due denti) a pagare a lui la somma convenuta: perciò Bartolomeo intentava un'azione civile contro gli eredi di Niccolò, morto prima del 1390 (2).

L'ultimo documento, del 22 aprile 1387 (3), ricorda alcuni prigionieri della battaglia di Castelbaldo. Come già notammo, fra i prigionieri di questa battaglia si incontrano parecchi di quelli che erano stati già presi alla battaglia delle Brentelle e fra

(1) *De re militari* in *Tract. illust. in utraque iuris facultate*. Venetiis, 1583, vol. XVI, pag. 349, c. 7.

(2) Cfr. Gloria, *Monumenti dell'Università di Padova*, Padova, 1888, doc. 9 marzo 1390, vol. II, p. 238. Il documento da noi pubblicato manca di data; ma poichè si trova in un fascicolo di atti dell'Ufficio del Cavallo (Filza II^a, 6), spettanti al 1401, forse risale a questo anno. A tergo si legge la data 21 luglio.

(3) Neppur questo porta la data; ma la si deduce facilmente dagli atti che precedono e seguono questo, tutti del 1387, e dalle persone che sono in esso ricordate.

gli altri Ostasio da Polenta e Ugolino dal Vermo (1). Nessun documento, che parli della seconda prigionia di costoro, ci fu dato di trovare; ma da quello che ora noi pubblichiamo, si può dedurre che ben più gravi condizioni di riscatto impose questa volta il Carrarese. Infatti i nobili Francesco dei Galluzzi, Antonio da Siena, ricordati anche nel *Chronicon estense* (ed. cit., col. 515), Franceschino di Alessandria e Giovanni da Milano giurano di non prender più le armi contro il Carrarese per tutto il tempo della guerra, ed il giorno stesso rinnovano il giuramento obbligandosi di combattere lo Scaligero e i suoi alleati e di presentarsi al signore di Padova entro un anno.

Ed ora, riassumendo quello che dai documenti si può dedurre, osserveremo che nel riscatto dei prigionieri lo Scaligero non entra per nulla, contrariamente a quanto afferma il Gatari. Ciascuno, potendolo, si riscatta coi proprî danari, preferendo il sacrificio della sostanza famigliare ad una qualsiasi obbligazione di servitù personale. I capitani più illustri dell'esercito vinto spettano di diritto al signore vincitore, in nome del quale i suoi ministri concludono l'accordo personalmente colla parte interessata. Gli altri prigionieri diventano quasi proprietà di quelli che li arrestano, e ad essi spetta il diritto di determinare le condizioni ed il prezzo del riscatto. Quelli che nella gerarchia militare occupano un posto più elevato, e perciò sono più noti, acquistano la fiducia dei loro padroni ed ottengono di esser subito liberi, prestando giuramento di soddisfare ai loro doveri: gli altri invece devono cercarsi un mallevadore, e, se non lo posson trovare, sostenere il carcere fino a che non abbiano il danaro per pagare la taglia. Il pagamento poi di questa li libera completamente da qualsiasi vincolo di servitù, rimettendo il prigione nel pieno possesso della sua libertà e nell'esercizio delle sue funzioni, come chiaramente si apprende anche da altri documenti e specialmente uno che si riferisce alla guerra di Chioggia, conservato in un *Formulario Carrarese* (codice cartaceo del sec. XVI, n. 23), esistente nell'archivio della famiglia Papafava, dei quali terremo parola in altra occasione.

Padova, giugno 1905.

---

(1) Gatari A., op. cit., col. 580 e seg., *Chronicon Estense* cit., col. 515.

DOCUMENTO I.

[Archivio Notarile di Padova. — BANDINI DE BRAZZIS, *Liber instrumentorum quartus*, c. 356].

In Christi nomine. Amen. Factum sic se habuit quod proponunt infrascripti Guillelmus de Lisca et Daniel de Valle, videlicet, dum nobiles viri Guillelmus de Lisca et Daniel de Valle, comestabiles equestres magnifici et excelsi domini domini Francisci de Carraria, Padue etc., captivi forent nobilis viri Alpreti de Alemania, comestabilis equestris Utinensium, deprehensi et capti ab eo in acie bellicosa et partibus civitatis Austrie, dumque existerent ipsi captivi in Utino, in presentia egregii militis domini Frederici de Savorgnano et nobilis viri domini Petri Mauroceno de Veneciis et aliorum quam plurium nobilium, ubi etiam aderant Nicolaus de Viena, qui erat interpres de infrascriptis omnibus dictis et narratis hinc inde inter ipsos Guillelmum et Danielem ex una et Alpretum magistrum eorum ex parte altera, peterentque tunc ipsi Guillelmus et Daniel relaxari iure, more bone guerre et requirerent ipsum magistrum suum, ut faceret eis bonam societatem etc. Ipse Alpretus dicebat quod bene volebat eos relaxare, sed volebat quod, quocumque ipse requireret eos, ubicumque forent in Italia, ipsi tenerentur ad eum accedere. Qui Guillelmus et Daniel gravabantur de his, cum nimis difusa et lata sit Italia et quod etiam Francia possit in ea includi et quod ad hoc non volebant ullo modo assentire, offerentes ipsi magistro suo quod potius daret sibi taleam et acciperet eis equos et axina sua et quidquid in mundo haberent, quam vellent pati iugum istud et hanc servitutem, sed bene volebant ipsis existentibus in Patria Foriulii et quantum ipsi complacerint et parati erant ad omnem ipsius Alpreti requisitionem ad ipsum ius hoc tamem adito, scilicet ubi non impedirentur nec prohiberentur eis per magnificum dominum suum Padue vel eius officialem etc. Tandem multis verbis hinc inde dictis ipse Alpretus in presentia dicti domini Frederici et ipsius domini Petri Mauroceno et aliorum ibi existentium fuit contentus et acquievit quod ipsi Guillelmus et Daniel ad ipsum Alpretum accederent, si per eum requisiti fuerint, ipsis solummodo existentibus in Patria Foriiulii et non alibi, nec aliter tenerentur ad ipsum accedere hoc tamen addito, videlicet quod inhibitio vel impedimentum, quod vel que procederet de mandato prefati magnifici domini sui Padue vel officialis sui banche stipendiariorum, quominus ire non possent et cetera, non noceret eis nec sibi posset ascribi. Et tunc dictus dominus Fredericus quantum pro super ista ultima parte, scilicet inhibitionis vel impedimenti etc., subiunxit et dixit ore proprio verba ista, videlicet bona fide, sine fraude, scilicet quod non exerceret fraudem vel dolum in

ipsis inhibitione vel impedimento, quod et facere promiserunt Guillelmus et Daniel memorati. Et sic modo illo dicti captivi et magistri eorum dederunt alterutrum sibi fidem per tactum et annexionem dextere dextre. Et cum ista licentia et fide aliter non ipsi Guillelmus et Daniel, ab ipso Alpreto magistro suo, comeato accepto, recesserunt.

Premissa omnia et sic et in ea forma fuisse et esse testificatur et asserit suprascriptus Nicolaus de Viena in infrascriptorum testium et mei notari infrascripti presentia. De quibus quidem omnibus et singulis dicti Guillelmus et Daniel uterque eorum ibi presentes rogaverunt me Bandinum notarium infrascriptum ut ad perhemnem memoriam unum et plura publicum et publica conficere documenta.

Acta publicata et lecta fuerunt omnia et singula suprascripta per me Bandinum notarium infrascriptum in civitate Padue, subtus loçiam cancellarie suprascripti magnifici, excelsi domini domini Francisci de Carraria Padue etc., in presencia testium infrascriptorum ad hoc specialiter rogatorum, adhibitorum et vocatorum, videlicet egregiorum legum doctorum dominorum Anthonii de Zuchis de Montecalerio de Pedemontium, prefati magnifici domini generalis vicarii, et Bonacursii de Naxeriis de Montagnana Patavi ac sapientis viri domini Simonis de Noenta, iuris periti, civis paduani, nec non nobilium et egregiorum virorum domini Ugolini de Auria Januensis, Albertini de Peraga de Padua, Bartholomeo de Nino de Vincenciis, Jacomello de Anoali, Bonusdei de Agolantibus et Vunano (?) de Leon et aliorum perplurium nobilium et numerose turbe virorum gravium armigerorum alterius facultatis, currente anno nativitatis domini M°III^C^LXXXVI. indictione VIIII^a^. die iovis VIII mensis marcii.

Documento II.

[Archivio Notarile di Padova. — Bandini de Brazzis, *Liber instrumentorum quartus*, c. 428 e 429].

In Christi nomine. Amen. Magnifici ac egregii et nobiles viri dominus Johannes Azonis de Ubaldinis, capitaneus generalis gentium magnifici domini infrascripti, ac dominus Nicolaus de Curtarodulo, honorabilis civis patavus, ambo milites, nec non dominus Guillelmus de Curtarodulo, iurisperitus civis paduanus, tamquam procuratores et procuratorio nomine magnifici et excelsi domini domini Francisci de Carraria Padue etc. ad infrascripta complenda, tractanda et exequenda specialiter constituti, prout contra in istrumento ipsius procuratoris facto infrascripto per me Bandinum notarium infrascriptum interveniente et accedente voluntate et assensu egregiorum nobilium et strenuorum virorum gentium omnium

equestrium et pedestrium ad ipsum magnifici domini servitio militantium, ex parte una, ac magnificus vir Ostasius de Polenta, filius magnifici et potentis domini domini Guidonis de Polenta Ravene etc., per se ipsum ac omnes alii et singuli infrascripti captivi, in quorum cetu et numero et ipse est, optantes a captivitate eximi qua sunt constituti non derogantes propterea alicui iuri vel consuetudini armorum, quum per magistros eorum requiri possit utpote deprehensi et capti in patenti campo in conflictu bellico dato eis per ipsum magnificum dominum dominum Franciscum de Carraria seu gentes suas die lune xxv iunii proxime elapsi vel alias intercepti usque in die inclusive a die sabati xxiii dicti mensis iunii inclusive, qua intraverunt claustra ipsius magnifici domini domini Francisci de Carraria, omnes ipsi tamquam stipendiarii aut comestabiles vel alias provisionati nobiles sicut et quales erant magnifici domini domini Antonii de la Scala Verone etc., ad quorum stipendia et servitia erant, parte ex altera, sponte, libere et ex certa scientia, nullo metu, errore, impressione vel timore coacti vel seducti, ad hec pacta, conventiones, transactiones et federa spontanea descenderunt ac convenerunt et pervenisse et descendisse insimul dixerunt et confessi fuerunt in presentia infrascriptorum egregiorum et nobilium testium et mei notari infrascripti, prout inferius per ordinem seriosius constat, videlicet:

Primo quod ipsi captivi vel aliquis ipsorum infrascriptorum usque ad duos menses venturos incoandos ea die, qua de Padua licenciati fuerint, non sint nec esse debeant aut facere armati vel inhermes contra prefatum dominum Franciscum de Carraria aut magnificum natum suum dominum Franciscum de Carraria aut eorum subditos, territoria neque loca vel gentes eorum, quocumque illos contigerit equitare aut ubicunque sint. Non sintque nec esse debeant ad offensam ubicumque territorii vel locorum ipsorum magnificorum dominorum patris et filii Carrariensium. Verum captivi ipsi armare se possint ad defensam civitatum castrorum et bastitarum dicti domini Verone non tamen egrediendo muros pallancatos pontes vel foveas ipsorum civitatum castrorum et bastitarum. Preterea se armare non possint nec inhermes esse vel presentare se ad defensam seraleorum domini Verone predicti neque fluminis Aticis.

Item quod ipsi captivi durante presenti guerra non requirent aliquem captivum de gentibus prefati magnifici domini domini Francisci de Carraria captum per ipsos vel eorum aliquem et die sabati xxiii iunii elapsi inclusive usque in diem belli seu conflictus predicti dati sibi die scilicet xxv mensis eiusdem inclusive.

Item quod ipsi captivi facient, providebunt, tractabunt et operabunt posse supra, bona fide, omni fictione et fraude proculpusis quod egregii et nobiles viri Morandus Comes de Purciliis, Michael de Rabatha Floren-

tinus, Thomasius de Mantua, comestabiles equestres, servitores de gentibus ipsius magnifici domini Francisci de Carraria, captivi in Utino, relaxentur.

Item quod si sciverint aliquem vel aliquos ex ipsis infrascriptis contrafacere vel contravenire alicui promissionum predictarum et date fidei, quod ipsos illos tales transgressores et sui fidei violatores punientur posse suo ea pena condigna et debita, quam meruerint et qua illos punire debet quilibet bonus et valens vir.

Quas quidem conventiones transactiones et pacta ac omnia et singula suprascripta et infrascripta et in presenti contractu apposita et infrascripta promiserunt dicti Ostasius de Polenta ac omnes et singuli alii captivi inferius expressati, solempne stipulatione dictis dominis Johanni Nicolao et Guillelmo, procuratoribus et procuratorio nomine dicti magnifici domini domini Francisci de Carraria etc., suorumque successorum et heredum vice et nomine stipulantibus et recipientibus ac iuraverunt corporaliter ad sancta dei evangelia tactis scripturis sibi et cuilibet eorum per me notarium infrascriptum delato sacramento in fide sua et legalitate bonorum virorum firma rata et conrata in eorum fide suo instrumento vallata habere, tenere, attendere et observare et non contrafacere vel venire, aliqua ratione vel causa, clam vel palam, per se vel alios, de iure vel de facto in pena periurii et prestiti sacramenti. Quod si violaverint vel aliqualiter irritaverint ex nunc prout ex tunc volunt coram quocumque principe, domino, procere et barone ac qualibet singulari persona posse licite et impune atque debere appellari villes et abiecte persone, fedifragi et periurii ac in quocumque loco et foro se subicientes pene cuilibet personali atque reali, quibus de vi vel iure aut consuetudine armorum observata et indicta inter bonos et graves armigeros cuiuslibet regionis venirent aut venient puniendi. In quorum omnium evidens testimonium et robur perpetue firmitatis ac fidem et certitudinem pleniorem nonnulli ex ipsis nobilibus captivis, habentes eorum sigilla ipsa, huic presenti instrumento impresserunt, reliqui vero, sigillis eorom carentes, per inscriptionem sui nominis solius voluerunt et pro sigillo tenere hec omnia, que superius acta sunt.

Acta fuerunt premissa omnia et singula in civitate Padue, in claustro interiori dominorum fratrum heremitarum, currente anno nativitatis domini M°III°LXXXVI, indictione nona, die dominica prima mensis iulii, presentibus egregiis et nobilibus viris et dominis Pagano de Raude, Jacobo de Pisis, Bartholameo de Prato et Antonio de Lagnello, Francisco de Dotti, Henrico Scrovegno Patavis, et Princivalle de la Mirandola italicis, Henrico de Appremberg et Truçsaç, militibus, Luchino de Casate, Philipo de Pisis, Anthonio Ballestracio, Guillelmus de Lisca, Parisio de Moschaia, Bertolino de Zanobono et Johanne Perusino de Padua testibus

vocatis et rogatis et ad hoc specialiter convocatis et aliis, cui etiam in testimonio premissorum hoc presens instrumentum munierunt suorum sigillorum impressione in testimonium premissorum.

Nomina autem dictorum captivorum sunt infrascripta etc.

Documento III.

[Archivio Notarile di Padova. — Bandini de Brazzis, *Liber instrumentorum quintus*, c. 87].

In Christi nomine. Amen. Anno eiusdem nativitatis millesimo trecentesimo octuagesimo septimo, indictione X^a^, die lune XXII mensis iulii. Padue, in contrata Domi, in domo habitacionis olim Johannis ab Oleo. Presentibus egregio artium et phisice professore domino magistro Petro de Pernumia, filio quondam magistri Henrigino phisici de contracta S. Lucie de Padua, nobile viro Nicolao de Basso cive Ferrariensi, Nofrac, (?) campsore quondam Symonis de Aleis de Florentia, habitore Padue in suprascripta contrata sancte Lucie, et Pinamonte quondam . . . . . de Bonacossis de Florentia, de contracta Sancti Antonii Confessoris de Padua, testibus vocatis et rogatis et aliis. Ibique egregius vir Cortesia de Seratico, filius nobilis viri Bonifacii de Seratico, asserens se fore captivum magnifici et excellentis domini domini Francisci de Carraria Padue etc., volens se pecunia ab ipsa captivitate redimere ut redderetur primo et reddatur prestare libenti animo, sponte, libere et ex certa scientia et non per errorem nec metu vel vi impellente coactus, solempni stipulatione et per pactum speciale et expressum convenit et promisit egregio et nobili militi domino Nicolao de Curtarodulo, Zumellarum et Cesane communitatis homini, civi paduano, ibi presente, ac mihi Bandino notario infrascripto ut publice parte et utrisque nostrum in solidum stipulantibus et recipientibus nomine et vice dicti magnifici domini domini Francisci de Carraria Padue etc. dare et solvere ipsi dicto magnifico domino Francisco de Carraria vel alio eius legitimo procuratore et iudice pro eo recepturo pro talea et occasione talee ipsius Cortesie, qua sibi ipsi indixit imposuit et accepit, dicens vires suarum facultatum bene posse pati dictam taleam cum adhuc ei supersit patrimonii et bonorum suorum substantia longe amplior, ducatos novem millia boni auri et iusti ponderis, in his terminis sive pagis et modis, videlicet ducatos III^m^ auri quam proximum ipse Cortesia exit extra territorium Padue super territorio illustri domini Nicolai Estensis Marchionis Ferrarie etc., reliquos vero sex milia ducatos auri ad sex menses venturos proxime incoandos ea die, qua ipse Cortesia fuerit super et in territorio dicti illustris domini Marchionis, et hec in pena ducatorum V, cum solempni stipulacione in singulis capitulis huius contractus et pro unoquoque termino non servato promisse totiens

committenda et exigenda cum effectu, quotiens contrafactum fuerit et, ipsa soluta vel non, nominatim predicta accedere teneatur et contractus iste in sua permaneat roboris firmitate. In quibus omnibus et singulis firmiter et plenius attendendis et observandis predictus Cortesia per se et suos heredes penes ipsum dominum Nicolaum de Curtarodulo ac me Bandinum notarium infrascriptum ut publicam partem et utriusque nostrum in solidum stipulantis recipientis nomine et vice dicti magnifici domini domini Francisci de Carraria Padue etc. et ipsum magnificum dominum et suos heredes obligavit se realiter et personaliter et omnia eius bona mobilia et immobilia presentia et futura etiam ea que in generali obligatione non cadunt. Et ad forbanniendum et conveniendum realiter et personaliter et tenutam de suis bonis accipiendum semel et pluries vel ad plenariam satisfactionem omnium predictorum et eam et ea habendum tenendum et possidendum atque vendendum et alienandum, si libuerit, sua propria auctoritate absque alicuius iudicis vel procuratoris auctoritate et licentia constituens se soluturum omnia et singula suprascripta ac omnia dampna interesse et expensis litis et omni de quibus simplici et soli verbo stari debeat ipsius magnifici domini domini Francisci de Carraria vel sui procuratoris et quos pro predictis VIIII^{m} ducatis solvendis ut supra et dampnis interesse et expensis reficiendis possit et valeat convenire personaliter et realiter Padue, Vincencie, Verone, Ferrarie, Mantue, Mutine, Veneciis et Tarvisii, Florencie, Pisis, Pistorii, Lucce, Senis, Janue et Mediolani et in tota Lombardia superiori et inferiori et generaliter ubique locorum et terrarum, ubi repertus et conventus esset, quamvis domicilium ibidem non haberet, constituens, se ibidem domicilium et locum habere, remittens per speciale pactum, interesse quodcumque ratione locorum predictorum. Et renunciavit omnibus feriis, diebus feriatis, statutis et ordinamentis et reformationibus consiliorum factis et fiendis per comune Padue et quamlibet aliam civitatem, castrum et locum, et omni remedio, appellationis suplicationis et nullitatis, beneficio restitutionis in integrum et privilegio fori vi metus vel causa exceptionis, doli, mali, accioni in forma executionis rei non sic geste, non sic celebrati contractus et condicionis secundum causa vel ex iniusta causa omnique alio suo iure tacito et expresso sibi contra hec com pe tenti et competituro ac legi et iure dicentibus generalem renunciationem non valere nisi processerit specialis, renunciavit per pactum speciale et expressum. Ad minorem insuper roboris firmitatem ipse Cortesia iuravit corporaliter ad sancta dei evangelia tactis scripturis sibi per me notarium infrascriptum delato sacramento predicta omnia et singula vera esse et fuisse et ea attendere et immobiliter observare, censure ecclesiastice se subiciens, si predicta non servaverit vel contra ea aut eorum aliquid attentare presumpserit vel venire. Et pro his etiam fidem suam prestitit atque dedit.

DOCUMENTO IV.

[Archivio Notarile di Padova. — GIOVANNI DE' CAMPOLONGO, *Liber instrumentorum secundus,* c. 175].

Carta solutionis facte Luchino de Casate per d. Ja. de Capitevacce de duc. CCCL.

In Christi nomine. Amen. Anno eiusdem nativitatis millesimo trecentesimo octuagesimo sexto, indictione nona, die mercurei tercio mensis octubris. Padue. In palaciis habitacionum magnifici et potentis domini domini Francisci de Carraria Padue etc., in eius cancellaria. Presentibus providis viris Bandino quondam Angeli notarii de Bandino, Zilio, filio Facini de Montagnana, notariis in dicta cancellaria testibus et aliis.

Cum in conflictu dato die XXV mensis Junii presentis millesimi per felicem exercitum et gentes bellicosas magnifici et excelsi domini domini Francisci de Carraria Padue etc. super territorio paduano, intra Brentellas, in villa Tegetum, gentibus et exercitui domini Veronensis fuerit captus et interceptus nobilis miles dominus Hugolinus del Vermo, veronensis, stipendiarius prefati domini Verone, per strenuum virum Luchinum quondam domini Galaoci de Casate in ipsius domini paduani tunc serviciis militarem et tamquam captivus ipsius Luchini fuerit Paduam ductus in forciis suis, ipse dominus Hungolinus, totis viribus annelans ab huiusmodi vinculo captivitatis dissolvi, promiserit pro talea sibi numerata dare et solvere ipsi Luchino ad certum terminum, iam elapsum, ducatos trecentum quinquaginta auri, et pro ipsis tucius persolvendis nobilis miles dominus Jacobus de Capitevace, civis paduanus, se precibus et instancia ipsius domini Ugolini requisitus, se fideiussorem constituit et soluturum pro eo in casu quo ipse d. Hungolinus non solverit ipsi Luchino ad terminum antedictum. Ipseque d. Jacobus, elapso pluribus diebus termino supradicto requisitus fuerit per Luchinum predictum fideiussorio nomine eiusdem domini Ugolini et nolens in hoc violare iusticiam et non contravenire promissis per eum, imo pollicita servare et attendere cum effectu procuratoris tenetur, et se obligavit in presentia testium predictorum et mei notarii infrascripti dedit, cessit, tradidit et numeravit ac persolvit de suis propriis denariis, non animo donandi sed rehabendi et recuperandi, fideiussorio nomine ipsius domini Hungolini prefato Luchino ducatos CCCL auri, quos ipse Luchinus manualiter habuit et recepit et se habuisse et recepisse confessus fuit pariter et contentus, de quibus idem Luchinus ab eodem domino Jacobo fideiussorio nomine predicto se clamavit et dixit tacitum et contentum ipsumque d. Jacobum pro dicta fideiussione nullo tempore molestare. In quibus quidem denariis, ut premictitur, persolutis, rehabendis et recu-

perandis prefatus Luchinus, cognoscens debitum ipsum de ipsius domini Jacobi danariis esse solutum et in hoc volens agnoscere bonam fidem, cedit, cessit, tradidit et mandavit ipsi domino Jacobo omnia iura, actiones et rationes, que et quas habet, habebat et habere videbatur et poterat in dictis ducatis CCCL contra et adversus ipsum dominum Hungolinum, suos heredes et bona, ubicumque sita et posita, tamquam verum ipsius debitorem. Ita quod licitum sit predicto domino Jacobo fideiussori et possit ab eodem domino Ugolino et suis heredibus petere et exigere ducatos antedictos et prefatum dominum Hungolinum et suos heredes pro predictis ubilibet convenire et in omnibus et per omnia facere prout et quemadmodum dictus Luchinus ante presentem cessionem facere potuisset et posset, dicens et asserens ipse Luchinus se nulli in dicto debito ius dedisse, nisi nunc ipsi domino Jacobo. Et si aliter reperiretur promisit ipsum indempnem cum obligacione bonorum suorum presentium et futurorum.

Documento V.

[Archivio civico di Padova. *Arch. Giudiz. Ufficio del Cavallo*, Filza, II, 6].

Coram vobis honorabili et sapienti viro domino Octonelo de Deschalciis, egregio legum doctore, iudice et officiale comunis Padue ad discum equi, ego Franciscus ab Appibus procurator et procuratorio nomine Bartolomei quondam Pauli de Arquada paduani districtus dico et expono quod dictus Bartolomeus cepit et captivavit Bernabonem de Fraschada civem Veneciarum in conflictu dato gentibus domini Antonii de la Schala aput Brentelas in contrata que vocatur Yteyi paduani districtus et eum sic captivatum duxit in civitate Padue et quod de consuetudine actenus observata unus civis capiens alium civem civitatis, cum qua est guerra seu habetur briga, potest capto imponere taleam, et quod dictus Barnabas promixit dicto Bartholomeo interoganti dare pro talea et sui redemptione ducatos ducentos auri ipsi Bartholomeo antedicto et quod Barnabas erat bonus et ydoneus captivus pro solvenda dicta talea et ipsam solvisset cuicumque, qui eum sic captivatum habuisset, et quod dictus Bartholomeus post dictam promisionem sibi factam per dictum Barnabonem eum poni fecit in carceribus comunis Padue, ut ibidem staret donec taleam predictam promissam per eum dicto Bartholomeo solveret, et ita de hoc fuit contentus dictus Barnabas. Et quod, dum ibidem detineretur in custodia, ut moris est captivorum, ad peticionem ipsius Bartholomei, dominus Nicolaus de Curterodulo dictum Barnabonem de dictis carceribus extrahi fecit et ipsum duci ad domum

ipsius domini Nicolai et peciit ab eo quod ei solveret ducatos ducentos, quos promisit pro talea dicto Bartholomeo, et quod dictus Barnabas renuebat et renuit solvere dictos ducentos ducatos dicto domino Nicolao et, quia ita renuebat, dictus dominus Nicolaus fecit ei eveli duos dentes, quod videns et scentiens dictus Barnabas et timens atraciora sibi fieri solvit et dedit dictos ducatos ducentos dicto domino Nicolao, et dictus dominus Nicolaus fecit dictum Barnabonem libere relassari in dampnum et detrimentum ipsius Bartholomei usque ad quantitatem dictorum ducatorum ducentorum. Et quod dictus dominus Nicolaus mortuus est, relicto post se Francisco quondam Marchi de Curterodulo sibi herede pro quarta parte, habito respectu ad quattuor partes, et quod dictus Franciscus pluries interpelatus cessavit et recusavit et ad presens indebite denegat et recussat dare et solvere dicto Bartolameo ducatos quinquaginta auri pro portione eum tangente occasione dampni illati dicto Bartholomeo per dictum dominum Nicolaum. Quare, cum ex re dicti Bartholomei sive ei debita ad dictum Franciscum hereditationis nomine, quo supra, sine causa pervenerit et ex ipsius re sive ei debita locupletior factus sit occasione dampni illati dicto domino Bartholomeo per dictum d. Nicolaum et neminem cum aliena iactura locupletari conveniat, peto per vos et vestram sententiam dictum Franciscum aut alium quemlibet pro eo legiptime competentem condempnandum esse et condempnari debere michi Francischo dicto nomine ad dandum dicto Bartholomeo ducatos quinquaginta auri pro porcione eum tangente pro parte quarta dicte hereditatis, habito respectu ad quattuor partes, et pro quarta parte dictorum ducatorum ducentorum, habito similiter respectu ad quattuor partes. Et si contradictor existat, peto expensas iam factas et protestor de fiendis, non astringens me ad probandum nisi necessitas, salvo iure adendi etc. secundum formam iuris, petens in predictis et circa predicta iusticiam michi fieri per vos secundum formam iuris et statutorum comunis Padue.

A tergo. Die mercurei XXI mensis Iulii. Producta fuit presente ser Thomaxio eius procuratore et locata (?) termino trium dierum ad respondendum secundum formam statutorum.

Documento VI.

[Arch. Notar. di Padova. — Bandini de Brazzis, *Liber instrumentorum quintus*, c. 15].

Die lune xxii Aprilis. In camera. Presentibus domino Guillelmo de Curtarodulo, domino Francisco de Beningrado, Franceschino de Fossadulei testibus citatis etc. Ibique nobiles Franciscus de Galuciis, Fran-

ceschinus de Alexandria, Antonius de Senis et Johannes de Mediolano et quilibet eorum dederunt fidem suam et promiserunt mihi Bandino, notario infrascripto ut publice parte stipulanti et recipienti nomine et vice magnificorum et excelsorum dominorum dominorum Francisci de Cararia Padue etc. et magnifici nati sui domini Francisci de Cararia, quod non erunt nec facient contra eos toto tempore durantis guerre presentis cum domino Verone sub pena periurii, etc.

Eodem die, in contracta sancti Firmi, in domo olim Albertiboni de Ovetariis, presentibus Johanne de Ordalafis, domino Guillelmo de Lisca milite et Betino..... testibus etc. Suprascripti Francischus, Franceschinus et Johannes, addentes suo iuramento et fidei, iuraverunt et promiserunt mihi Bandino, notario infrascripto, recipienti et stipulanti nominibus quibus supra, quod durante tempore guerre presentis non ibit ad aliquam civitatem, castrum vel locum domini Verone nec alicuius alterius domini vel comunitatis, qui vel que inimicarent ipsis magnificis dominis, nisi per modum inimicandi ipsi domino vel Verone vel aliis dominis vel comunitatibus predictis et quod inter unum annum proximum vel in fine anni predicti ipsi et quilibet eorum se presentabunt pro licentia coram ipsis magnificis dominis vel aliis eorum.

Appunti di lessicografia romanza

di ATTILIO LEVI.

Fonti lessicografiche: italiano (Tommaseo-Bellini; Crusca, 5ª impressione), sardo (Porru, Spano), siciliano (Traina), napoletano (Galiani, Andreoli), veneziano (Boerio), genovese (Casaccia), bresciano (Rosa), comasco (Monti), milanese (Cherubini), piemontese (Zalli, Gavuzzi) — francese (Littré; Hatzfeld - Darmesteter - Thomas, *Dict. général*) — spagnuolo (Accademia, 13ª ed.), portoghese (Marques, 1758-65; Fonseca, 1857) — catalano (Labernia) — provenzale (Mistral, *Lou tresor dou felibrige*) — basso latino (Ducange) — ant. provenzale (Raynouard; Levy) — ant. francese (Godefroy) — Diez, *Etymologisches Wörterbuch der romanischen Sprachen*, IV Ausgabe, Bonn 1878 (La 5ª ed. del 1887 non mi fu accessibile: ma la numerazione delle pagine è la stessa). — Körting, *Lateinisch-romanisches Wörterbuch*, II Ausgabe, Paderborn 1901.

Nel corso di un lavoro, a cui attendo da qualche anno, m'è avvenuto di raccogliere pure un buon manipolo di fatti, che non hanno stretta attinenza coll'indagine là istituita. E, poichè particolari circostanze ritardano e ritarderanno assai più ch'io non voglia il compimento dell'opera sopra accennata, comincio a pubblicare alcune di quelle osservazioni isolate. Le quali vorrebbero anche servire come tenue saggio delle risultanze, a cui si può giungere nelle ricerche etimologiche praticando *più largamente del consueto* l'unione del criterio semasiologico al criterio fonetico, guida necessaria e principio inviolabile.

It. *palandrana.*

Appartiene ad una schiera di vocaboli, le cui relazioni reciproche non mi sembrano ben chiarite. La serie lessicale, di cui si tratta, (riveduta di su' dizionari, che mi furono accessibili, per quanto potei completata, ed ordinata giusta la divisione, che si presenta più ovvia) è la seguente:

I. it. *palandra*, varianti *palandria*, *palandréa* — venez. *palandra* — sic. *palantra* — sard. mer. *belandra* (d'origine fran-

cese?) — fr. *belandre*, var. *balandre*, *belande* — cat. sp. *balandra*, " sorta di piccola nave da carico „.

Nota. E qui pure è forse da recapitarsi venez. *palandron* " cestone „, termine de' pescatori.

II. *balandra*, che nel Tirolo meridionale ha il senso di " persona instabile, viziosa, trascurata, dedita al bere „ e serve per entrambi i generi — a Brescia significa " sgualdrina „ e s'accompagna ad un masch. *balander* " furfante „ — a Como ha l'accezione di " vizioso, dissoluto, mancator di parola „ e i derivati *balandron* " scapestratissimo „, *balandrada* " azione da uom dissoluto „ — e infine a Milano ha il significato di " mancator di parola „.

Nota. — A questa categoria lo Schuchardt, *Kuhn-Zeitschrift*, XX, 270 *nota in calce* assegna ancora un romagn. *balatron* " perdigiorno „ che non mi pare della famiglia, un bresc. *balandrú* " birbante „, che non trovo nel Rosa, ed un emiliano *balandran* " stupido „, che manca però al bolognese (Coronedi Berti) ed al parmigiano (Malaspina).

III. bresc. com. mil. *pelanda* " abito lungo e largo, veste da camera „ (co' derivati mil. *peland-ella*, *-inna* " piccola zimarra „. *pelandon* " zimarrone „) — pavese e venez. *palandran* " gabbano „ — mil. *balandran* " id. „ — ant. nap. *balantrano* " sorta d'abito virile quasi talare „ — sic. *palandranu*, var. *palantranu* " gabbano „ — ant. sard. log. *palandra* " id. „ — it. *palandra* " veste lunga e larga „ (co' derivati *palandr-ana*, *-ano*, *-etta*, *-ina*, *-uccia*, *-one*) — fr. *balandran* " largo mantello da campagna „ (mutuato al prov. giusta il *Dict. gén.*) — neo prov. *balandran*, var. *palandran* " mantello, tonaca „ (così il Mistral: altra grafia in Diez 232) — cat. *balandram* " veste talare „ — sp. *balandran* " id. „ — ptg. *balandrão* " id. „.

Nota 1. Secondo il Mussafia, *Beitrag zur Kunde der norditalienischen Mundarten in XV Jahrhundert* (in *Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Phil.-hist. Classe.* Bd. 22. Wien 1873, p. 186), *pelanda* è anche cremasco e friulano (de' quali mi mancano i lessici), ed il pavese ha (od ebbe) *palandra* nel senso di " abito „: il che dall'anonimo *Diz. pav.-it.*, Pavia 1874, non mi risulta.

Nota 2. Fr. prov. *balandras*, che vien dato come variante di *balandran*, mi sembra appartenere ad altra famiglia.

***

Naturalmente tutte codeste voci furono già in vario modo tentate.

I. Di *balandra* " naviglio „ furono proposte tre etimologie:

1° Il Diez 232 la traeva dal basso ted. *binnenlaender* " (nave), che va entro terra „ (cfr. Körting, n. 1391): e sembra essersi accostato al vero senza raggiungerlo, poichè non è facilmente credibile che il *binnen-* della voce germanica possa essersi ridotto al *ba-* della voce romanza.

2° Il P. Guglielmotti, *Vocabolario marino e militare*, Roma 1889, p. 411, crede *palandra* corruzione di *chelandia*, altra specie di naviglio, il cui nome deriva da χελάνδιον, voce di bassa grecità, e dal basso lat. *chelandium*, ed annovera ben diciotto vocaboli, che a lui paiono varianti di esso *chelandia*. Ma che una gutturale passi a labiale non sembra ammissibile: quindi le due voci debbono essere tenute ben disgiunte (senza tuttavia escludere che possano talvolta essersi incrociate e che talune delle supposte varianti sia appunto il frutto di tale incrocio, ad es. *chelandra*: *palandria*).

3° I lessicografi francesi (Littré, *Dict. gén.*, s. v.) trassero il loro *belandre* dall'oland. *bijlander* (ingl. *bylander*, *bilander*, *belander*), che significa " (battello), che va presso terra „ (da ol. *bij*, ingl. *by*, ted. *bei* " presso „ ed ol. ingl. ted. *land* " terra „): ed è etimologia sotto ogni rispetto accettabile, poichè la *balandra*, giusta la definizione del Seckendorf (cfr. Diez 232), è piccola nave da carico, che serve pel tragitto lungo le coste e i fiumi e i canali.

II. Al com. *balandra* già il Monti s. v. raffrontava il lat. *balatro* " buffone-dissoluto „. Similmente lo Schuchardt, l. c., accomunando la famiglia del *balandra* cisalpino con quella di it. *palandrano*, desumeva e l'una e l'altra da lat. *balatronem* contaminato con it. *landra* " donna di mal affare „. Ma tale etimologia mi par che urti contro due gravi difficoltà. L'una fonetica. Che in formula iniziale *p* digradi a *b* è raro (cfr. Meyer-Lübke, *Grammatica storico-comparata della lingua italiana*, Torino 1901, pp. 88 sgg.): ma di *b*, che in tal condizione si assorda in *p* (come sarebbe avvenuto in *balatro*: *palandrano*), non conosco

esempi. L'altra semasiologica. È fra le leggi più sicure e costanti, che si osservino nella evoluzione de' significati, questa: che il senso procede dal concreto all'astratto, e in via subordinata dal materiale al morale. (Tal norma, la quale naturalmente non esclude deviazioni sporadiche, emerge da una delle poche ricerche del genere, che sian condotte con rigore di metodo: voglio dire D. Pezzi, *Saggi d'indici sistematici illustrati per lo studio della espressione metaforica de' concetti psicologici* in *Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino*, serie II, tomo 46). Ora in *balatro: palandrano* sarebbe appunto avvenuto il fatto inverso del passaggio dal morale al materiale.

La stessa fusione del *balandra* (e derivati) del nostro Settentrione con it. *palandrano* fa lo Schneller, *Die romanischen Volksmundarten in Südtirol*, Gera 1870, p. 110, il quale, osservando che da *balatronem* si aspetterebbe un **baladron* (obbiezione, che è tolta di mezzo dall'ipotesi schuchardtiana della contaminazione con *landra*), propone a base un ant. alto ted. *wallandaere* " errante, ramingo ", trae i sensi psicologici del *balandra* cisalpino dalla mala fama, che avevano in Italia pellegrini e romei, e ne conclude che in origine *palandrano* (e varianti) dovette significare " mantello da pellegrino ". Ed anche qui riappare la difficoltà semasiologica, di cui sopra, ma certo assai minore: chè anzi non può negarsi la convenienza logica tra il concetto medievale del pellegrino e l'idee espresse dal *balandra* nostrano.

Ma insormontabile mi sembra l'ostacolo fonetico: germ. *w* non passa in *b* romanzo. Nè a ragione, cred'io, esso Schneller, o. c., p. 94, ammette tale trapasso pe' dialetti da lui studiati: vedasi pel fatto generale Ascoli, *Arch. glott. it.* I. 61 sg., 324, 351 sg., 356, 516 (num. 130), Meyer-Lübke, *Grammatik der romanischen Sprache*, I, Leipzig 1890, pp. 36 sgg., e pel caso particolare Körting, num. 10345.

Quest'ultimo poi a num. 1391 opina pur esso che it. *palandra* " naviglio " (e affini) non si debba disgiungere da it. *palandrana* " abito " (e simili), e vuol derivare entrambi da lat. it. *pala*: il che non sembra sostenibile, sia perchè non si scorge il nesso fra il concetto della base proposta e il senso de' due vocaboli succitati, sia perchè troppo anormale sarebbe la derivazione (come non è sfuggito a lui stesso).

III. It. *palandrano* fu dal Mussafia, o. c., connesso con *pelanda*: connessione, a parer mio, sicura. E *pelanda* venne a sua volta già da' men recenti dialettologi nostri (il Cherubini s. v., il Rosa citato dal Mussafia, *ibidem*) felicemente collegata con fr. *houppelande* " sopravveste, grosso saio „.

Soltanto, quale il rapporto, che intercede fra esse? La voce it. deriva dalla fr.? O la fr. dall'it., come pensò il Quicherat (cfr. Littré s. v.)? Propenderei per la prima ipotesi, anzitutto perchè mi sembra di gran lunga più agevole ad ammettersi l'aferesi della sillaba iniziale nel passaggio dal fr. all'it. che non la protesi della medesima nel passaggio inverso, in secondo luogo perchè certamente di *houppelande* non si ha spiegazione, che appaghi (cfr. Scheler, *Dictionnaire d'étymologie française*, 3ª ed., Bruxelles 1888, s. v., Körting, num. 6707), ma *pelanda*, se fosse voce originaria, sarebbe un enigma ancor più forte.

Nota. Poco lume sembra dare il basso lat. colle varie forme *opelanda*, *oppellanda*, *opulenda* (falsa grafia?), *pelanda*, *hopelanda*, *houppelanda*. Tuttavia si noti: si riscontrano sovratutto in Francia, nè sono ben antiche (sec. XIV e XV).

*
* *

Passate così in rassegna le ricerche precedenti, rimane che se ne traggano le possibili conseguenze ulteriori.

I. Dunque it. *palandra* " naviglio „ (colle sue varianti) deriva, come vedemmo, dall'ol. *bijlander* (mediatamente, e con divario all'inizio, di cui dirò più sotto).

II. Nè da essa mi scosterei rispetto al *balandra* (e derivati) de' nostri dialetti settentrionali, giacchè vi scorgerei una metafora popolare, quale si ha in piem. *spa* " spada — mangiatore vorace „, e in piem. mil. *sponga* " spugna „, *surba* " pompa aspirante „, che al figurato significano " beone „.

Infatti sembra al tutto naturale che un mezzo di trasporto abbia offerto l'immagine dell'instabilità e del vagabondaggio, e che da questo primitivo concetto sia avvenuto il trapasso a quelli di " intemperanza, dissolutezza, slealtà „, e cioè a' vizî, che della vita randagia sono la conseguenza non necessaria, ma frequente e comune.

Nè può fare difficoltà il trovare in quella regione il nome

del naviglio nella forma cat.-castigliana, poichè può essere questa una delle non poche traccie linguistiche del dominio spagnuolo.

Parimenti, non deve parer strano l'incontrare a' piè dell'Alpi codesta voce marinaresca, poichè la *balandra*, come s' è visto, serviva pure per la navigazione fluviale.

Infine, non può costituire un ostacolo il fatto che la voce in quella zona si trovi soltanto in accezione metaforica. Anche di ciò non mancano esempî. E valga all'uopo il piem. mil. *strüsa* " arnese agricolo, sorta d'erpice „ (verosimile deverbale di piem. *strüsé*, lomb. *strüsá* " trascinare „, su cui cfr. Flechia, *Arch. glott. it.* III, 154 sg.), il quale in Torino e dintorni significa unicamente " donna di mal affare „: tanto che con questo solo significato lo registra lo Zalli, nativo di Chieri.

III. Nè in *pelanda* il giuoco della metafora popolare fu meno largo ed intenso.

Suole il popolo attribuire sensi psicologici a parti del vestiario, traendo la metafora o dalla materia, forma e struttura delle cose stesse o dalla condizion delle persone, che abitualmente le portano, o dalle particolari contingenze in cui vengono portate. Esempî: it. *ciabattone* " trasandato negli atti e nel vestire „, *parruccone* " uomo d'idee antiquate „, piem. *stival* " stivale — sciocco „, *savata* " ciabatta — meretrice „, *braie 'd teila* " calzoni di tela — i poveri, i deboli „ (nel dettato *le braie 'd teila a l'an sempre tort*, a cui fa riscontro l'it. *i cenci vanno all'aria*), fr. *gros bonnet* " persona altolocata „, *bonnet carré* " dottore „, *bonnet rouge* " rivoluzionario „, *garnement* " armatura — — mariuolo „ (cfr. per quest'ultimo, che non mi par ben sicuro, A. Darmesteter, *La vie des mots étudiée dans leurs significations*, 2e éd., Paris 1887, p. 159), sp. *zamarro* " vestito di pelle di montone — uom grossolano e sciocco „.

Così in *pelanda* e derivati troviamo le varie specie di metafore summenzionate, e cioè mil. bresc. *pelanda* " donna di mal affare „, mil. *pelandon* " chi porta la zimarra „ (la qual voce è pure in com. col senso di " cencioso „, poichè ivi *pelanda* significa anche " abito a brandelli „), com. *pelandari* " uomo alto e dappoco „, *pelandona* " baldracca „ (a quest'ultima il Monti s. v. raffronta sp. *pelandusca* " id. „, la quale, isolata com'è nel lessico castigliano, sembra un lombardismo, e più precisamente lomb. *pelanda* ampliata con quell' *-usco*, che è suffisso peculiare

a Spagna: cfr. P. Foerster, *Spanische Sprachlehre*, Berlin 1880, p. 225, Meyer-Lübke, *Gram. der rom. Spr.* II, 559).

Assunte tali accezioni, *pelanda* (co' suoi derivati) naturalmente doveva accostarsi da una parte al *balandra* nostrano, di cui sopra, nonchè al com. *malandra* " persona dissoluta „ (epiceno, come esso *balandra* in Tirolo: il che può esser riprova che si tratti di sostantivo usato metaforicamente), e dall'altra a quelle voci nostre, che il Diez 187 sg. (= Körting, num. 8806) desume dal ted. *schlendern* " girellare oziando „, e cioè piem. mil. com. bresc. *slandra* " prostituta „, mil. com. piem. *slandrón* " bardassa (a M.) — dissoluto e vagabondo (a C.) — trascurato negli atti e nel vestire (in P.) „, bresc. *slandrû* " vagabondo e fannullone „, venez. *slandrona* " sudiciona „, it. *landra* " donna di mal affare „. (Come s'è visto, già lo Schuchardt, l. c., pensò a questo vocabolo it.: ultimo di una serie di accostamenti, a' quali per altra via e indipendentemente da lui ero pervenuto io stesso).

E l'affinità logica ebbe conseguenze fonetiche, giacchè tra le voci diverse s'avverò una contaminazione, per la quale l'*e* atono di *pelanda* si assimilò all'*a* tonico seguente e nell'interno della sillaba finale si sviluppò l'*r* inorganico. Epperò troviamo pavese *palandra* " sguaiata, sgualdrina „, veneziano *palandrana* " prostituta „, piem. *plandra* " donna scioperata — sgualdrina „ (che a' tempi dello Zalli dicevasi pure d'uomo fannullone: dunque epiceno, come tirol. *balandra* e com. *malandra*) e *plandrón* " ozioso, scioperato „, gen. *pellandrōn* " fuggifatica „ e *pellandrōnna* " donna di mal affare „.

Quanto poi ad it. *palandra* " abito „ (e derivati *-ana -ano* ecc.), apparendo essa soltanto in forma lontana dall'etimo, può forse dirsi calata dal nostro Settentrione, e se, come afferma il Mussafia, l. c., esiste od esistette un pavese *palandra* nel senso di " veste „, si ha in essa l'esemplare lombardo.

Per contro mil. *balandran* (che significa pure " sciocco „ e pel quale il Salvioni, *Fonetica del dialetto moderno della città di Milano,* Torino 1884, p. 217, segue lo Schneller, *Rom. Volksm.* 110) ed ant. nap. *balantrano* sembrano doversi ritener mutuati a sp. *balandran*, ove si consideri che in Italia posseggono questa voce con labiale sonora all'inizio soltanto quelle due regioni, che ne' tempi andati furono provincie di Spagna.

Nota. Sic. *palantranu* è forse il nap. *balantrano* con sorda iniziale per analogia di *palantra*, che a sua volta dovrà all' influsso di *palantranu* la dentale sorda interna. D'altra parte sic. *palandranu* ed ant. sard. log. *palandra* possono essere italianismi.

*
* *

Sicchè, riassumendo, da due soli stipiti, ol. *bijlander* e fr. *houppelande*, procede la numerosa schiera de' vocaboli qui trattati, i quali si sono poi dispersi per la Romanità occidentale tenendo, forse, questa via.

Dati i rapporti, che la Spagna ebbe in passato coll'Italia e i Paesi Bassi, è al tutto verosimile che *balandra* sia stata dagli Spagnuoli tolta direttamente all'Olanda e recata a noi.

D'altra parte fr. *houppelande* penetrato nel nostro Settentrione vi si estese e incrociatosi con voci omofone si alterò ed ampliò variamente, e in varia forma discese nella restante Italia (nè forse in età molto remota: almeno l'esempio più antico, che di it. *palandrana* rechino i lessici, è del sec. XVI).

Poscia sp. *balandra* " naviglio „ e it. *palandra* " veste „ dovettero incontrarsi: e ne seguirono scambî e influssi vicendevoli. Lo sp. *balandra* in Italia sotto l'azione di *palandrano* divenne *palandra* " naviglio „: reciprocamente *palandrano* passato in Ispagna per analogia di *balandra* si mutò in *balandran*, e in questa nuova forma si diffuse per tutta la penisola iberica, donde da una parte migrava in Provenza, che lo diede alla Francia, mentre dall'altra ritornava fra noi (a Napoli e Milano).

E così la contaminazione spiega quell'alternanza *b* : *p* (*balandra: palandra, palandran: balandran*), che, come trapasso spontaneo, sarebbe difficile ad ammettersi in formula iniziale.

Nota. Ferme rimanendo la mediazione spagnuola per lomb. *balandra* e l'azione analogica di *palandra* " veste „, per *palandra* " naviglio „ non è da escludersi, in considerazione di blat. *palandaria* " id. „ (2ª metà del sec. XV), la possibilità che sia importazione marinaresca anteriore agli influssi di Spagna.

It. *bagascia*.

Questo vocabolo, denominazione disonesta di disonesta persona, è forse un notevole esempio di quel peggioramento di si-

gnificato, nel quale non può certo scorgersi (come altri volle: cfr. M. Bréal, *Essai de sémantique,* Paris 1897, p. 109 sgg.) una tendenza generale del linguaggio, ma che in talune particolari categorie è innegabile.

Fu già variamente etimologizzato. Il Diez 35 indicava tre possibili derivazioni: 1. da una base *baga* " pacco, involto, fardello „ (cfr. Körting, n. 1154) ampliata col suff. lat. *-aceo-*; e notava egli stesso come questa combinazione non dia senso soddisfacente. 2. dal celtico *bach* " piccolo „ (cfr. Körting, n. 1140). 3. dall'arabo *bâgez* " vergognoso „ (già proposto dal Muratori) ovvero *bagî* " prostituta „.

Similmente il Pihan, *Dictionnaire étymologique des mots de la langue française dérivés de l'arabe* etc., Paris 1866, p. 54, e l'Eguilaz y Yanguas, *Glosario etimológico de las palabras españolas de orígen oriental*, Granada 1886, p. 331, la trassero dall'arabo *baguiyya* o *fahixa* " cortigiana „ (cfr. Körting, n. 1159). Infine il Körting, nn. 1131. 9961 propone una spiegazione sua (od almeno riferita senza nome d'autore), giusta la quale la voce in discorso discende da un lat. **vagacea,* derivato di *vagus.*

Ora: delle derivazioni dall'arabo io, ignaro di lingue semitiche, non so dar giudizio. Mi par tuttavia che non siano da accogliersi, perchè è in esse quello, che a mio avviso è in questa ricerca l'error fondamentale, cioè il muovere dal concetto di " prostituta „.

E per la stessa ragione respingerei pure il **vagacea* postulato dal Körting, ma non solo per questa, giacchè 1° resta a vedersi se qui si abbiano le condizioni, in cui s'avvera quel trapasso di originario *v* iniziale in *b*, che è tra i problemi della fonetica romanza (cfr. Meyer-Lübke, *Gramm. d. rom. Spr.*, I. 338 sgg., *Gramm. st.-comp.*, 91 sg.); 2° nel campo latino il suff. *-acea-* di regola s'unisce soltanto a sostantivi (cfr. Meyer-Lübke, *Gram. d. rom. Spr.*, II. 457 sg.). Sicchè direi che al Körting abbiano suggerita l'ipotesi da una parte il lat. *vulgivaga*, soprannome di Venere (cfr. Pauly, *Real-Encyclopädie der klass. Altertumswissenschaft*, VI. 2773), e dall'altra il basso lat. *bagasea*. Ma la reminiscenza classica, conscia od inconscia che sia, è qui per lo meno inopportuna: e la voce di bassa latinità, se pure non è forma latineggiante, prova soltanto che col suff. *-aceo-* fu ampliata l'ignota radice.

*
* *

Vediamo dunque di tentare altra via.

Accanto ad it. *bagascia*, ant. prov. *baguassa*, neoprov. *bagasso*, fr. *bagasse* (mutuato al prov. giusta il *Dict. gén.*), cat. *bagassa*, sp. *bagasa*, che tutte significano " donna di mal affare ", si trovano prov. *bagas* " giovanetto ", ant. fr. *baiasse* " fantesca ", sic. *guajassa* " femmina di bassa condizione e, talvolta, di non buona fama " e nap. *vajassa* " serva " (francesismi?), e, con suffissi diversi, mil. *bagaj*, *bagaja* " fanciullo, fanciulla ", venez. *bagagio*, *bagagia* " id. id. ", gen. *bagarillo* " fanciullo ".

Nota 1. Ptg. *bagaxa* (Diez, 35) ovvero *bagaza* (Körting, n. 1131) manca a' lessici ptg., di cui dispongo.

Nota 2. A Gaston Paris, *Romania*, XXIV, 311, prov. *bagas* pare immaginario: è però registrato dal Mistral. Per contro ben a ragione afferma di non conoscere l'it. *baiazzo* citato dal Suchier, *Zeitschr. f. rom. Phil.*, XIX, 104, e dal Körting, nn. 1131, 1154, 9961: infatti è ignoto pure al Tommaseo-Bellini ed alla Crusca[5].

Nota 3. Da quel tema, da cui discende gen. *bagarillo* " fanciullo ", direi derivato pure sp. *bagarino* " marinaio " [che l'Eguilaz y Yanguas, *Gl. etim.*, s. v., trae dall'arabo *baharí* " id. ": sul che non posso pronunciarmi: v. sopra]. Infatti 1° di passaggio analogo dal concetto di " giovine " a quello di " marinaio " avremmo un esempio in sp. *mozo* " giovanotto ": it. *mozzo*, fr. *mousse* (cfr. Körting, n. 6421); 2° dato questo raffronto, sarebbe più agevole spiegare il sard. log. *bagarinu* " basso " (in senso materiale, es. *trigu bagarinu* " grano basso "). Per contro sic. *bagarinu* " cattivo, inutile " non dà lume al riguardo: forse si riattacca a sp. *bagarino* " marinaio " e presenta quella stessa accezione psicologica, che è in it. *galeotto*.

Nota 4. Infine è da ricordarsi basso lat. *bagarotinus* " frivolo, futile ", che potrebbe essere tratto qui pel tramite del concetto di " giovine ": però, mancandomi ogni elemento di prova, basti il semplice accenno.

Questo il materiale primo. Ora, se regge il ravvicinamento di it. *bagascia* (e simili) colle voci del nostro Settentrione, la più verosimile evoluzione de' significati richiede che si parta da quella base celtica, che non era sfuggita all'immensa dottrina del Maestro.

Infatti, a chi muova dall'idea di " prostituta " non è agevole passare a quella di " serva ", ed è addirittura impossibile giungere a quella di " bimbo, bimba ". Per contro, si prendano le mosse dal concetto di " piccolo ", e sarà facile comprendere il processo ideologico, sia che si voglia supporre che i tre sensi

" persona giovine — serva — prostituta „ rampollino l'uno dall'altro sì da costituire una serie continua, sia che si ritenga (come mi par più probabile) che il concetto primitivo si sia svolto in due direzioni diverse.

Dunque: la base pare *bach*, forma cimrica di un tema celtico *bekko-* significante " piccolo „ (cfr. A. Fick, *Vergleich. Wörterbuch der idg. Sprachen*, 4ª ed., Göttingen 1894, vol. II, p. 166, ed A. Holder, *Alt-celtischer Sprachschatz*, Leipzig 1896, vol. I, p. 364).

Dal concetto di " piccolo „ a quello di " giovine „ il trapasso è quasi insensibile, e da " giovine „ a " servo „ è così naturale che ne porgono esempi le lingue antiche e moderne: si ricordino gr. παῖς, lat. *puer* " fanciullo — schiavo „, fr. *garçon* " cameriere „, sp. *criado*, che in antico significò " allievo „ (in senso biologico), ora significa " servo „ (cfr. per quest'ultimo N. Caix, *Studi di etimologia italiana e romanza*, Firenze 1878, num. 300). E la lista potrebbe agevolmente essere accresciuta.

Similmente, pel passaggio da " giovine, piccolo „ a " persona di mala vita „ si possono citare *puttana* da *putta*, che risale a lat. *putus*, derivato di *puer* (così il Meyer-Lübke, *Gramm. stor.-comp.*, p. 168: altrimenti, ma con verosimiglianza minore, il Körting, n. 7578), fr. *garce*, *fille* " fanciulla — prostituta „, nonchè fr. *mignon* " grazioso, carino — cinedo „ (cfr. Körting, n. 6173).

Nota. Ulteriori raffronti semasiologici potrebbero aversi 1° in it. *bardassa*, che in piem. è o fu voce scherzevole a significar " fanciullo, marmocchio „, se realmente derivasse dall'arabo *bardaǵ* " schiavo „ (come dubbiosamente propone il Diez, 42); 2° in sic. *garrusu* " cinedo „ (dall'arabo giusta l'Avolio, *Introduzione allo studio del dial. siciliano*, Noto 1882, p. 43 e il De Gregorio, *Studi glottologici italiani*, III, 238), se in qualche modo si connettesse con sic. nap. *carusu* " ragazzo „, che non felicemente, mi pare, il Gioeni, *Saggio di etimologie siciliane*, Palermo 1885, p. 78, trae dal gr. κείρειν " tosare „.

Dato quanto precede, giacchè detta base celtica sembra trovarsi con senso più vicino all'origine in mil. gen. e venez., par lecito concluderne che nel territorio romanzo essa base è partita dall'Italia settentrionale, antica sede de' Celti (cfr. Meyer-Lübke, *Einführung in das Studium der romanischen Sprachwissenschaft*, Heidelberg 1901, p. 36), e che delle nostre voci dialettali è una

variante morfologica quel **bag-aceà*, che acquistò l'idea di " serva „ in Francia, da cui passò nel nostro Mezzogiorno, mentre assunse quella di " cortigiana „ in Provenza, donde si diffuse nel resto della Romanità.

It. *vivanda.*

Il Diez 698 a causa dell'*a* interno la disse mutuata a fr. *viande,* la quale anteriormente a lui (cfr. Raynouard, *Lexique roman*, V. 556) venne tratta dal lat. *vivenda.* E questa derivazione di *viande* fu accettata non solo da esso Diez *ibidem*, ma da una schiera di lessicografi e grammatici: cfr. Littré, il *Dict. gén.*, Scheler, *Dict. d'ét. fr.* s. v., lo Schwan, *Grammatik des Altfranzösischen*, Leipzig 1888, p. 23, il Brunot in Petit de Julleville, *Histoire de la langue et de la littérature française,* Paris 1896, vol. II, p. 470, il Nyrop, *Grammaire historique de la langue française,* Copenhague 1899-1903, I. p. 114, 188, 343, 383. II. p. 4. Solo, ch'io sappia, il Körting, num. 10266, si mostra dubbioso al riguardo sia per il senso, a parer suo, non soddisfacente, che darebbe il gerundivo di lat. *vivere*, sia per il supposto scadimento di *v* intervocalico: epperò trae *viande* da *vitanda*, cioè " il cibo, da cui bisogna astenersi ne' giorni di vigilia, la carne „.

Ora, delle due obbiezioni del Körting mi pare destituita di fondamento la prima (d'ordine semasiologico), gravissima la seconda. È perciò non inutile riprendere in esame la intera quistione, avvertendo che i dati cronologici, ove manca speciale indicazione, sono attinti alle fonti lessicali sopra elencate.

***

Fr. *viande* è parola assai antica (sec. XI: cfr. Godefroy, *Complément* s. v.) e assai diffusa: ant. prov., cat., sp., ptg., sard. mer. *vianda*, ligure *vionda* (per quest'ultimo cfr. T. Zanardelli in De Gregorio, *Studi glottologici italiani.* II. p. 103).

Nota. Trascurabile mi pare it. *vianda* (cfr. Tommaseo-Bellini), essendo isolato e tratto probabilmente da una scrittura tradotta dal francese.

Vediamo ora se e come si conciliano colle etimologie proposte queste condizioni di fatto.

I. Dato l'etimo *vivenda*, sono possibili due ipotesi.

1° La voce viene dal latino volgare. Infatti si potrebbe ricordare che in questo il *v* intervocalico mostra una cotal tendenza allo scadimento: menzionerò, per citar esempî del suono in condizioni simili, *Noembris*, *iuentus* per *Novembris*, *iuventus* (cfr. W. M. Lindsay, *The latin language*, Oxford 1894, p. 52, F. Brunot, *Histoire de la langue française*, Paris 1905, vol. I, p. 71). Ma d'altra parte nelle lingue romanze esso *v* si mostra così largamente mantenuto da doversi credere o che la tendenza si sia arrestata prima dell'esistenza individuale de' linguaggi singoli o che in questi si sia avverata con grande coerenza e continuità una restituzione seriore del *v* sovratutto grazie a spinte analogiche (cfr. Meyer-Lübke, *Gramm. d. rom. Spr.*, I. p. 370, 375, *Einführung*, p. 128 sg.), sì e come è avvenuto dell'*i* consonante nel greco antico (cfr. G. Meyer, *Griech. Gramm.*, 3ª ed., p. 293, Brugmann, *Griech. Gramm.*, 3ª ed., p. 34).

Inoltre, dato lo scadimento, nel caso nostro particolare dovremmo in qualche parte del territorio romanzo trovare **vienda*, mentre invece il basso lat. e l'ant. provenzale ci porgono *vivenda*, sostantivo femminile col significato generico di " cibo ". Con che l'ipotesi cade di per sè stessa.

2° L'altra supposizione, che può avventurarsi, è che *viande* sia voce pretta francese e che mutuata a Francia debba dirsi a causa dell'*a* interno cat. sp. ptg. *vianda*.

Ma allora (facendo pel momento astrazione dalla question del mutuo) insorgono gravissime le difficoltà fonetiche: in francese *v* intervocalico davanti ad *a*, *e*, *i* non è mai caduto, ed *e* davanti a nasale + consonante non è passato in *a* che verso la fine del sec. XI (cfr. Nyrop, *Gramm. hist.*, I. p. 343, 187. Brunot, *Hist. d. l. l. fr.*, I. p. 166, 157). Ora, *viande* si trova già in quella prima redazione della *Vie de Saint Alexis*, che risale alla metà d'esso sec. XI (cfr. Petit de Julleville, *Hist. de la langue et de la littér. fr.*, Paris 1896, I. p. 2 sg.). Dunque, sotto il rispetto fonologico, non è assolutamente possibile che *viande* derivi da *vivenda*.

Nota. Lo Schwan, *Gramm. d. Altfr.*, p. 23, crede che in *viande* il *v* interno di *vivenda* sia caduto per dissimilazione: ma non bene conforta l'ipotesi con esempî, in cui il suono caduto è diverso dal *v* od è *v* in condizioni diverse. E una sincope dissimilatoria vi scorge pure il Nyrop, *Gramm. hist.* I, p. 114, 343, 383, il quale a riprova del fatto cita oltre al *viande* contro-

verso l'ant. fr. *viaz* " presto, tosto „, per cui egli postula una base **vivaceum*. Ma ant. fr. *viaz* (il quale è anche in prov. e cat. antichi, e che il Diez, 698 seguito dal Gröber, *Arch. f. lat. Lex.*, VI, 145, e dal Körting, num. 10264 trae da *vivacius*, comparativo neutro di *vivax*) può non presentare il *v* interno, perchè rifatto su fr. *vie* " vita „, come ad influsso di aprov. *via* " vita „ possono esser dovuti aprov. *viatz* accanto a *vivatz* ed aprov. *viacier* accanto a *vivacier* " vivace „. [Quanto al cat., che sonorizza ma non espelle *t* intervocalico (cfr. Gröber, *Grundriss der romanischen Philologie*. Strassburg 1888, vol. I, p. 680: del qual 1° vol. esce ora a dispense la 2ª edizione, ma non è ancora giunta alla parte, cui qui si rimanda, cioè a *Das Catalanische* di A. Morel-Fatio), *viatz* è secondo ogni verisomiglianza un provenzalismo]. Sicchè mi par discutibile, almeno per questo suono in queste condizioni, l'accidente fonetico stesso.

In secondo luogo il Nyrop, o. c., I, p. 188, vede nell'*a*, che in *viande* sostituirebbe l'*e* originario, non un fatto fonetico, ma un fenomeno d'analogia, cioè un trapasso dalla 3ª coniugazione alla 1ª, ed a *viande* raffronta *offrande* da *offerenda* e *buvande* da *bibenda*. Ma il raffronto non regge, perchè *viande* è, come vedemmo, assai antico, mentre *offrande* è di gran lunga posteriore (la forma antica è *ofrende* e fu assai resistente, poichè la si trova ancora nel sec. XVI: cfr. Godefroy, *Complément* s. v.) e *buvande* pure non s'incontra che nella 2ª metà d'esso sec. XVI. E del resto, in tesi generale, tutti codesti pretesi trapassi analogici de' verbi francesi dalle altre coniugazioni alla 1ª potrebbero in massima parte essere semplicemente le risultanze di una legge fonetica, e cioè il menzionato passaggio in *a* di *e* davanti a nas. + cons.

II. Dato l'etimo *vitanda*, vocabolo verosimilmente ecclesiastico, si resta nell'ambito del Medio Evo cristiano e (poichè in francese più che in ogni altra parte del territorio è antico e costante lo scadimento della dentale intervocalica: cfr. Meyer-Lübke, *Gramm. d. rom. Spr.*, I. p. 362 sg., Brunot, *Hist. d. l. l. fr.*, I. p. 166) si rimane in Francia.

Ma cat. sp. ptg. *vianda* significa " cibo, alimento „ in genere: così pure in ant. prov., ove solo in via d'eccezione ha il senso di " carne „: e in Francia, presunta patria del vocabolo, *viande* si riscontra bensì talora (e fin da' primi monumenti della lingua) col significato di " carne „, ma il senso, che predomina e che perdura fino a tutto il sec. XVII, è quello generico di " cibo, alimento „.

Ciò posto, niuno vorrà credere che il cibo sia stato detto mai " la cosa da evitarsi „.

***

Dunque etimi soddisfacenti non sono nè *vivenda* nè *vitanda*. Eppure non debbono porsi nel novero delle ipotesi infondate: infatti *vivenda* sostantivato ebbe, come s'è visto, esistenza reale nel basso lat. e nell'ant. prov.; e *vitanda* sembra trovar chiara conferma in quel sardo logudorese *vidanda*, variante *bidanda*, di cui fa parola T. Zanardelli (in De Gregorio, *St. glott. it.* II. 103, senza tuttavia scostarsi dall'etimo *vivenda*) e che significa " pasta da minestra „: senso, che non esclude la base *vitanda*, sia perchè nel vocabolo potè essersi avverata una concepibilissima deviazione semasiologica, sia perchè (com'è noto) non soltanto la carne, ma più altri sono i cibi da evitarsi ne' giorni di vigilia.

Soltanto, *vivenda* e *vitanda* non bastano alla soluzion del problema, ma vi occorrono altri elementi che sembrano offerti dal basso latino. Ivi accanto a *vivenda* troviamo *vianda* " viatico, provvista di cibi per viaggio „ e *vivanda* " cibo, alimento „ sì e come *vivenda*. Ora blat. *vianda* secondo ogni verosimiglianza si connette con quel verbo, di cui si ha il participio presente in it. sp. *viandante*, cat. *viandant*, ant. prov. *viandan*, e ricompare in it. *provianda* " provvigione da bocca „ ed ant. fr. *proviander* " approvvigionare „. *Vivanda* poi è un evidente allotropo di *vivenda* sorto per la pressione, che su quest'ultimo dovettero esercitare da una parte *vianda* e dall'altra *vitanda*.

Nota. È da osservarsi che blat. *vivanda* è anteriore ad ogni possibile influsso francese, giacchè è molto antico: appare in un capitolare di Carlo Magno dato nell' 803 secondo il Baluze (cfr. Ducange s. v.), nell' 810 secondo Böhmer — Mühlbacher, *Regesta imperii*, Innsbruck 1880, vol. I, p. 182, mentre fra l' 806 e l' 813 lo pone A. Boretius, *Capitularia regum francorum*. Hannoverae 1883, tom. I, p. 142 (in *Monumenta Germaniae historica*. Legum sectio II). E nel documento il contesto stesso giustifica la connessione fatta più sopra di questa voce con *vianda*: infatti suona: *excepto vivanda et fodro quod iter agentibus necessaria sunt*. Nè si tratta di un ἅπαξ λεγόμενον, giacchè questo vocabolo blat. si riscontra più tardi nel sec. XIII.

***

Dato quanto precede, così ricostituirei la storia della parola.

La bassa latinità, anteriormente all'esistenza individuale delle lingue romanze, ebbe per significare i mezzi di nutrizione quattro voci: *vivenda* e la variante *vivanda* " l'alimento in ge-

nere „, *vianda* “ il cibo occorrente per viaggio „, *vitanda* “ la carne e le altre cibarie vietate dalle prescrizioni della Chiesa „. E di questi quattro vocaboli, quando fra i popoli neolatini si compì la partizione del comune fondo lessicale, l'Italia tolse *rivanda*, che in qualche parte del territorio romanzo per la stessa ragione, per cui nacque, cioè per la coesistenza di *vianda* e *vitanda* assunse forse su *rivenda* una cotal primazia; la Provenza prese *rivenda* e *vianda* (che però potrebbe anche essere mutuata alla vicina Francia); i popoli della penisola iberica non ritennero che *vianda* “ il viatico „ estendendone l'accezione all' “ alimento „ in genere (e così, negando l'uguaglianza cat. sp. ptg. *vianda* = fr. *viande*, si elimina l'ipotesi per sè stessa inverosimile che genti varie e numerose e lontane abbiano tutte desunto da un altro popolo una voce, che ha tratto a' bisogni elementari dell'esistenza); per contro la Francia conservò *vianda* e *vitanda*, che si fusero in una sola e medesima voce, quando la seconda perdette la dentale protonica: ma dell'originaria differenza v' è traccia ne' due sensi “ cibo „ e “ carne „, che procedettero a lungo paralleli, ma non uguali in frequenza e diffusione, finchè al secolare sopravvento del primo succedette, quasi per compenso, l'assoluto dominio del secondo.

Nota 1. Rispetto a sard. mer. *vianda* non saprei se si possa consentire col Porru, che lo trae di Spagna: ma in quanto significa “ pasta da minestra „ mi pare vi si debba scorgere l'influsso semasiologico di logudorese *vidanda* “ id. „, a cui etimologicamente non può essere uguale, poichè anche nel Campidano *t* intervocalico non cade (cfr. Hofman, *Die logudoresische und campidanesische Mundart*. Marburg 1885, p. 101 sg.). Debbo poi passar sotto silenzio ligure *vionda*, che ha ugual senso delle voci sarde succitate, giacchè mi manca ogni elemento per darne giudizio.

Nota 2. T. Zanardelli, l. c., crede che anche it. *bevanda* derivi da fr. *buvande* (il quale non è propriamente antico, ma antiquato e dialettale: cfr. *Dict. gén.* s. v.). E per vero, come da lat. *facienda* e *legenda* si hanno it. *faccenda* e *leggenda*, da lat. *bibenda*, base indubbia, si aspetterebbe un it. *bevenda*, quale si ha del resto in ant. prov. Ma a toglier ogni fede all'ipotesi del mutuo basta il fatto che il nostro *bevanda* s' incontra già nel Trecento, quindi è di quasi due secoli anteriore al *buvande* francese. Dunque, verosimilmente si tratta di un fenomeno d'analogia: cioè *bevenda* s' è mutato in *bevanda* per influsso di *vivanda*, che ideologicamente gli è così affine.

Maggio 1905.

L' Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Giugno 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, JADANZA, GUIDI, FOÀ, MORERA, SEGRE, MATTIROLO, PARONA, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Il Socio SALVADORI scusa la sua assenza.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente saluta il nuovo collega Prof. SOMIGLIANA. Fin da quando la Facoltà di Scienze di Torino fece voto per la venuta del Prof. Somigliana a Torino era nell'animo dei colleghi di nominarlo nostro Consocio. La Classe è lieta di averlo con sè, e fa voti che nelle nuove sedi e dell'Ateneo e dell'Accademia il Prof. SOMIGLIANA abbia a trovare le migliori soddisfazioni.

Il Presidente saluta il nuovo Socio Prof. FUSARI che pure da tempo era desiderato collega per i suoi meriti ed a compenso delle amarezze incontrate nei primi anni della sua vita accademica a Torino.

I Professori FUSARI e SOMIGLIANA ringraziano il Presidente e tutti i Soci, orgogliosi di essere stati chiamati a far parte

dell'Accademia delle Scienze di Torino che per oltre un secolo e mezzo tenne alto l'onore della scienza italiana. Il Prof. Fusari ricorda fra gli altri i nomi del Cigna, del Rolando, del Giacomini, del Bizzozero, e ringrazia in modo speciale quei Colleghi che per l'affinità degli studî vollero far rivolgere l'attenzione degli altri sul suo nome.

Il Socio Mattirolo rende conto del Congresso botanico internazionale di Vienna, al quale venne delegato dalla Classe. Il merito principale di questo Congresso, egli dice, fu di dare ai Botanici un " codice „ delle regole di nomenclatura botanica da sostituirsi a quello di De Candolle che più non rispondeva ai bisogni della scienza. Egli aggiunge ancora che al Congresso si volle onorare in lui il rappresentante dell'Accademia di Torino, di quella dei Lincei e del Ministero della pubblica istruzione nominandolo uno dei Vicepresidenti.

Il Presidente presenta le pubblicazioni seguenti giunte in dono all'Accademia:

1° *Annuario del R. Museo Industriale Italiano per l'anno 1904-905;*

2° *Ueber die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen,* del Socio straniero F. R. Helmert.

Il Socio Guidi presenta in omaggio alla Classe il volume quarto delle sue *Lezioni sulla scienza delle costruzioni.*

Il Socio Mattirolo presenta in omaggio alla Classe la sua nota intitolata: *Come le ariste delle Graminacee penetrano e migrano nei tessuti degli animali.*

Il Socio Naccari legge la commemorazione del compianto Socio corrispondente Emilio Villari. Il Presidente ringrazia il Socio Naccari della sua bella e sentita commemorazione, che verrà inserita negli *Atti* accademici.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1° Dott. Balbi, Nicolis e Viriglio: *Posizioni apparenti di stelle del Catalogo di Newcomb per il 1906*, dal Socio Jadanza.

2° G. Vitali: *Sulle funzioni integrali* dal Socio D'Ovidio.

3° Carlo Severini: *Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine con valori prestabiliti in due punti dati*, dal Socio D'Ovidio;

4° Giovanni Zeno Giambelli: *La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie,* dal Socio Segre;

5° Dott. Giovanni Issoglio: *Di alcune nuove basi piridiniche*, dal Socio Guareschi;

6° *Contributo allo studio delle terminazioni nervose nei muscoli striati dell'" Ammocoetes branchialis „*, del Socio Fusari;

7° Dott. Umberto Perazzo: *Ricerche sulla variazione dell'Hydrophylus piceus* Linn. Parte IIª, dal Socio Camerano.

Il Socio Camerano, anche a nome del Socio Salvadori, legge la relazione intorno alla memoria del Dott. Luigi Cognetti de Martiis, intitolata: *Gli Oligocheti della regione neotropicale.* La relazione conchiude favorevolmente per l'accoglimento della memoria. La Classe alla unanimità approva la relazione e poscia con votazione a schede segrete la stampa del lavoro stesso nel volume delle *Memorie* accademiche.

LETTURE

EMILIO VILLARI

Commemorazione letta dal Socio ANDREA NACCARI.

Di Emilio Villari disse egregiamente Antonio Roiti nella commemorazione da lui letta all'Accademia dei Lincei e disse così bene, che può parere superfluo che io qui ne parli. Ma a parlarne mi move il desiderio che negli *Atti* di questa Accademia, la quale da molti anni annoverava il Villari fra i suoi Soci, resti un omaggio al nome di lui. E a questo desiderio un altro si aggiunge, quello di esprimere il mio sentimento di affettuoso rimpianto verso un uomo, della cui amicizia mi tenevo onorato.

Farò un breve cenno della vita e dell'opere del Villari rimandando per i particolari biografici e per la bibliografia alla citata commemorazione del Roiti.

Nacque il Villari a Napoli nel settembre del 1836 e in quella città attese agli studi fino a che, per compire il corso universitario di medicina, andò a Pisa. L'aveva preceduto in Toscana il fratello Pasquale, l'illustre storico. A Pisa potè frequentare la scuola del Felici e dedicarsi agli studi di fisica, ch'egli sopra gli altri prediligeva. Ottenuta la laurea di medicina, anzichè darsi alla professione, cercò d'avviarsi all'ufficio d'insegnante ed ebbe tale incarico nel Collegio medico chirurgico di Napoli. Di là passò ad insegnar fisica nel R. Liceo di Pisa e poscia per un anno potè andare a Berlino nel Laboratorio del Magnus. Nel 1865 ebbe la cattedra di Fisica nel Liceo Dante di Firenze, e dal Liceo nella città stessa passò all'Istituto tecnico, dove erano condizioni più favorevoli al lavoro sperimentale. Nel 1871 fu nominato per concorso professore ordinario nel-

l'Università di Bologna e rimase in quella città fino al 1889, nel quale anno passò all'Università di Napoli. La salute, ch'ebbe sempre malferma, negli ultimi anni andava rapidamente mancando. Una malattia di stomaco, congiunta forse con altre, lo tormentava. Pure la sua maravigliosa operosità resisteva ai dolori, alla debolezza fisica, alle fatiche dell'insegnamento, che in quella grande Università sono maggiori che altrove. Anzi parve che negli ultimi anni si ravvivasse in lui l'amore per gli studi sperimentali. Ma nel 1902 fu costretto a chiedere un congedo e poi a ritrarsi, con molto rammarico, dalla cattedra di fisica sperimentale a quella di fisica terrestre.

L'anno scorso le sue condizioni si fecero gravi: la malattia apportò dolori strazianti, finchè ai 20 d'agosto quella nobile vita si estinse.

Non è mia intenzione di passare in rassegna i numerosi lavori sperimentali del Villari. Ne sceglierò alcuni gruppi, che mi paiono più degni di nota.

Il primo scritto scientifico di Emilio Villari fu pubblicato nel 1865 negli Atti dell'Accademia di Berlino, poi con maggiori particolari negli " Annali del Poggendorff „ e nel " Nuovo Cimento „.

Fu in quella memoria ch'egli descrisse per primo il fenomeno che porta il suo nome. La questione ch'egli aveva presa a trattare, aveva prima attirata l'attenzione del Matteucci e del Wertheim. Un filo di ferro sia appeso fermamente col suo capo superiore e sostenga col capo inferiore un piatto di bilancia, dove si possano porre dei pesi. Il filo stia lungo l'asse d'una spirale di filo di rame. Se questa vien percorsa da una corrente, il filo di ferro si magnetizza. Poniamo che si mantenga costante questa corrente e quindi il campo magnetico da essa prodotto, e che si aumenti il carico. Era stato osservato dal Matteucci che allora l'intensità di magnetizzazione del filo cresceva. Il Villari scoprì che se si va aumentando successivamente il carico, l'intensità di magnetizzazione del filo va crescendo fino ad un certo punto e poi decresce. È questo il fenomeno che è conosciuto sotto il nome di fenomeno del Villari. Questi fenomeni sono in generale complicati. Essi dipendono dalle qualità del

ferro o dell'acciaio, dalle operazioni che furono fatte antecedentemente sul metallo, dalle azioni magnetiche, cui esso fu prima assoggettato, dall'intensità del campo magnetico, dai valori della forza stirante. Il Villari studiò l'argomento variando in più modi le condizioni sperimentali, ma non potè naturalmente dare al suo primo studio tutta l'estensione che meritava, perchè la conoscenza dei fenomeni magnetici era a quei tempi molto imperfetta. Egli distinse nelle sue esperienze due periodi. Nel primo di questi, che comincia quando ha principio la magnetizzazione e finisce quando il momento magnetico ha raggiunto un certo valore, un aumento e una diminuzione della forza stirante producono gli stessi effetti, e propriamente un aumento di magnetizzazione, ed equivalgono ad un urto meccanico. Nel secondo periodo i fenomeni sono più complicati e più difficili da spiegarsi.

Nella stessa memoria il Villari studiò gli effetti prodotti in un filo o in un tubo di ferro, che sia posto in un campo magnetico, da una corrente che li percorra, e mostrò l'analogia che esisteva tra questi effetti e quelli prima accennati. Una corrente, che attraversi un filo di ferro, lo magnetizza trasversalmente. Essa tende quindi a dare alle molecole una speciale orientazione e gli effetti possono esser diversi a seconda del grado di magnetizzazione longitudinale già raggiunto, dell'intensità del campo magnetico, delle proprietà speciali dell'acciaio o del ferro.

In un altro lavoro pubblicato nello stesso anno il Villari studiò quali effetti producesse una spirale magnetizzante, quando agiva sopra acciaio già magnetizzato, o per aumentare la magnetizzazione, o in senso opposto. Egli partiva dal concetto che le modificazioni prodotte nella magnetizzazione del ferro e dell'acciaio da una variazione del campo magnetico dipendono dallo stato magnetico preesistente dei metalli stessi e, se egli avesse approfondito ed esteso questo studio, ne avrebbe tratto conclusioni molto importanti, a cui altri sperimentatori giunsero parecchi anni dopo.

A questi primi scritti si lega l'altro pubblicato dal Villari nel 1869 sul magnetismo trasversale del ferro e dell'acciaio. Egli aveva già osservato nelle sue prime esperienze che se si batte un'asta di ferro, la quale sia stata percorsa nel senso della lunghezza da una forte corrente, vi si produce una corrente elettrica che ha lo stesso senso della prima. Dimostrò che

questa corrente era prodotta dal fatto che gli urti diminuivano il magnetismo trasversale prodotto dalla prima corrente. Nella stessa memoria sono riferite l'esperienze fatte per studiare come una corrente che percorre un filo di ferro influisca sulla sua elasticità di torsione. I fenomeni del magnetismo trasversale sono simili affatto a quelli del magnetismo ordinario e ne differiscono soltanto per la diversa orientazione delle particelle.

Ritornò il Villari a questi studi nel 1892 dopochè S. Thompson ebbe osservato che una spirale di filo di ferro, la quale sia stata percorsa da una corrente, vien percorsa da un'altra egualmente diretta, se in una spirale di filo di rame che la contiene, si fa passare una corrente. Il Villari pose un tubo di ferro entro una spirale di filo di rame. Magnetizzò il primo trasversalmente facendo passare per esso una corrente o avvolgendolo con filo di rame in modo che il filo corresse lungo le pareti parallelamente all'asse internamente ed esternamente ripiegandosi intorno agli orli. La corrente che percorre il filo di rame, dopo cessata l'altra che magnetizzò il tubo trasversalmente, tende a magnetizzare longitudinalmente il tubo e quindi a diminuire il magnetismo trasversale. L'effetto è simile a quello d'uno scotimento meccanico. Lo stesso effetto si ha, quando la corrente della spirale di rame viene interrotta. Così il tubo di ferro perde gran parte del suo magnetismo trasversale. Dopo alcune chiusure e interruzioni della corrente i fenomeni cangiano. Si ha un secondo periodo, nel quale facendo passare una corrente nella spirale di rame, si diminuisce ancora il magnetismo trasversale, ma, interrompendo quella corrente, lo si fa invece aumentare. Pare che in questo secondo periodo le particelle del ferro abbiano una certa elasticità che le fa ritornare alla posizione primitiva, o almeno avvicinarsi ad essa quando cessa la corrente della spirale esterna.

Fenomeni consimili si osservano se si magnetizza longitudinalmente un tubo od un'asta e poi si fa agire su di essi un campo magnetico che li magnetizzi trasversalmente. È ciò che il Villari dimostrò con altra memoria pubblicata nel 1893.

Meritano speciale menzione l'esperienze del Villari sull'efflusso del mercurio per tubi capillari. Egli dimostrò che il mercurio, benchè non bagni il vetro, segue le leggi del Poiseuille, come i liquidi che bagnano il vetro. Questo lavoro fu pubblicato nel 1876.

Importanti sono pure l'esperienze fatte dal Villari a Bologna nel 1878 sul potere emissivo e sulla diversa natura del calore emesso da varie sostanze riscaldate sino a 100°.

Quasi per una decina d'anni, dal 1879 al 1889, il Villari attese ad una serie numerosissima e laboriosissima di esperienze sugli effetti termici e galvanometrici delle scintille dei condensatori e sulla influenza delle condizioni diverse, in cui il fenomeno avviene. Un tal lavoro esige grandi cure, perchè le cause d'errore sono numerose e molto efficaci, e forse l'argomento non meritava che il Villari vi si trattenesse così a lungo e consacrasse ad esso tante fatiche, perchè le leggi dei fenomeni si conoscevano dalla teoria, e le divergenze sperimentali dipendono da cause diverse e accidentali, la conoscenza delle quali non ha grande importanza.

Nel dicembre del 1895 il Röntgen scopriva i raggi che portano il suo nome e ognun sa come tale scoperta destasse universale maraviglia e desse origine a moltissime indagini sperimentali. Il Villari si diede a queste indagini con operosità giovanile.

Cominciò con l'esaminare se quei raggi producessero calore e non ne trovò indizio. Cercò invano quei raggi nelle radiazioni emesse dai corpi fosforescenti e dalle scintille elettriche.

I raggi Röntgen scaricano i corpi elettrizzati. Il Villari osservò che la scarica avviene in egual misura per le due specie di elettricità. Esaminò pure quale influenza avesse la natura del metallo e lo stato della sua superficie. Valendosi del metodo dell'elettroscopio anzichè di quello fotografico seguito da molti, studiò la trasparenza di varî corpi per i raggi Röntgen. Studiò poi la natura delle cariche che si manifestano sulla superficie dei tubi Crookes quando sono attivi.

Il fatto che un conduttore elettrizzato posto dietro uno schermo di piombo viene scaricato da un tubo Röntgen, va attribuito all'aria, che viene ionizzata dai raggi emessi dal tubo, e giungendo così modificata al conduttore ne promuove la scarica. Il Villari fece molte esperienze che contribuirono a mettere fuor di dubbio quella interpretazione. Studiando anche fotograficamente il fenomeno, egli credette di osservare che in piccola misura i raggi Röntgen realmente si flettessero dietro un diaframma opaco.

Volle pure il Villari indagare quanto duri la proprietà scaricatrice che i gas acquistano quando vengono attraversati dai raggi Röntgen. In altra nota dimostrò che l'aria mista a vapori d'etere o di solfuro di carbonio, attraversata da quei raggi scarica l'elettroscopio più rapidamente dell'aria pura, ma perde questa proprietà più rapidamente dell'aria pura.

Anche le scintille elettriche ionizzano l'aria. Il Villari pensò che questa modificazione dell'aria, la quale aumenta la conducibilità elettrica, aumentasse anche la conducibilità termica. Ne ebbe la conferma spingendo una corrente d'aria contro una spirale di filo di platino che una corrente portava al color rosso. Quando l'aria era modificata dalle scintille, la spirale si raffreddava e diventava quasi oscura.

L'aria che abbia acquistato la facoltà di scaricare i corpi elettrizzati, perde questa proprietà, come il Villari osservò, quando venga a contatto di un corpo elettrizzato.

Alcune esperienze vennero eseguite facendo passare attraverso un ozonogeno l'aria che era stata ionizzata dai raggi. Questa vi perdeva l'attitudine a scaricare i corpi elettrizzati. L'ozonogeno continuava a produrre tale effetto anche dopo che s'era cessato di fornire elettricità alle sue armature, perchè queste per un certo tempo restavano cariche. Anche l'aria modificata dalle scintille venne fatta passare per l'ozonogeno e i risultati dell'esperienza furono simili a quelli prima osservati.

La conducibilità elettrica dell'aria modificata dai raggi Röntgen venne studiata dal Villari e venne pure studiato l'effetto che in essa si produceva attraversando tubi di rame, di piombo, di vetro o di caucciù. L'aria vi perde gran parte della sua conducibilità e così avviene in tubi molto più brevi, se in essi stanno dei fasci di fili metallici.

L'aria modificata dai raggi Röntgen carica elettricamente delle grandi superficie metalliche o non metalliche, con cui venga in contatto. Costruì il Villari dei filtri con tubi di ottone, nei quali collocò dei diaframmi di tela metallica isolati. I filtri si caricarono positivamente e l'aria uscì quasi allo stato ordinario. Ma in altri casi le cariche furono di segno opposto e il Villari si convinse che i risultati dell'esperienza non dipendevano dalla natura dei metalli adoperati, ma bensì dal modo in cui il contatto dell'aria col metallo e lo sfregamento avvenivano.

Ho ricordato così brevemente alcune parti dell'opera del Villari. L'elenco dei suoi scritti mostra come egli, dacchè potè disporre di un laboratorio, non cessò mai di sperimentare, mostra come soltanto la malattia che lo condusse alla tomba, abbia arrestato la sua mano.

Emilio Villari fu schietto amico del vero e del giusto, senza riserve, senza esitazioni.

Poco curante, com'era, delle forme, potè forse non piacere, o spiacere a taluno, ma chi lo conobbe da presso seppe quali fossero i pregi altissimi dell'animo suo e del suo cuore. Salutiamo con riverenza ed affetto la memoria di lui, che compì la sua missione di scienziato e d'uomo dabbene, camminando diritto per la sua via senza cercare il plauso e gli onori del mondo.

Sulle funzioni integrali.

Nota di GIUSEPPE VITALI a Genova.

Come già in altra mia nota (*), noi diremo che un gruppo di intervalli presi sopra una medesima retta è un *gruppo di intervalli distinti*, quando due qualsiansi di questi intervalli non hanno punti interni comuni, ed *ampiezza di un gruppo di intervalli* la somma delle lunghezze dei singoli intervalli del gruppo.

Sia $F(x)$ una funzione finita della variabile reale x in un intervallo (a, b), ed $a<b$.

Se (α, β) è un intervallo parziale di (a, b), ed $a \leq \alpha < \beta \leq b$, noi chiameremo *incremento di* F(x) *in* (α, β) la differenza $F(\beta) - F(\alpha)$. Diremo poi *incremento di* F(x) *in un gruppo di intervalli parziali di* (a, b) *distinti* la somma, se è determinata e finita, degli incrementi di $F(x)$ nei singoli intervalli.

Se per ogni numero $\sigma > 0$ esiste un numero $\mu > 0$ tale che sia minore di σ il modulo dell'incremento di $F(x)$ in ogni gruppo di ampiezza minore di μ di intervalli parziali di (a, b) distinti, si dirà che $F(x)$ è *assolutamente continua*.

Infine diremo che $F(x)$ è *in* (a, b) *una funzione integrale* se e soltanto se esiste in (a, b) una funzione $f(x)$ finita e sommabile (**), per cui $F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$, per ogni x tale che $a \leq x \leq b$.

Io dimostrerò che:

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÈ UNA FUNZIONE $F(x)$ SIA IN (a, b) UNA FUNZIONE INTEGRALE È CHE ESSA SIA ASSOLUTAMENTE CONTINUA IN (a, b).

(*) G. VITALI, *Sui gruppi di punti*, § 2, " Rend. del Circolo matem. di Palermo ", tomo XVIII, 1904.

(**) La parola sommabile ed il simbolo $\int$ (integrale) sono usati nel senso di LEBESGUE. Vedi *Leçons sur l'intégration* etc. par HENRI LEBESGUE. Paris, Gauthier-Villar, 1904.

§ 1. — Sia $F(x)$ una funzione assolutamente continua in (a, b), e $\sigma > 0$. Indichiamo con $\mu(\sigma)$ il limite superiore dei valori di μ, tali che sia minore di σ il modulo dell'incremento di $F(x)$ in ogni gruppo di ampiezza minore di μ di intervalli parziali di (a, b) distinti.

Sia x_0 un punto di (a, b), per ogni x tale che $a \leq x \leq b$ e che $|x - x_0| < \mu(\sigma)$ è $|F(x) - F(x_0)| < \sigma$.

Segue subito che:

Una funzione assolutamente continua in (a, b) *è continua in ogni punto di* (a, b).

Noi possiamo dividere (a, b) in n parti uguali, n essendo un numero intero positivo per cui $\frac{b-a}{n} < \mu(\sigma)$.

Se $F(x)$ non fosse a variazione limitata (*) in (a, b) esisterebbe una delle n parti ottenute in cui $F(x)$ non è a variazione limitata. Sia (α, β) una di queste parti. Sarà $\beta - \alpha < \mu(\sigma)$.

Io potrò dividere (α, β) con dei punti

$$\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_r = \beta,$$

in modo che:

$$\sum_{i=1}^{r} |F(\alpha_i) - F(\alpha_{i-1})| > 2\sigma.$$

Delle differenze $F(\alpha_i) - F(\alpha_{i-1})$, alcune potranno essere positive ed altre negative. Indico con P la somma delle positive, e con N la somma delle negative.

Sarà:

$$P + |N| > 2\sigma,$$

e quindi o $P > \sigma$ o $|N| > \sigma$.

Ciò mostra subito l'esistenza di un gruppo di ampiezza minore di $\mu(\sigma)$ di intervalli parziali di (a, b), in cui il modulo dell'incremento di $F(x)$ è maggiore di σ.

Si deve concludere che:

Una funzione assolutamente continua in (a, b) *è a variazione limitata.*

Ma *una funzione può essere continua e a variazione limitata, senza essere assolutamente continua.*

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit., p. 50 e seg.

Per veder ciò si scelga su (a, b) un gruppo G di punti che sia perfetto e di misura nulla. Il gruppo complementare sarà costituito dai punti interni ad un gruppo di segmenti a due a due distinti e senza estremi comuni. Indico con (α_r, β_r) uno qualsiasi di questi segmenti. Poi considero un intervallo $(0, 1)$ nel quale chiamo y la variabile. Ricordando la dimostrazione che Cantor dà per provare che un gruppo perfetto ha la potenza del continuo, noi possiamo stabilire fra G e $(0, 1)$ una corrispondenza tale che ad ogni punto di G corrisponda *un* punto di $(0, 1)$, agli estremi di un medesimo intervallo (α_r, β_r) corrisponda *un* medesimo punto y_r di $(0, 1)$, ad ogni punto di $(0, 1)$ diverso dai punti y_r corrisponda *un* punto di G, se $\overline{x}$ e $\overline{\overline{x}}$ sono due punti di G non estremi di un medesimo intervallo (α_r, β_r) ed $\overline{y}$ e $\overline{\overline{y}}$ sono i punti corrispondenti in $(0, 1)$, a seconda che $\overline{x} > \overline{\overline{x}}$ o $\overline{x} < \overline{\overline{x}}$ sia $\overline{y} > \overline{\overline{y}}$ o $\overline{y} < \overline{\overline{y}}$.

La funzione che è uguale ad y_r in tutti i punti di (α_r, β_r) gli estremi compresi, e che in ogni altro punto è uguale al valore corrispondente di y in $(0, 1)$, è una funzione continua non decrescente in tutto (a, b), e quindi a variazione limitata.

Essa però non è assolutamente continua, perchè, per quanto piccolo sia $\mu > 0$, io posso trovare un gruppo di intervalli parziali di (a, b) distinti rinchiudente tutto il gruppo G ed avente un'ampiezza minore di μ, e l'incremento della funzione considerata in tale gruppo di intervalli è uguale ad 1.

§ 2. — *Le variazioni totali* (*) *di una funzione assolutamente continua sono assolutamente continue.*

Dimostrerò il teorema per la *variazione totale positiva*. Allo stesso modo si potrà dimostrare per quella *negativa*. Consegue poi allora che è vero per la *variazione totale*.

Sia $F(x)$ una funzione assolutamente continua. Conservo per essa le notazioni del § precedente. Sia $P(x)$ la sua variazione totale positiva. Siano (α_r, β_r) degli intervalli distinti formanti un gruppo di ampiezza minore di $\mu(\sigma)$.

Sia ϵ un numero positivo piccolo a piacere ma non nullo ed

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r, \ldots$$

(*) Vedi per la denominazione, Lebesgue, loc. cit., pag. 51.

una successione di numeri pure positivi e non nulli, tali che

$$\sum_r \epsilon_r < \epsilon$$

Io posso trovare in (α_r, β_r) degli intervalli distinti $(\alpha_{r,i}, \beta_{r,i})$ con $\beta_{r,i} > \alpha_{r,i}$ tali che

$$F(\beta_{r,i}) \geq F(\alpha_{r,i}),$$

e tali che l'espressione

$$\sum_i \{ F(\beta_{r,i}) - F(\alpha_{r,i}) \}$$

differisca da

$$P(\beta_r) - P(\alpha_r)$$

per meno di ϵ_r.

Allora

$$\sum_r \{ P(\beta_r) - P(\alpha_r) \}$$

differisce da

$$\sum_{r,i} \{ F(\beta_{r,i}) - F(\alpha_{r,i}) \}$$

per meno di ϵ.

Ma

$$\sum_{r,i} \{ F(\beta_{r,i}) - F(\alpha_{r,i}) \} < \sigma,$$

perchè $F(x)$ è assolutamente continua.

Dunque

$$\Sigma \{ P(\beta_r) - P(\alpha_r) \} < \sigma + \epsilon.$$

Ma ϵ è piccolo a piacere. Dunque

$$\Sigma \{ P(\beta_r) - P(\alpha_r) \} \leq \sigma.$$

Di qui risulta che $P(x)$ è assolutamente continua. c. d. d.

Ricordando le proprietà delle funzioni a variazione limitata (*), consegue allora subito che:

Una funzione assolutamente continua è la differenza di due funzioni assolutamente continue non decrescenti.

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit.

§ 3. — Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale, finita, ma non necessariamente limitata, in un intervallo (a, b), con $a<b$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia sommabile in (a, b). Allora anche la $|f(x)|$ è sommabile in (a, b) (*). Inoltre, se E è un gruppo misurabile qualunque di punti di (a, b), le $f(x)$ e $|f(x)|$ sono pure sommabili in E, ed è

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leq \int_E |f(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Sia ρ un numero positivo qualsivoglia, ed E_ρ il gruppo dei punti in cui $|f(x)|>\rho$.

Manifestamente la

$$\psi(\rho) = \int_{E_\rho} |f(x)|\,dx$$

è funzione di ρ, giammai crescente col crescere di ρ, ed è

$$\lim_{\rho=+\infty} \psi(\rho) = 0.$$

Sia ora σ un numero positivo piccolo a piacere. Esisterà un $\rho_0>0$ tale che, per ogni $\rho \geq \rho_0$,

$$\psi(\rho) < \frac{\sigma}{2}.$$

Indico con G un gruppo misurabile di punti di (a, b) di misura non maggiore di $\frac{\sigma}{2\rho_0}$, e con G_1 il gruppo dei punti comuni a G ed a $E\rho_0$.

È

$$\int_G f(x)dx \leq \int_G |f(x)| = \int_{G-G_1} |f(x)|\,dx + \int_{G_1} |f(x)|\,dx.$$

Ma, essendo in $G - G_1$ $|f(x)| \leq \rho_0$, è

$$\int_{G-G_1} |f(x)|\,dx \leq \rho_0 \frac{\sigma}{2\rho_0} = \frac{\sigma}{2}.$$

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit., pag. 120.

Poi è

$$\int_{G_1} |f(x)|\,dx \leq \int_{E_{t_0}} |f(x)|\,dx < \frac{\sigma}{2}:$$

dunque

$$\left|\int_G f(x)dx\right| < \sigma.$$

Prendo per G un gruppo di punti che riempiono un gruppo di intervalli distinti (α_r, β_r), dove $\beta_r > \alpha_r$.

Allora

$$\int_G f(x)dx = \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} f(x)dx \quad (*),$$

e ponendo

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

si ha

$$\int_G f(x)dx = \sum_r (F(\beta_r) - F(\alpha_r)),$$

e quindi

$$\left|\sum_r (F(\beta_r) - F(\alpha_r))\right| < \sigma.$$

Ciò prova che la funzione $F(x)$ è assolutamente continua, ossia che:

Le funzioni integrali sono assolutamente continue.

§ 4. — *I punti in cui un numero derivato di una funzione continua è finito formano un gruppo misurabile* (**).

Comincio col considerare una successione di funzioni finite e misurabili in (a, b),

$$u_1, u_2, \ldots$$

e le funzioni $\bar{u}$ e $\underline{u}$ uguali, per ciascun valore di x al più grande e al più piccolo dei limiti delle u_n. Queste funzioni $\bar{u}$ e $\underline{u}$ sono i così detti *limiti di indeterminazione* dei limiti delle u.

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit., pag. 116.

(**) La dimostrazione che dò è modellata su quella con cui Lebesgue dimostra che: *se una funzione continua ammette in ogni punto un numero derivato finito, questo è misurabile,* vedi loc. cit., pag. 121. Però detta dimostrazione di Lebesgue ha bisogno di essere lievemente ritoccata. Il confronto colla mia suggerirà i necessari ritocchi.

Sia $v_{j,i}$ la funzione che, per ciascun valore di x è uguale al più grande valore delle funzioni $u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_{j+i}$.

Le funzioni $v_{j,i}$ sono funzioni finite e misurabili.

Sia w_j il limite della successione crescente

$$v_{j,1}, \; v_{j,2}, \; \ldots$$

Una w_j potrebbe non essere sempre finita, però il gruppo dei punti in cui $w_j \leq \alpha$, essendo α un numero finito qualunque, è misurabile.

La $\bar{u}$ è il limite della successione decrescente

$$w_0, \; w_1, \; w_2, \; \ldots$$

Di qui segue che i punti in cui $\bar{u} \geq \alpha$ formano un gruppo misurabile.

Ma allora, se α e β sono due numeri finiti e $\alpha < \beta$ i punti in cui $\alpha \leq \bar{u} < \beta$ formano un gruppo misurabile e, facendo tendere α a $-\infty$ e β a $+\infty$, si vede che i punti in cui $\bar{u}$ è finito formano un gruppo misurabile. Un ragionamento analogo si applica ad $\underline{u}$.

Ora sia $F(x)$ una funzione continua in (a, b), e sia

$$P(x, h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

La $P(x, h)$ è continua rispetto al complesso delle variabili x, h quando $h \neq 0$.

Sia $h = h_1 > 0$ ed $\epsilon > 0$. Esiste un σ, con $0 < \sigma \leq h_1$, tale che

$$(1) \qquad |P(x, h_1 - \theta\sigma) - P(x, h_1)| \leq \epsilon$$

per ogni x in (a, b) e per ogni θ tale che $0 \leq \theta < 1$. Sia σ_1 il limite superiore dei σ per cui vale la (1). La (1) vale anche per σ_1. Se $\sigma_1 < h_1$, pongo $h_2 = h_1 - \sigma_1$. Esiste un σ, con $0 < \sigma \leq h_2$, per cui

$$(2) \qquad |P(x, h_2 - \theta\sigma) - P(x, h_2)| \leq \epsilon,$$

per ogni x in (a, b) e per ogni θ tale che $0 \leq \theta < 1$.

Sia σ_2 il limite superiore dei σ per cui vale la (2). La (2) vale anche per σ_2. Se $\sigma_2 < h_2$, pongo $h_3 = h_2 - \sigma_2$ e così di seguito.

La successione decrescente $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ ha manifestamente per limite zero. Siano $\overline{P}$ e $\underline{P}$ i limiti di indeterminazione del limite delle funzioni

$$P_1 = P(x, h_1), \; P_2 = P(x, h_2), \; \ldots$$

Per ogni $P(x, h)$, con $0 < h \leq h_1$, esiste un $P(x, h_n)$ per cui

$$| P(x, h_n) - P(x, h) | \leq \epsilon,$$

quindi indicando con Λ_d e λ_d i numeri derivati destri superiore ed inferiore di $F(x)$, si potrà dire che Λ_d è finito dove e soltanto lo è $\overline{P}$, ed analogamente per λ_d. Ma i punti in cui $\overline{P}$ è finito formano un gruppo misurabile, dunque i punti in cui Λ_d è finito formano un gruppo misurabile. Analogamente dicasi per λ_d e pei numeri derivati sinistri di $F(x)$ c. d. d.

Riflettendo sulla precedente rapida dimostrazione si vede anche facilmente che: *La funzione uguale a Λ_d nei punti in cui Λ_d è finito è misurabile nel gruppo di questi punti.* Cose analoghe stanno per gli altri numeri derivati.

§ 5. — *I punti in cui un numero derivato di una funzione continua e a variazione limitata non è finito formano un gruppo di misura nulla.*

Una funzione continua a variazione limitata è la differenza di due funzioni continue non decrescenti (*).

Basta dunque dimostrare il teorema per una funzione continua non decrescente.

Sia $P(x)$ una funzione continua non decrescente. Indico con Λ_d il suo numero derivato superiore destro. Basta manifestamente dimostrare il teorema per Λ_d.

Sia G il gruppo dei punti di (a, b) in cui Λ_d è finito. G è misurabile. Sia μ la sua misura. Dico che $\mu = b - a$.

Sia $\mu < b - a$ e $0 < \epsilon < \frac{b - a - \mu}{2}$.

Posso rinchiudere G in un gruppo di intervalli distinti di ampiezza minore di $\mu + \epsilon$.

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit., pag. 54.

Poi ad ogni punto x di (a, b) che non sia di G faccio corrispondere il punto $\bar{x}$ più a destra, per cui

$$\frac{P(\bar{x}) - P(x)}{\bar{x} - x} \geq M,$$

dove

$$M > \frac{P(b) - P(a)}{\epsilon}.$$

e ad ogni punto di G faccio corrispondere l'estremo destro del tratto in cui è incluso.

Ciascun punto di (a, b) risulta così l'origine di un intervallo δ che gli corrisponde. Noi potremo partendo da a coprire (a, b) con una catena di intervalli δ (*). Siano (α_r, β_r) gli intervalli di questa catena ed $\alpha_r < \beta_r$. Sarà

$$\Sigma \{ P(\beta_r) - P(\alpha_r) \} = P(b) - P(a)$$

e per ogni r

$$P(\beta_r) - P(\alpha_r) \geq 0.$$

Ma per tutti gli α_r che non sono punti di G è

$$P(\beta_r) - P(\alpha_r) \geq M(\beta_r - \alpha_r)$$

e la somma delle differenze $P(\beta_r) - P(\alpha_r)$ corrispondenti a tali α_r è maggiore di $M\epsilon$, ossia di $P(b) - P(a)$. Quindi anche la somma estesa a tutte le differenze $P(\beta_r) - P(\alpha_r)$ deve essere maggiore di $P(b) - P(a)$. Ciò è impossibile, dunque $\mu = b - a$. c. d. d.

§ **6.** — Se $u(x)$ e $v(x)$ sono due funzioni finite o infinite, ma determinate in ogni punto di (a, b) e se per ogni x è $u(x) \geq v(x)$, noi diremo che in un punto x comprendono un numero α se

$$u(x) \geq \alpha \geq v(x).$$

Se una funzione F(x) *è assolutamente continua in* (a, b) *e se i punti in cui i numeri derivati destri di* F(x) *non comprendono lo zero formano un gruppo di misura nulla, la* F(x) *è una costante.*

Indico con Λ_d e λ_d i numeri derivati destri di $F(x)$, con G

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit., pag. 63.

il gruppo di punti di misura nulla in cui essi non comprendono lo zero, con Γ il gruppo dei rimanenti punti di (a, b). Se α è un punto di Γ, facciamogli corrispondere il più grande intervallo $(\alpha, \alpha+h)$, $(h>0)$, tale che

$$f(\alpha + h) - f(\alpha) \leq \epsilon h,$$

dove ϵ è un numero positivo piccolo a piacere, che noi possiamo prefissare. Rinchiudiamo G in un' infinità numerabile di intervalli d distinti, di somma minore di μ. A un punto di G facciamo corrispondere l'intervallo che va da esso all' estremità destra dell'intervallo d che lo contiene.

Noi ricopriamo (a, b) a partire da a per mezzo di una catena di quegli intervalli che noi abbiamo definito per ogni punto di (a, b).

Siano (α_r, β_r) gli intervalli di questa catena, ed $\alpha_r < \beta_r$. Sarà

$$\Sigma\{ F(\beta_r) - F(\alpha_r)\} = F(b) - F(a).$$

La somma delle differenze $F(\beta_r) - F(\alpha_r)$ che corrispondono a punti di Γ è minore di $\epsilon(b-a)$, quella delle rimanenti si può supporre in valore assoluto piccola quanto si vuole, purchè si prescelga μ abbastanza piccolo, essendo $F(x)$ assolutamente continua, ma anche ϵ è piccolo a piacere, dunque

$$F(b) - F(a) \leq 0.$$

Ma allo stesso modo si vedrebbe che

$$F(b) - F(a) \geq 0.$$

Dunque $F(b) = F(a)$.

Sostituendo a b un punto qualunque di (a, b) si trova $F(x) = F(a)$, ossia $F(x)$ è costante (*) c. d. d.

Dalla proposizione dimostrata consegue che:

Se due funzioni differiscono per una funzione assolutamente continua ed hanno per ciascun valore di x, *all'infuori di quelli di*

(*) Il ragionamento usato in questo e nel precedente § è analogo a quello usato dal Lebesgue a pag. 78 del loc. cit., per dimostrare una proposizione meno generale dell'ultima da me dimostrata.

un insieme di misura nulla, finiti ed uguali i numeri derivati superiori destri, esse differiscono per una costante.

In particolare:

Se due funzioni assolutamente continue hanno per ciascun valore di x, *all'infuori di quelli di un insieme di misura nulla, uguali i numeri derivati superiori destri, esse differiscono per una costante.*

§ 7. — Ricordo che il Lebesgue ha dimostrato (*):

L'integrale indefinito di una funzione sommabile limitata ammette questa funzione per derivata salvo in punti di un gruppo di misura nulla.

Sia ora $f(x)$ una funzione positiva e sommabile. Sia ρ numero positivo ed E_ρ il gruppo dei punti in cui $f(x)>\rho$. La misura di E_ρ tende a zero col tendere di ρ all'infinito.

Ora sia

$$f(x, \rho)$$

la funzione che è nulla nei punti di E_ρ e che nei rimanenti è uguale ad $f(x)$. Per $h>0$ è

$$\int_x^{x+h} f(x, \rho)\,dx < \int_x^{x+h} f(x)\,dx;$$

dunque il numero derivato inferiore destro λ_d di $\int_a^x f(x)dx$ è almeno uguale a quello di $\int_a^x f(x, \rho)dx$.

Ma $f(x, \rho)$ è limitata e quindi il numero derivato inferiore destro di $\int_a^x f(x, \rho)dx$ coincide con $f(x, \rho)$, all'infuori di un gruppo di punti di misura nulla. Consegue allora facilmente che i punti in cui non è $\lambda_d \geq f(x)$ formano un gruppo di misura nulla. Ossia, riassumendo:

Se f(x) *è una funzione positiva sommabile, e* λ_d *è il numero derivato inferiore destro di* $\int_a^x$ f(x)dx, *i punti in cui non è* $\lambda_d \geq$ f(x) *formano un gruppo di misura nulla.*

(*) Vedi Lebesgue, loc. cit., pag. 124.

§ 8. — Sia $F(x)$ una funzione continua non decrescente e λ_d il suo numero derivato inferiore destro; λ_d è certamente finito all'infuori di un gruppo G di punti di misura nulla.

Per ogni punto x non di G esiste un $h_x > 0$ tale che per $h > 0$ e non maggiore di h_x si abbia

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} > \lambda_d - \epsilon,$$

essendo ϵ un numero prefissato positivo non nullo, ma piccolo a piacere.

Sia Γ_h il gruppo dei punti tali che per ogni $h_1 < h$ sia

$$\frac{F(x+h_1) - F(x)}{h} > \lambda_d - \epsilon.$$

Se m_h è la misura di Γ_h è $\lim\limits_{h=0} m_h = b - a$. Posso allora trovare un h tale che $b - a - m_h < \sigma$, essendo σ un numero positivo e non nullo piccolo a piacere.

Sia h_0 un numero fisso minore di h, e $\lambda(x, h)$ la funzione uguale a λ_d nei punti di Γ_h e nulla nei rimanenti. Poichè

$$\frac{F(x+h_0) - F(x)}{h_0}$$

è sommabile, lo è pure $\lambda(x, h)$, che dove non è nulla non supera quella per più di ϵ.

Notiamo inoltre che

$$\int_a^x \lambda(x, h)dx \leq \int_a^x \frac{F(x+h_0) - F(x)}{h_0}\, dx + \epsilon(b-a),$$

e quindi che

$$\int_a^x \lambda(x, h)dx \leq F(x + \theta_1 h_0) - F(a + \theta_2 h_0) + \epsilon(b-a),$$

dove

$$0 \leq \theta_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Ciò significa che λ_d è sommabile lungo ogni Γ_h, e che il suo integrale non supera, qualunque sia h, il doppio del massimo modulo di $F(x)$ in (a, b).

Segue subito che la funzione uguale a λ_d nei punti dove λ_d è finita e nulla nei rimanenti è sommabile in (a, b). Riassumendo:

Se F(x) *è una funzione continua non decrescente, la funzione uguale al suo numero derivato inferiore destro nei punti in cui esso è continuo e nulla nei rimanenti è sommabile.*

§ **9**. — Sia $F(x)$ una funzione continua non decrescente, ed $u(x)$ la funzione uguale al numero derivato inferiore destro di $F(x)$ dove esso è finito e nulla nei punti rimanenti. La $u(x)$ è sommabile (v. § preced.), inoltre

$$u(x) \geq 0.$$

Se

$$\psi(x) = \int_a^x u(x)dx$$

e λ_d' è il numero derivato inferiore destro di $\psi(x)$ i punti in cui non è $\lambda_d' \geq u(x)$ formano un gruppo di misura nulla (v. § 7).

Riprendendo le notazioni del § precedente, si ha poi manifestamente

$$\int_a^x u(x)dx = \lim_{h=0} \int_a^x \lambda(x,h)dx < \lim_{h=0} \{F(x+\theta_1 h_0) - F(a+\theta_2 h_0)\} + \epsilon(b-a).$$

Ma ϵ è piccolo quanto si vuole, e quindi

$$\int_a^x u(x)dx \leq F(x) - F(a),$$

e in generale si vedrebbe allo stesso modo che, se $\delta > 0$,

$$\int_x^{x+\delta} u(x)dx \leq F(x+\delta) - F(x).$$

Segue che in ogni punto di (a, b)

$$\lambda_d' \leq \lambda_d;$$

ma dove λ_d è finito è $\lambda_d = u(x)$, poi è

$$\lambda_d' \leq u(x)$$

fuor che in un gruppo di punti di misura nulla. dunque, fuor che in un gruppo di punti di misura nulla è

$$\lambda_d' = \lambda_d.$$

Cosicchè le funzioni

$$F(x) \quad \text{e} \quad \psi(x)$$

hanno uguale il numero derivato inferiore destro fuor che in un gruppo di punti di misura nulla.

Ora $\psi(x)$ è assolutamente continua. Se anche $F(x)$ è assolutamente continua sarà

$$F(x) = \psi(x) + \text{costante}.$$

Dunque

Una funzione non decrescente ed assolutamente continua è una funzione integrale.

Ma una funzione assolutamente continua è la differenza di due funzioni assolutamente continue non decrescenti, dunque:

Ogni funzione assolutamente continua è una funzione integrale.

Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine con valori prestabiliti in due punti dati.

Nota di CARLO SEVERINI.

Nella Nota: *Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie,* ecc., presentata recentemente a questa illustre Accademia (*), ho indicato fra l'altro un modo (§ 3) per costruire un polinomio razionale intero, atto a rappresentare, con un'approssimazione fissata ad arbitrio, l'integrale di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

che in due punti dati assume valori prestabiliti. Mi sono a tale uopo giovato del *metodo delle approssimazioni successive* (**); senonchè, mentre questo metodo richiede soltanto che la funzione $f(x, y, y')$, delle variabili reali x, y, y', sia reale, ad un valore, finita, assolutamente continua, e soddisfi alla nota condizione di Lipschitz, io ho in più ammesso che esistano finite ed assolutamente continue le derivate parziali $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$.

Mi propongo ora di risolvere il medesimo problema nelle precise condizioni di Picard.

1. — Sia $f(x, y, y')$ funzione reale, ad un valore, delle variabili reali x, y, y', finita ed assolutamente continua nel campo C, definito dalle limitazioni:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$
$$-L \leqq y \leqq +L$$
$$-L' \leqq y' \leqq +L'.$$

(*) Adunanza del 21 maggio 1905.

(**) Cfr. Picard, " Journal de mathématiques ", 1890, 1893; *Traité d'Analyse,* T. III, pag. 94.

ove x_1 ed x_2 indicano due quantità finite, qualunque, ed L, L' due quantità finite, positive.

Per ogni coppia di punti (x, y_1, y_1'), (x, y_2, y_2'), appartenenti a tale campo e corrispondenti ad un medesimo valore di x, si abbia inoltre:

$$(2) \qquad |f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2')| \leqq \alpha |y_1 - y_2| + \beta |y_1' - y_2'|,$$

α e β essendo due costanti positive, finite.

Dimostriamo che, scelta una successione di numeri positivi, decrescenti e tendenti allo zero:

$$(3) \qquad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots,$$

è possibile formare una successione di polinomi razionali interi di x, y, y':

$$(4) \qquad P_1(x, y, y'), \; P_2(x, y, y'), \; \ldots, \; P_n(x, y, y'), \; \ldots$$

tali che in ogni punto di C si abbia:

$$|f(x, y, y') - P_n(x, y, y')| \leqq \sigma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$\left.\begin{aligned} \left| \frac{\partial P_n(x, y, y')}{\partial y} \right| &\leqq \alpha + \sigma_n \\ \left| \frac{\partial P_n(x, y, y')}{\partial y'} \right| &\leqq \beta + \sigma_n \end{aligned}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Perciò consideriamo la funzione:

$$F(x, y, y', h, k, k') =$$

$$= \frac{1}{h.k.k'\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u, v, v') e^{-\left\{\left(\frac{u-x}{h}\right)^2 + \left(\frac{v-y}{k}\right)^2 + \left(\frac{v'-y'}{k'}\right)^2\right\}} du dv dv',$$

ove u, v, v' sono tre nuove variabili reali, h, k, k' tre parametri arbitrari, positivi, ed $f_1(x, y, y')$ una funzione reale, ad un valore, finita, assolutamente continua per ogni terna di valori reali di

x, y, y', soddisfacente, qualunque siano due punti $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_1')$, $(\bar{x}, \bar{y}_2, \bar{y}_2')$, alla disuguaglianza:

$$(5) \quad |f_1(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_1') - f(x, \bar{y}_2, \bar{y}_2')| \leqq \alpha |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| + \beta |\bar{y}_1' - \bar{y}_2'|,$$

e per ultimo uguale ad $f(x, y, y')$ in ogni punto di C: è manifesta l'esistenza di una siffatta funzione.

La $F(x, y, y', h, k, k')$, quando h, k, k' tendono comunque a zero, tende uniformemente ad $f(x, y, y')$ nei punti di C; di più per ogni h, k, k' fissi, non nulli, è sviluppabile in serie tripla di potenze intere, positive di x, y, y', che in tale campo converge in egual grado (*).

Per avere allora i polinomi (4) basta scegliere i valori h_n, k_n, k_n', dei parametri h, k, k', in modo che risulti, in ogni punto di C:

$$(6) \qquad |f(x, y, y') - F(x, y, y', h_n, k_n, k_n')| \leqq \frac{1}{2} \sigma_n \quad (n=1, 2, ..., \infty),$$

e della serie, che rappresenta $F(x, y, y', h_n, k_n, k_n')$, considerare un certo numero di termini, $P_n(x, y, y')$, abbastanza grande, perchè si abbia:

$$(7) \quad \left.\begin{aligned} & |F(x, y, y', h_n, k_n, k_n') - P_n(x, y, y')| \leqq \frac{1}{2} \sigma_n \\ & \left| \frac{\partial F(x, y, y', h_n, k_n, k_n')}{\partial y} - \frac{\partial P_n(x, y, y')}{\partial y} \right| \leqq \sigma_n \\ & \left| \frac{\partial F(x, y, y', h_n, k_n, k_n')}{\partial y'} - \frac{\partial P_n(x, y, y')}{\partial y'} \right| \leqq \sigma_n \end{aligned}\right\} (n=1, 2, ..., \infty).$$

Si può infatti scrivere:

$$F(x, y, y', h, k, k') =$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x+hu, y+kv, y'+k'v') e^{-(u^2+v^2+v'^2)} du dv dv',$$

(*) Cfr. le Memorie di Weierstrass, *Ueber die analytische Darstellbarkeit* ecc. (" Sitzungsber. der Pr. Akad. der Wiss. ", 1885), ed il corso tenuto a Berlino l'anno 1884. Cfr. anche Ingrami, *Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali*; Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1889.

e quindi:

$$\frac{F(x, y_1, y', h, k, k') - F(x, y_2, y', h, k, k')}{y_1 - y_2} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(x+hu, y_1+kv, y'+k'v') - f_1(x+hu, y_2+kv, y'+k'v')}{y_1 - y_2} e^{-(u^2+v^2+v'^2)} du dv dv';$$

$$\frac{F(x, y, y_1', h, k, k') - F(x, y, y_2', h, k, k')}{y_1' - y_2'} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(x+hu, y+kv, y_1'+k'v') - f_1(x+hu, y+kv, y_2'+k'v')}{y_1' - y_2'} e^{-(u^2+v^2+v'^2)} du dv dv',$$

donde, a causa della (5):

$$\left| \frac{F(x, y_1, y', h, k, k') - F(x, y_2, y', h, k, k')}{y_1 - y_2} \right| \leqq \alpha .$$

$$\left| \frac{F(x, y, y_1', h, k, k') - F(x, y, y_2', h, k, k')}{y_1' - y_2'} \right| \leqq \beta ,$$

cioè:

$$\left| \frac{\partial F(x, y, y', h, k, k')}{\partial y} \right| \leqq \alpha ; \qquad \left| \frac{\partial F(x, y, y', h, k, k')}{\partial y'} \right| \leqq \beta ,$$

e così in ultimo, per le (7):

$$\left| \frac{\partial P_n(x, y, y')}{\partial y} \right| \leqq \alpha + \sigma_n ; \qquad \frac{\partial P_n(x, y, y')}{\partial y'} \leqq \beta + \sigma_n \quad (n = 1, 2, ..., \infty).$$

Dalla prima delle (7) e dalla (6) si ha poi:

$$|f(x, y, y') - P_n(x, y, y')| \leqq \sigma_n \qquad (n = 1, 2, ..., \alpha).$$

2. — Ciò posto, per semplicità di scrittura, ammettiamo che l'intervallo $(x_1, ..., x_2)$ contenga il punto $x = 0$, e consideriamo l'integrale della (1), che si annulla in tale punto ed assume per $x = b$ $(b > 0)$ il valore B: è chiaro che possiamo, senza che venga meno la generalità delle nostre ricerche, considerare questo caso.

Si fissino b e B colle condizioni:

$$\frac{Gb^2}{2} + |B| < L$$

$$Gb + \frac{B}{b} < L'$$

$$\frac{\alpha b^2}{2} + \beta b < 1 .$$

ove G rappresenta il massimo valore assoluto di $f(x, y, y')$.

Indicando con G_n il massimo valore assoluto di $P_n(x, y, y')$ nel campo C, se il primo termine della successione (3) è abbastanza piccolo, saranno anche soddisfatte le disuguaglianze:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{G_n b^2}{2} + |B| < L \\ &G_n b + \left|\frac{B}{b}\right| < L' \\ &(\alpha + \sigma_n)\frac{b^2}{2} + (\beta + \sigma_n) b < 1 \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

ed ognuna delle equazioni:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_n\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{8}$$

ammetterà nell'intervallo $(0 \ldots b)$ un unico integrale:

$$y_n(x), \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{9}$$

che assume per $x = 0$ il valore zero e per $x = b$ il valore B (*).

L'integrale $y(x)$ dell'equazione data (1), relativo ai medesimi valori iniziale e finale, sarà dato (**) dalla serie convergente in egual grado:

$$y_1(x) + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] + \ldots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \ldots \tag{10}$$

3. — Si applichi per ultimo, partendo dalla funzione $\frac{Bx}{b}$, il *metodo delle approssimazioni successive* alle equazioni (8). Si ottiene ognuno degli integrali (9) espresso per mezzo di una serie di polinomi razionali interi: e, poichè tale serie converge in egual grado nell'intervallo $(0 \ldots b)$, se ne può anche dedurre un polinomio razionale intero, che ivi rappresenta quell'integrale con un'approssimazione fissata ad arbitrio (**).

Indicando in generale con:

$$R_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

(*) Cfr. Picard, l. c.

(**) Cfr. la mia nota citata in principio, § 3, 3°.

questo polinomio, e facendo in modo che si abbia:

$$|y_n(x) - R_n(x)| \leqq \sigma_n \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots, \infty \\ 0 \leqq x \leqq b \end{pmatrix}$$

risulta, per quanto è stato detto sulla serie (10):

$$y(x) = R_1(x) + [R_2(x) - R_1(x)] + [R_3(x) - R_2(x)] + \ldots \\ + [R_n(x) - R_{n-1}(x)] + \ldots;$$

e, se n è abbastanza grande:

$$|y(x) - R_n(x)| \leqq \sigma \qquad (0 \leqq x \leqq b),$$

ove σ indica un numero positivo, prefissato piccolo a piacere.

4. — Le precedenti ricerche si estendono senza difficoltà ad un sistema di equazioni della forma:

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = f_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right) \text{ (*)} \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Torino, 15 giugno 1905.

(*) Cfr. Picard, l. c.

La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie.

Nota di GIOVANNI ZENO GIAMBELLI.

Nel settembre 1902 aveva comunicato per lettera al sig. SCHUBERT una mia formola di posizione speciale (1) e l'enunciato di un teorema fondamentale (2) per costruire le formole d'incidenza e di posizione speciale. Siccome questo teorema non è stato finora pubblicato, credo opportuno esporlo nella seguente Nota colle relative conseguenze, cioè esporre quali intimi legami esistono tra la teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e quella delle forme binarie. I detti legami permettono non solo di costruire le formole d'incidenza e di posizione speciale, ma servono anche per quistioni più elevate, che si presentano dopo la teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale; così si pongono le vere basi per la ricerca delle formole di coincidenza negli iperspazi, formole la cui utilità è certamente non dubbia per risolvere qualsiasi problema d'intersezioni di varietà algebriche.

Rispetto all'esattezza delle seguenti ricerche si osserverà che faremo uso solo di teoremi algebrici e delle formole dello SCHUBERT dimostrate in modo completo in una mia Nota (3).

(1) Cfr. i tre seguenti lavori dello SCHUBERT: *Anzahl-Beziehungen bei Inzidenz und Koinzidenz mehrdimensionaler linearer Räume*, " Jahresb. der Deut. Mathematiker-Verein. „, 12, 1903. — *Ueber die Incidenz zweier linearer Räume beliebiger Dimensionen*, " Math. Annalen „, 57, 1903. — *Gleichungen zwischen Bedingungen bei specieller Lage linearer Räume*, " Mittheilungen der Math. Gesell. in Hamburg „, 4, 1903.

(2) Cfr. la citata Nota dello SCHUBERT nei " Math. Annalen „ a pag. 217.

(3) *Sul principio della conservazione del numero*, " Jahresb. der Deut. Mathematiker-Verein. „, 13, 1904.

1. Definizioni.

Essendo $h_0, h_1, ..., h_s$ numeri interi tali che $0 \leq h_0 < h_1 < ... < h_{s-1} < h_s$, con $\}h_0, h_1, ..., h_s\{_s^{(x)}$ si designerà la funzione simmetrica caratteristica [1]

$$\begin{vmatrix} x_0^{h_0} & x_1^{h_0} & \dots & x_s^{h_0} \\ x_0^{h_1} & x_1^{h_1} & \dots & x_s^{h_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{h_s} & x_1^{h_s} & \dots & x_s^{h_s} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^s & x_1^s & \dots & x_s^s \end{vmatrix}$$

nelle lettere $x_0, x_1, ..., x_s$. Per brevità porremo:

$$S_{i,s}^{(x)} = \}0, 1, ..., s-i, s-i+2, ..., s+1\{_s^{(x)} \qquad (i = 0, 1, ..., s+1);$$

$S_{i,s}^{(x)} = 0$, se i è negativo, oppure maggiore di $s+1$;

$$V_{i,s}^{(x)} = \}0, 1, ..., s-1, s+i\{_s^{(x)} \quad (i = 0, 1, 2, ...);$$

$V_{i,s}^{(x)} = 0$, se i è negativo.

Per analogia quando invece delle $x_0, x_1, ..., x_s$ si considerano altri gruppi di lettere:

$$\delta_0, \quad \delta_1, \quad ..., \quad \delta_s,$$
$$\delta_0', \quad \delta_1', \quad ..., \quad \delta_s',$$
$$\text{ecc.},$$

è chiaro quale sarà il significato dei simboli:

$$\}h_0, h_1, ..., h_s\{_s^{(\delta)}, \quad S_{i,s}^{(\delta)}, \quad V_{i,s}^{(\delta)}$$
$$\}h_0, h_1, ..., h_s\{_s^{(\delta')}, \quad S_{i,s}^{(\delta')}, \quad V_{i,s}^{(\delta')},$$
$$\text{ecc.}$$

---

[1] Per queste definizioni cfr. il § 1 della mia Nota: *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 38, 1903.

Con $[n]$ si rappresenterà sempre lo spazio fondamentale, in cui si pensano giacenti tutti gli enti geometrici da considerare. Seguendo la prima notazione dello SCHUBERT [1] si designerà col simbolo:

$$(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_s),$$

ove è $0 \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_s \leq n$, la condizione caratteristica imposta agli spazî $[s]$ dello spazio fondamentale $[n]$, la quale significa che nello spazio $[n]$ sono dati $s+1$ spazî $[a_0], [a_1], \ldots, [a_s]$, rispetto ai quali si verifica che lo spazio $[a_i]$ $(i=0, 1, \ldots, s-1)$ giace nello spazio $[a_{i+1}]$ ed impone agli spazî $[s]$ di avere a comune uno spazio $[i]$ collo spazio $[a_i]$ $(i=0, 1, \ldots, s)$. Per brevità seguendo lo SCHUBERT scriveremo:

$$(b,\ 1_u,\ 0_{s-u}) \qquad (1 < b \leq n-s;\ u=0, 1, \ldots, s)$$

invece di $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$, quando questa condizione caratteristica è tale che

$$a_0 = n - s - b,\quad a_1 - 1 = a_2 - 2 = \ldots = a_u - u = n - s - 1,$$
$$a_{u+1} - (u+1) = a_{u+2} - (u+2) = \ldots = a_s - s = n - s;$$

poi [2] si porrà:

$$\varsigma_u(s) = (1,\ 1_{u-1},\ 0_{s-u+1}) \quad (u=1, 2, \ldots, s+1);$$

$\varsigma_0(s) = 1$; $\varsigma_u(s) = 0$, se u è negativo, oppure maggiore di $s+1$;

$$\sigma_u(s) = (u,\ 1_0,\ 0_s) \qquad (u=1, 2, \ldots, n-s);$$

$\sigma_0(s) = 1$; $\sigma_u(s) = 0$, se u è negativo, oppure maggiore di $n-s$.

Col simbolo $M([a_k, b_k, \ldots, e_k]_k;\ q,\ r)$ si designerà la matrice di $q+1$ linee e di $r+1$ colonne, nella quale $a_k, b_k, \ldots, e_k$ $(k=0, 1, \ldots, r)$ sono i rispettivi termini della $(k+1)^{\text{sima}}$ colonna.

Per due equazioni (in x),

$$\sum_{i=0}^{i=s+1} (-1)^i S_{i,s}^{(x)} x^{s+1-i} = 0, \qquad \sum_{i=0}^{i=t+1} (-1)^i S_{i,t}^{(y)} x^{t+1-i} = 0,$$

---

(1) Cfr. p. es. *Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension*, " Acta Mathematica ", 8, 1886.

(2) Cfr. per questo la mia Memoria: *Risoluzione del problema degli spazî secanti*, " Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", (2), 52, 1902.

(aventi per radici rispettivamente $x_0, x_1, \ldots, x_s$, e $y_0, y_1, \ldots, y_t$) si diranno funzioni R_p ($p = 0, 1, \ldots, \min.(s, t)$) quelle funzioni dei coefficienti delle due equazioni, che sono nulle solo quando le due equazioni hanno $p + 1$ radici in comune. Le R_p si possono pensare anche come funzioni simmetriche nelle radici x e nelle radici y.

Si definirà immagine della condizione caratteristica $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$ la funzione simmetrica caratteristica:

$$\{n - a_s,\ n - a_{s-1},\ \ldots,\ n - a_1,\ n - a_0\}_s(\delta).$$

Più in generale, detta I una funzione razionale intera nelle condizioni caratteristiche imposte a più spazî $[s_1], [s_2], \ldots, [s_k]$, si chiamerà immagine della I nel gruppo di lettere:

$$\begin{array}{llll} \delta_0^{(1)}, & \delta_1^{(1)}, & \ldots, & \delta_{s_1}^{(1)} \\ \delta_0^{(2)}, & \delta_1^{(2)}, & \ldots, & \delta_{s_2}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_0^{(k)}, & \delta_1^{(k)}, & \ldots, & \delta_{s_k}^{(k)}, \end{array}$$

la funzione razionale I', che si ottiene dalla I ponendo in luogo delle condizioni caratteristiche imposte allo spazio $[s_1]$ le rispettive immagini nelle $\delta_0^{(1)}, \delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_{s_1}^{(1)}$, in luogo delle condizioni caratteristiche imposte allo spazio $[s_2]$ le rispettive immagini nelle $\delta_0^{(2)}, \delta_1^{(2)}, \ldots, \delta_{s_2}^{(2)}$, ecc., in luogo delle condizioni caratteristiche imposte allo spazio $[s_k]$ le rispettive immagini nelle $\delta_0^{(k)}, \delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_{s_k}^{(k)}$. Infine di una relazione $I = 0$ tra le condizioni caratteristiche imposte a più spazî $[s_1], [s_2], \ldots, [s_k]$ si definirà come immagine in un certo dato (conveniente) gruppo di lettere la relazione $I' = 0$, ove I' è l'immagine della I in quel medesimo gruppo di lettere.

2. Formole d'incidenza per uno stesso spazio. — Formole d'incidenza proprie e formole d'incidenza improprie.

La risoluzione del problema degli spazî secanti consiste nell'esprimere il prodotto di più condizioni caratteristiche imposte ad un dato spazio $[s]$ per mezzo di una somma di più

condizioni caratteristiche relative allo spazio $[s]$. Non è difficile vedere come tale quistione non è altro che un caso particolare di quest'altra: *Costruire tutte le funzioni identicamente nulle relative a condizioni caratteristiche imposte ad un medesimo spazio* $[s]$. Tali funzioni identicamente nulle si chiameranno *formole d'incidenza per uno stesso spazio.* Si diranno *proprie*, se le immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$ sono identità nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$; *improprie*, quando le immagini non risultano identità. Una formola d'incidenza per un medesimo spazio $[s]$ si può pensare come la somma di più prodotti di condizioni caratteristiche (imposte ad uno stesso spazio) moltiplicate per un coefficiente numerico, ed è tale che la somma delle dimensioni delle singole condizioni, che compaiono in ogni prodotto, è uguale a un numero costante, che si chiama la dimensione della formola d'incidenza. Dai risultati relativi alla risoluzione del problema degli spazî secanti (1) si ricava che le formole d'incidenza per un medesimo spazio $[s]$ di dimensione d, essendo $d+s \leq n$, sono certamente proprie. Infatti se n è sufficientemente grande, allora le formole d'incidenza per un medesimo spazio $[s]$ sono proprie; perchè se n è sufficientemente grande, esiste una corrispondenza biunivoca tra le condizioni caratteristiche imposte ad un dato spazio $[s]$ e le funzioni simmetriche caratteristiche di più lettere $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$. Se invece non è $d+s \leq n$, alle funzioni simmetriche caratteristiche $\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(\delta)}$ per cui $h_s > n$ non corrisponde alcuna condizione caratteristica $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ imponibile agli spazî $[s]$ di $[n]$ (2).

Se poi si fa la convenzione di porre uguali a zero tutte le funzioni simmetriche caratteristiche nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$, per le quali non esiste una corrispondente condizione caratteristica imponibile agli spazî $[s]$ di $[n]$, allora anche le immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$ delle formole d'incidenza improprie per un medesimo spazio $[s]$ risultano identità nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$.

Anche le formole d'incidenza relative a una coppia di spazî

(1) Cfr. l'osservazione in fine al § 11 della mia citata Memoria, *Risoluzione del problema degli spazî secanti.*

(2) La disuguaglianza $n \geq 2s+1$ a pag. 22 della mia citata Memoria si deve evidentemente leggere $n \geq s+d$, come ho già osservato a pag. 1 della mia Memoria, *Il problema della correlazione negli iperspazî*, " Mem. R. Ist. Lombardo, (3), 10, 1903.

che si appartengono si distinguono in proprie ed improprie; però, se n è sufficientemente grande, esse sono proprie. Quindi nelle seguenti considerazioni si supporrà n sufficientemente grande.

3. Costruzione delle formole d'incidenza.

Per l'ente costituito da due spazî $[s]$, $[s+1]$ che si appartengono valgono le formole d'incidenza dello Schubert [1]:

$$(1) \qquad \varsigma_{u+1}(s) \,.\, \sigma_b(s+1) = (b+1,\ 1_u,\ 0_{s-u}) + (b,\ 1_{u+1},\ 0_{s-u})$$
$$(u=0,\ 1,\ \ldots,\ s;\ b=1,\ 2,\ \ldots,\ n-s+1);$$

in particolare si trae:

$$\varsigma_{u+2}(s+1) - \varsigma_{u+2}(s) - (\sigma_1(s+1) - \sigma_1(s)) \,.\, \varsigma_{u+1}(s) = 0$$
$$(u=0,\ 1,\ \ldots,\ s).$$

Posto:

$$A_u \equiv \varsigma_u(s+1) - \varsigma_u(s) - (\sigma_1(s+1) - \sigma_1(s)) \,.\, \varsigma_{u-1}(s),$$

e, detti i, j, l tre numeri interi positivi tali che $0 \leq i < j < l \leq s+2$, si avrà sempre:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \varsigma_i(s) & \varsigma_j(s) & \varsigma_l(s) \\ \varsigma_{i-1}(s) & \varsigma_{j-1}(s) & \varsigma_{l-1}(s) \\ \varsigma_i(s+1) & \varsigma_j(s+1) & \varsigma_l(s+1) \end{vmatrix} = 0\,,$$

perchè il primo membro di questa formola non è altro che:

$$A_i \begin{vmatrix} \varsigma_j(s) & \varsigma_l(s) \\ \varsigma_{j-1}(s) & \varsigma_{l-1}(s) \end{vmatrix} - A_j \begin{vmatrix} \varsigma_i(s) & \varsigma_l(s) \\ \varsigma_{i-1}(s) & \varsigma_{l-1}(s) \end{vmatrix} + A_l \begin{vmatrix} \varsigma_i(s) & \varsigma_j(s) \\ \varsigma_{i-1}(s) & \varsigma_{j-1}(s) \end{vmatrix},$$

che è nullo, essendo $A_i = A_j = A_l = 0$.

Dalla formola (2), tenendo conto di tutti i valori che possono assumere i, j, l, si deduce che è nulla la matrice:

$$M([\varsigma_k(s),\ \varsigma_{k-1}(s),\ \varsigma_k(s+1)]_k;\ 2,\ s+2).$$

[1] Cfr. la citata Nota dello Schubert nei " Math. Annalen " a pag. 213 e la mia citata Nota, *Sul principio della conservazione del numero* § 3.

Se rispetto a queste formole d'incidenza (rappresentate coll'annullare la precedente matrice) per l'ente costituito dai due spazî $[s]$, $[s+1]$, che si appartengono, si costruiscono le immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta'_{s+1}$, si deduce l'annullamento della matrice:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s},\ S^{(\delta)}_{k-1,s},\ S^{(\delta')}_{k,s+1}]_k;\ 2,\ s+2).$$

L'annullarsi di questa matrice (¹) esprime la condizione necessaria e sufficiente, affinchè tutte le radici dell'equazione in δ.

$$\sum_{u=0}^{u=s+1} (-1)^u S^{(\delta)}_{u,s}\, \delta^{s-u+1} = 0,$$

siano pure radici dell'equazione in δ:

$$\sum_{u=0}^{u=s+2} (-1)^u S^{(\delta')}_{u,s+1}\, \delta^{s-u+2} = 0.$$

Perciò sono anche nulle tutte le funzioni R_s per queste due equazioni; ossia per l'ente costituito dai due spazî $[s]$, $[s+1]$, che si appartengono, valgono tutte quelle formole d'incidenza, le cui immagini nelle lettere $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta_s', \delta'_{s+1}$ sono funzioni R_s per le due equazioni dei gradi $s+1$, $s+2$, le quali ammettono come radici rispettivamente le $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$ e le δ_0', $\delta_1', \ldots, \delta'_{s+1}$.

Per mezzo di questo risultato si può dimostrare la seguente proposizione:

" Per l'ente costituito da una coppia di spazî $[s]$, $[t]$ (es-
" sendo $t>s$), che si appartengono, valgono tutte le formole d'in-
" cidenza, le quali hanno per immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta_t'$
" le relazioni ottenute coll'annullare la matrice:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s},\ S^{(\delta)}_{k-1,s},\ \ldots,\ S^{(\delta)}_{k-t+s,s},\ S^{(\delta')}_{k,t}]_k;\ t-s+1,\ t+1)\ ".$$

(¹) L'annullarsi di questa matrice trae di conseguenza anche l'annullarsi della matrice ottenuta da questa ponendo $(-1)^k S^{(\delta)}_{k,s}$ invece di $S^{(\delta)}_{k,s}$ e $(-1) S^{(\delta')}_{k,s+1}$ invece di $S^{(\delta')}_{k,s+1}$. Per brevità nei seguenti casi analoghi non si farà alcun cenno esplicito di questo cambiamento di segno nei termini di una matrice.

Dai risultati precedenti si trae che questa proposizione è vera, quando $t = s+1$; quindi nella dimostrazione si potrà supporre $t > s+1$ ed ammettere vera la proposizione per $t-1$.

Si consideri l'ente Γ costituito dagli spazî $[s]$, $[t-1]$, $[t]$, tali che $[s]$ giaccia in $[t-1]$ e $[t-1]$ giaccia in $[t]$. Si designi con $I(s; t-1)$ l'insieme di tutte le formole d'incidenza per l'ente costituito dai due spazî $[s]$, $[t-1]$, le cui immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta'_{t-1}$ sono le relazioni:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s},\ S^{(\delta)}_{k-1,s},\ \ldots,\ S^{(\delta)}_{k-t+s+1,s},\ S^{(\delta')}_{k,t-1}]_k;\ t-s,\ t) = 0,$$

(cioè ottenute coll'annullare questa matrice). Si designi poi con $I(t-1; t)$ l'insieme di tutte le formole d'incidenza per l'ente costituito dai due spazî $[t-1]$, $[t]$, le cui immagini nelle δ_0', $\delta_1', \ldots, \delta'_{t-1}, \delta_0'', \delta_1'', \ldots, \delta_t''$ sono le relazioni:

$$M([S^{(\delta')}_{k,t-1},\ S^{(\delta')}_{k-1,t-1},\ S^{(\delta'')}_{k,t}]_k;\ 2,\ t+1) = 0.$$

L'annullamento della matrice:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s},\ S^{(\delta)}_{k-1,s},\ \ldots,\ S^{(\delta)}_{k-t+s+1,s},\ S^{(\delta)}_{k,t-1}]_k;\ t-s,\ t)$$

esprime (cfr. la nota a pag. 9) la condizione necessaria e sufficiente, affinchè tutte le radici dell'equazione in δ,

$$\sum_{u=0}^{u=s+1} (-1)^u\, S^{(\delta)}_{u,s}\, \delta^{s-u+1} = 0,$$

siano pure radici dell'equazione in δ:

$$\sum_{u=0}^{u=t} (-1)^u\, S^{(\delta')}_{u,t-1}\, \delta^{t-u} = 0.$$

L'annullarsi dell'altra matrice

$$M([S^{(\delta')}_{k,t-1},\ S^{(\delta')}_{k-1,t-1},\ S^{(\delta'')}_{k,t}]_k;\ 2,\ t+1)$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente, affinchè tutte le radici dell'ultima equazione in δ (di grado t) siano radici dell'equazione in δ:

$$\sum_{u=0}^{u=t+1} (-1)^u\, S^{(\delta'')}_{u,t}\, \delta^{t-u+1} = 0.$$

Quindi per l'annullarsi simultaneo di queste due matrici tutte le radici dell'equazione in δ,

$$\sum_{u=0}^{u=s+1} (-1)^u S_{u,s}^{(\delta)} \delta^{s-u+1} = 0,$$

sono pure radici dell'equazione in δ:

$$\sum_{u=0}^{u=t+1} (-1)^u S_{u,t}^{(\delta'')} \delta^{t-u+1} = 0;$$

cioè è nulla la matrice:

$$M([S_{k,s}^{(\delta)}, S_{k-1,s}^{(\delta)}, \ldots, S_{k-t+s,s}^{(\delta)}, S_{k,t}^{(\delta'')}]_k;\ t-s+1,\ t+1).$$

Dunque gl'insiemi di formole d'incidenza $I(s;t-1)$, $I(t-1;t)$ pensati come relativi all'ente Γ ammettono come conseguenza l'annullarsi di tutte quelle relazioni tra le condizioni caratteristiche imponibili ai tre spazi dell'ente Γ, le cui immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_{t-1}, \delta''_0, \delta''_1, \ldots, \delta''_t$ sono le relazioni,

$$M([S_{k,s}^{(\delta)}, S_{k-1,s}^{(\delta)}, \ldots, S_{k-t+s,s}^{(\delta)}, S_{k,t}^{(\delta'')}]_k;\ t-s+1,\ t+1) = 0.$$

Siccome in queste relazioni non compaiono le $\delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_{t-1}$, segue che in quelle riferite all'ente Γ non compaiono condizioni imposte allo spazio $[t-1]$, cioè le dette relazioni per l'ente Γ sono indipendenti dalle condizioni imponibili allo spazio $[t-1]$, e si possono pensare come formole d'incidenza per la coppia di spazî $[s]$, $[t]$. Concludendo per la coppia di spazî $[s]$, $[t]$ valgono le formole d'incidenza rappresentate coll'annullare la matrice.

$$(3) \qquad M([\varsigma_k(s), \varsigma_{k-1}(s), \ldots, \varsigma_{k-t+s}(s), \varsigma_k(t)]_k;\ t-s+1,\ t+1);$$

cioè valgono le formole d'incidenza, le cui immagini nelle δ_0, $\delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0'', \delta_1'', \ldots, \delta_t''$ sono le relazioni:

$$M([S_{k,s}^{(\delta)}, S_{k-1,s}^{(\delta)}, \ldots, S_{k-t+s,s}^{(\delta)}, S_{k,t}^{(\delta'')}]_k;\ t-s+1,\ t+1) = 0).$$

In virtù della proposizione ora dimostrata per l'ente costituito dai due spazi $[s]$, $[t]$, che si appartengono, valgono anche tutte le formole d'incidenza, le quali hanno per immagini nelle

$\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_t$ le funzioni R_s per le due equazioni dei gradi $s+1$, $t+1$, le quali ammettono come radici rispettivamente le $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$ e le $\delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_t$. Infatti basta osservare che essendo nulla la matrice,

$$M([S^{(\delta)}_{k,s},\ S^{(\delta)}_{k-1,s},\ \ldots,\ S^{(\delta)}_{k-t+s,s},\ S^{(\delta')}_{k,t}]_k;\ t-s+1,\ t+1),$$

sono pur tali tutte le funzioni R_s per le due dette equazioni dei gradi $s+1$, $t+1$.

Riassumendo, si può enunciare:

Teorema I. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s]$, $[t]$ (*essendo* $t > s$), *che si appartengono, valgono tutte le formole d'incidenza, le cui immagini nelle lettere* $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_t$ *sono funzioni* R_s *per le due equazioni dei gradi* $s+1$, $t+1$, *le quali ammettono rispettivamente come radici le* $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$, e le $\delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_t$.

Ossia:

Teorema II. *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s]$, $[t]$ (*essendo* $t \geq s$), *che si appartengono, valgono tutte le formole d'incidenza, le cui immagini nelle lettere* $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_t$ [1] *sono funzioni identicamente nulle.*

Per maggior facilità non credo inutile esporre il precedente risultato in questi altri modi:

Teorema III. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s]$, $[t]$ (*essendo* $t \geq s$), *che si appartengono, valgono tutte le formole d'incidenza tali che, in luogo di ogni condizione caratteristica* $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ *imposta allo spazio* $[s]$ *ponendo la funzione simmetrica caratteristica* $\{n-a_s, n-a_{s-1}, \ldots, n-a_1, n-a_0\}^{(\delta)}_s$, *ed in luogo di ogni condizione caratteristica* $(b_0, b_1, \ldots, b_t)$ *imposta allo spazio* $[t]$ *ponendo la funzione simmetrica caratteristica* $\{n-b_t, n-b_{t-1}, \ldots, n-b_1, n-b_0\}^{(\delta)}_t$, *si ottenga una funzione identicamente nulla.*

Teorema IV. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s]$, $[t]$ (*essendo* $t \geq s$), *che si appartengono, valgono tutte le formole*

[1] Questo gruppo di lettere $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_t$ non è altro che il gruppo di lettere $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_t$, in cui si abbia $\delta'_i = \delta_i$ per $i = 0, 1, \ldots, s$.

d'incidenza tali che, in luogo di ogni condizione caratteristica (a_0, a_1, ..., a_s) *imposta allo spazio* [s] *ponendo il determinante di Vandermonde generalizzato:*

$$\begin{vmatrix} \delta_0^{n-a_s} & \delta_1^{n-a_s} & \dots & \delta_s^{n-a_s} \\ \delta_0^{n-a_{s-1}} & \delta_1^{n-a_{s-1}} & \dots & \delta_s^{n-a_{s-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_0^{n-a_1} & \delta_1^{n-a_1} & \dots & \delta_s^{n-a_1} \\ \delta_0^{n-a_0} & \delta_1^{n-a_0} & \dots & \delta_s^{n-a_0} \end{vmatrix},$$

ed in luogo di ogni condizione caratteristica (b_0, b_1, ..., b_t) *imposta allo spazio* [t] *ponendo il determinante di Vandermonde generalizzato:*

$$\begin{vmatrix} \delta_0^{n-b_t} & \delta_1^{n-b_t} & \dots & \delta_t^{n-b_t} \\ \delta_0^{n-b_{t-1}} & \delta_1^{n-b_{t-1}} & \dots & \delta_t^{n-b_{t-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_0^{n-b_1} & \delta_1^{n-b_1} & \dots & \delta_t^{n-b_1} \\ \delta_0^{n-b_0} & \delta_1^{n-b_0} & \dots & \delta_t^{n-b_0} \end{vmatrix},$$

si ottenga una funzione identicamente nulla.

Quest'ultimo modo di enunciare il teorema I mostra come si potrebbe definire diversamente l'immagine di una condizione caratteristica, e quindi l'immagine di una formola d'incidenza ecc.; per ragioni di una trattazione più elegante è meglio seguire le definizioni date nel § 1. Inoltre questo teorema IV permette subito nel caso particolare $s = t$ di dare un altro enunciato per ciascuno dei 5 teoremi del § 11 della mia citata Memoria, *Risoluzione del problema degli spazî secanti.* Per brevità ed essendo cosa facile si ometteranno questi altri cinque enunciati. Quindi si vede ancora come del problema degli spazî secanti si possono dare altre risoluzioni a primo aspetto differenti, e molte altre ho

incontrate in mie ricerche di Geometria Numerativa non ancora pubblicate [1].

I risultati ottenuti permettono di costruire le formole d'incidenza senza fare alcun ragionamento geometrico per mezzo di identità algebriche, identità la cui ricerca dipende dalle proprietà inerenti alla condizione, affinchè una forma binaria contenga come parte un' altra forma binaria [2].

---

[1] Una risoluzione molto notevole non contenuta nella mia citata Memoria, *Risoluzione del problema degli spazî secanti*, è quella ottenuta dallo Schubert, accennata nel § 8 della mia citata Nota, *Alcune proprietà delle funzioni ecc.* In questa Nota enuncio e dimostro la formola dello Schubert, la quale esprime qualunque condizione caratteristica imposta allo spazio $[s]$ per mezzo di un determinante costituito da condizioni del tipo $(b, 1_u, 0_{s-u})$, e dopo asserisco come tale formola possa risolvere il problema degli spazî secanti. Sebbene sia assai facile, pure credo opportuno dimostrare ora questa asserzione.

Dato un prodotto di $p+1$ condizioni caratteristiche imposte ad uno stesso spazio, per la formola dello Schubert possiamo sostituire a p di esse i corrispondenti determinanti formati da condizioni del tipo $(b, 1_u, 0_{s-u})$; quindi il problema degli spazî secanti è ridotto a quello del prodotto di una condizione caratteristica arbitraria imposta allo spazio $[s]$ per una condizione del tipo $(b, 1_u, 0_{s-u})$. Tale prodotto si ottiene subito p. es. per mezzo della formola:

$$(b, 1_u, 0_{s-u}) = \sum_{i=0}^{i=u} (-1)^i \sigma_{b+i}(s) \,.\, \varsigma_{u-i}(s)$$

(che si ricava dalle formole contenute nelle Note del Pieri, *Sul problema degli spazî secanti*, " Rend. Ist. Lombardo „ (2), 26, 1893; 27, 1894), perchè basta eseguire per mezzo delle citate formole del Pieri il prodotto di una condizione caratteristica arbitraria imposta allo spazio $[s]$ per condizioni del tipo $\sigma_u(s)$ e del tipo $\varsigma_u(s)$. Così è completamente dimostrato come le sole formole del Pieri (senza i risultati della mia citata Memoria, *Risoluzione del problema degli spazî secanti*) permettono di applicare la formola dello Schubert per eseguire qualunque prodotto di più condizioni caratteristiche imposte ad un medesimo spazio $[s]$; in casi particolari questa risoluzione dello Schubert può esser utilissima.

[2] Nei ragionamenti precedenti per essere più chiari si è parlato di equazioni algebriche ad una incognita invece di forme binarie; ma evidentemente è lo stesso considerare equazioni algebriche ad una incognita, oppure forme binarie. Tale osservazione, per brevità, non sarà ripetuta negli analoghi casi seguenti.

4. Costruzione delle formole di posizione speciale.

Imitando il metodo usato nel § 3, si può dimostrare la seguente proposizione:

" Per l'ente costituito da una coppia di spazî $[s+q]$, $[s+q']$ " (essendo $q \geq 0$, $q' \geq 0$), che hanno in comune uno spazio $[s]$, val- " gono tutte le formole di posizione speciale, le quali hanno per " immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}, \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta'_{s+q'}$ le relazioni otte- " nute coll'annullare la matrice:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s+q}, S^{(\delta)}_{k-1,s+q}, \ldots, S^{(\delta)}_{k-q',s+q}, S^{(\delta')}_{k,s+q'}, S^{(\delta')}_{k-1,s+q'}, \ldots, S^{(\delta')}_{k-q,s+q'}]_k; \\ q+q'+1,\ s+q+q'+1) \text{ ".}$$

Si consideri l'ente Γ costituito dagli spazî $[s]$, $[s+q]$, $[s+q']$. Si designi con $I(s; s+q)$ l'insieme di tutte le formole d'incidenza per l'ente costituito dai due spazî $[s]$, $[s+q]$, le cui immagini nelle $\delta_0'', \delta_1'', \ldots, \delta_s'', \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}$ sono le relazioni:

$$M([S^{(\delta'')}_{k,s}, S^{(\delta'')}_{k-1,s}, \ldots, S^{(\delta'')}_{k-q,s}, S^{(\delta)}_{k,s+q}]_k;\ q+1,\ s+q+1) = 0.$$

Si designi poi con $I(s; s+q')$ l'insieme di tutte le formole d'incidenza per l'ente costituito dai due spazî $[s]$, $[s+q']$, le cui immagini nelle $\delta_0'', \delta_1'', \ldots, \delta_s'', \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta'_{s+q'}$ sono le relazioni:

$$M([S^{(\delta'')}_{k,s}, S^{(\delta'')}_{k-1,s}, \ldots, S^{(\delta'')}_{k-q',s}, S^{(\delta')}_{k,s+q'}]_k;\ q'+1,\ s+q'+1) = 0.$$

L'annullarsi simultaneo di queste due matrici esprime la condizione necessaria e sufficiente, affinchè le due equazioni in δ,

$$\sum_{u=0}^{u=s+q+1} (-1)^u S^{(\delta)}_{u,s+q}\, \delta^{s+q-u+1} = 0, \qquad \sum_{u=0}^{u=s+q'+1} (-1)^u S^{(\delta')}_{u,s+q'}\, \delta^{s+q'-u+1} = 0,$$

abbiano in comune le $s+1$ radici dell'equazione in δ:

$$\sum_{u=0}^{u=s+1} (-1)^u S^{(\delta'')}_{u,s}\, \delta^{s-u+1} = 0;$$

quindi è nulla la matrice:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s+q}, S^{(\delta)}_{k-1,s+q}, \ldots, S^{(\delta)}_{k-q',s+q}, S^{(\delta')}_{k,s+q'}, S^{(\delta')}_{k-1,s+q'}, \ldots, S^{(\delta')}_{k-q,s+q'}]_k; \\ q+q'+1,\ s+q+q'+1).$$

Gl'insiemi di formole d'incidenza $I(s;\ s+q)$, $I(s;\ s+q')$, pensati come relativi all'ente Γ ammettono dunque come conseguenza l'annullarsi di tutte quelle relazioni tra le condizioni caratteristiche imponibili ai tre spazî $[s]$, $[s+q]$, $[s+q']$ dell'ente Γ, le cui immagini nelle $\delta_0'', \delta_1'', \ldots, \delta_s'', \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}, \delta_0', \delta_1', \ldots, \delta'_{s+q'}$ sono le relazioni:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s+q},\ S^{(\delta)}_{k-1,s+q},\ \ldots,\ S^{(\delta)}_{k-q',s+q},\ S^{(\delta')}_{k,s+q'},\ S^{(\delta')}_{k-1,s+q'},\ \ldots,\ S^{(\delta')}_{k-q,s+q'}]_k;\ q+q'+1,\ s+q+q'+1)=0.$$

Siccome in queste relazioni non compaiono le $\delta''_0, \delta''_1, \ldots, \delta''_s$, segue che in quelle riferite all'ente Γ non compaiono condizioni imposte allo spazio $[s]$; ossia per la coppia di spazî $[s+q]$, $[s+q']$, che hanno in comune uno spazio $[s]$, valgono le formole di posizione speciale rappresentate coll'annullare la matrice:

$$(4)\qquad M([\varsigma_k(s+q),\ \varsigma_{k-1}(s+q),\ \ldots,\ \varsigma_{k-q}(s+q),\ \varsigma_k(s+q'),\ \varsigma_{k-1}(s+q'),\ \ldots,\ \varsigma_{k-q}(s+q')]_k;\ q+q'+1,\ s+q+q'+1);$$

cioè valgono le formole di posizione speciale enunciate nella proposizione. c. v. d.

In virtù di questa proposizione per l'ente costituito dai due spazî $[s+q]$, $[s+q']$, che hanno in comune uno spazio $[s]$, valgono anche tutte le formole di posizione speciale, le quali hanno per immagini nelle $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}, \delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_{s+q'}$ le funzioni R_s per le due equazioni dei gradi $s+q+1$, $s+q'+1$, le quali ammettono come radici rispettivamente le $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}$ e le $\delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_{s+q'}$. Infatti basta osservare che essendo nulla la matrice:

$$M([S^{(\delta)}_{k,s+q},\ S^{(\delta)}_{k-1,s+q},\ \ldots,\ S^{(\delta)}_{k-q',s+q},\ S^{(\delta')}_{k,s+q'},\ S^{(\delta')}_{k-1,s+q'},\ \ldots,\ S^{(\delta')}_{k-q,s+q'}]_k;\ q+q'+1,\ s+q+q'+1),$$

sono pur tali tutte le funzioni R_s per le due dette equazioni dei gradi $s+q+1$, $s+q'+1$.

Riassumendo si può enunciare:

Teorema V. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s+q]$, $[s+q']$ (*essendo* $q \geq 0$, $q' \geq 0$), *che hanno in comune uno*

spazio [s], *valgono tutte le formole di posizione speciale, le cui immagini nelle lettere* $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}, \delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_{s+q'}$ *sono funzioni* R_s *per le due equazioni dei gradi* $s+q+1$, $s+q'+1$, *le quali ammettono come radici rispettivamente le* $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}$ *e le* $\delta'_0, \delta'_1, \ldots, \delta'_{s+q'}$.

Ossia:

Teorema VI. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s+q]$, $[s+q']$ (*essendo* $q \geq 0$, $q' \geq 0$), *che hanno in comune uno spazio* [s], *valgono tutte le formole di posizione speciale, le cui immagini nelle* $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s+q}, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_{s+q+1}, \delta_{s+q+2}, \ldots, \delta_{s+q+q'}$ *sono funzioni identicamente nulle.*

Teorema VII. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s+q]$, $[s+q']$ (*essendo* $q \geq 0$, $q' \geq 0$), *che hanno in comune uno spazio* [s], *valgono tutte le formole di posizione speciale, tali che in luogo di ogni condizione caratteristica* $(a_0, a_1, \ldots, a_{s+q})$ *imposta allo spazio* $[s+q]$ *ponendo la funzione simmetrica caratteristica* $\{n-a_{s+q}, n-a_{s+q-1}, \ldots, n-a_1, n-a_0\}^{(\delta)}_{s+q}$ *ed in luogo di ogni condizione caratteristica* $(b_0, b_1, \ldots, b_{s+q'})$ *imposta allo spazio* $(s+q')$ *ponendo la funzione simmetrica caratteristica* $\{n-b_{s+q'}, n-b_{s+q'-1}, \ldots, n-b_1, n-b_0\}^{(\delta')}_{s+q'}$ *si ottenga una funzione che risulta identicamente nulla, quando si faccia simultaneamente* $\delta'_0=\delta_0, \delta'_1=\delta_1, \ldots, \delta'_s=\delta_s$.

Teorema VIII. — *Per l'ente costituito da una coppia di spazî* $[s+q]$, $[s+q']$ (*essendo* $q \geq 0$, $q' \geq 0$), *che hanno in comune uno spazio* [s], *valgono tutte le formole di posizione speciale tali che, in luogo di ogni condizione caratteristica* $(a_0, a_1, \ldots, a_{s+q})$ *imposta allo spazio* $[s+q]$ *ponendo il determinante di Vandermonde generalizzato:*

$$\begin{vmatrix} \delta_0^{n-a_{s+q}} & \delta_1^{n-a_{s+q}} & \ldots & \delta_{s+q}^{n-a_{s+q}} \\ \delta_0^{n-a_{s+q-1}} & \delta_1^{n-a_{s+q-1}} & \ldots & \delta_{s+q}^{n-a_{s+q-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_0^{n-a_1} & \delta_1^{n-a_1} & \ldots & \delta_{s+q}^{n-a_1} \\ \delta_0^{n-a_0} & \delta_1^{n-a_0} & \ldots & \delta_{s+q}^{n-a_0} \end{vmatrix},$$

ed in luogo di ogni condizione caratteristica $(b_0, b_1, \ldots, b_{s+q'})$ *im-*

posta allo spazio $[s+q']$ *ponendo il determinante di Vandermonde generalizzato:*

$$\begin{vmatrix} \delta_0^{n-b_{s+q'}} & \delta_1^{n-b_{s+q'}} & \dots & \delta_s^{n-b_{s+q'}} & \delta_{s+q+1}^{n-b_{s+q'}} & \delta_{s+q+2}^{n-b_{s+q'}} & \dots & \delta_{s+q+q'}^{n-b_{s+q'}} \\ \delta_0^{n-b_{s+q'-1}} & \delta_1^{n-b_{s+q'-1}} & \dots & \delta_s^{n-b_{s+q'-1}} & \delta_{s+q+1}^{n-b_{s+q'-1}} & \delta_{s+q+2}^{n-b_{s+q'-1}} & \dots & \delta_{s+q+q'}^{n-b_{s+q'-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_0^{n-b_1} & \delta_1^{n-b_1} & \dots & \delta_s^{n-b_1} & \delta_{s+q+1}^{n-b_1} & \delta_{s+q+2}^{n-b_1} & \dots & \delta_{s+q+q'}^{n-b_1} \\ \delta_0^{n-b_0} & \delta_1^{n-b_0} & \dots & \delta_s^{n-b_0} & \delta_{s+q+1}^{n-b_0} & \delta_{s+q+2}^{n-b_0} & \dots & \delta_{s+q+q'}^{n-b_0} \end{vmatrix} ;$$

si ottenga una funzione identicamente nulla.

Come per le formole d'incidenza, così per quelle di posizione speciale, i risultati ottenuti permettono di costruirle senza far alcun ragionamento geometrico per mezzo di identità algebriche, identità la cui ricerca dipende dalle proprietà inerenti alla condizione, affinchè due forme binarie contengano come parte un' altra forma binaria.

5. Formole dello Schubert — Esempi di formole d'incidenza e di posizione speciale — Utilità del principio della conservazione del numero.

Le principali formole d'incidenza e di posizione speciale sono quelle dello Schubert pubblicate nei lavori citati a pag. 1: esse ammettono quali casi particolari quelle del Pieri (1) ed altre dello Schubert medesimo (2). Oltre queste formole non vi sono altro che quelle d'incidenza di N. Giampaglia (3) per l'ente costituito dalla coppia di spazi $[s]$ $[s+q]$, che si appartengono, nei

(1) *Formole di coincidenza per le serie algebriche* ∞^n *delle coppie di punti dello spazio ad* n *dimensioni,* " Rend. del Circolo Mat. di Palermo ", 5, 1891.

(2) *Kalkül der abzählenden Geometrie,* Leipzig, B. G. Teubner, 1879. — *Die* n-*dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche* m-*ten Grades,* " Math. Annalen ", 26, 1886.

(3) *Formole d'incidenza per le coppie, punto e retta, retta e piano, punto e piano, nello spazio da* n *dimensioni,* " Atti dell'Acc. Gioenia di Catania ", (4), 17, 1904.

tre casi particolari $s=0,\ q=1,\quad s=0,\ q=2,\quad s=1,\ q=1,$ le quali formole per mezzo dei teoremi del § 3 risultano immediatamente verificate. Anche quelle dello SCHUBERT soddisfano pure ai teoremi dei § 3, 4; ma questa verifica non è immediata ed esige calcoli molto lunghi: quindi per mostrare l'asserto occorrono le seguenti considerazioni.

Nelle precedenti considerazioni si è fatto uso della formola (1) del § 3 solo nel caso particolare $b=1$, ed evidentemente per $b=1$ la (1) soddisfa ai teoremi del § 3. Per provare che la (1) soddisfa sempre ai teoremi del § 3 si potrà supporla vera per $b-1$ (pensando $u+1$ in luogo di u), cioè basterà dimostrare che la formola

$$(b+1,\ 1_u,\ 0_{s-u})+(b,\ 1_{u+1},\ 0_{s-u})+(b,\ 1_{u+1},\ 0_{s-u-1})+$$
$$+(b-1,\ 1_{u+2},\ 0_{s-u-1})-\varsigma_{u+1}(s)\,.\,\sigma_b(s+1)-\varsigma_{u+2}(s)\,.\,\sigma_{b-1}(s+1)=0$$

soddisfa ai teoremi del § 3. Siccome pei risultati sul problema degli spazî secanti è:

$$(b+1,\ 1_u,\ 0_{s-u})+(b,\ 1_{u+1},\ 0_{s-u-1})=\varsigma_{u+1}(s)\,.\,\sigma_b(s)$$
$$(b,\ 1_{u+1},\ 0_{s-u})+(b-1,\ 1_{u+2},\ 0_{s-u-1})=\varsigma_{u+2}(s+1)\,.\,\sigma_{b-1}(s+1),$$

la formola precedente diventa:

$$\sigma_{b-1}(s+1)\,.\,[\varsigma_{u+2}(s+1)-\varsigma_{u+2}(s)]-\varsigma_{u+1}(s)\,.\,[\sigma_b(s+1)-\sigma_b(s)]=0,$$

la quale ammette come immagine nelle $\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_s,\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_{s+1}$ la relazione:

$$V^{(\delta)}_{b-1,s+1}\,.\,[S^{(\delta)}_{u+2,s+1}-S^{(\delta)}_{u+2,s}]-S^{(\delta)}_{u+1,s}\,.\,[V^{(\delta)}_{b,s+1}-V^{(\delta)}_{b,s}]=0.$$

Questa relazione è una identità, perchè:

$$S^{(\delta)}_{u+2,s+1}-S^{(\delta)}_{u+2,s}=\delta_{s+1}\,.\,S^{(\delta)}_{u+1,s}$$
$$V^{(\delta)}_{b,s+1}-V^{(\delta)}_{b,s}=\delta_{s+1}\,.\,V^{(\delta)}_{b-1,s+1}\,.$$

Quindi le formole dello SCHUBERT per l'ente costituito dagli spazi $|s|$, $|s+1|$ che si appartengono soddisfano ai teoremi del § 3, e si può dimostrare subito che dovranno soddisfare ai teoremi dei § 3 e 4 tutte le altre formole d'incidenza o di posi-

zione speciale trovate dallo SCHUBERT. Infatti lo SCHUBERT deduce tutte le altre sue formole dalla (1) per mezzo di artifizî di eliminazione tra simboli di condizione e per mezzo di formole sul problema degli spazî secanti (formole che risultano tutte completamente dimostrate per la mia citata Nota: *Alcune proprietà delle funzioni*, ecc., cfr. § 7 e 8). Seguendo il ragionamento dello SCHUBERT, se in luogo delle condizioni caratteristiche si pongono le rispettive immagini in un conveniente gruppo di lettere, e su queste immagini applichiamo gli stessi artifizî di eliminazione dello SCHUBERT, si otterranno funzioni R_s per due convenienti equazioni, funzioni le quali sono le corrispondenti immagini (in un conveniente gruppo di lettere) delle formole d'incidenza o di posizione speciale, che lo SCHUBERT trova successivamente. Si può dire cioè che le operazioni di eliminazione fatte dallo SCHUBERT sulla formola (1) e le stesse operazioni fatte sulla immagine della (1) (in un conveniente gruppo di lettere) conducono a risultati, che sono in corrispondenza perfettamente biunivoca, essendo le funzioni R_s che si ottengono successivamente le corrispondenti immagini delle formole dello SCHUBERT.

Così non solo è dimostrato che alle formole dello SCHUBERT sono applicabili i teoremi dei § 3 e 4, ma si è indicato il modo, come si possa verificare questa applicabilità dei detti teoremi. Inoltre si vede come gli artifizî del calcolo simbolico dello SCHUBERT permettono di costruire funzioni R_s per due equazioni mediante altre funzioni R_s per altre coppie di equazioni; ossia gli artifizî del calcolo simbolico dello SCHUBERT danno implicitamente anche risultati per la teoria delle forme binarie. Si può aggiungere che pure per le formole del GIAMPAGLIA si possono ripetere le precedenti considerazioni, perchè queste formole sono dedotte le une dalle altre per mezzo del calcolo simbolico dello SCHUBERT.

Nelle precedenti considerazioni si sono ottenute altre formole d'incidenza e di posizione speciale, cioè quelle rappresentate coll'annullare le matrici (3) e (4), le quali sotto un certo aspetto si possono pensare come più generali di quelle dello SCHUBERT. Tali formole si possono scrivere in modo elegante, perchè il 2° teorema del § 6 della mia citata Nota, *Alcune proprietà delle funzioni* ecc., permette di enunciare:

TEOREMA IX. — *Essendo* $i_1, i_2, \ldots, i_s$ *un qualunque gruppo di* s *numeri della serie* $n-s-q-q'-1, n-s-q-q', \ldots, n-1, n$, *per l'ente costituito dalla coppia di spazî* $[s+q], [s+q']$, *che hanno in comune uno spazio* $[s]$, *valgono tutte le* $\binom{s+q+q'+2}{s}$ *formole di posizione speciale:*

$$\Sigma \pm (h_0, h_1, \ldots, h_{s+q})(h'_0, h'_1, \ldots, h'_{s+q'}) = 0,$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i valori (interi) delle h *e delle* h' *per cui:*

1° s *dei numeri* h *ed* s *dei numeri* h' *siano uguali al gruppo arbitrario, ma fisso, dei numeri* $i_1, i_2, \ldots, i_s$.

2° *la serie dei numeri* $h_0, h_1, \ldots, h_{s+q}, h'_0, h'_1, \ldots, h'_{s+q'}$, *privata dei numeri* h *uguali a* $i_1, i_2, \ldots, i_s$, *e dei numeri* h' *pure uguali a* $i_1, i_2, \ldots, i_s$ *sia una permutazione* D *del gruppo* G *di numeri, che si ottiene dal gruppo* $n-s-q-q'-1, n-s-q-q', \ldots, n-1, n$ *escludendo i numeri* $i_1, i_2 \ldots, i_s$; *inoltre a ciascun gruppo si dà il segno* +, oppure —, *secondochè la permutazione* D *dei numeri del gruppo* G *è pari, oppure dispari.*

(*Si sottintende inoltre:*

$$0 < h_0 < h_1 < \ldots < h_{s+q-1} < h_{s+q}, \quad 0 < h'_0 < h'_1 < \ldots < h'_{s+q'-1} < h'_{s+q'}).$$

I teoremi dei § 3 e 4 permettono di dare altri nuovi esempî di formole d'incidenza o di posizione speciale, e tale ricerca non presenterebbe nessuna difficoltà, se si conoscessero teoremi molto generali sulla teoria delle forme binarie per costruire le funzioni R_s. Siccome non esistono ancora tali teoremi d'algebra, non credo inutile esporre il seguente metodo basato sul primitivo ed imperfetto enunciato (dello SCHUBERT) del principio della conservazione del numero.

Per mezzo di questo principio, qualora non si tenga alcun conto delle restrizioni che si possono presentare, si costruiscono rapidamente delle formole d'incidenza e di posizione speciale. Siccome non si è avuto riguardo alle restrizioni, tali formole possono essere errate. Per vedere se sono esatte, oppure correggerle, qualora siano errate, basta applicare p. es. i teoremi 2° e 6°, costruendo le corrispondenti immagini in un conveniente gruppo di lettere. Se queste immagini sono funzioni identica-

mente nulle, allora le formole d'incidenza o di posizione speciale corrispondenti sono esatte; se invece le immagini non sono nulle identicamente, si dovranno modificare le formole corrispondenti, in modo che le immagini risultino identicamente nulle.

L'enunciato *non preciso* del principio della conservazione del numero fornisce per mezzo dei teoremi dei § 3 e 4 formole *esatte* d'incidenza o di posizione speciale; invece la mia modificazione (*esatta*) del principio della conservazione del numero (cfr. la nota (3) a pag. 3) non serve affatto per questo scopo, perchè esige ragionamenti lunghi e molto complicati. Così risalta l'utilità del principio della conservazione del numero esposto in modo non preciso dallo Schubert per poter costruire le dette formole numerative *esatte* e le funzioni R_s per due equazioni.

6. Relazioni tra le quistioni di geometria numerativa e le forme binarie — Cenno di alcuni nuovi campi di ricerche.

Oltre i legami già visti tra la teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie, è opportuno aggiungere questi, che servono a chiarire maggiormente le intime relazioni tra le quistioni di geometria numerativa e le forme binarie.

Lo Stéphanos (1) mostra come il numero dei sistemi lineari (di forme binarie) d'ordine m a k parametri aventi una data Jacobiana dipenda da un caso particolare di una nota formola dello Schubert.

Il Capelli (2) introduce il simbolo $[m_1, m_2, \ldots, m_r; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho]$, che esprime il numero delle soluzioni intere positive d'un sistema *diofanteo*, per determinare il numero delle forme polari $(\xi^{\mu_1}; \eta^{\mu_2}; \ldots; \omega^{\mu_\varrho}) = 0$ linearmente indipendenti deducibili da una una data forma algebrica (in più serie di variabili) generale

(1) *Sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination*, " Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris ", 1884, pag. 27.

(2) *Lezioni sulla teoria delle forme algebriche*, Napoli, B. Pellerano, 1902, pag. 59-61. — *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche*, " Mem. della R. Acc. dei Lincei ", (3), 12, 1882, pag. 12, ecc.

$F(x_{m_1}; y^{m_2}; ...; z^{m_r}) = 0$. Le proprietà 2ª, 3ª, 5ª, 6ª, 8ª relative al simbolo:

$$X(m_0, m_1, ..., m_s; h_0, h_1, ..., h_t),$$

enunciate nel § 13 della mia citata Memoria. *Risoluzione del problema degli spazî secanti*, valgono anche per il simbolo usato dal Capelli; sebbene poi le proprietà 1ª, 7ª non sussistano per questo simbolo, e la 4ª si debba un poco modificare, pure si può dire che esistono forti analogie tra i due detti simboli, perchè per la detta 8ª proprietà si presentano entrambi come una generalizzazione del coefficiente polinomiale, essendo

$$[m_1, m_2, ..., m_r; 1, 1, ..., 1] = X(m_1, m_2, ..., m_r; 1, 1, ..., 1) =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_r)!}{m_1!\, m_2! \dots m_r!},$$

e perchè il simbolo $[m_1, m_2, ..., m_r; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_Q]$ si può facilmente decomporre in una somma di simboli del tipo $X(m_0, m_1, ..., m_s; h_0, h_1, ..., h_t)$.

Le considerazioni fatte in principio del § 3 danno poi luogo ad una osservazione sopra le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè due equazioni abbiano più radici in comune. Tale osservazione si troverà in un seguente mio lavoro.

Inoltre pensando bene all'analogia tra le quistioni numerative e le forme binarie non è difficile ottenere:

Teorema X. — *Per l'ente costituito da un gruppo di spazî* $[s+q_1]$, $[s+q_2]$, ..., $[s+q_r]$ (*essendo* $q_i \geq 0$ $(i = 0, 1, ..., r)$, *che hanno tutti in comune uno spazio* $[s]$, *valgono tutte le relazioni, le cui immagini nel gruppo di lettere*

$$\delta_0^{(1)}, \delta_1^{(1)}, ..., \delta_{s+q_1}^{(1)}, \delta_0^{(2)}, \delta_1^{(2)}, ..., \delta_{s+q_2}^{(2)},$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \delta_0^{(r)}, \delta_1^{(r)}, ..., \delta_{s+q_r}^{(r)}$$

sono funzioni che risultano identicamente nulle, quando si faccia:

$$\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(2)} = ... = \delta_i^{(r)} \qquad (i = 0, 1, ..., s).$$

Questo risultato ammette come casi particolari gli altri ottenuti in questa Nota, e nel caso particolarissimo $r=2$, $q_1=q_2=0$ si ottiene la risoluzione del problema degli spazî secanti.

Così si giunge a nuovi campi di ricerche, tra i quali occorre ricordare:

1° Lo studio delle formole relative *a configurazioni lineari*, cioè delle formole riferibili ad enti costituiti da una qualsiasi configurazione di un numero *finito* di spazî.

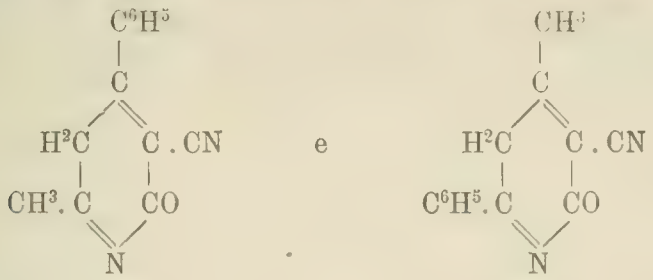
2° Applicare lo studio delle formole relative a configurazioni lineari alla ricerca delle formole di coincidenza.

Sebbene possegga molti esempî di corrispondenza biunivoca tra questi studî e le forme binarie, pure ho trovato delle configurazioni lineari eccezionali. Queste eccezioni ed un notevole campo nuovo di ricerche (conseguenza implicita di questo lavoro, ma non accennato esplicitamente) non possono certamente sfuggire a chi intende spingere ulteriormente le ricerche dello Schubert.

Di alcune nuove basi piridiniche.

Nota del Dott. GIOVANNI ISSOGLIO.

In una mia nota precedente, ho detto, come condensando il benzoilacetone coll'etere cianacetico in presenza di ammoniaca si ottenessero due *metilfenilcianossipiridine* isomere (1):



Ignorando io quale posizione avesse in ogni composto il gruppo fenilico nel nucleo della piridina, mi si presentava un problema abbastanza importante, cioè quello di stabilire la formola di costituzione dei due isomeri.

Per risolvere tale questione, ho trasformato la metilfenilcianossipiridina, fusibile a 309°-310° e che ottenevo in maggiore quantità, nella metilfenilpiridina corrispondente; da questa per ossidazione col permanganato di potassio ottenni un acido fenilpiridincarbonico, che distillato colla calce, mi fornì una fenilpiridina già conosciuta.

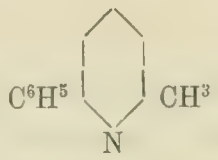
Dalle proprietà e dai caratteri di questa fenilpiridina, ho potuto svelare la posizione del gruppo benzenico nel composto da me studiato, e quindi la struttura della *cianossimetilfenilpiridina.*

Conoscendo così la formola di costituzione di uno dei due isomeri, ho potuto stabilire anche la struttura dell'altro. Però,

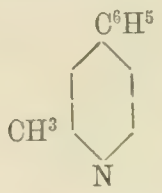
(1) G. Issoglio, *Ossipiridine isomere dai β dichetoni,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XL.

siccome io disponevo di una quantità non indifferente delle due sostanze madri dalle quali sono partito, ho voluto preparare ambedue le metilfenilpiridine isomere per conoscerne le proprietà fisiche e chimiche.

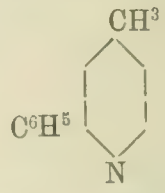
Delle sei *fenilmetilpiridine* date dalla teoria, una sola se ne conosce studiata dalla Scholtz nel 1895, cioè la *α metil α′ fenilpiridina* (1):



Distillando con polvere di zinco le due metilfenilcianossipiridine soprascritte ho ottenuto le due seguenti nuove basi:

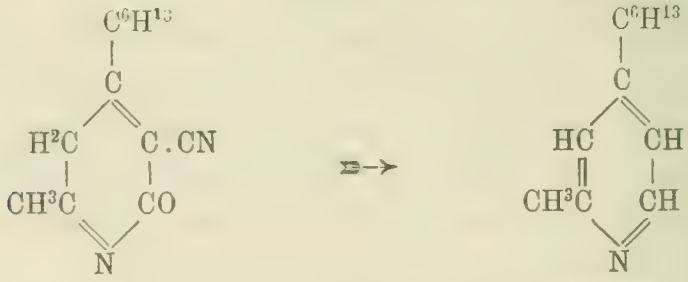


α metil γ fenilpiridina



α fenil γ metilpiridina

Parallelamente a queste ricerche, ho anche preparato la *α metil γ essilpiridina* dalla *α metil γ essilcianossipiridina:*



anche di questa base descriverò in seguito le proprietà caratteristiche.

La *metilfenilcianossipiridina* fusibile a 309°-310°, che ottenni in maggior quantità nella reazione fra il benzoilacetone e l'etere cianacetico, essiccai in stufa a 100°. Mescolata intimamente 1 p.

(1) M. Scholtz, " Ber. „ XXVIII, 1726.

di questa sostanza con 20 parti di polvere di zinco parimenti secca, introdussi la miscela in una canna di vetro difficilmente fusibile e la limitai avanti ed indietro, con due tappi di amianto.

Il vetro era ricurvo ad un'estremità e da questa parte stava in comunicazione con una boccia ben raffreddata, alla quale ne seguiva un'altra, che per maggior sicurezza era anche tenuta fredda; in ultimo venivano due boccie di lavaggio più piccole, l'una contenente dell'acido solforico diluito, e l'altra dell'idrato potassico concentrato.

Adagiata la canna sopra un piccolo fornello, la riscaldai moderatamente, facendovi passare una lenta corrente di idrogeno. Il riscaldamento non fu troppo pronunciato e non oltrepassò il rosso scuro. La distillazione durò circa due ore, e distillò un liquido denso, giallo, che mandava un forte odore di basi piridiniche, e che conteneva in sospensione una sostanza gialla, solida. Per purificarlo, trattai con acido solforico diluito, sino a reazione acida marcata. Notai viva effervescenza con sviluppo di acido carbonico, e di acido cianidrico. Il liquido, fortemente acido, teneva in sospensione una sostanza solida, gialla, di cui non ho potuto studiare la natura, sia perchè si resinificava tosto all'aria, sia perchè non era in grande quantità.

Il filtrato di colore giallo ranciato con fluorescenza verde, estrassi con etere, il quale asportò gran parte della sostanza colorante. Distillando la soluzione eterea ottiensi, come residuo, dell'aldeide benzoica, riconoscibile all'odore, ed anche perchè, abbandonata all'aria, dava per ossidazione dei lunghi prismi di acido benzoico.

La soluzione acquosa acida, così esaurita, ho alcalinizzato con della potassa al 50 %. Osservai allora il liquido farsi lattiginoso per separazione della base, che tendeva portarsi alla superficie della miscela. Estrassi con etere, e l'etere si separò con colorazione rosso bruna e fluorescenza verde.

Questa soluzione eterea disseccai con potassa solida e dopo averla filtrata distillai l'etere.

Rimase un residuo liquido, oleoso, bruno, alcalino, con intenso odore piridinico, che sottoposi a distillazione frazionata.

γ Metil α fenilpiridina

$$C^5H^3N\begin{cases} C^6H^5 & (\alpha) \\ CH^3 & (\gamma) \end{cases}$$

Il liquido, che ho raccolto, è una base incolora o lievemente gialla, con fluorescenza verde, che esposta all'aria si altera ed ingiallisce. Bolle a 310° (corr.), è di poco più pesante dell'acqua. Ho determinato la densità col picnometro di Saussure.

Peso specifico a 0° = 1,0731
" " a 15° = 1,0604.

È insolubile in acqua, solubile nell'alcool, nell'etere; coll'acido cloridrico, manda fumi, come l'ammoniaca.

I. Gr. 0,1435 diedero cm^3 10,27 di N a 27° ed a $723^{mm},96$.
II. Gr. 0,1476 diedero cm^3 11,00 di N a 25° ed a $728^{mm},25$.
III. Gr. 0,0973 diedero gr. 0,3042 di CO^2 e gr. 0,0973 di acqua.

	I.	II.	III.
C =	—	—	85,25
H =	—	—	6,60
N =	8,06	8,17	—

Questi numeri corrispondono bene alla formula della *metilfenilpiridina* per la quale si calcola:

C	=	85,21
H	=	6,51
N	=	8,28

Dalla ossidazione di questa sostanza col $KMnO^4$, apparirà chiaramente, perchè a questo alcaloide abbia dato la formula di costituzione già accennata.

La γ *metil α fenilpiridina* dà coll'acido cloridrico un sale molto solubile in acqua, la cui soluzione precipita coi reattivi generali degli alcaloidi:

1) Col *cloruro platinico* dà dei mamelloncini di colore giallo pallido;

2) Col *cloruro aurico* si ottengono dei prismi gialli;

3) Coll'*acido picrico* precipita in giallo intenso;

4) Col *cloruro mercurico* dà una polvere bianca cristallina;

5) Col *solfocianoplatinato di K* dà dei prismi di colore giallo a forma di felci;

6) Coll'*acido fosfomolibdico* abbondante precipitato giallo pallido abbastanza stabile;

7) Col *ioduro di potassio iodurato* intorbidamento bruno;

8) Col *reattivo di Nessler* precipitato bianco.

Dà inoltre precipitato anche in soluzione molto diluita col *reattivo di Marmè*, con quello di *Bouchardat*, ecc. ecc. Di questa base preparai ed analizzai il cloroplatinato ed il picrato.

Cloroplatinato $(C^{12}H^{11}N)^2H^2PtCl^6 + 2H^20$. Si ottiene aggiungendo ad una soluzione acquosa del cloridrato una soluzione concentrata di acido cloroplatinico. Si ha così un precipitato cristallino, che ricristallizzato dall'acqua dà dei prismi di colore ranciato. Questi aghi abbastanza solubili in acqua calda, sono quasi insolubili in acqua fredda. Fondono a 175°. Contengono 2 molecole di acqua di cristallizzazione, che perdono quando si riscalda il sale a 100°-110°.

I. Gr. 0,0776 di sostanza perdono a 100-110° gr. 0,0036 di acqua e dànno gr. 0,0192 di Pt.

II. Gr. 0,3048 di sostanza perdono gr. 0,0140 d'acqua e dànno gr. 0,0751 di platino.

	trovato		calcolato per $(C^{12}H^{11}N)^2H^2PtCl^6 + 2H^2O$
	I.	II.	
H^2O	4,60	4,60	4,50
Pt	24,74	24,64	24,70

Per il sale secco a 100-110° ho trovato nel 1° caso 25,94 % di platino, nel 2° caso 25,8, si calcola 25,97 %.

Picrato. $C^{12}H^{11}N . C^6H^3N^3O^7$. Al cloridrato sciolto in acqua aggiunsi una soluzione di acido picrico al 3 %.

Il sale così ottenuto ho ricristallizzato dall'acqua bollente, e si presenta in aghi leggeri di colore giallo, che fondono a 162°.

È solubile in acqua ed alcool a caldo, pochissimo a freddo. È anidro.

Gr. 0,1008 di sostanza secca a 100°, diedero cm^3 12,2 di N a 732,12^{mm} ed a 13°.

	trovato	calcolato per $C^{12}H^{11}N.C^6H^5N^3O^7$
N %	13,90	14,07

Acido α fenil γ piridincarbonico

$$C^6H^3N\begin{cases} COOH & \gamma \\ C^6H^5 & \alpha \end{cases}$$

Ho ossidato la metilfenilpiridina colla quantità calcolata di permanganato di potassio necessaria per ottenere la trasformazione del gruppo — CH^3 nel carbossilico — COOH.

L'ossidazione col permanganato avviene secondo la seguente equazione:

$$C^5H^3N\begin{cases} CH^3 \\ C^6H^5 \end{cases} + 2KMnO^4 = C^5H^3N\begin{cases} COOK \\ C^6H^5 \end{cases} + 2MnO^2 + KOH + H^2O$$

Quindi 1 molecola di piridina corrisponde a 2 molecole di permanganato di potassio, ossia a gr. 5 di base aggiunsi gr. 18,6 di $KMnO^4$ sciolti in 500 cm^3 di acqua, e riscaldai a b. m. sino a che l'odore piridico fosse completamente scomparso, e che la soluzione diventasse quasi incolora. La finii di decolorare con un poco di alcool ed ebbi così un liquido alcalino torbido, che conteneva in sospensione il biossido di manganese.

Separai il precipitato per filtrazione e la soluzione limpida ed incolora neutralizzai con acido cloridrico; poi evaporai a forte concentrazione a bagno maria ed a bassa temperatura. Il liquido concentrato acidulai con acido cloridrico od acido acetico, ed allora si depose una sostanza bianca leggera costituita dall'*acido fenilpiridincarbonico.*

L'acido acetico deve preferirsi al cloridrico, perchè il precipitato, che si forma, è solubile in un piccolo eccesso di acido cloridrico.

Raccolta questa sostanza la cristallizzai dall'alcool al 90 % ed ottenni dei bellissimi aghi setacei, leggeri, anidri, bianchi fusibili a 271°.

Gr. 0,0776 diedero gr. 0,2072 di CO^2 e gr. 0,0320 di acqua.

	trovato	calcolato per $C^{12}H^9NO^2$
C =	72,81	72,36
H =	4,58	4,52

È difficilmente solubile in acqua fredda, poco nella calda, solubile in alcool concentrato caldo, meno nell'alcool freddo, insolubile in etere.

Reagisce monobasico colla fenolftaleina:

Gr. 0,1192 di acido richiesero gr. 0,02412 di NaOH per essere neutralizzati.

	trovato	calcolato per una molecola
NaOH	20,23	20,10

Quando venga scaldato con precauzione in un tubetto da saggio, sublima in belle lamine bianche, brillanti, iridescenti.

La soluzione del suo sale di ammonio dà le seguenti reazioni coi diversi sali metallici:

Col *cloruro di bario* dà precipitato bianco, che è insolubile in acido acetico;

Col *cloruro ferrico* precipitato giallo scuro;

Col *nitrato di cobalto* precipita in bianco roseo;

Coll'*acetato di rame* dà cristallini di colore azzurro;

Col *nitrato d'argento* precipita abbondantemente, ed il sale di argento insolubile si altera per riscaldamento;

Col *solfato ferroso* nè il sale d'ammonio, nè l'acido libero non danno alcuna colorazione.

Già questa reazione negativa sarebbe sufficiente per dimostrare, che il carbossile in questo acido non è in posizione α, poichè si sa, che tutti gli acidi monopiridincarbonici, che contengono il gruppo —COOH in posizione α, si colorano in rosso col solfato ferroso (1), mentre non si verifica questa reazione quando il carbossile è in β o γ.

Però non volli fidarmi sopra questa sola reazione, che avrebbe potuto essere fallace, ma volli vedere se con facilità si poteva

(1) Skraup, " Monatsh. „ (1886, 211).

staccare il carbossile per semplice fusione dell'acido o per ebullizione prolungata di questo coll'acido acetico glaciale.

L'acido da me studiato resiste bene scaldato al disopra del suo punto di fusione, e del resto questa prova pare inutile quando si pensi, che scaldato sublima, senza alterarsi, in splendide lamelle bianche, iridescenti.

La seconda prova la eseguii trattando gr. 0,1 di acido fenilpiridincarbonico con 10 cm^3 di acido acetico glaciale; facendo bollire per tre ore e raccogliendo sopra un filtro la sostanza, che rimaneva indisciolta.

Questa sostanza identificai essere l'acido indecomposto; infatti quando fu secca fra carta, ne determinai il punto di fusione (171°) e dopo averla ricristallizzata feci un saggio acidimetrico:

Gr. 0,0312 richiesero cm^3 1,55 di soda $\frac{N}{10}$ per la totale neutralizzazione.

	trovato	calcolato per $C^{12}H^9NO^2$
NaOH %	19,87	20,10

L'acido acetico evaporato in massima parte non diede prova di contenere traccia di metilfenilpiridina.

Dunque l'ebullizione protratta per tre ore non aveva decomposto l'acido fenilpiridincarbonico.

La difficoltà, colla quale si stacca il carbossile dal nucleo piridinico dimostra, che l'acido da me studiato *non* contiene il carbossile in posizione *orto* per rispetto all'azoto.

Essendosi stabilito, che le metilfenilcianossipiridine, secondo il loro modo di formazione, devono contenere il gruppo metilico e fenilico rispettivamente in posizione α e γ oppure γ ed α, ne viene di conseguenza che l'acido piridinmonocarbonico, che da queste deriva, deve avere il carbossile in posizione α, oppure in γ.

Ma le esperienze, che ho accennato poc'anzi, mi dimostrano, che nell'acido da me studiato il carbossile non si trova in posizione orto per rispetto all'azoto, ragion vuole, che esso sia perciò in posizione *para* ossia in γ.

Però un'altra esperienza, sulla quale non si può più avere alcun dubbio, mi dimostra che mentre il gruppo —COOH è attaccato all'atomo di carbonio γ, il fenile d'altra parte si trova situato in posizione α.

Infatti distillando il sale sodico dell'acido, da me ottenuto, colla calce viva ebbi una base oleosa, che identificai come α*fenilpiridina*.

Distillazione dell'acido αfenilγpiridincarbonico con calce viva.

L'acido neutralizzato colla quantità calcolata di carbonato sodico, ho rimescolato con circa 5 volte il suo peso di calce viva; feci la distillazione in canna di vetro poco fusibile, che misi in communicazione con una boccia a due tubulature raffreddata con ghiaccio.

D'altra parte questo recipiente collettore stava in communicazione con un tubo ad U contenente delle perle di vetro bagnate di HCl diluito, per ritenere le piccole quantità di piridina, che potessero sfuggire.

La distillazione avvenne a pressione ridotta ed ottenni un *liquido* oleoso, incoloro, *insolubile* in acqua.

Che questa base oleosa sia veramente l'α*fenilpiridina* me lo dimostrano molti caratteri. E primieramente non può già confondersi colla γ*fenilpiridina* (1), che cristallizza in lamelle fusibili a 77° e che è solubile in acqua.

In secondo luogo il punto di fusione dei picrati delle due basi è così differente da non poter dare luogo ad alcun dubbio.

Il picrato della α*fenilpiridina* fonde a 169°-172°, quello della γ*fenilpiridina* fonde a 195°-196°.

Il picrato della base da me ottenuta, ricristallizzato dall'alcool fonde a 167°-168°.

Finalmente confrontando i cloroplatinati delle fenilpiridine si osserva, che mentre il cloro platinato dell'α*fenilpiridina* cristallizza con *2 molecole d'acqua* e fonde a 200°, come dimostrano i lavori di Skraup e Cobenzl (2), di Scholtz (3) e di Severini (4), il cloropatinato della γ *fenilpiridina* è perfettamente *anidro*.

Quello della base da me ottenuta fonde a 198°-199°, e sot-

(1) Hantzsch, " Ber. „, 17, 1518.
(2) Skraup e Cobenzl, " Monatsh. „, 1883, 436, 473.
(3) Scholtz, " Ber. „, XXVIII, 1726.
(4) Severini, " Gazz. chimica „, 1896. " Chem. Centrb. „, (1896), 2, 1107.

toposto all'analisi dimostra di contenere due molecole di acqua di cristallizzazione.

Gr. 0,1532 perdono a 100°-110° gr. 0,0072 di acqua e lasciano gr. 0,0390 di platino metallico.

		trovato	calcolato per $(C^{11}H^9N)^2H^2PtCl^6 + 2H^2O$
Pt	=	26,89	27,09
H^2O	=	4,70	4,76

Per tutte queste esperienze posso con sicurezza dire che l'acido da me studiato è l'*αfenilγpiridincarbonico*, che deriva dall'*αfenilγmetilpiridina* e che la sostanza madre da cui sono partito è l'*αfenilγmetilcianossipiridina*. Da ciò consegue ancora, che l'isomero di quest'ultima sostanza dovrà essere la *γfenilαmetilcianossipiridina*: così venni a conoscere la formula di costituzione di ambedue i prodotti, che ottenni dalla condensazione dell'etere cianacetico col benzoilacetone.

B) αMetilγfenilpiridina

$$C^5H^3N\begin{cases} CH^3 & (\gamma) \\ C^6H^5 & (\alpha) \end{cases}$$

La distillazione con polvere di zinco della *γfenilα'metilcianossipiridina* avvenne collo stesso apparecchio e nello stesso modo descritto per la *αfenilγmetilpiridina*. L'olio oleoso, che era distillato, non aveva fluorescenza verde ed il suo colore era meno spiccato.

Il liquido alcalino distillato, sciolsi nell'acido solforico diluito e la soluzione acida estrassi con etere, poi l'alcalizzai e nuovamente estrassi con etere, asportando così la base grezza, che distillata si presentò come un liquido oleoso, quasi incoloro. Questa base si solidificò per raffreddamento con acqua ghiaccia, in una massa bianca di cristalli fusibili ad una temperatura di poco superiore a quella ordinaria (16° circa).

È un alcaloide oleoso incoloro, leggermente giallo, non fluorescente, che si altera all'aria, il suo sapore bruciante ed il suo odore piridico sono meno pronunciati di quelli del suo isomero. Bolle a 298° (corr.). È più denso dell'acqua.

Il peso specifico a 15° è = a 1,015.

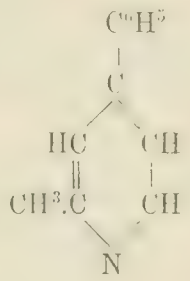
È insolubile in acqua, solubile invece in alcool, in etere. La soluzione alcoolica precipita per aggiunta di acqua. In presenza dell'acido cloridrico dà dei fumi bianchi.

I. Gr. 0,1592 di sostanza diedero cm^3 11 di N a 13°,5 ed a 728^{mm},89.

II. Gr. 0,1254 di sostanza diedero gr. 0,3914 di CO^2 e gr. 0,0728 di acqua.

	trovato		calcolato per $C^{12}H^{11}N$
	I.	II.	
C =	—	85,11	85,21
H =	—	6,45	6,51
N =	7,89	—	8,28

Avendo stabilito in modo indiscutibile la costituzione della piridina isomera a questa, debbo ora dare alla base analizzata la seguente struttura:



La soluzione cloridrica della *α metil γ fenilpiridina* precipita con tutti i reattivi generali degli alcaloidi:

Coll'*acido cloroplatinico* precipitato giallo ranciato;

Col *cloruro d'oro* dà un cloroaurato leggermente giallo;

Coll'*acido picrico* dà un abbondante precipitato giallo d'oro;

Coll'*acido fosfomolibdico* si ha un fosfomolibdato, quasi bianco, abbastanza stabile;

Col *cloruro mercurico* precipita in bianco;

Col *ioduro di potassio iodurato* in rosso bruno;

Col *tannico* dà abbondante precipitato bianco se la soluzione è neutra o leggermente alcalina per ammoniaca. Il precipitato non avviene se la soluzione è fortemente acida;

Coll'*acqua di bromo* precipita intensamente.

Si ottiene ancora precipitato col *reattivo di Marmè*, con

quello di *Bouchardat*, col *solfocianoplatinato di potassio*, col *cloruro mercurico*, ecc.

Cloroplatinato $(C^{12}H^{11}N)^2\ H^2PtCl^6$. Aggiungendo una soluzione di acido cloroplatinico al cloridrato della base si ottiene un intenso precipitato giallo ranciato, che ricristallizzato dall'acqua dà dei prismi aciculari, fusibili a 216°-217°, decomponendosi. Il cloroplatinato è poco solubile in acqua fredda, abbastanza nella calda, poco solubile nell'alcool a freddo. Contiene 4 molecole di acqua di cristallizzazione.

Gr. 0,1794 perdettero a 100°-110° gr. 0,0160 di acqua e diedero gr. 0,0422 di Pt metallico.

	trovato	calcolato per $(C^{12}H^{11}N)^2H^2PtCl^6+4H^2O$
H^2O	8,78	8,72
Pt	23,57	23,62

Picrato. Dalla soluzione cloridrica, per aggiunta di acido picrico, precipita intensamente il picrato in aghetti pesanti di colore giallo intenso, che sono molto solubili in acqua a caldo e poco a freddo. Questi cristalli anidri fondono a 185°-186°.

α Metil γ essilpiridina.

$$C^5H^3N\begin{cases}CH^3 & (\alpha)\\ C^6H^{13} & (\gamma)\end{cases}$$

Nella condensazione dell'acetilmetilessilchetone coll'etere cianacetico si formano due sostanze isomere, ossia due metilessilcianossipiridine; di queste, quella che si forma in maggiore quantità e che presenta un punto di fusione minore (108°), sottoposi alla distillazione con polvere di zinco.

La distillazione avvenne collo stesso apparecchio e nello stesso modo descritto per le metilfenilpiridine. Durante il riscaldamento della miscela della sostanza accennata colla polvere di zinco, si svolgevano degli idrocarburi a peso molecolare alto, che avevano odore di petrolio.

Avvenuta la distillazione ottenni un liquido denso, che sciolsi in acido solforico diluito. La soluzione acida, di colore rosso ranciato, estratta prima con etere e poi alcalinizzata, venne trattata nuovamente con etere, che asportò la base. Evaporata

la soluzione eterea ottenni un liquido oleoso, rosso bruno, che distillai, raccogliendo ciò che passava verso 230°-240°.

Questa porzione ho di nuovo distillato ed ottenni una base incolora con un forte odore sgradevole di piridina, bollente a 238°-240° (corr.); più leggera dell' acqua, peso spesifico a 15° = 0,936. Questa piridina è solubile in acqua, alcool, etere.

Gr. 0,1360 di sostanza diedero a 725,1^{mm} ed a 17° cm^3 9,9 di N.

	trovato	calcolato per $C^{12}H^{19}N$
N %	8,19	7,91

Questa base ha la proprietà caratteristica di dare dei precipitati oleosi coi principali reattivi precipitanti degli alcaloidi:

Coll'*acido cloroplatinico* precipitato giallo chiaro, che poi diventa rosso bruno con aspetto resinoso;

Coll'*acido cloroaurico* precipitato giallo, che si rapprende in gocciole oleose;

Coll'*acido picrico* goccie oleose gialle.

L'*acido fosfomolibdico* è l'unico dei reattivi provati, che dia un precipitato bianco, solido con questo alcaloide.

Col *ioduro di potassio iodurato* dà gocciole bruno-nere oleose.

Analoghi precipitati oleosi si ottengono col *tannino*, col *ioduro di Cd e potassio*, col *ioduro di mercurio e di potassio*.

Cloroplatinato $(C^{12}H^{19}N)^2H^2PtCl^6$. Trattando la soluzione cloridrica dell'α metil γ essilpiridina coll'acido cloroplatinico ottenni un precipitato intenso, giallo chiaro, che dopo alcune ore diventò più scuro e si rapprese in una massa resinosa.

Lasciato il precipitato a sè per alcuni giorni in riposo si trasformò in aghi gialli, duri, friabili. Raccolti questi cristalli li asciugai fra carta.

Essi sono solubili a caldo in acqua ed in alcool, insolubili a freddo. Non contengono acqua di cristallizzazione.

Gr. 0,2366 di sostanza secca a 100° lasciarono gr. 0,0594 di platino.

	trovato	calcolato per $(C^{12}H^{19}N)^2H^2PtCl^6$
Pt =	25,11	25,45

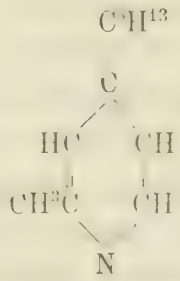
Ossidazione della α metil γ essilpiridina.

Scaldai questa base a bagno maria con una soluzione acquosa di permanganato di potassio. nella quantità necessaria per ossidare il gruppo metilico.

Il permanganato era diluito con 50 il suo peso di acqua distillata.

Dopo alcune ore scomparve l'odore piridico, allora scolorai il liquido con un poco di alcool e lo filtrai. Il filtrato neutralizzai con HNO^3 e trattai con acetato di rame; ottenni un precipitato verde, che raccolsi. Questo sale di rame in sospensione nell'acqua, ho sottoposto ad una corrente di H^2S. Filtrai ed evaporai il liquido a bagno maria a bassa temperatura. Ottenni un residuo a reazione acida assai spiccata, la cui soluzione si colorava *in rosso* intenso col *solfato ferroso.* L'acido fondeva verso 180° svolgendo al momento della sua fusione una grande quantità di bollicine gazzose e dando vapori alcalini.

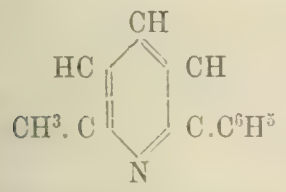
Per queste reazioni credo di avere avuto fra le mani l'acido *γ essil α piridincarbonico* e quindi probabilmente la base analizzata doveva essere la *γ essil α metilpiridina* dalla formula di struttura



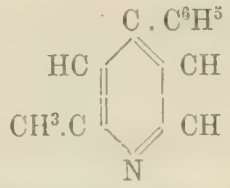
Del resto con maggiore probabilità credo di ricavare la sua formula di struttura, più che da queste reazioni qualitative, dalle strette analogie, che passano fra la metilessilcianossipiridina da cui sono partito e la corrispondente metilfenilcianossipiridina.

Mi rincresce, che l'esigua quantità di sostanza avuta fra le mani mi abbia impedito di poter rendere più complete e decisive le mie ricerche a questo riguardo.

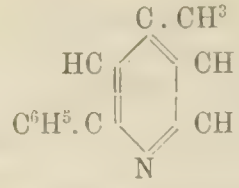
Da questi studii risultano ora conosciute tre fenilmetilpiridine:



α′METIL α FENILPIRIDINA



αMETIL γ FENILPIRIDINA



α FENIL γ METILPIRIDINA

In questa tabella riassumo i punti di ebullizione delle singole basi ed i punti di fusione dei loro picrati o cloroplatinati:

Base	p. Eb.	punto fusione picrato	punto fusione cloroplatinato
$C^5H^3N\langle^{C^6H^5\ (\alpha)}_{CH^3\ (\alpha')}$	280°-281°	135°	200°
$C^5H^3N\langle^{C^6H^5\ (\gamma)}_{CH^3\ (\alpha)}$	298°	185°-186°	216°-217°
$C^5H^3N\langle^{C^6H^5\ (\alpha)}_{CH^3\ (\gamma)}$	310°	162°	175°

Come si vede non esiste alcuna regolarità, nè alcuna analogia fra i punti di ebullizione di queste basi ed i punti di fusione dei relativi picrati e cloroplatinati. Trattandosi qui di sali abbastanza complessi è difficile di poter stabilire una regola, che possa servire di guida per ricerche analoghe. Il valore principale di questi dati è quello di caratterizzare le basi sulle quali ho sperimentato.

Noto finalmente, che il punto di ebullizione dell'*α metil γ essilpiridina* (238°-240°) è inferiore a quello della metilfenilpiridina corrispondente; analogamente dicasi per il punto di fusione dei suoi sali.

Laboratorio chim. farm. e toss.
R. Università Torino. Giugno 1905.

Contributo allo studio delle terminazioni nervose nei muscoli striati di " Ammocoetes branchialis ".

Nota del Socio ROMEO FUSARI.

(Con una Tavola).

La letteratura sul tema delle terminazioni nervose degli organi e specialmente sul tema delle terminazioni motrici è ormai ricchissima, ma nuove ricerche su questo campo di studi appaiono tutt'altro che oziose, atteso il gran numero di questioni, sia generali che speciali, le quali rimangono ancora insolute. L'interesse si è anzi ravvivato negli ultimi tempi, specialmente dopo che furono noti i sorprendenti risultati ottenuti da Apathy colle indagini sul sistema nervoso dei lumbricoidi e degli irudinei, i quali risultati fecero nascere l'idea, difesa poi specialmente da Bethe, che non solo negli invertebrati, ma anche nei vertebrati non esistano terminazioni nervose libere.

Io, che da qualche anno mi occupo dello studio del sistema nervoso periferico di *Ammocoetes branchialis* con ricerche microscopiche mediante metodi diversi (metodo rapido di Golgi, metodo al cloruro d'oro di Fischer modificato da Ruffini, metodo di Ramon y Cajal col nitrato d'argento ed idrochinone), ho ottenuto circa alle terminazioni nervose motrici una serie di reperti, che credo non privi di importanza e che ad ogni modo non vennero fin qui ricordati da altri. Di essi faccio oggetto una breve nota che ho l'onore di presentare all'Accademia. Dirò dapprima delle terminazioni motrici nei miomeri, descriverò poscia il modo di terminare delle fibre nervose sulle fibre muscolari delle labbra e su altre fibre striate della muscolatura viscerale.

Come è noto la muscolatura del tronco dell'*Ammocoetes* non possiede vere fibre muscolari. I miomeri constano di formazioni nastriformi che vennero da Stannius indicate col nome di *cassette muscolari (Muskelkästen)* e da Maurer chiamate *lamine muscolari (Muskelbänder)*. Queste cassette o lamine, larghe, molto

brevi e sopratutto sottilissime, si estendono da un miosetto all'altro; stanno in generale disposte nel piano orizzontale ed in modo da presentare una estremità anteriore ed una estremità posteriore corrispondenti ad un miosetto, un margine interno o mediale rivolto, a seconda dell'altezza, verso il tubo midollare, verso la corda o verso la cavità splancnica, ed un margine esterno o laterale corrispondente alla cute.

Ciascuna lamina muscolare è delimitata da una fina membrana connettiva nucleata; nell'interno della lamina le fibrille primitive, ordinate a foglietti, formano cinque piani che un sarcoplasma finissimamente granuloso e provveduto di nuclei separa l'uno dall'altro.

Le notizie che si hanno circa al modo di comportarsi delle fibre nervose rispetto agli indicati elementi muscolari si riducono a ben poco. Retzius nel 1892 disse che potè osservare solo occasionalmente le terminazioni motrici del *Petromyzon*; notò che queste si presentano secondo un tipo molto semplice: le fibre nervose si ramificano scarsamente, e qua e là le diramazioni terminali appaiono provvedute di piccole placchette. Quasi con identiche espressioni ho indicate io stesso le terminazioni nervose nei miomeri dell'*Ammocoetes* nel 1901, nell'occasione di una presentazione di preparati alla riunione della Società anatomica francese di Lyon.

Ora io posso invece affermare che la terminazione nervosa motrice nei miomeri è ben lungi dall'essere così semplice.

I nervi motori dell'*Ammocoetes* si possono facilmente distinguere dai nervi di senso. I loro tronchi partono direttamente dalle radici ventrali spinali ed inoltre sono esclusivamente costituiti da fibre nervose, mentre i tronchi dei nervi di senso derivano dalle radici dorsali e portano quasi sempre grandi cellule gangliari scaglionate sul loro decorso. I nervi sensitivi nell'allontanarsi dalla midolla spinale vanno a mettersi direttamente in rapporto coi miocommi; i nervi motori invece rasentano il margine interno dei miomeri e nel decorso inviano continuamente rami alle lamine muscolari. Branche degli stessi nervi percorrono successivamente i miocommi e da esse branche si staccano poi rami, i quali, seguendo i setti connettivali interposti alle cassette muscolari, finiscono per distribuirsi ancora a queste formazioni.

Julin nel suo studio sul sistema nervoso dell'*Ammocoetes* asserisce che i miomeri ricevono rami anche dai nervi originati dalle radici dorsali; io per mia parte non ho potuto stabilire tal fatto, nè so nemmeno spiegarmi come Julin abbia potuto fare questa osservazione colle comuni colorazioni: pure non nego la possibilità che qualche fibra sensitiva parta dai fasci decorrenti nei miocommi per unirsi alle fibre motrici dei miomeri.

Checchè ne sia, le fibre nervose motrici, isolate od a fascetti, avanti di raggiungere le cassette muscolari si allacciano variamente fra di loro formando una specie di plesso. Partendo da questo plesso esse perdono la loro guaina e, decorrendo per lo più isolatamente e dividendosi ancora più volte, passano rasente alla superficie della formazione muscolare, e su tutta la periferia di questa costituiscono un finissimo plesso terminale.

Considerando questo plesso terminale nelle sue particolarità, comincierò col dire che esso è composto di fibre di diametro variabile, la maggior parte però finissime e decorrenti per lo più obbliquamente alla direzione delle fibrille muscolari e quasi parallele fra di loro. Non è raro il caso di osservare le fibre anche le più fine passare da una cassetta a quella vicina; è meno frequente invece il trovare anastomosi fra le dette fibre nervose in modo da formare una rete (fig. 6): ciò si verifica specialmente verso la estremità interna delle cassette muscolari.

Nei preparati coll'oro le fibre nervose del plesso, anche le più grosse, si presentano sempre o quasi sempre fortemente varicose, e spesso in corrispondenza alle nodosità si possono osservare barboline o filuzzi terminanti con una pallina. — Al margine interno delle cassette muscolari, e precisamente colà dove le fibre nervose si mettono in rapporto con questi elementi, si rileva in detti preparati un'altra particolarità. Quivi le fibre nervose si dividono più volte. Dei rami risultanti da tale divisione alcuni sono finissimi, leggermente varicosi e sembrano terminare in posto: altri invece appaiono più grossi della branca stessa da cui derivano: altri infine si caratterizzano specialmente per grosse e fitte varicosità, che si seguono ininterrottamente le une alle altre: tali rami portano sul decorso od alla apparente terminazione delle espansioni a guisa di placche circolari od ovoidali, che ricordano nell'aspetto le piastre terminali dei muscoli dei vertebrati superiori (v. fig. 1, 2, 3, 4). Le placche misurano 8-10 μ

secondo il diametro minore e 10-12 μ secondo il diametro maggiore; in alcuni casi però sono più strette ed allungate a clava (fig. 3). Talora risultano tinte uniformemente (fig. 2), talora sembrano essere costituite da un fitto accumulo di corpicciattoli irregolari, fortemente impregnati dall'oro, ma non bene delimitati (fig. 3 e 4). Queste formazioni sono disposte a gruppo, cioè molto vicine l'una all'altra, in numero variabile da tre a sei e più per ogni lamina muscolare ed occupano un piccolo campo che è alquanto più colorato del resto della lamina stessa, perchè ne forma il fondo uno straterello di sostanza finamente granulosa, non ben limitata alla periferia e cosparsa qua e là da gruppi irregolari di grossi granuli.

In alcuni casi le placchette suddescritte non appaiono, ed allora questa parte dell'apparecchio nervoso terminale, composta di fibre nervose ramificate, assomiglia perfettamente alla terminazione da Ceccherelli descritta alla estremità delle fibre dei muscoli dorsali degli anfibi anuri e da questo osservatore considerata come un apparecchio sensoriale.

Se su sezioni che colpiscono trasversalmente le lamine muscolari si esamina la parte dell'apparecchio terminale presentante le placchette, si rileva che queste, colla sostanza granulosa in cui sono immerse, stanno innicchiate in una depressione della sostanza contrattile e che, rispetto alle placchette, le fibre nervose, almeno le più grosse, appaiono situate più superficialmente.

Sugli altri punti della periferia delle cassette muscolari i filamenti nervosi del plesso terminale presentano questo di speciale che in generale hanno un decorso lunghissimo e sono scarsamente ramificati. Non mancano terminazioni speciali: ora sono semplici rigonfiamenti a bastoncino od a placchetta, ora sono a forma di trifoglio o di fiocchetti e ricordano allora le terminazioni caratteristiche dei muscoli delle labbra, che io descriverò più avanti. Questo plesso terminale si appoggia alla membrana connettiva limitante la lamina muscolare, ed ho osservato che quando la detta membrana, per maltrattamenti subiti nella preparazione, resta isolata, si vedono su di essa in modo anche più netto le fibre e le fibrille nervose ed anche le placchette.

Esaminando le sezioni impregnate d'argento col nuovo metodo di Ramon y Cajal, si nota anzi tutto che le fibre e le fibrille nervose appaiono quasi sempre liscie, si rileva inoltre che

esistono sole terminazioni libere, senza rigonfiamenti od altro. Al margine interno delle cassette muscolari mancano quei gruppi di placchette che si rendono facilmente visibili col cloruro di oro; si osserva solo qualche filamento nervoso che termina liberamente in mezzo ad una sostanza cosparsa di nuclei di varia forma e disseminata di granulazioni grosse o minute ma sempre fortemente tinte. Le altre fibre nervose passano su questa sostanza per diramarsi poi sulle altre parti della lamina stessa.

Collo stesso metodo di Ramon y Cajal sulle membrane connettivali, che servono ad isolare l'una dall'altra le lamine muscolari, si rende evidente un'altra particolarità istologica. Le cellule proprie di questa membrana in alcuni casi vengono colorate in bruno ed allora risulta chiaramente visibile la loro forma e la loro disposizione. Le cellule sono allungatissime ed estremamente sottili, tanto che piuttosto che cellule hanno tutto l'aspetto di fibre connettive; anche il nucleo è molto stretto e lungo ed in corrispondenza al nucleo ciascuna fibra appare leggermente rigonfiata. Inoltre le dette fibre sono allineate in fitta serie, parallelamente le une alle altre a distanze molto regolari, e la direzione di esse è tale che incrociano sempre sotto un angolo acuto le strie trasversali degli elementi muscolari striati con cui sono in rapporto. Queste cellule possono emettere prolungamenti collaterali o biforcarsi su un certo punto del loro tragitto.

Quando la reazione colora queste cellule in bruno, ed in nero i filamenti nervosi, si può allora rilevare che le fibrille nervose del plesso decorrono su queste cellule seguendone per lunghi tratti la direzione e che, quando se ne allontanano, sono in molti casi seguite da una specie di guaina protoplasmatica tenuissima formatale dalle cellule stesse. Le fibrille nervose più fine posseggono quasi sempre questa guaina e, quando esse si dividono, la guaina pure si divide distendendosi dapprima a placca triangolare, la quale eventualmente può contenere un nucleo. In alcuni casi ho osservato che quando le fibrille nervose terminano o sembrano terminare, la guaina protoplasmatica si continua ancora per un certo tratto, facendosi anche più tenue, ma presentando in pari tempo grossi granuli colorati e talora anche in un nucleo (fig. 5).

Verosimilmente la guaina protoplasmatica col metodo del-

l'oro ed in taluni casi anche col metodo di Golgi resta colorata insieme alla fibrilla nervosa e, alterata in pari tempo dai reattivi, produce allora le varicosità, le barboline, i filuzzi ed anche le placchette, le mazze ed i fiocchetti terminali, che si osservano nei preparati ottenuti con tali metodi di indagine.

Dirò infine che l'apparato motore non si limita al plesso terminale su cui mi sono trattenuto fino ad ora; esiste un rapporto molto più intimo fra l'apparato nervoso motore e la lamina muscolare, vi ha cioè una penetrazione di fibrille nervose nell'interno stesso della lamina. Queste fibrille non sono molto numerose; esse partono dal plesso terminale e si addentrano più o meno profondamente nella formazione muscolare, dove possono diramarsi (fig. 7). In taluni casi sembrano terminare liberamente, in altri presentano piccoli fiocchetti terminali (preparati coll'oro).

Riassumendo risulta dalle mie osservazioni che la terminazione nervosa motrice nelle lamine muscolari dell'*Ammocoetes* consta di tre parti diverse: 1° Vi ha un plesso avvolgente tutta la periferia della lamina muscolare; 2° In corrispondenza al margine mediale della cassetta vi sono fibrille nervose, che si mettono in rapporto con formazioni speciali simulanti le piastre motrici delle fibre muscolari striate; 3° Vi sono infine filamenti nervosi che da tutte le parti del plesso penetrano fra le fibrille contrattili della cassetta muscolare.

E qui viene spontaneo un confronto. È noto che Apathy nello studio dei muscoli lisci di *Pontobdella* col comune metodo dell'oro trovò che la fibra nervosa entrando in contatto colla fibra muscolare pareva terminasse in una specie di rigonfiamento longitudinale *(longitudinale Leiste)*, costituito da una sostanza ora finamente granulosa, ora omogenea; è anche noto che il medesimo autore, mediante il trattamento dei pezzi col suo speciale metodo di impregnazione aurica, osservò invece che la fibra nervosa primitiva non si arrestava al punto di entrata nell'elemento muscolare, ma si prolungava nel suo interno dividendovisi variamente. Apathy avrebbe veduto anche che alcune neurofibrille uscivano da una fibra muscolare per penetrare in un'altra, ma non notò mai anastomosi fra le fibrille primitive. Abbiamo adunque nei muscoli di *Pontobdella* una pseudoterminazione manifestantesi coi comuni metodi dell'oro, come appunto si verifica nelle lamine muscolari di *Ammocoetes* (e dirò a tal proposito che la fig. 2 della

tav. 22, in cui venne da Apathy rappresentata la sua *longitudinale Leiste*, ricorda molto bene il gruppo delle pseudoplacchette muscolari veduto a piccolo ingrandimento); nelle due forme abbiamo fibrille nell'interno dell'elemento muscolare e fibre che passano da uno all'altro elemento. Apathy dai reperti avuti crede giustificata la sua ipotesi di una grata nervosa elementare i cui filamenti compenetrerebbero gli elementi tutti del corpo e fra questi anche le cellule muscolari; ora in base alla comparazione da noi fatta si potrebbe pensare che la stessa ipotesi valga anche per i miomeri di *Ammocoetes*, cioè per un rappresentante del tipo dei vertebrati.

Prima di rispondere a tal quesito dobbiamo farci una domanda: sono le lamine muscolari di *Ammocoetes* da considerarsi quali unità istologiche, come lo sono ad esempio le fibre muscolari di *Pontobdella* o, per lo meno, come le fibre muscolari striate? perchè solo dopo una risposta affermativa a questa domanda l'ipotesi di Apathy può essere presa in considerazione anche riguardo ai vertebrati. Ebbene, basta confrontare le lamine muscolari di *Ammocoetes* con quelle dello stesso animale, ma allo stato adulto, cioè con quelle di *Petromyzon*, per concludere che queste formazioni non sono elementi semplici. Nel *Petromyzon* infatti troviamo che il foglietto superficiale di ciascuna cassa muscolare non è più costituito da semplici fibrille, ma da vere fibre muscolari, aventi un sarcolemma proprio e separate le une dalle altre per opera di tessuto connettivo. Non si conosce fino ad ora come si comportino i nervi nelle cassette muscolari di *Petromyzon*: ma dacchè in queste formazioni si trovano fibre muscolari ben delimitate e separate dalle fibre vicine da tessuto connettivo, è lecito il supporre che ciascuna di tali fibre possegga una terminazione motrice propria. Adunque il fatto da me rilevato della penetrazione di fibrille può essere molto semplicemente spiegato; la cassetta o lamina muscolare di *Ammocoetes* non è un elemento semplice, od almeno esso è destinato ad essere successivamente scomposto in un certo numero di altre unità istologiche, ognuna delle quali deve essere provveduta di un apparato nervoso terminale; perciò la penetrazione delle fibrille nella cassetta può considerarsi in relazione alla detta scomposizione, in altre parole essa potrebbe essere un semplice fenomeno prodromico della scomposizione stessa.

Secondo i risultati delle mie osservazioni anche le pseudopiastre terminali, che si notano al margine interno della lamina muscolare, sono forse in rapporto colla condizione di sviluppo della lamina stessa. Su preparati ottenuti da pezzi fissati in Zenker e colorati col carminio o coll'ematossilina si rileva al posto delle pseudoplacchette un gruppo di nuclei circondati da una sostanza protoplasmatica; in alcuni casi vi si osservano vere cellule avvicinate fra di loro a contorni ben distinti e coll'apparenza di cellule epiteliali (fig. 13). Molto verosimilmente su questo margine della lamina muscolare si trova il materiale per l'ulteriore accrescimento della lamina stessa, il qual materiale sarebbe appunto rappresentato dalle nominate cellule e dagli accumuli di nuclei col relativo protoplasma. Il Maurer, che si è occupato dello sviluppo delle lamine muscolari, non parla di tale disposizione; essa però è chiaramente accennata in una delle sue figure (fig. 7, tav. 14).

Con le date spiegazioni io ho senz'altro risposto al quesito propostomi: la somiglianza fra l'apparato nervoso motore di *Pontobdella* e quello di *Ammocoetes* è più apparente che reale ed il fatto della penetrazione di fibrille nervose nelle cassette muscolari non può essere portato a sostegno della teoria di Apathy riguardo ai vertebrati.

Molto diversa è la terminazione nervosa se la si studia nei muscoli delle labbra e nei muscoli striati annessi al sistema viscerale (esofago, branchie, ecc.) dello stesso *Ammocoetes*, dove si trovano fibre muscolari di struttura uguale a quelle dei vertebrati superiori. Come ho già fatto osservare nella mia citata nota, le terminazioni motrici sulle dette fibre ricordano quelle studiate da Retzius nella *Mixine glutinosa*: vi si trovano piastre o fiocchetti o grappoli terminali più o meno complessi, di cui alcuni tipi ho riportato nelle figure 10, 11, 12. Ciò che importa qui di aggiungere è che di solito da un primo fiocchetto partono uno o più filamenti finissimi, i quali dopo un decorso più o meno lungo si gettano sulla medesima o su un'altra fibra muscolare per costituirvi una seconda espansione terminale in forma di fiocchetto o di una semplice placchetta (fig. 10, 12). Non è raro il caso che la seconda terminazione sia il punto di partenza di altri filamenti, che costituiscono nuovi fiocchetti o

nuove placchette su altre fibre muscolari (fig. 11). In qualche preparato ho veduto anche che alla costituzione di tali terminazioni concorrono filamenti venuti da due diversi fiocchetti primarii, cosicchè vi ha quivi un congiungimento a rete di filamenti di diversa origine. Reti nervose molto più strette si possono osservare anche su un'area abbastanza ristretta di una sola fibra muscolare. Nelle figure 8ª e 9ª sono rappresentati segmenti di fibre muscolari del labbro. Quivi la terminazione motrice appare costituita da più fibrille (3 nella fig. 9ª, 6 nella fig. 8ª) che vi arrivano formando un piccolo fascio. Giunte sull'elemento muscolare, le fibre nervose si ramificano, ed ogni ramo porta fiocchetti terminali, ma e i rami ed i fiocchetti si congiungono fra loro molteplici volte, così che si costituisce una stretta rete. Dalla parte periferica di questo apparato terminale originano poi altre fibrille che si portano in altri elementi muscolari per costituirvi nuove terminazioni.

Il numero dei fiocchetti in una stessa fibra muscolare mi è parso notevole, ma non ho potuto determinarlo, sia perchè il decorso di queste fibre difficilmente cade tutto nel piano della sezione, sia perchè l'impregnazione metallica non interessa ugualmente tutta una sezione: è certo che in molti punti i fiocchetti sono ravvicinati l'uno all'altro (fig. 12ª, *a*, *b*) ed appaiono costituiti da fibre provenienti da fascetti nervosi diversi, oppure anche da uno stesso fascetto. A piccolo ingrandimento spesse volte si ha l'impressione di una fitta rete nervosa, le cui maglie sono occupate dalle fibre muscolari striate; perchè è da aggiungere che anche i fascetti nervosi intramuscolari più considerevoli non decorrono mai isolatamente, ma stanno fra di loro in frequenti rapporti anastomotici.

Questi risultati sulle fibre muscolari striate furono ottenuti col metodo di Golgi e coll'impregnazione d'oro: il metodo di Ramon y Cajal non mi rispose fino ad ora in modo soddisfacente.

È noto che da Bremer, da Ruffini, da Perroncito, da Crevatin e da altri vennero nelle terminazioni motrici dei batraci, dei rettili e dei mammiferi trovate alcune particolarità, le quali ricordano quelle ora da me descritte nei muscoli a fibre striate di *Ammocoetes*. Si osservò cioè che in molti casi dalla arborizzazione motrice terminale parte un filamento, il quale talora va su un'altra fibra muscolare o su un fuso muscolare per formarvi

un secondo apparato terminale. Questo filamento da Apathy, che commentò il lavoro di Ruffini, venne considerato come una prova della esistenza della grata terminale anche nei vertebrati; esso rappresenterebbe la porzione più grossolana di questa. In base a tali vedute Ruffini chiamò simili filamenti col nome di *fibrille ultraterminali*, mentre d'altra parte Perroncito e Crevatin attribuirono ad esse il valore di semplici rami collaterali della fibra costituente la prima terminazione. Io pure nella mia già citata nota ammisi questa ultima interpretazione, la quale era in perfetta armonia colle conoscenze che si avevano allora delle terminazioni motrici dei vertebrati e non pregiudicava la questione. Anche oggidì mi sembra prematuro fare una comparazione fra queste fibrille e l'apparato terminale dei muscoli degli invertebrati, perchè fra le due maniere di terminazione vi ha ancora una distanza troppo grande. Converrà insistere ancora nelle ricerche; per ora dobbiamo limitarci a dire che fra gli elementi muscolari di *Ammocoetes*, appartengano questi al tronco od alla muscolatura viscerale, esiste una rete nervosa, e che forse le così dette fibre ultraterminali trovate negli altri vertebrati, in parte almeno, corrispondono ad elementi di questa rete.

BIBLIOGRAFIA

S. Apathy. *Das leitende Element des Nervensystems und seine topographischen Beziehungen zu den Zellen.* " Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel „, Bd. 12, 1897, S. 495-748, Tav. 23-32.

L. Bremer. *Ueber die Endigungen der markhaltigen und marklosen Nerven im quergestreiften Muskel,* " Arch. f. mikr. Anat. „, Bd. 21, 1882.

G. Ceccherelli. *Sulle piastre motrici e sulle fibrille ultraterminali nei muscoli della lingua di rana,* " Monitore zoologico italiano „, anno XIII, 1902.

A. Crevatin. *Sulle fibrille nervose ultraterminali,* " Rendiconto delle sessioni della R. Accad. delle Scienze dell'Istit. di Bologna „, anno 1900-1901.

R. Fusari. *Présentation de préparations microscopiques démonstrant les terminaisons nerveuses dans les muscles striés; dans l'épiderme et dans l'épithelium de la cavité buccale de l'* "*Ammocoetes branchialis* „, " Comptes rendus de l'Association des Anatomistes „, 3e session, Lyon, 1901.

H. Grenacher *Beiträge zur näheren Kenntniss der Muskulatur der Cyclostomen und Leptocardie,* " Zeitschrift f. Wissensch. Zoologie „, Bd. XVII, 1867 (citato da F. Maurer).

Ch. Julin. *Recherches sur l'apparat vasculaire et le système nerveux périphérique de l' " Ammocoetes „ (Petromyzon Planeri)*, " Archives de Biologie „, tome VII, 1887.

F. Maurer. *Die Elemente der Rumpfmuskulatur bei Cyclostomen und höheren Wirbelthieren*, " Morphologisches Jahrbuch „, Bd. XXI, 1894.

G. Retzius. *Zur Kenntniss der motorischen Nervenendigungen*, " Biol. Unters. „, N. F., Bd. III, 1892, pag. 41.

A. Ruffini. *Sulle fibrille nervose ultraterminali nelle piastre motrici dell'uomo*, " Riv. di Patologia nervosa e mentale „, vol. 5°, fasc. 10, 1900.

A. Perroncito. *Sulla terminazione dei nervi nelle fibre muscolari striate*, " Rend. dell'Ist. lomb. di scienze e lett. „, serie II, vol. XXXIV, 1901; " Bollett. della Società medico-chirurgica di Pavia „, 1° febbr. 1901.

H. Stannius. *Ueber den Bau der Muskeln bei " Petromyzon fluviatilis „*, " Gottinger Nachrichten „, 1851 (citato da F. Maurer).

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Pseudo-piastrine terminali sul margine mediale di tre cassette muscolari. Sezione secondo il piano del miotomo. Cloruro d'oro (Zeiss obb. apocr. 8, comp. 8).

Fig. 2. — Pseudopiastrine al margine mediale di tre cassette muscolari. Sezione secondo il piano ventrale. Cloruro d'oro (Zeiss obb. apocr. 8, oc. compens. 8).

Fig. 3. — Pseudopiastrine a clava. Sezione nel piano ventrale. Cloruro d'oro (Koristka obb. semiapocr. 2 mm., oc. compens. 4).

Fig. 4. — Pseudopiastrine del margine interno di due lamine muscolari. Sezione nel piano ventrale. Impregnazione aurica (Koristka obb. immers. $^1/_{15}$, oc. compens. 4).

Fig. 5. — Terminazione di una fibrilla nervosa seguita da un rigonfiamento nucleato della sua guaina protoplasmatica. Metodo di R. y Cajal (Zeiss obb. apocr. 2 mm., oc. comp. 8).

Fig. 6. — Plesso terminale di una lamina muscolare in un punto presentante delle anastomosi. Cloruro d'oro (Zeiss obb. apocr. 8, oc. comp. 8).

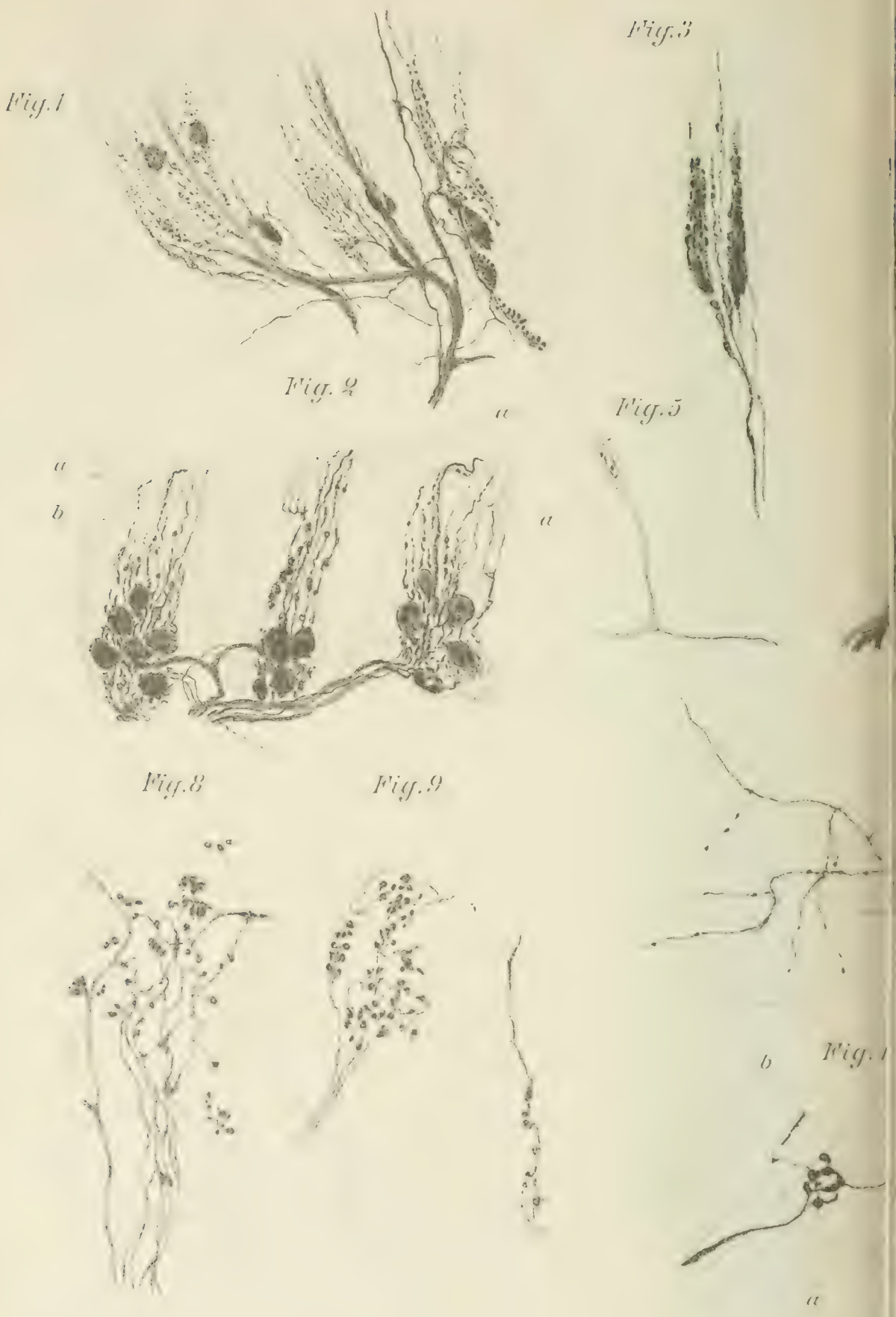
Fig. 7. — Sezione trasversa di una lamina muscolare: *a*, suo margine interno costeggiato da una fibra nervosa; *b*, *b*, superficie superiore ed inferiore della lamina colla relativa membrana connettiva delimitante e coi filamenti nervosi del plesso terminale; *c*, *c*, fibrille nervose interne. Cloruro d'oro (Zeiss ob. apocrom. 4, oc. compens. 4).

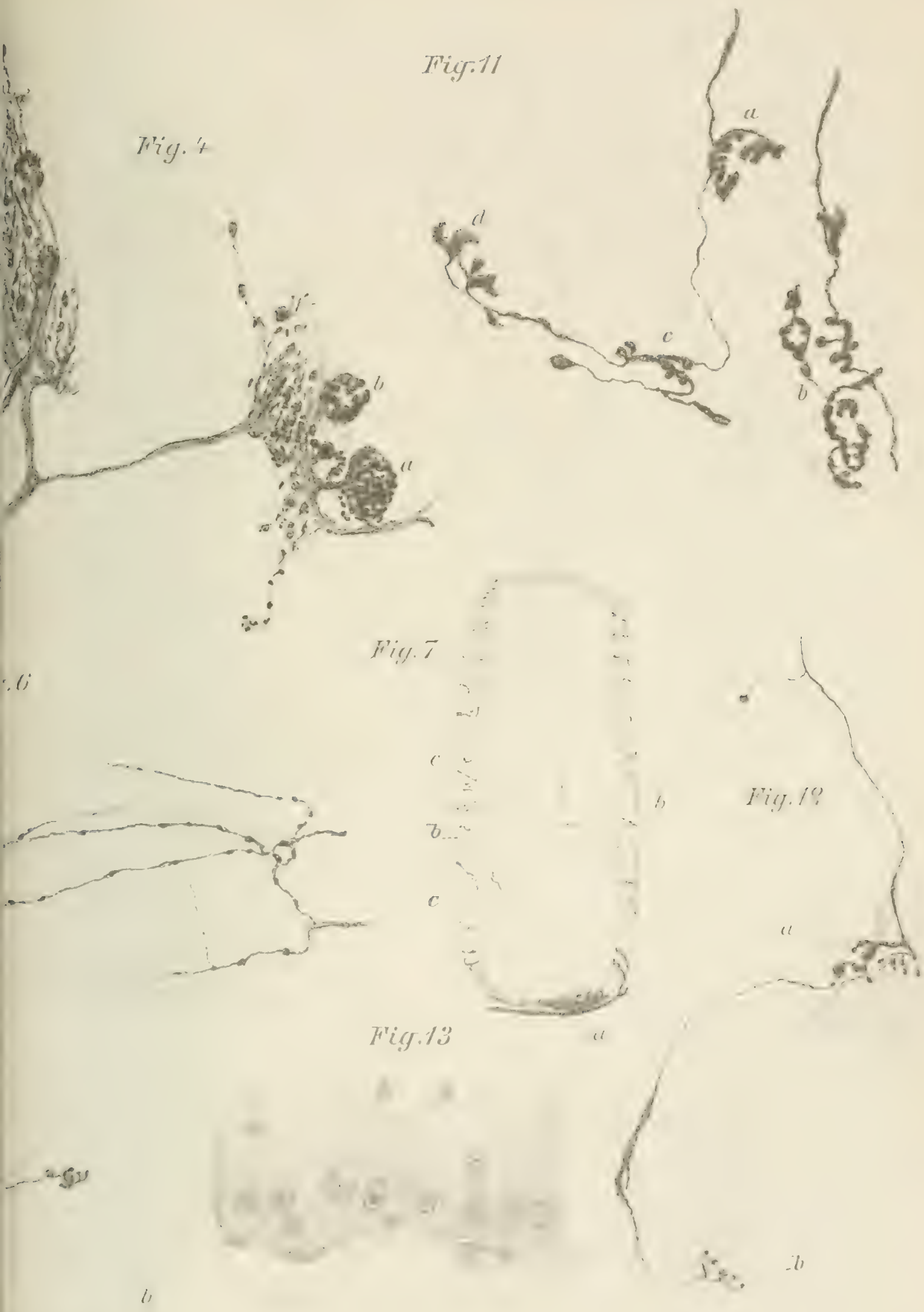
Figg. 8 e 9. — Plesso e grappoli terminali su fibre muscolari delle labbra. Cloruro d'oro (Koristka obb. immersione $^1/_{15}$, oc. comp. 8).

Figg. 10, 11, 12. — Terminazioni nervose motrici nei muscoli delle labbra con terminazioni secondarie. Metodo di Golgi (Zeiss obb. apocr. 8, oc. compens. 4).

Fig. 13. — Margine interno di due lamine muscolari con cellule e nuclei di accrescimento. Colorazione col carminio (Zeiss obb. apocr. 2 mm., oc. compens. 8).

FUSARI - Terminazioni nervose ecc.





Lussolia, Torino

Ricerche sulla variazione dell' " Hydrophilus piceus " Linn.

Parte Seconda.

Nota di UMBERTO PERAZZO.

Ritengo utile far seguire alla nota sullo stesso argomento, che ebbe l'onore di esser accolta per gli *Atti* dall'Accademia di Torino, nella Seduta del 21 maggio scorso, alcune tavole complementari. Le prime (pag. 4-11) contengono i principali caratteri riguardanti la variazione assoluta e relativa nelle serie considerate (classi estreme, medie; coefficienti di variabilità assoluta e relativa); le rimanenti la disposizione in classi delle varianti nelle diverse serie.

Variazio

Parti del dermascheletro sottoposte a misura	Termini estremi della variazione assoluta (in millimetri)			
	Torino		Nizza Monferrat	
	♂	♀	♂	♀
Statura .	46,55-54,6	46,7-55,9	47-54,25	49,45-
Capo.				
1. Diam. antero-post. del fronte	3-3,8	3,15-3,85	3,15-3,75	3,55-
2. Id. del capo (parte dors.) sino al marg. ant. del peristoma	7,7-9,2	8,05-9,5	7,8-9	8,25-
3. Id. del labbro superiore . .	1,25-1,65	1,35-1,7	1,3-1,55	1,45-
4. Largh. mass. del labbro sup.	4,75-5,7	4,95-5,9	4,8-5,7	5-5,
5. Id. della parte ant. del capo (anteriore agli occhi) . .	6,55-8,15	7,1-8,3	6,85-8	7-8,
6. Dist. fra le superficie laterali esterne dei due occhi . .	9,25-11,15	9,75-11,3	9,4-10,9	9,75-1
7. Diam. antero-post. del capo (parte ventr.) sino al marg. anter. del labbro inferiore	6,1-7,2	6,25-7,55	6,2-7,2	6,55-7
8. Id. del labbro inferiore . .	1,7-2,05	1,8-2,1	1,7-2	1,8-2,
9. Largh. del labbro inferiore	3,05-3,6	3,25-3,9	3,05-3,7	3,2-3,
Protorace.				
10. Diam. antero-post. del protorace (pronoto)	6,5-7,8	6,55-7,8	6,65-7,8	6,7-7,
11. Largh. massima del protorace (pronoto)	15,1-18	15,2-18,1	15,05-17,5	15,85-1
Scudetto.				
12. Diam. antero-posteriore dello scudetto	4,5-5,7	4,55-5,7	4,7-5,75	4,75-5,
13. Largh. dello scud. (alla base)	5-6,1	5,05-6,1	5,05-5,95	5,3-6,
Sterno.				
14. Lungh. dell'apof. mesostern.	8,5-10,65	8,5-10,65	9-10,6	9,05-10
15. Lungh. tot. dell'apofisi stern.	20,25-25,15	20,3-25,1	20,45-24,8	21,5-24
16. Lungh. min. del metasterno	5,25-6,4	5,35-6,5	5,15-6,2	5,5-6,7
17. Id. del mesosterno . . .	4,25-5,15	4,3-5,2	4,3-5,1	4,4-5,2
18. Lungh. minima dello sterno	12-14,65	12,25-14,7	12,05-14,35	12,55-15
19. Id. massima dell'episterno .	5,9-7,25	6,2-7,55	6,1-7,25	6,35-7,
20. Diam. trasv. ant. del metast.	11,55-13,75	12,25-14	11,5-13,55	11,95-14
21. Id. posteriore del metasterno	13,75-16,5	14,2-16,9	13,75-16,2	14,55-17
Elitra.				
22. Largh. mass. dell'elitra . .	11,3-13,3	11,2-13,9	11,2-13,1	11,95-14
23. Diam. obliq. mass. dell'elitra	30,1-35,6	30,25-36,65	30,45-35,25	31,7-36

soluta.

Media aritmetica m term. estr. della variaz. assol.				Differenza d fra i term. estr. della var. assol.				Coefficiente di variabilità assoluta $\frac{d}{m}$			
Torino		Nizza Monferr.		Torino		Nizza Monf.		Torino		Nizza Monf.	
	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
575	51,3	50,625	53,325	8,05	9,2	7,25	7,75	0,159	0,179	0,143	0,145
4	3,5	3,45	3,75	0,8	0,7	0,6	0,4	0,235	0,2	0,174	0,106
45	8,775	8,4	8,95	1,5	1,45	1,2	1,4	0,178	0,165	0,143	0,156
45	1,525	1,425	1,575	0,4	0,35	0,25	0,25	0,276	0,230	0,175	0,159
25	5,425	5,25	5,4	0,95	0,95	0,9	0,8	0,185	0,175	0,171	0,148
35	7,7	7,425	7,75	1,6	1,2	1,15	1,5	0,218	0,157	0,155	0,194
,2	10,525	10,15	10,55	1,9	1,55	1,5	1,6	0,186	0,147	0,148	0,152
65	6,9	6,7	7,05	1,1	1,3	1	1,2	0,165	0,188	0,149	0,170
375	1,95	1,85	2,025	0,35	0,3	0,3	0,45	0,192	0,154	0,162	0,222
325	3,575	3,375	3,525	0,55	0,65	0,65	0,65	0,165	0,182	0,192	0,184
15	7,175	7,225	7,325	1,3	1,25	1,15	1,25	0,182	0,174	0,159	0,171
,55	16,65	16,275	17,2	2,9	2,9	2,45	2,7	0,175	0,174	0,151	0,157
,1	5,125	5,225	5,3	1,2	1,15	1,05	1,1	0,235	0,224	0,190	0,207
55	5,575	5,50	5,8	1,1	1,05	0,9	1	0,198	0,188	0,164	0,172
575	9,575	9,8	10	2,15	2,15	1,6	1,9	0,224	0,224	0,163	0,190
2,7	22,7	22,65	23,075	4,9	4,8	4,35	3,15	0,216	0,211	0,192	0,137
325	5,425	5,675	6,125	1,15	1,15	1,05	1,25	0,197	0,210	0,185	0,204
,7	4,75	4,7	4,825	0,9	0,9	0,8	0,85	0,191	0,189	0,170	0,176
325	13,475	13,2	13,8	2,65	2,45	2,3	2,5	0,199	0,182	0,174	0,181
575	6,875	6,675	6,8	1,35	1,35	1,15	0,9	0,205	0,196	0,172	0,132
,65	13,125	12,525	13,2	2,2	1,75	2,05	2,5	0,174	0,133	0,164	0,189
125	15,55	14,975	15,9	2,75	2,7	2,45	2,7	0,182	0,174	0,163	0,170
2,3	13,05	12,15	13,1	2	2,7	1,9	2,3	0,162	0,206	0,156	0,176
,85	33,45	32,85	34,3	5,5	6,4	4,8	5,2	0,167	0,191	0,146	0,152

Variazio

Parti del dermascheletro sottoposte a misura	Termini estremi della variazione assoluta (in millimetri)			
	Torino		Nizza Monferrat	
	♂	♀	♂	♀
Addome.				
24. Diam. trasversale mass. del 2° segm. visib. dell'addome	16,5-19	17,05-20,05	16,2-19	17,25-
25. Id. del 3° segmento . . .	14,65-16,75	15-17,5	14,3-16,6	15,25
26. Id. del 4° segmento . . .	11,65-13,25	11,9-13,9	11,25-13,05	12,2-1
27. Id. del 5° segmento . . .	7,75-9,2	7,95-9,4	7,4-8,95	8,3-9
Zampe posteriori.				
28. Lunghezza dell'anca . . .	10,75-12,65	10,9-13	10,7-12,55	11,3-1
29. Larghezza dell'anca . . .	2,8-3,45	2,8-3,55	2,7-3,35	2,75-
30. Lungh. del fem. col trocant.	11,7-14,45	12-14,25	12,05-13,95	11,8-
31. Largh. massima del femore	3,45-4	3,35-4,1	3,35-4,1	3,4-
32. Lunghezza della tibia . .	9,5-11,2	9,05-11,1	9,5-10,95	9,65-
33. Id. della spina inferiore .	3,55-4,3	3,5-4,55	3,65-4,5	3,65-
34. Id. della spina laterale int.	5,4-6,6	5,4-6,45	5,1-6,5	5,55-
35. Id. del 2° articolo del tarso	5,25-6,2	4,7-5,8	5,1-6	4,85-
36. Id. del 3° articolo del tarso	1,95-2,25	1,7-2,1	1,85-2,25	1,75-
37. Id. del 4° articolo del tarso	1,55-1,8	1,35-1,7	1,6-1,8	1,4-
38. Id. del 5° articolo del tarso	2,35-2,8	2,05-2,7	2,45-2,85	2,15-
Zampe mediane.				
39. Lunghezza dell'anca . . .	6-7	6,05-7,1	5,9-6,9	6,2-7
40. Id. del femore col trocantere	9,3-11,25	9,6-11,3	9,5-10,9	9,95-1
41. Id. della tibia	6,6-7,75	6,55-7,85	6,55-7,55	6,35
42. Id. della spina inferiore .	2,75-3,2	2,65-3,2	2,8-3,25	2,65-
43. Id. della spina laterale int.	3,05-3,9	3,15-3,95	3,2-4	3,4-3
44. Id. del 2° articolo del tarso	4,3-5,05	4-5,05	4,1-5,05	4,3-5
45. Id. del 3° articolo del tarso	1,9-2,2	1,75-2,2	1,75-2,2	1,75-
46. Id. del 4° articolo del tarso	1,6-1,85	1,4-1,75	1,5-1,8	1,5-1
47. Id. del 5° articolo del tarso	2,55-3,05	2,3-2,8	2,65-3	2,5-2
Zampe anteriori.				
48. Lunghezza dell'anca . . .	3,5-4	3,45-4	3,4-3,9	3,5-
49. Id. del femore	6,45-7,65	6,6-7,75	6,5-7,4	6,75-
50. Id. della tibia	6,3-7,2	6,5-7,5	6,25-7,1	6,65-
51. Id. della spina later. esterna	1,7-1,95	1,5-1,85	1,65-2,1	1,6-
52. Id. del 5° articolo del tarso	2,8-3,3	2-2,35	2,95-3,25	1,9-2
53. (♂) Largh. della dilataz. del 5° articolo del tarso . .	2,55-3,15		2,6-3,2	
54. (♂) Lungh. dell'unghia magg.	2,55-3		2,55-3,05	
55. (♂) Id. dell'unghia minore .	1,9-2,15		1,95-2,2	

ssoluta.

Media aritmetica m term. estr. della variaz. assol.				Differenza d fra i term. estr. della var. assol.				Coefficiente di variabilità assoluta $\frac{d}{m}$			
Torino		Nizza Monferr.		Torino		Nizza Mo f		Torino		Nizza Monf.	
♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
,75	18,55	17,1	18,75	2,5	3	2,8	3,25	0,141	0,160	0,164	0,190
5,7	16,25	15,45	16,625	2,1	2,5	2,3	2,75	0,134	0,154	0,149	0,178
,45	12,9	12,15	13,175	1,6	2	1,8	1,95	0,129	0,155	0,148	0,148
475	8,675	8,175	8,925	1,45	1,45	1,55	1,25	0,171	0,167	0,190	0,140
1,7	11,95	11,625	12,325	1,9	2,1	1,85	2,05	0,162	0,176	0,159	0,166
125	3,175	3,025	3,1	0,65	0,75	0,65	0,70	0,204	0,236	0,215	0,233
075	13,125	13,005	13,15	2,75	2,25	1,89	2,7	0,210	0,171	0,145	0,205
725	3,725	3,725	3,7	0,55	0,75	0,75	0,6	0,148	0,201	0,201	0,162
,35	10,075	10,225	10,375	1,7	2,05	1,45	1,85	0,164	0,203	0,142	0,175
025	4,025	4,075	4,05	0,75	1,05	0,85	0,8	0,191	0,261	0,209	0,198
5	5,925	5,8	6,075	1,2	1,05	1,4	1,05	0,2	0,177	0,241	0,173
725	5,25	5,55	5,475	0,95	1,1	0,9	1,25	0,166	0,210	0,162	0,228
,1	1,9	2,05	1,975	0,3	0,4	0,4	0,45	0,143	0,211	0,195	0,228
575	1,525	1,7	1,55	0,25	0,35	0,2	0,3	0,149	0,164	0,118	0,194
,6	2,375	2,65	2,425	0,5	0,65	0,4	0,55	0,192	0,274	0,151	0,227
,5	6,575	6,4	6,725	1	1,05	1	1,05	0,154	0,160	0,156	0,156
,275	10,45	10,2	10,75	1,95	1,7	1,4	1,6	0,190	0,163	0,137	0,149
175	7,2	7,05	7,175	1,15	1,3	1	1,65	0,160	0,181	0,142	0,230
975	2,925	3,025	2,95	0,45	0,55	0,45	0,6	0,151	0,188	0,149	0,203
475	3,5	3,6	3,625	0,85	0,8	0,8	0,45	0,245	0,229	0,222	0,124
675	4,525	4,575	4,675	0,75	1,05	0,95	0,75	0,160	0,232	0,208	0,160
,15	1,975	1,975	2	0,3	0,45	0,45	0,5	0,140	0,228	0,228	0,25
725	1,575	1,65	1,625	0,25	0,35	0,3	0,25	0,145	0,222	0,182	0,154
,8	2,55	2,825	2,725	0,5	0,5	0,35	0,45	0,178	0,196	0,124	0,165
,75	3,725	3,65	3,75	0,5	0,55	0,5	0,5	0,133	0,148	0,137	0,133
,05	7,175	6,95	7,25	1,25	1,15	0,9	1	0,177	0,160	0,144	0,138
,75	7	6,675	7,1	0,9	1	0,85	0,9	0,133	0,143	0,127	0,127
825	1,675	1,875	1,7	0,25	0,35	0,45	0,2	0,137	0,201	0,24	0,117
,05	2,175	3,1	2,125	0,5	0,35	0,3	0,45	0,164	0,161	0,097	0,211
,85		2,9		0,6		0,6		0,211		0,206	
775		2,8		0,45		0,5		0,162		0,179	
025		2,075		0,25		0,25		0,123		0,120	

Variazion

Parti del dermascheletro sottoposte a misura	Classi estreme (espresse in 360mi della misura base)			
	Torino		Nizza Monferrato	
	♂	♀	♂	♀
Capo.				
1. Diam. antero-post. del fronte	23-25,5	23,5-26	23-26	23-2
2. Id. del capo (parte dors.) sino al marg. ant. del peristoma	57,5-61	59,5-62	58-61,5	58,5-6
3. Id. del labbro superiore . .	9,5-11	10-11,5	10-11	10-1
4. Largh. mass. del labbro sup.	35,5-38,5	36-39,5	35,5-38,5	35,5-
5. Id. della parte ant. del capo (anteriore agli occhi) .	50,5-53,5	51,5-55	50,5-54	51-5
6. Dist. fra le superficie laterali esterne dei due occhi . .	70,5-74,5	70,5-75	70,5-74	68,5-
7. Diam. antero-post. del capo (parte ventr.) sino al marg. anter. del labbro inferiore	45,5-49,5	46,5-50	46,5-49	46,5-4
8. Id. del labbro inferiore . .	13-14	13-14,5	12,5-14,5	13-1
9. Largh. del labbro inferiore	23-25	23,5-26,5	22,5-24,5	23,5-2
Protorace.				
10. Diam. antero-post. del protorace (pronoto)	49-53	48,5-52	49,5-52,5	48,5-
11. Largh. massima del protorace (pronoto)	112,5-121	113-119,5	114-120	112-1
Scudetto.				
12. Diam. antero-posteriore dello scudetto	31-38	33,5-37,5	34,5-38,5	34-3
13. Largh. dello scud. (alla base)	37-41,5	37,5-40,5	36,5-40	38-4
Sterno.				
14. Lungh. dell'apof. mesostern.	65,5-71	63,5-71	65,5-72	64-7
15. Lungh. tot. dell'apofisi stern.	156,5-168,5	153-169	154-165	152-1
16. Lungh. min. del metasterno	39,5-43	40-43	39,5-42	40-4
17. Id. del mesosterno . . .	32,5-35	31,5-34,5	31,5-34,5	31,5
18. Lungh. minima dello sterno	92-96,5	91-96,5	91,5-96	91,5-
19. Id. massima dell'episterno .	45,5-48,5	46-50	45,5-49	46-4
20. Diam. trasv. ant. del metast.	87,5-93,5	89-94,5	88-92	87-9
21. Id. posteriore del metasterno	103,5-109,5	105-111	103,5-109,5	105-1
Elitra.				
22. Largh. mass. dell'elitra . .	84-90	86-91	84,5-89	86,5-9
23. Diam. obliq. mass. dell'elitra	231,5-238,5	231-238	231,5-238	229,5-2

lativa

Media aritmetica M fra le classi estreme				Differenza D fra le classi estreme				Coefficiente di variabilità relativa $\frac{D}{M}$			
Torino		Nizza Monferr.		Torino		Nizza Monf.		Torino		Nizza Monf.	
	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
25	24,75	24,5	24,25	2,5	2,5	3	2,5	0,103	0,101	0,122	0,103
25	60,75	59,75	60,5	3,5	2,5	3,5	4	0,059	0,041	0,058	0,066
25	10,75	10,5	10,5	1,5	1,5	1	1,5	0,146	0,139	0,095	0,142
7	37,75	37	37,25	3	3,5	3	3,5	0,081	0,093	0,081	0,094
2	53,25	52,25	53	3	3,5	3,5	4	0,058	0,066	0,067	0,075
2,5	72,75	72,25	71,25	4	4,5	3,5	5,5	0,055	0,062	0,048	0,077
5	48,25	47,75	48	4	3,5	2,5	3	0,084	0,072	0,052	0,062
3,5	13,75	13,5	13,75	1	1,5	1	1,5	0,074	0,109	0,074	0,109
4	25	23,5	25	2	3	2	3	0,083	0,120	0,085	0,120
1	50,25	51	49,75	4	3,5	4	2,5	0,078	0,070	0,078	0,050
5,75	116,25	117	118	8,5	6,5	6	12	0,072	0,056	0,051	0,101
4,5	35,5	36,5	36,5	7	4	4	5	0,202	0,114	0,109	0,136
0,25	39	38,25	39,5	4,5	3	3,5	3	0,114	0,077	0,091	0,076
8,25	67,25	68,75	67	5,5	6,5	6,5	6	0,080	0,097	0,094	0,089
62,5	161	159,5	159,75	12	16	11	15,5	0,070	0,099	0,069	0,091
1,25	41,5	40,75	41,75	3,5	3	2,5	3,5	0,087	0,072	0,061	0,084
3,75	33	33	32,75	2,5	3	3	2,5	0,074	0,091	0,091	0,076
4,25	93,75	93,75	93,75	4,5	5,5	4,5	4,5	0,048	0,059	0,048	0,048
47	48	47,25	47,75	3	4	3,5	3,5	0,062	0,083	0,074	0,073
0,5	91,75	90	91,75	6	5,5	4	9,5	0,066	0,060	0,044	0,103
06,5	108	106,5	108,25	6	6	6	6,5	0,056	0,055	0,056	0,060
87	88,5	86,75	89,5	6	5	4,5	6	0,069	0,057	0,052	0,067
235	234,5	234,75	233	7	6	6,5	7	0,030	0,026	0,028	0,030

Variazion

Parti del dermascheletro sottoposte a misura	Classi estreme (espresse in 360mi della misura base)			
	Torino		Nizza Monferrato	
	♂	♀	♂	♀
Addome.				
24. Diam. trasversale mass. del 2° segm. visib. dell'addome	122-130,5	125,5-131,5	127,5-132	125-13
25. Id. del 3° segmento . . .	107-115,5	109-118,5	106-114,5	108-11
26. Id. del 4° segmento . . .	84-91	84,5-92	83,5-90,5	84-93
27. Id. del 5° segmento . . .	57-63	59-64	55,5-62	57,5-64
Zampe posteriori.				
28. Lunghezza dell'anca . . .	80,5-85,5	81,5-85	81-85,5	81-85
29. Larghezza dell'anca . . .	21,5-23,5	21-23	20-23	20-22
30. Lungh. del fem. col trocant.	90-95	89-94	91-95,5	88-94
31. Largh. massima del femore	25,5-27,5	24,5-26,5	25-28	24-27
32. Lunghezza della tibia . .	71-75	69,5-75,5	70,5-76,5	69-73
33. Id. della spina inferiore .	26,5-30	25-30	27-30,5	26,5-2
34. Id. della spina laterale int.	39,5-44,5	38-46	38,5-44,5	39-43
35. Id. del 2° articolo del tarso	37,5-42	33,5-40,5	36,5-41,5	34-39
36. Id. del 3° articolo del tarso	14-16	12-14	13,5-16	12,5-14
37. Id. del 4° articolo del tarso	11,5-13	9,5-11,5	11-13	10-11
38. Id. del 5° articolo del tarso	17,5-19	14,5-18	17,5-19,5	15,5-1
Zampe mediane.				
39. Lunghezza dell'anca . . .	44-47,5	45-47	45-47	45-48
40. Id. del femore col trocantere	71-75	70,5-75,5	70,5-75,5	70,5-7
41. Id. della tibia	48,5-52	46,5-53,5	47,5-53,5	48,5-5
42. Id. della spina inferiore .	19,5-22,5	19,5-21,5	20-22,5	19-22
43. Id. della spina laterale int.	22,5-25,5	23-26,5	23,5-27,5	23-25,
44. Id. del 2° articolo del tarso	31-34,5	28-33,5	31-34,5	29,5-32
45. Id. del 3° articolo del tarso	13,5-15,5	12-14,5	12-15	12,5-14
46. Id. del 4° articolo del tarso	11-13	10-11,5	10-13	10,5-1
47. Id. del 5° articolo del tarso	18-21	16,5-19	18-21	17-20
Zampe anteriori.				
48. Lunghezza dell'anca . . .	25,5-27	25,5-27	25,5-27	24,5-26
49. Id. del femore	48,5-51,5	48,5-51,5	48-51	47,5-5
50. Id. della tibia	46,5-49,5	46,5-52	45,5-49	46,5-50
51. Id. della spina later. esterna	12-13,5	10,5-12,5	11-14,5	10,5-12
52. Id. del 5° articolo del tarso	21-23	14-15,5	20,5-23	13,5-15
53. (♂) Largh. della dilataz. del 5° articolo del tarso . .	19,5-22		20,5-22,5	
54. (♂) Lungh. dell'unghia magg.	19-21		18,5-21,5	
55. (♂) Id. dell'unghia minore .	13,5-15		13,5-15	

lativa

Media aritmetica M fra le classi estreme				Differenza D fra le classi estreme				Coefficiente di variabilità relativa $\frac{D}{M}$			
Torino		Nizza Monferr.		Torino		Nizza Monf.		Torino		Nizza Monf.	
♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
,5	128,5	127,25	130	8,5	6	4,5	10	0,067	0,047	0,074	0,077
,25	113,75	110,25	113,75	8,5	9,5	8,5	11,5	0,076	0,083	0,076	0,101
,5	88,25	87	88,75	7	7,5	7	9,5	0,080	0,085	0,080	0,107
)	61,5	58,75	61	6	5	6,5	7	0,100	0,081	0,110	0,114
3	83,25	83,25	83,25	5	3,5	4,5	4,5	0,060	0,042	0,054	0,054
,5	22	21,5	21,25	2	2	3	2,5	0,089	0,091	0,139	0,117
,5	91,5	93,25	91	5	5	4,5	6	0,054	0,055	0,048	0,066
,5	25,5	26,5	25,5	2	2	3	3	0,075	0,078	0,113	0,118
3	72,5	73,5	71,25	4	6	6	4,5	0,055	0,083	0,082	0,063
,25	27,5	28,75	27,75	3,5	5	3,5	2,5	0,124	0,181	0,121	0,090
2	42	41,5	41,25	5	8	6	4,5	0,119	0,190	0,144	0,109
,75	37	39	36,5	4,5	7	5	5	0,113	0,189	0,128	0,137
5	13	14,75	13,5	2	2	2,5	2	0,133	0,153	0,169	0,148
,25	10,5	12	10,75	1,5	2	2	1,5	0,122	0,190	0,166	0,139
,25	16,25	18,5	16,75	1,5	3,5	2	2,5	0,082	0,215	0,108	0,149
,75	46	46	46,5	3,5	2	2	3	0,076	0,043	0,043	0,064
3	73	73	72,75	4	5	5	4,5	0,055	0,068	0,068	0,062
,25	50	50,5	49,75	3,5	7	6	2,5	0,070	0,140	0,118	0,050
1	20,5	21,25	20,5	3	2	2,5	3	0,142	0,097	0,117	0,146
4	24,75	25,5	24,25	3	3,5	4	2,5	0,125	0,141	0,156	0,103
,75	30,75	32,75	31	3,5	5,5	3,5	3	0,106	0,178	0,106	0,097
4,5	13,25	13,5	13,5	2	2,5	3	2	0,137	0,188	0,222	0,148
2	10,75	11,5	11,25	2	1,5	3	1,5	0,166	0,139	0,260	0,133
9,5	17,75	19,5	18,5	3	2,5	3	3	0,153	0,140	0,153	0,162
,25	26,25	26,25	25,5	1,5	1,5	1,5	2	0,057	0,057	0,057	0,078
50	50	49,5	49,75	3	3	3	4,5	0,061	0,061	0,061	0,090
48	49,25	47,25	48,5	3	5,5	3,5	4	0,062	0,101	0,074	0,082
,75	11,5	12,75	11,5	1,5	2	3,5	2	0,117	0,173	0,274	0,173
22	14,75	21,75	14,5	2	1,5	2,5	2	0,091	0,101	0,114	0,138
0,75		21,5		2,5		2		0,120		0,093	
20		20		2		3		0,100		0,150	
4,25		14,25		1,5		1,5		0,105		0,105	

Disposizione delle varianti in classi nelle serie (*).

A. *Esemplari* ♂ *di Torino.*

(1) Diametro antero-post. del fronte: 23_1-$23{,}5_2$-24_6-(**24,25**)-$24{,}5_7$-25_9-$25{,}5_1$ — (2) Id. del capo (parte dorsale): $57{,}5_1$-58_1-$58{,}5_2$-59_6-(**59,25**)-$59{,}5_1$-60_2-$60{,}5_6$-61_7 — (3) Id. del labbro superiore: [$8{,}5_1$]-$9{,}5_2$-10_9-(**10,25**)-$10{,}5_{13}$-11_1 — (4) Larghezza massima del labbro sup.: $35{,}5_1$-36_3-$36{,}5_7$-**37**$_3$-$37{,}5_6$-38_5-$38{,}5_1$ — (5) Id. della parte ant. del capo: $50{,}5_2$-51_2-$51{,}5_5$-**52**$_1$-$52{,}5_6$-53_5-$53{,}5_2$ — (6) Dist. fra le superficie lat. esterne degli occhi: $70{,}5_2$-71_4-$71{,}5_7$-72_8-**72,5**$_2$-73_1-$73{,}5_1$-$74{,}5_1$ — (7) Diametro antero-post. del capo (parte ventr.): $45{,}5_1$-46_1-$46{,}5_4$-47_1-**47,5**$_3$-48_9-$48{,}5_5$-49_1-$49{,}5_1$ — (8) Id. del labbro inferiore: 13_{10}-**13,5**$_9$-14_7 — (9) Larghezza del labbro inf.: 23_1-$23{,}5_6$-**24**$_{11}$-$24{,}5_7$-25_1.

(10) Diametro antero-post. del protorace: 49_2-50_5-$50{,}5_3$-**51**$_5$-$51{,}5_3$-52_5-$52{,}5_2$-53_1 — (11) Larghezza massima del protorace: $112{,}5_1$-$113{,}5_3$-114_1-$115{,}5_1$-116_1-$116{,}5_5$-(**116,75**)-117_3-$117{,}5_5$-118_1-$118{,}5_1$-119_1-121_2.

(12) Diametro antero-post. dello scudetto: 31_1-$32{,}5_1$-33_1-34_1-**34,5**$_1$-35_1-$35{,}5_4$-36_2-$36{,}5_4$-37_2-$37{,}5_3$-38_4 — (13) Largh. dello scudetto alla base: 37_2-$37{,}5_2$-38_3-$38{,}5_6$-39_6-(**39,25**)-$39{,}5_4$-40_1-41_1-$41{,}5_1$.

(14) Lunghezza dell'apofisi mesosternale: $65{,}5_2$-$66{,}5_2$-$67{,}5_2$-68_2-(**68,25**)-$68{,}5_1$-69_6-$69{,}5_3$-70_3-$70{,}5_3$-71_2 — (15) Id. sternale: $156{,}5_1$-158_2-$158{,}5_3$-159_2-(**162,25**)-$162{,}5_3$-163_3-$163{,}5_2$-164_3-$164{,}5_1$-$165{,}5_1$-166_1-$168{,}5_1$ — (16) Lunghezza minima del metasterno: $39{,}5_1$-40_2-$40{,}5_7$-41_3-(**41,25**)-$41{,}5_6$-42_4-$42{,}5_2$-43_1 — (17) Id. del

(*) I valori delle varianti sono espressi in 360^{mi} della " misura base ", definita nella Parte I. Accanto a ciascuna classe (in basso, a destra) ne è indicata la frequenza. Le " classi medie " sono rappresentate dai numeri stampati in carattere più grosso e nero, e questi son posti fra parentesi allorchè non corrispondono a classi realmente osservate nella serie. I numeri posti fra parentesi quadre corrispondono a valori eccezionali, dai quali si fece astrazione per il calcolo delle classi medie ecc.

mesosterno: $32,5_2$-33_1-$33,5_8$-(**33,75**)-34_8-$34,5_3$-35_1 — (18) Id. dello sterno: 92_1-$92,5_2$-93_3-$93,5_4$-94_1-(**94,25**)-$94,5_2$-95_5-$95,5_3$-96_1-$96,5_1$ — (19) Lungh. massima dell'episterno: $45,5_2$-46_2-$46,5_3$-**47**$_6$-$47,5_4$-48_6-$48,5_3$ — (20) Diametro trasv. ant. del metasterno: $87,5_1$-88_3--$88,5_2$-89_2-$89,5_3$-90_3-**90,5**$_6$-$91,5_1$-92_3-93_1-$93,5_1$ — (21) Diam. trasv. post. del metasterno: $103,5_1$-104_2-$104,5_1$-105_1-106_1-**106,5**$_4$-$107,5_4$-108_5-$108,5_3$-109_3-$109,5_1$.

Elitra. (22) Larghezza massima dell'elitra: 84_1-$84,5_1$-85-5_1-86_2-$86,5_3$-**87**$_5$-$87,5_6$-88_3-$88,5_2$-89_1-90_1 — (23) Diametro obliquo massimo dell'elitra: $231,5_2$-232_2-$233,5_2$-234_2-$234,5_3$-(**235**)-$235,5_5$-236_4-$236,5_2$-237_1-$237,5_1$-$238,5_1$.

Addome. (24) Diam. trasv. mass. del 2° segmento addomin.: 122_1-$123,5_2$-124_1-125_3-$125,5_3$-126_2-(**126,25**)-$126,5_1$-127_5-$127,5_2$-128_2-$128,5_1$-129_1-130_1-$130,5_1$ — (25) Id. del 3° segmento: 107_1-108_1-$108,5_1$-109_3-$109,5_1$-110_3-$110,5_4$-111_4-(**111,25**)-$111,5_1$-112_2-113_1-$113,5_1$-114_1-115_1-$115,5_1$ — (26) Id. del 4° segmento: 84_1-$84,5_1$-85_1-$85,5_3$-86_4-$86,5_3$-87_2-**87,5**$_1$-88_3-89_2-90_4-91_1 — (27) Id. del 5° segmento: 57_2-58_3-$58,5_2$-59_4-$59,5_2$-**60**$_5$-$60,5_2$-61_1-$61,5_2$-$62,5_1$-63_2.

Zampe posteriori. (28) Lunghezza dell'anca: $80,5_1$-82_3-$82,5_3$-**83**$_5$-$83,5_3$-84_7-$84,5_2$-85_1-$85,5_1$ — (29) Larghezza dell'anca: $21,5_5$-22_8-**22,5**$_8$-23_4-$23,5_1$ — (30) Lunghezza del femore col trocantere: 90_1-$90,5_1$-91_2-$91,5_2$-92_2-**92,5**$_5$-93_3-$93,5_2$-94_1-$94,5_5$-95_2 — (31) Larghezza del femore: $25,5_2$-26_2-**26,5**$_{10}$-27_{11}-$27,5_1$ — (32) Lunghezza della tibia: 71_1-$71,5_3$-72_1-$72,5_5$-**73**$_2$-$73,5_4$-74_3-$74,5_3$-75_2 — (33) Id. della spina infer.: $26,5_2$-27_3-$27,5_4$-28_4-(**28,25**)-$28,5_5$-29_1-30_1 — (34) Id. della spina laterale interna: $39,5_2$-40_2-$40,5_1$-41_1-$41,5_7$-**42**$_4$-$42,5_3$-43_3-$43,5_1$-$44,5_1$ — (35) Id. del 2° articolo del tarso: $37,5_1$-$38,5_1$-39_4-$39,5_3$-(**39,75**)-40_5-$40,5_6$-41_3-$41,5_1$-42_1 — (36) Id. del 3° articolo: 14_2-$14,5_9$-**15**$_9$-$15,5_3$-16_1 — (37) Id. del 4° articolo: $11,5_5$-12_{11}-(**12,25**)-$12,5_4$-13_2 — (38) Id. del 5° articolo: $17,5_1$-18_7-(**18,25**)-$18,5_8$-19_6.

Zampe mediane. (39) Lunghezza dell'anca: 44_1-$44,5_1$-45_1-$45,5_5$-(**45,75**)-46_8-$46,5_7$-47_1-$47,5_2$ — (40) Id. del femore col trocantere: 71_1-$71,5_2$-72_3-$72,5_8$-**73**$_4$-$73,5_3$-74_2-$74,5_1$-75_1 — (41) Id. della tibia: $48,5_1$-$49,5_1$-50_3-(**50,25**)-$50,5_6$-51_6-$51,5_2$-52_3 — (42) Id. della spina inferiore: $19,5_1$-$20,5_4$-**21**$_{11}$-$21,5_2$-22_2-$22,5_1$ — (43) Id. della spina laterale interna: $22,5_1$-23_1-$23,5_3$-**24**$_8$-$24,5_6$-25_1-$25,5_2$ — (44) Id. del 2° articolo del tarso: 31_2-$31,5_1$-32_8-$32,5_2$-(**32,75**)-33_7-$33,5_4$-$34,5_2$ — (45) Id. del 3° art.: $13,5_3$-14_5-**14,5**$_{11}$-15_4-$15,5_1$

— (46) Id. del 4° articolo: 11_1-$11{,}5_6$-$\mathbf{12}_7$-$12{,}5_7$-13_2 — (47) Id. del 5° articolo: 18_1-$18{,}5_1$-$\mathbf{19{,}5}_{10}$-20_5-$20{,}5_3$-21_2.

Zampe anteriori. (48) Lungh. dell'anca: $25{,}5_5$-26_{11}-(**26,25**)-$26{,}5_6$-27_4 — (49) Id. del femore: $48{,}5_3$-49_8-$49{,}5_3$-$\mathbf{50}_9$-$50{,}5_1$-51_1-$51{,}5_1$ — (50) Id. della tibia: $46{,}5_3$-47_7-$47{,}5_6$-$\mathbf{48}_6$-$48{,}5_1$-49_1-$49{,}5_2$ — (51) Id. della spina laterale esterna: 12_2-$12{,}5_5$-(**12,75**)-13_8-$13{,}5_3$ — (52) Id. del 5° articolo del tarso: 21_5-$21{,}5_{10}$-$\mathbf{22}_8$-$22{,}5_1$-23_1 — (53) Largh. della dilatazione del 5° art. del tarso: $19{,}5_1$-20_2-$20{,}5_5$-**20,75**-21_7-$21{,}5_5$-22_1 — (54) Lungh. dell'unghia maggiore: 19_3-$19{,}5_4$-$\mathbf{20}_{12}$-$20{,}5_5$-21_2 — (55) Id. dell'unghia minore: $13{,}5_1$-14_{12}-(**14,25**)-$14{,}5_8$-15_2.

B. *Esemplari ♀ di Torino.*

Capo. (1) Diametro antero-post. del fronte: $23{,}5_3$-24_5-$24{,}5_9$-(**24,75**)-25_3-$25{,}5_2$-26_2 — (2) Id. del capo (parte dorsale): $59{,}5_2$-60_1-$60{,}5_5$-(**60,75**)-61_9-$61{,}5_3$-62_4 — (3) Id. del labbro superiore: 10_2-$10{,}5_{12}$-(**10,75**)-11_9-$11{,}5_1$ — (4) Larghezza massima del labbro super.: 36_1-37_2-$37{,}5_7$-(**37,75**)-38_9-$38{,}5_2$-39_2-$39{,}5_1$ — (5) Id. della parte ant. del capo: $51{,}5_1$-52_1-$52{,}5_2$-53_6-(**53,25**)-$53{,}5_5$-54_5-$54{,}5_3$-55_1 — (6) Dist. fra le superficie lat. esterne degli occhi: $70{,}5_3$-72_3-$72{,}5_6$-(**72,75**)-73_5-$73{,}5_1$-74_4-$74{,}5_1$-75_1 — (7) Diametro antero-post. del capo (parte ventrale): $46{,}5_3$-47_1-$47{,}5_6$-48_4-(**48,25**)-$48{,}5_6$-49_1-$49{,}5_2$-50_1 — (8) Id. del labbro inferiore: 13_3-$13{,}5_{10}$-(**13,75**)-14_9-$14{,}5_2$ — (9) Larghezza del labbro inf.: $23{,}5_1$-24_7-$24{,}5_6$-$\mathbf{25}_6$-$25{,}5_2$-$26{,}5_1$.

Protorace. (10) Diametro antero-post. del protorace: $48{,}5_1$-49_3-$49{,}5_4$-50_8-(**50,25**)-$50{,}5_4$-$51{,}5_1$-52_1 — (11) Larghezza massima del protorace: 113_1-114_1-115_4-$115{,}5_1$-116_1-(**116,25**)-$116{,}5_6$-117_3-$117{,}5_2$-118_2-$118{,}5_1$-119_1-$119{,}5_1$.

Scudetto. (12) Diametro antero-post. dello scudetto: $33{,}5_1$-34_1-35_4-$\mathbf{35{,}5}_4$-36_3-$36{,}5_5$-37_4-$37{,}5_2$ — (13) Larghezza dello scudetto alla base: $37{,}5_4$-38_6-$38{,}5_2$-$\mathbf{39}_4$-$39{,}5_6$-$40{,}5_1$.

Sterno. (14) Lunghezza dell'apofisi mesosternale: $63{,}5_1$-65_1-$65{,}5_3$-66_2-$66{,}5_3$-(**67,25**)-$67{,}5_3$-68_2-$68{,}5_1$-69_1-$69{,}5_4$-70_1-$70{,}5_1$-71_1 — (15) Id. sternale: 153_2-156_1-$156{,}5_2$-$157{,}5_1$-158_1-$158{,}5_2$-159_2-$159{,}5_1$-$160{,}5_1$-$\mathbf{161}_1$-$161{,}5_1$-162_1-$162{,}5_2$-$163{,}5_2$-165_1-169_1 — (16) Lungh. minima del metasterno: 40_1-$40{,}5_2$-41_4-$\mathbf{41{,}5}_4$-42_7-$42{,}5_5$-43_1 — (17) Id. del mesosterno: $31{,}5_2$-32_3-$32{,}5_3$-$\mathbf{33}_8$-$33{,}5_4$-34_3-$34{,}5_1$ —

(18) Id. dello sterno: 91_1-92_2-$92,5_2$-93_2-$93,5_5$-(**93,75**)-94_1-$94,5_6$-$95,5_3$-96_1-$96,5_1$ — (19) Lungh. massima dell'episterno: 46_1-$46,5_1$-47_3-$47,5_7$-**48**$_4$-$48,5_2$-49_4-50_1 — (20) Diametro trasv. ant. del metasterno: 89_1-$89,5_4$-90_4-$90,5_6$-91_4-$91,5_2$-(**91,75**)-$92,5_2$-$94,5_1$ — (21) Diametro trasvers. post. del metasterno: 105_1-$105,5_1$-106_3-$106,5_3$-107_2-$107,5_1$-**108**$_3$-$108,5_1$-109_2-$109,5_2$-$110,5_1$-111_1.

Elitre. (22) Larghezza massima dell'elitra: 86_2-$86,5_1$-87_1-$87,5_2$-88_2-**88.5**$_3$-89_6-$89,5_2$-90_1-$90,5_1$-91_3 — (23) Diametro obliquo mass. dell'elitra: 231_1-$231,5_1$-232_1-$232,5_2$-233_3-$233,5_3$-234_2-**234,5**$_1$-235_3-$235,5_2$-236_2-$236,5_1$-237_1-238_1.

Addome. (24) Diametro trasv. massimo del 2° segmento addominale: $125,5_1$-126_1-$126,5_2$-127_1-$127,5_1$-128_5-**128,5**$_2$-129_2-$129,5_4$-130_2-$130,5_1$-$131,5_2$ — (25) Id. del 3° segmento: 109_1-$110,5_3$-$111,5_2$-112_1-$112,5_5$-113_4-(**113,75**)-114_2-$114,5_3$-$115,5_2$-$118,5_1$ — (26) Id. del 4° segmento: $84,5_1$-$86,5_1$-87_2-88_2-(**88,25**)-$88,5_1$-89_2-$89,5_4$-90_1-$90,5_4$-91_4-92_2 — (27) Id. del 5° segmento: 59_2-$59,5_1$-60_3-$60,5_2$-61_1-**61,5**$_4$-62_4-$62,5_3$-63_2-$63,5_1$-64_1.

Zampe posteriori. (28) Lunghezza dell'anca: $81,5_1$-82_2-$82,5_3$-83_8-(**83.25**)-$83,5_3$-84_4-$84,5_2$-85_1 — (29) Larghezza dell'anca: 21_1-$21,5_4$-**22**$_9$-$22,5_2$-23_5 — (30) Lunghezza del femore col trocantere: 89_1-90_2-$90,5_2$-91_4-**91,5**$_7$-92_2-$92,5_2$-93_1-$93,5_2$-94_1 — (31) Larghezza del femore: $24,5_1$-25_2-**25,5**$_8$-26_7-$26,5_6$ — (32) Lunghezza della tibia: [$64,5_1$]-$69,5_1$-70_1-$70,5_3$-71_3-$71,5_4$-72_5-**72,5**$_3$-73_2-$75,5_1$ — (33) Id. della spina inf.: 25_1-$26,5_1$-27_5-**27,5**$_4$-28_4-$28,5_2$-29_2-30_1 — (34) Id. della spina laterale interna: [33_1]-38_1-$38,5_1$-39_1-$40,5_6$-41_2-$41,5_5$-**42**$_1$-$42,5_1$-$43,5_1$-$45,5_1$-46_1 — (35) Id. del 2° articolo del tarso: $33,5_1$-$35,5_1$-$36,5_3$-**37**$_3$-$37,5_3$-38_8-$38,5_2$-39_1-$40,5_1$ — (36) Id. del 3° articolo: 12_1-$12,5_1$-**13**$_4$-$13,5_{10}$-14_7 — (37) Id. del 4° articolo: $9,5_1$-10_1-**10,5**$_9$-11_{10}-$11,5_2$ — (38) Id. del 5° articolo: $14,5_1$-16_4-(**16,25**)-$16,5_3$-17_8-$17,5_6$-18_1.

Zampe mediane. (39) Lunghezza dell'anca: 45_2-$45,5_5$-**46**$_{10}$-$46,5_6$-47_1 — (40) Id. del femore col trocantere: $70,5_1$-$71,5_1$-72_1-$72,5_7$-**73**$_7$-$73,5_2$-74_2-$74,5_2$-75_1-$75,5_1$ — (41) Id. della tibia: $46,5_1$-49_1-$49,5_4$-**50**$_4$-$50,5_4$-51_3-$51,5_3$-$53,5_1$ — (42) Id. della spina inferiore: $19,5_2$-20_7-**20,5**$_1$-21_8-$21,5_3$ — (43) Id. della spina laterale interna: 23_2-$23,5_3$-24_3-$24,5_3$-(**24,75**)-25_2-$25,5_6$-26_1-$26,5_1$ — (44) Id. del 2° articolo del tarso: 28_1-$28,5_1$-$29,5_1$-(**30,75**)-31_3-$31,5_2$-32_5-$32,5_5$-33_4-$33,5_2$ — (45) Id. del 3° articolo: 12_1-$12,5_2$-13_2-(**13,25**)-$13,5_9$-14_8-$14,5_2$ — (46) Id. del 4° articolo: 10_2-$10,5_3$-

(**10,75**)-11_{12}-$11,5_6$ — (47) Id. del 5° articolo: $16,5_1$-17_1-$17,5_1$-(**17,75**)-18_{10}-$18,5_6$-19_4.

Zampe anteriori. (48) Lungh. dell'anca: $25,5_5$-26_{13}-(**26,25**)-$26,5_5$-27_1 — (49) Id. del femore: $48,5_1$-49_3-$49,5_5$-**50_5**-$50,5_6$-51_3-$51,5_1$ — (50) Id. della tibia: $46,5_1$-47_2-$47,5_1$-48_3-$48,5_4$-49_5-(**49,25**)-$49,5_1$-50_2-$50,5_1$-52_1 — (51) Id. della spina laterale esterna: $10,5_1$-11_1-**$11,5_{10}$**-12_3-$12,5_6$ — (52) Id. del 5° articolo del tarso: 14_6-$14,5_7$-(**14,75**)-15_7-$15,5_3$.

C. *Esemplari ♂ di Nizza Monf.*

Capo. (1) Diametro antero-post. del fronte: 23_1-$23,5_3$-24_6-**$24,5_{11}$**-25_2-$25,5_1$-26_1 — (2) Id. del capo (parte dorsale): 58_3-59_4-$59,5_5$-(**59,75**)-60_8-$60,5_3$-$61,5_2$ — Id. del labbro superiore: 10_6-**$10,5_{15}$**-11_4 — (4) Larghezza massima del labbro sup.: $35,5_1$-36_2-$36,5_7$-**37_5**-$37,5_6$-38_3-$38,5_1$ — (5) Id. della parte ant. del capo: $50,5_1$-51_4-$51,5_6$-52_5-(**52,25**)-$52,5_7$-53_1-54_1—(6) Dist. fra le superficie lat. esterne degli occhi: $70,5_1$-71_4-$71,5_5$-72_6-(**72,25**)-$72,5_3$-73_3-$73,5_2$-74_1 — (7) Diametro antero-post. del capo (parte ventrale): $46,5_4$-47_8-$47,5_5$-(**47,75**)-48_6-49_1 — Id. del labbro inferiore: $12,5_2$-13_6-**$13,5_{13}$**-14_3-$14,5_1$ — (9) Larghezza del labbro inf.: $22,5_1$-23_1-**$23,5_5$**-24_{10}-$24,5_8$.

Protorace. (10) Diametro antero-post. del protorace: $49,5_2$-50_7-$50,5_3$-**51_7**-$51,5_2$-52_3-$52,5_1$ — (11) Larghezza massima del protorace: 114_3-115_3-116_3-$116,5_5$-**117_3**-$117,5_2$-118_3-$118,5_1$-120_2.

Scudetto. (12) Diametro antero-post. dello scudetto: $34,5_2$-35_2-$35,5_1$-36_3-**$36,5_4$**-37_2-$37,5_7$-38_3-$38,5_1$ — (13) Larghezza dello scudetto alla base: $36,5_1$-37_3-$37,5_1$-38_5-(**38,25**)-$38,5_7$-39_3-$39,5_3$-40_2.

Sterno. (14) Lunghezza dell'apofisi mesosternale: $65,5_1$-$66,5_1$-67_2-$67,5_1$-68_2-$68,5_4$-(**68,75**)-69_5-$69,5_2$-70_1-$70,5_2$-71_2-$71,5_1$-72_1 — (15) Id. sternale: 154_1-156_1-$156,5_1$-$157,5_1$-$158,5_1$-159_2-**$159,5_2$**-$160,5_2$-161_3-$161,5_2$-162_1-163_2-$163,5_1$-164_2-165_3 — (16) Lunghezza minima del metasterno: $39,5_2$-40_5-$40,5_4$-(**40,75**)-41_4-$41,5_6$-42_4 — (17) Id. del mesosterno: $31,5_1$-32_1-$32,5_1$-**33_5**-$33,5_7$-34_9-$34,5_1$ — (18) Id. dello sterno: $91,5_1$-$92,5_1$-93_3-$93,5_3$-(**93,75**)-94_3-$94,5_2$-95_1-$95,5_3$-96_5 — (19) Lunghezza massima dell'episterno: 45-5_1-46_1-$46,5_2$-47_5-(**47,25**)-$47,5_4$-48_7-$48,5_4$-49_1 — (20) Diametro trasv. ant. del metasterno: 88_3-$88,5_5$-89_2-$89,5_3$-(**90**)-$90,5_2$-91_3-$91,5_4$-92_3 —

(19) Diametro trasv. post. del metasterno: $103,5_1$-104_1-105_5-$105,5_4$-106_1-**$106,5_2$**-107_1-$107,5_1$-108_5-109_2-$109,5_2$.

Elitre. (22) Larghezza massima dell'elitra: $84,5_1$-$85,5_3$-86_3-$86,5_8$-(**86,75**)-87_2-$87,5_2$-88_2-$88,5_3$-89_1 — (23) Diametro obliquo mass. dell'elitra: $231,5_2$-$232,5_1$-233_2-$233,5_5$-234_2-$234,5_1$-(**234,75**)-235_4-$235,5_3$-236_2-237_1-$237,5_1$-238_1.

Addome. (24) Diametro trasv. massimo del 2° segmento addominale: $122,5_1$-$123,5_1$-124_3-125_1-$125,5_4$-126_4-$126,5_3$-127_1-(**127,25**)-$127,5_1$-128_2-$128,5_2$-$130,5_1$-132_1 — (25) Id. del 3° segmento: 106_1-108_1-109_2-$109,5_3$-110_3-(**110,25**)-$110,5_2$-111_4-$111,5_3$-$112,5_4$-$114,5_2$ — (26) Id. del 4° segmento: $83,5_1$-$84,5_1$-85_1-$85,5_1$-86_3-**87_1**-$87,5_6$-88_4-$88,5_1$-89_3-$89,5_2$-$90,5_1$ — (27) Id. del 5° segmento: $55,5_1$-58_2-(**58,75**)-59_5-$59,5_3$-60_2-$60,5_6$-61_3-62_1.

Zampe posteriori. (28) Lunghezza dell'anca: 81_1-$81,5_3$-82_1-$82,5_5$-83_3-(**83,25**)-$83,5_4$-84_2-$84,5_1$-85_1-$85,5_1$ — (29) Larghezza dell'anca: 20_1-21_1-**$21,5_9$**-22_9-$22,5_3$-23_2 — (30) Lungh. del femore col trocantere: 91_2-$91,5_3$-92_1-$92,5_3$-93_2-(**93,25**)-$93,5_5$-94_4-$94,5_4$-$95,5_1$ — (31) Larghezza del femore: 25_1-$25,5_4$-26_3-**$26,5_7$**-27_6-$27,5_3$-28_1 — (32) Lunghezza della tibia: $70,5_2$-71_1-$71,5_2$-72_1-$72,5_2$-73_3-**$73,5_5$**-74_2-$74,5_3$-75_3-$76,5_1$ — (33) Id. della spina inferiore: 27_2-$27,5_4$-28_3-$28,5_3$-(**28,75**)-29_4-$29,5_5$-30_1-$30,5_2$ — (34) Id. della spina laterale interna: $38,5_2$-40_1-$40,5_2$-41_3-**$41,5_3$**-$42,5_4$-43_3-$43,5_3$-$44,5_5$ — (35) Id. del 2° articolo del tarso: $36,5_1$-38_2-$38,5_1$-**39_3**-$39,5_3$-40_4-$40,5_6$-41_3-$41,5_1$ — (36) Id. del 3° articolo: $13,5_1$-14_5-$14,5_7$-(**14,75**)-15_6-$15,5_5$-16_1 — (37) Id. del 4° articolo: 11_1-$11,5_5$-**12_{12}**-$12,5_5$-13_1 — (38) Id. del 5° articolo: $17,5_2$-18_3-**$18,5_{10}$**-19_7-$19,5_2$.

Zampe mediane. (39) Lunghezza dell'anca: 45_4-$45,5_7$-**46_6**-$46,5_5$-47_3 — (40) Id. del femore col trocantere: $70,5_1$-71_1-$71,5_3$-72_1-$72,5_4$-**73_7**-$73,5_3$-74_2-$74,5_1$-75_1-$75,5_1$ — (41) Id. della tibia: $47,5_1$-48_1-49_1-$49,5_3$-50_4-**$50,5_4$**-51_3-$51,5_3$-52_3-53_1-$53,5_1$ — (42) Id. della spina inferiore: 20_1-$20,5_2$-21_4-(**21,25**)-$21,5_8$-22_4-$22,5_3$ — (43) Id. della spina laterale interna: $23,5_1$-24_2-$24,5_3$-25_9-**$25,5_3$**-26_4-$26,5_1$-27_1-$27,5_1$ — (44) Id. del 2° articolo del tarso: [$27,5_1$]-31_3-$31,5_2$-32_4-$32,5_5$-(**32,75**)-33_5-$33,5_2$-34_2-$34,5_1$ — (45) Id. del 3° articolo: 12_1-**$13,5_4$**-14_6-$14,5_9$-15_5 — (46) Id. del 4° articolo: 10_1-11_1-**$11,5_4$**-12_{10}-$12,5_8$-13_1 — (47) Id. del 5° articolo: 18_1-19_3-**$19,5_3$**-20_8-$20,5_7$-21_3.

Zampe anteriori. (48) Lunghezza dell'anca: $25,5_3$-26_{11}-(**26,25**)-$26,5_9$-27_2 — (49) Id. del femore: 48_2-$48,5_1$-49_5-**$49,5_8$**-50_6-$50,5_2$-

51_1 — (50) Id. della tibia: $45,5_1$-$46,5_4$-47_4-(**47,25**)-$47,5_3$-48_6-$48,5_4$-49_3 — (51) Id. della spina later. esterna: 11_1-$12,5_6$-(**12,75**)-13_4-$13,5_{10}$-14_3-$14,5_1$ — (52) Id. del 5° art. del tarso: $20,5_2$-21_4-$21,5_6$-(**21,75**)-22_7-$22,5_3$-23_2 — (53) Larghezza della dilatazione del 5° articolo del tarso: [18_1]-$20,5_7$-$21,4$-**21,5**$_8$-22_3-$22,5_1$ — (54) Lunghezza dell'unghia maggiore: $18,5_1$-**20**$_6$-$20,5_{11}$-21_2-$21,5_1$ — (55) Id. dell'unghia minore: $13,5_1$-14_7-(**14,25**)-$14,5_8$-15_8.

D. *Esemplari ♀ di Nizza Mont.*

Capo. (1) Diametro antero-post. del fronte: 23_3-$23,5_2$-24_6-(**24,25**)-$24,5_9$-25_4-$25,5_1$ — (2) Id. del capo (parte dorsale): $58,5_1$-59_2-$59,5_2$-60_2-**60,5**$_5$-61_5-$61,5_4$-62_3-$62,5_1$ — (3) Id. del labbro superiore: 10_7-**10,5**$_{13}$-11_5 — (4) Larghezza massima del labbro superiore: $35,5_1$-36_3-$36,5_4$-37_5-(**37,25**)-$37,5_7$-38_3-$38,5_1$-39_1 — (5) Id. della parte ant. del capo: 51_3-$51,5_3$-52_2-$52,5_3$-**53**$_1$-$53,5_5$-54_3-$54,5_3$-55_2 — (6) Dist. fra le superficie lat. esterne degli occhi: $68,5_1$-70_3-$70,5_3$-71_1-(**71,25**)-$71,5_2$-72_3-$72,5_2$-73_2-$73,5_4$-74_1 — (7) Diametro antero-post. del capo (parte ventrale): $46,5_2$-47_5-$47,5_4$-**48**$_4$-$48,5_3$-49_4-$49,5_2$ — (8) Id. del labbro inferiore: 13_3-$13,5_{11}$-(**13,75**)-14_8-$14,5_3$ — (9) Larghezza del labbro inferiore: $23,5_2$-24_9-$24,5_7$-**25**$_5$-$25,5_1$-$26,5_1$.

Protorace. (10) Diametro antero-post. del protorace: $48,5_1$-49_1-$49,5_5$-(**49,75**)-50_7-$50,5_6$-51_5 — (11) Larghezza massima del protorace: 112_1-113_2-$113,5_2$-$114,5_1$-$115,5_2$-116_4-$116,5_2$-117_1-$117,5_5$-**118**$_1$-$118,5_1$-119_2-124_1.

Scudetto. (12) Diametro antero-post. dello scudetto: 34_2-$34,5_2$-35_1-36_8-**36,5**$_5$-37_5-$37,5_1$-39_1 — (13) Larghezza dello scudetto alla base: 38_4-$38,5_3$-39_3-**39,5**$_6$-40_5-$40,5_2$-41_2.

Sterno. (14) Lunghezza dell'apofisi mesosternale: 64_2-$65,5_5$-66_3-$66,5_1$-**67**$_2$-$67,5_1$-68_6-$68,5_1$-69_1-70_2 — (15) Id. sternale: 152_1-$153,5_1$-$156,5_1$-157_2-$157,5_1$-158_2-159_3-$159,5_2$-(**159,75**)-160_3-$161,5_1$-162_3-$163,5_1$-$164,5_1$-166_1-$167,5_1$ — (16) Lunghezza minima del metasterno: 40_3-$40,5_4$-41_7-$41,5_3$-(**41,75**)-42_3-$42,5_3$-43_1-$43,5_1$ — (17) Id. del mesosterno: $31,5_1$-32_4-$32,5_3$-(**32,75**)-33_9-$33,5_6$-34_2 — (18) Id. dello sterno: $91,5_2$-92_1-$92,5_3$-93_1-$93,5_4$-(**93,75**)-94_3-$94,5_3$-95_3-$95,5_3$-96_2 — (19) Lungh. massima dell'episterno: 46_2-$46,5_1$-47_5-$47,5_5$-(**47,75**)-48_4-$48,5_4$-49_2-$49,5_2$ — (20) Diametro trasv. ant.

del metasterno: 87_1-89_4-$89{,}5_1$-90_2-$90{,}5_3$-91_2-$91{,}5_4$-(**91,75**)-92_1-$92{,}5_2$-93_1-$93{,}5_1$-95_1-$95{,}5_1$-$96{,}5_1$ — (21) Diametro trasv. post. del metasterno: 105_2-$105{,}5_1$-106_3-$106{,}5_1$-107_2-108_1-(**108.25**)-$108{,}5_3$-$109{,}5_3$-110_6-$110{,}5_1$-111_1-$111{,}5_1$.

Elitre. (22) Larghezza massima dell'elitra: $86{,}5_1$-87_3-$87{,}5_3$-88_5-89_3-**89,5**$_1$-90_2-$90{,}5_4$-91_1-92_1-$92{,}5_1$ — (23) Diam. obliquo massimo dell'elitra: $229{,}5_1$-230_2-$230{,}5_1$-$231{,}5_3$-232_1-$232{,}5_3$-**233**$_2$-$233{,}5_1$-$234{,}5_3$-235_3-$235{,}5_2$-236_2-$236{,}5_1$.

Addome. (24) Diametro trasv. massimo del 2° segmento addominale: 125_1-$125{,}5_3$-$126{,}5_1$-127_1-$127{,}5_3$-128_4-$128{,}5_1$-129_3-(**130**)-$130{,}5_1$-$131{,}5_4$-132_2-135_1 — (25) Id. del 3° segmento: 108_1-109_2-110_1-111_3-$111{,}5_1$-112_2-$112{,}5_3$-113_3-(**113,75**)-114_1-115_2-116_4-$117{,}5_1$-$119{,}5_1$ — (26) Id. del 4° segmento: 84_1-85_1-$85{,}5_1$-$87{,}5_3$-88_4-$88{,}5_4$-(**88,75**)-89_4-90_1-91_1-$91{,}5_2$-92_1-93_1-$93{,}5_1$ — (27) Id. del 5° segmento: $57{,}5_1$-58_2-59_3-60_3-$60{,}5_5$-**61**$_3$-$61{,}5_4$-$63{,}5_2$-64_1-$64{,}5_1$.

Zampe posteriori. (28) Lunghezza dell'anca: 81_2-82_6-$82{,}5_2$-83_5-(**83,25**)-$83{,}5_2$-84_2-$84{,}5_3$-85_1-$85{,}5_2$ — (29) Larghezza dell'anca: 20_1-$20{,}5_1$-21_7-(**21,25**)-$21{,}5_8$-22_5-$22{,}5_3$ — (30) Lunghezza del femore col trocantere: [$84{,}5_1$]-88_2-$89{,}5_1$-90_5-$90{,}5_5$-**91**$_3$-$91{,}5_3$-92_1-$92{,}5_2$-$93{,}5_1$-94_2 — (31) Larghezza del femore: 24_1-$24{,}5_2$-25_8-**25,5**$_6$-26_5-$26{,}5_2$-27_1 — (32) Lunghezza della tibia: [$59{,}5_1$]-69_4-$69{,}5_3$-70_3-$70{,}5_4$-71_3-(**71,25**)-$71{,}5_1$-72_2-$72{,}5_2$-$73{,}5_2$ — (33) Id. della spina inferiore: [$21{,}5_1$]-$26{,}5_5$-27_5-$27{,}5_5$-(**27,75**)-28_5-$28{,}5_1$-29_1 — (34) Id. della spina laterale interna: [25_1]-39_2-$39{,}5_1$-40_2-$40{,}5_6$-41_4-(**41,25**)-$41{,}5_1$-42_1-43_1-$43{,}5_1$ — (35) Id. del 2° articolo del tarso: [$26{,}5_1$]-34_1-36_2-**36,5**$_5$-37_4-$37{,}5_4$-38_4-$38{,}5_3$-39_1 — (36) Id. del 3° articolo: [11_1]-$12{,}5_3$-13_7-**13,5**$_3$-14_{10}-$14{,}5_1$ — (37) Id. del 4° art.: [4_1]-10_5-$10{,}5_{10}$-(**10,75**)-11_6-$11{,}5_3$ — (38) Id. del 5° articolo: $15{,}5_2$-16_1-$16{,}5_7$-(**16.75**)-17_{10}-$17{,}5_3$-18_1.

Zampe mediane. (39) Lunghezza dell'anca: 45_3-$45{,}5_7$-46_7-**46,5**$_3$-47_2-$47{,}5_1$-48_1 — (40) Id. del femore col trocantere: $70{,}5_1$-71_3-$71{,}5_2$-72_4-$72{,}5_5$-(**72,75**)-73_5-$73{,}5_2$-74_1-$74{,}5_1$-75_1 — (41) Id. della tibia: [45_1]-$48{,}5_3$-49_5-$49{,}5_5$-(**49,75**)-50_1-$50{,}5_2$-51_1 — (42) Id. della spina inferiore: 19_2-$19{,}5_2$-20_1-**20,5**$_4$-21_6-$21{,}5_3$-22_2 — (43) Id. della spina laterale interna: [20_1]-23_1-$23{,}5_4$-24_3-(**24,25**)-$24{,}5_7$-25_4-$25{,}5_1$ — (44) Id. del 2° articolo del tarso: [$15{,}5_1$]-$29{,}5_1$-30_2-$30{,}5_1$-**31**$_3$-$31{,}5_8$-32_7-$32{,}5_2$ — (45) Id. del 3° articolo: $12{,}5_2$-13_5-**13,5**$_7$-14_8-$14{,}5_2$ — (46) Id. del 4° articolo: $10{,}5_2$-11_8-(**11,25**)-$11{,}5_5$-12_3 — (47) Id. del 5° articolo: 17_1-$17{,}5_2$-18_6-**18,5**$_2$-19_5-20_1.

Zampe anteriori. (48) Lunghezza dell'anca: $24,5_1$-$\mathbf{25,5}_9$-26_{10}-$26,5_3$ — (49) Id. del femore: $47,5_2$-48_2-$48,5_2$-49_4-$49,5_5$-(**49,75**)-50_4-$50,5_3$-51_2-52_1 — (50) Id. della tibia: $46,5_1$-47_3-$47,5_9$-48_4-$\mathbf{48.5}_4$-49_2-$49,5_1$-$50,5_1$ — (51) Id. della spina laterale esterna: $10,5_1$-11_4-$\mathbf{11,5}_7$-12_8-$12,5_4$ — Id. del 5° articolo del tarso: $13,5_1$-14_3-$\mathbf{14,5}_{14}$-15_5-$15,5_2$.

Posizioni apparenti di stelle del Catalogo di Newcomb per il 1906

Calcolate dai Dottori BALBI, NICOLIS e VIRIGLIO.

Le posizioni apparenti di stelle date nei fogli seguenti sono la continuazione pel 1906 del lavoro analogo eseguito nel R. Osservatorio di Torino pel 1905, e sono destinate principalmente al lavoro sistematico di riosservazione delle dette stelle, molte delle quali nel Catalogo di Newcomb non hanno il grado di precisione delle altre fondamentali date dalle grandi Effemeridi astronomiche.

Giorno del mese	27 ρ Andromedae gr. : 5,4		15 κ Cassiopejae gr. : 4.2		59 (Heis) Cassiop. gr. : 5,5		68 *h* Piscium gr. : 5,7		72 Piscium gr. : 5,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$0^h.16^m$	$37^\circ.26'$	$0^h.27^m$	$62^\circ.24'$	$0^h.44^m$	$63^\circ.43'$	$0^h.52^m$	$28^\circ.28'$	$1^h.0^m$	$14^\circ.26'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	9,62	59,5	39,23	59,5	61,23	81,4	44,46	65,3	7,14	24,1
11	9,44	58,3	38,84	59,0	60,82	81,2	44,31	64,6	7,00	23,4
21	9,27	57,1	38,46	58,0	60,42	80,4	44,15	63,7	6,87	22,6
31	9,11	55,6	38,11	56,4	60,03	79,0	44,00	62,6	6,75	21,8
Febbr. 10					59,67	77,2	43,86	61,3	6,65	20,9
20										
Marzo 2										
12										
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21	9,86	41,0	38,68	32,1						
31	10,19	41,5	39,17	31,7	60,76	53,9	44,66	53,3	7,33	20,6
Giugno 10	10,54	42,4	39,70	31,8	61,29	53,7	44,97	54,3	7,61	22,1
20	10,90	43,9	40,24	32,4	61,86	54,1	45,30	55,6	7,92	23,7
30	11,26	45,6	40,79	33,6	62,43	55,0	45,63	57,2	8,23	25,6
Luglio 10	11,61	47,7	41,33	35,2	63,00	56,4	45,97	59,0	8,55	27,5
20	11,95	49,9	41,84	37,3	63,55	58,2	46,30	61,1	8,85	29,5
30	12,26	52,4	42,32	39,7	64,07	60,5	46,61	63,2	9,15	31,5
Agosto 9	12,54	55,0	42,75	42,5	64,54	63,1	46,90	65,5	9,42	33,4
19	12,78	57,7	43,13	45,5	64,96	66,0	47,15	67,8	9,67	35,3
29	12,98	60,4	43,44	48,7	65,32	69,2	47,38	70,1	9,89	37,0
Sett. 8	13,13	63,1	43,69	52,1	65,61	72,4	47,57	72,3	10,07	38,6
18	13,25	65,7	43,86	55,5	65,84	75,8	47,71	74,4	10,22	40,0
28	13,32	68,2	43,97	58,9	65,99	79,2	47,83	76,3	10,33	41,2
Ottobre 8	13,35	70,5	44,01	62,3	66,08	82,5	47,90	78,1	10,41	42,1
18	13,34	72,5	43,98	65,5	66,09	85,8	47,94	79,7	10,46	42,9
28	13,29	74,3	43,89	68,4	66,03	88,9	47,95	81,1	10,48	43,4
Nov. 7	13,21	75,8	43,74	71,1	65,90	91,7	47,92	82,2	10,47	43,8
17	13,11	77,0	43,53	73,5	65,71	94,3	47,87	83,1	10,43	43,9
27	12,98	77,9	43,26	75,4	65,47	96,4	47,79	83,8	10,37	43,9
Dic. 7	12,83	78,3	42,96	76,8	65,17	98,1	47,69	84,1	10,29	43,8
17	12,67	78,4	42,62	77,8	64,83	99,2	47,57	84,2	10,19	43,4
27	12,50	78,1	42,25	78,1	64,45	99,9	47,44	84,0	10,08	42,9
37	12,32	77,4	41,87	77,9	64,05	99,9	47,29	83,5	9,96	42,3
Posizione media	$0^h.16^m.10^s,02$	$+37^\circ.26'.52'',6$	$0^h.27^m.39^s,04$	$+62^\circ.24'.47'',0$	$0^h.45^m.0^s,82$	$+63^\circ.44'.9'',2$	$0^h.52^m.44^s,74$	$+28^\circ.29'.2'',6$	$1^h.0^m.7^s,51$	$+14^\circ.26'.26'',4$

Giorno del mese	83 τ Piscium gr. : 4,7		91 ζ Piscium gr. : 5,3		46 Ξ Andromedae gr. : 4,9		48 ω Andromedae gr. : 4,9		53 τ Andromedae gr. : 5,2	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$1^h.6^m$	29°.35′	$1^h.15^m$	28°.14′	$1^h.16^m$	45°.1′	$1^h.22^m$	44°.55′	$1^h.35^m$	40°.5′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	28,65	29,3	55,14	50,5	48,20	77,2	1,73	24,7	1,79	69,1
11	28,49	28,7	54,99	50,0	47,99	77,0	1,52	24,5	1,61	68,9
21	28,33	27,9	54,83	49,3	47,77	76,4	1,30	23,9	1,42	68,4
31	28,18	26,9	54,67	48,3	47,55	75,4	1,08	23,0	1,21	67,6
Febbr. 10	28,04	25,7	54,52	47,1	47,33	74,0	0,87	21,6	1,01	66,4
20			54,38	45,9	47,14	72,4	0,67	20,0	0,82	65,0
Marzo 2										
12										
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31	28,68	16,9								
Giugno 10	28,99	17,8	55,38	40,0	48,23	57,9	1,71	5,5	1,68	52,7
20	29,32	19,0	55,70	41,1	48,61	58,6	2,08	6,1	2,03	53,4
30	29,66	20,5	56,04	42,6	49,00	59,6	2,48	7,1	2,40	54,4
Luglio 10	30,00	22,3	56,38	44,3	49,40	60,9	2,88	8,4	2,77	55,7
20	30,33	24,3	56,71	46,2	49,80	62,7	3,27	10,1	3,14	57,3
30	30,65	26,3	57,03	48,2	50,18	64,7	3,66	12,1	3,51	59,2
Agosto 9	30,95	28,4	57,33	50,3	50,53	67,0	4,01	14,3	3,86	61,2
19	31,22	30,7	57,60	52,5	50,85	69,4	4,34	16,7	4,17	63,5
29	31,46	32,9	57,85	54,7	51,14	72,0	4,64	19,2	4,46	65,8
Sett. 8	31,66	35,2	58,06	56,8	51,39	74,6	4,89	21,8	4,72	68,2
18	31,83	37,2	58,23	58,8	51,61	77,4	5,11	24,5	4,94	70,7
28	31,96	39,2	58,37	60,7	51,76	80,0	5,28	27,2	5,11	73,1
Ottobre 8	32,05	41,1	58,47	62,4	51,88	82,6	5,40	29,7	5,25	75,4
18	32,11	42,8	58,54	64,0	51,95	85,1	5,49	32,2	5,35	77,6
28	32,13	44,3	58,57	65,4	51,99	87,4	5,53	34,5	5,42	79,6
Nov. 7	32,12	45,5	58,58	66,6	51,98	89,5	5,53	36,6	5,43	81,5
17	32,08	46,5	58,55	67,5	51,93	91,4	5,49	38,5	5,41	83,1
27	32,01	47,2	58,49	68,2	51,85	92,9	5,41	40,0	5,36	84,5
Dic. 7	31,92	47,7	58,41	68,6	51,72	94,1	5,30	41,3	5,27	85,6
17	31,81	47,9	58,31	68,8	51,58	94,9	5,15	42,1	5,16	86,4
27	31,68	47,8	58,18	68,7	51,39	95,4	4,98	42,6	5,01	86,8
37	31,53	47,4	58,04	68,4	51,20	95,4	4,78	42,7	4,84	86,9
Posizione media	$1^h.6^m.28^s,83$	$+29°.35'.26'',7$	$1^h.15^m.55^s,28$	$+28°.14'.48'',6$	$1^h.16^m.48^s,08$	$+45°.2'.10'',4$	$1^h.22^m.1^s,58$	$+44°.55'.18'',1$	$1^h.35^m.1^s,66$	$+40°.6'.4'',3$

Giorno del mese	5 γ Arietis (* a S.) gr. : 4,7		9 λ Arietis gr. : 5,0		53 Cassiopejae gr. : 5,6		15 Arietis gr. : 5,9		6 Persei gr. : 5,4	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$1^h.48^m$	18°.49′	$1^h.52^m$	23°.8′	$1^h.56^m$	63°.55′	$2^h.5^m$	19°.3′	$2^h.7^m$	50°.37′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	22,17	57,0	41,31	15,1	3,20	80,2	24,85	22,6	21,44	52,1
11	22,05	56,6	41,18	14,8	2,82	80,9	24,72	22,2	21,22	52,5
21	21,90	55,9	41,03	14,2	2,42	81,0	24,58	21,7	20,98	52,5
31	21,75	55,2	40,88	13,5	2,00	80,6	24,43	21,0	20,71	52,0
Febbr. 10	21,60	54,4	40,72	12,7	1,59	79,7	24,27	20,3	20,44	51,2
20	21,46	53,6	40,56	11,7	1,19	78,3	24,12	19,5	20,18	49,9
Marzo 2	21,33	52,7	40,42	10,7	0,83	76,4	23,98	18,7	19,94	48,4
12										
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20	22,40	54,0	41,49	9,5	2,33	55,3	24,90	19,6	21,04	32,5
30	22,72	55,5	41,79	10,9	2,89	55,4	25,20	21,0	21,46	32,9
Luglio 10	23,04	57,1	42,12	12,4	3,47	55,9	25,52	22,6	21,89	33,6
20	23,35	58,9	42,45	14,1	4,06	56,8	25,84	24,3	22,33	34,7
30	23,67	60,7	42,77	15,9	4,65	58,2	26,16	26,0	22,76	36,1
Agosto 9	23,97	62,6	43,07	17,8	5,21	60,0	26,46	27,8	23,18	37,8
19	24,25	64,4	43,36	19,7	5,74	62,1	26,75	29,5	23,58	39,9
29	24,50	66,1	43,63	21,5	6,23	64,6	27,02	31,2	23,95	42,1
Sett. 8	24,73	67,7	43,86	23,3	6,67	67,3	27,26	32,8	24,29	44,5
18	24,93	69,3	44,07	24,9	7,05	70,2	27,47	34,2	24,59	47,0
28	25,09	70,6	44,24	26,5	7,38	73,3	27,65	35,5	24,84	49,6
Ottobre 8	25,23	71,7	44,38	27,8	7,63	76,4	27,80	36,6	25,06	52,3
18	25,33	72,7	44,49	29,1	7,82	79,6	27,92	37,6	25,22	54,9
28	25,40	73,5	44,56	30,1	7,94	82,8	28,01	38,4	25,34	57,4
Nov. 7	25,43	74,1	44,61	31,0	7,98	85,8	28,07	39,0	25,41	59,9
17	25,44	74,6	44,62	31,7	7,96	88,7	28,09	39,4	25,43	62,1
27	25,43	74,8	44,60	32,2	7,86	91,3	28,09	39,7	25,40	64,2
Dic. 7	25,38	74,9	44,56	32,5	7,69	93,6	28,06	39,8	25,33	65,9
17	25,31	74,8	44,49	32,7	7,45	95,5	28,00	39,8	25,21	67,4
27	25,21	74,6	44,39	32,6	7,15	96,9	27,91	39,7	25,04	68,5
37	25,10	74,2	44,27	32,3	6,80	97,9	27,81	39,4	24,83	69,1
Posizione media	$1^h.48^m.22^s,24$	+18°.49′.59″,3	$1^h.52^m.41^s,31$	+23°.8′.16″,1	$1^h.56^m.2^s,11$	+63°.56′.10″,9	$2^h.5^m.24^s,82$	+19°.3′.25″,3	$2^h.7^m.20^s,87$	+50°.37′.46″,0

Giorno del mese	22 θ Arietis gr. : 5,7		24 ξ Arietis gr. : 5,8		27 Arietis gr. : 6,5		35 Arietis gr. : 4,6		39 Arietis gr. : 4,8	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$2^h.12^m$	19°.27′	$2^h.19^m$	10°.10′	$2^h.25^m$	17°.17′	$2^h.37^m$	27°.18′	$2^h.42^m$	28°.51′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	53,76	56,9	46,62	60,5	41,56	14,2	56,22	25,6	18,86	34,3
11	53,64	56,6	46,51	59,9	41,44	13,8	56,10	25,6	18,74	34,2
21	53,50	56,1	46,37	59,3	41,31	13,4	55,96	25,4	18,59	34,0
31	53,34	55,5	46,23	58,7	41,16	12,8	55,79	25,0	18,42	33,5
Febbr. 10	53,18	54,8	46,08	58,2	41,00	12,2	55,61	24,3	18,24	32,9
20	53,02	54,0	45,93	57,6	40,84	11,5	55,43	23,6	18,06	32,3
Marzo 2	52,88	53,2	45,79	57,1	40,69	10,8	55,26	22,7	17,88	31,5
12							55,11	21,8	17,72	30,5
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20	53,73	53,8	46,53	62,9	41,41	11,3				
30	54,03	55,2	46,82	64,6	41,70	12,5	56,20	19,5	18,79	27,3
Luglio 10	54,34	56,7	47,12	66,3	42,01	13,8	56,52	20,7	19,11	28,3
20	54,66	58,3	47,43	68,0	42,32	15,3	56,85	22,0	19,44	29,6
30	54,98	60,0	47,74	69,7	42,64	16,9	57,19	23,6	19,78	31,0
Agosto 9	55,29	61,8	48,04	71,4	42,95	18,6	57,52	25,1	20,12	32,5
19	55,59	63,5	48,32	72,9	43,24	20,3	57,83	26,7	20,44	34,1
29	55,86	65,1	48,59	74,3	43,52	21,9	58,13	28,4	20,74	35,8
Sett. 8	56,10	66,7	48,83	75,6	43,77	23,4	58,41	30,0	21,03	37,5
18	56,32	68,1	49,05	76,6	43,99	24,9	58,66	31,6	21,28	39,1
28	56,51	69,4	49,23	77,4	44,19	26,2	58,88	33,1	21,51	40,7
Ottobre 8	56,66	70,5	49,39	78,0	44,36	27,3	59,08	34,6	21,72	42,2
18	56,79	71,5	49,52	78,4	44,50	28,3	59,24	36,0	21,89	43,6
28	56,89	72,3	49,62	78,6	44,61	29,1	59,37	37,1	22,02	44,8
Nov. 7	56,95	72,9	49,69	78,7	44,69	29,7	59,47	38,2	22,12	46,0
17	56,99	73,4	49,73	78,6	44,74	30,2	59,53	39,2	22,20	47,0
27	56,99	73,7	49,74	78,4	44,76	30,5	59,56	39,9	22,23	47,9
Dic. 7	56,97	73,9	49,72	78,0	44,74	30,7	59,56	40,6	22,23	48,6
17	56,91	73,9	49,67	77,6	44,70	30,7	59,52	41,0	22,20	49,1
27	56,83	73,8	49,60	77,1	44,63	30,4	59,45	41,3	22,13	49,5
37	56,72	73,5	49,50	76,6	44,53	30,2	59,34	41,4	22,02	49,7
Posizione media	$2^h.12^m.53^s,69$	$+19°.27'.59'',8$	$2^h.19^m\ 46^s,59$	$+10°.11'.6'',5$	$2^h.25^m.41^s,44$	$+17°.17'.18'',1$	$2^h.37^m.55^s,95$	$+27°.18'.26'',9$	$2^h.42^m.18^s,55$	$+28°.51'.35'',2$

Giorno del mese	15 η Persei gr. : 3,9		ι Persei gr. : 4,2		35 σ Persei gr. : 4,4		11 (Heis) Camelop. gr. : 5,2		38 o Persei gr. : 3,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$2^h.43^m$	$55^\circ.30'$	$3^h.2^m$	$49^\circ.15'$	$3^h.23^m$	$47^\circ.40'$	$3^h.33^m$	$62^\circ.54'$	$3^h.38^m$	$31^\circ.59'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	50,99	26,3	17,50	18,8	57,44	17,9	61,04	49,2	25,77	24,3
11	50,77	27,2	17,33	19,8	57,30	19,0	60,81	50,9	25,69	24,8
21	50,50	27,8	17,12	20,3	57,12	19,6	60,50	52,2	25,56	25,0
31	50,20	27,8	16,88	20,4	56,90	19,9	60,14	53,0	25,40	25,0
Febbr. 10	49,88	27,4	16,62	20,1	56,64	19,9	59,75	53,3	25,22	24,9
20	49,57	26,6	16,35	19,5	56,38	19,5	59,33	53,1	25,02	24,5
Marzo 2	49,26	25,3	16,09	18,5	56,11	18,7	58,91	52,4	24,81	24,0
12	48,99	23,7	15,85	17,2	55,86	17,6	58,51	51,3	24,62	23,3
22					55,64	16,3	58,16	49,8	24,44	22,4
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30	50,30	6,9	16,88	2,9						
Luglio 10	50,76	7,0	17,28	3,1	57,35	4,3	60,13	30,0	25,76	18,9
20	51,24	7,5	17,70	3,6	57,76	4,9	60,70	30,1	26,10	19,8
30	51,72	8,5	18,14	4,4	58,18	5,8	61,29	30,6	26,44	20,8
Agosto 9	52,20	9,8	18,57	5,5	58,60	7,0	61,87	31,4	26,78	22,0
19	52,66	11,5	18,99	7,0	59,00	8,4	62,45	32,7	27,12	23,2
29	53,11	13,2	19,40	8,6	59,38	10,0	63,01	34,2	27,44	24,5
Sett. 8	53,52	15,4	19,78	10,4	59,75	11,7	63,54	36,0	27,74	25,8
18	53,90	17,7	20,14	12,5	60,08	13,6	64,03	38,2	28,03	27,2
28	54,23	20,1	20,46	14,6	60,39	15,6	64,48	40,5	28,29	28,5
Ottobre 8	54,53	22,7	20,75	16,8	60,66	17,7	64,87	43,0	28,52	29,7
18	54,77	25,4	21,00	19,1	60,89	19,8	65,21	45,7	28,73	30,9
28	54,96	28,0	21,21	21,4						
Nov. 7	55,10	30,6	21,37	23,6	61,08	21,9	65,49	48,4	28,90	32,1
17	55,19	33,2	21,48	25,8	61,22	23,9	65,70	51,1	29,04	33,2
27	55,22	35,5	21,55	27,9	61,31	25,9	65,82	53,9	29,15	34,2
Dic. 7	55,18	37,7	21,56	29,7	61,36	27,7	65,87	56,5	29,21	35,1
17	55,09	39,6	21,52	31,4	61,35	29,3	65,84	58,9	29,23	35,9
27	54,94	41,1	21,42	32,8	61,28	30,8	65,72	61,4	29,21	36,6
37	54,73	42,3	21,28	33,9	61,17	31,9	65,53	64,0	29,14	36,9
Posizione media	$2^h.43^m.50^s,04$	$+55^\circ.30'.21'',0$	$3^h.2^m.16^s,68$	$+49^\circ.15'.15'',8$	$3^h.23^m.56^s,59$	$+47^\circ.40'.16'',3$	$3^h.33^m.59^s,39$	$+62^\circ.54'.45'',6$	$3^h.38^m.25^s,20$	$+31^\circ.59'.26'',7$

Giorno del mese	17 Tauri gr. : 3,8		27 Tauri gr. : 3,8		47 λ Persei gr. : 4,3		42 ψ Tauri gr. : 5,4		44 ρ Tauri gr. : 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$3^h.39^m$	23°.48′	$3^h.43^m$	23°.45′	$3^h.59^m$	50°.5′	$4^h.1^m$	28°.44′	$4^h.5^m$	26°.14′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	17,95	61,2	34,72	54,6	35,70	48,4	12,27	47,2	6,83	5,3
11	17,87	61,2	34,65	54,7	35,59	49,8	12,21	47,5	6,77	5,5
21	17,76	61,2	34,54	54,6	35,43	50,8	12,10	47,8	6,67	5,7
31	17,61	61,0	34,40	54,5	35,21	51,5	11,96	47,9	6,53	5,7
Febbr. 10	17,44	60,7	34,23	54,2	34,95	51,9	11,79	47,8	6,36	5,6
20	17,26	60,4	34,05	53,9	34,68	51,8	11,59	47,6	6,18	5,4
Marzo 2	17,08	59,9	33,86	53,4	34,39	51,4	11,39	47,2	5,98	5,0
12	16,90	59,3	33,68	52,9	34,11	50,7	11,20	46,7	5,78	4,5
22	16,73	58,8	33,51	52,4	33,85	49,7	11,02	46,1	5,61	4,0
Aprile 1					33,62	48,3	10,85	45,4	5,46	3,5
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10	17,66	59,0	34,40	52,6						
20	17,97	60,0	34,71	53,5	35,12	35,4	12,07	43,9	6,61	3,3
30	18,29	61,2	35,02	54,6	35,54	35,6	12,39	44,7	6,92	4,1
Agosto 9	18,61	62,4	35,35	55,8	35,97	36,0	12,72	45,7	7,24	5,1
19	18,93	63,6	35,67	57,0	36,40	36,7	13,05	46,7	7,57	6,1
29	19,24	64,8	35,98	58,2	36,84	37,6	13,38	47,7	7,89	7,1
Sett. 8	19,55	66,0	36,28	59,4	37,26	38,8	13,70	48,8	8,20	8,2
18	19,83	67,1	36,57	60,5	37,67	40,2	14,01	49,9	8,51	9,2
28	20,09	68,2	36,84	61,5	38,05	41,8	14,30	50,9	8,79	10,1
Ottobre 8	20,34	69,1	37,09	62,4	38,41	43,5	14,57	51,9	9,06	11,0
18	20,56	70,0	37,31	63,3	38,74	45,4	14,82	52,9	9,31	11,9
28	20,75	70,8	37,50	64,0	39,03	47,3	15,04	53,8	9,53	12,6
Nov. 7	20,92	71,5	37,67	64,7	39,28	49,3	15,24	54,7	9,73	13,3
17	21,05	72,0	37,81	65,3	39,49	51,4	15,40	55,8	9,89	14,0
27	21,15	72,5	37,91	65,7	39,64	53,4	15,52	56,3	10,02	14,6
Dic. 7	21,21	73,0	37,98	66,1	39,74	55,3	15,61	57,0	10,11	15,1
17	21,23	73,3	38,01	66,5	39,78	57,2	15,66	57,6	10,16	15,5
27	21,21	73,5	37,99	66,7	39,76	58,9	15,66	58,1	10,17	16,0
37	21,16	73,7	37,95	66,9	39,68	60,4	15,62	58,4	10,13	16,3
Posizione media	$3^h.39^m.17^s,47$	$+23°.49'.5'',4$	$3^h.43^m.34^s,23$	$+23°.45'.59'',0$	$3^h.59^m.34^s,65$	$+50°.5'.48'',2$	$4^h.1^m.11^s,67$	$+28°.44'.51'',1$	$4^h.5^m.6^s,24$	$+26°.14'.9'',8$

Giorno del mese	51 μ Persei gr.: 4,3		54 Persei gr.: 5,1		68 Tauri gr.: 4,6		1 Camelop. gr.: 5,5		80 Tauri gr.: 6,0	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
	$4^h.7^m$	48°.10′	$4^h.14^m$	34°.20′	$4^h.20^m$	17°.42′	$4^h.24^m$	53°.42′	$4^h.24^m$	15°.25′
	s	′	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	60,52	15,1	18,98	21,4	3,51	41,2	36,15	25,6	47,44	52,0
11	60,43	16,3	18,93	22,1	3,46	41,0	36,06	27,2	47,40	51,7
21	60,28	17,3	18,83	22,6	3,38	40,8	35,90	28,6	47,32	51,5
31	60,08	18,0	18,68	22,9	3,26	40,6	35,68	29,7	47,20	51,2
Febbr. 10	59,84	18,4	18,50	23,1	3,11	40,4	35,41	30,4	47,05	51,0
20	59,58	18,4	18,29	23,0	2,94	40,1	35,11	30,6	46,89	50,7
Marzo 2	59,30	18,1	18,08	22,7	2,76	39,9	34,80	30,5	46,71	50,5
12	59,03	17,4	17,87	22,2	2,57	39,6	34,48	30,0	46,52	50,3
22	58,77	16,5	17,66	21,6	2,40	39,3	34,18	29,2	46,35	50,0
Aprile 1	58,55	15,3	17,48	21,8	2,24	39,1	33,92	28,0	46,19	49,9
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20	59,91	3,1	18,62	15,8	3,20	43,4	35,13	12,7	47,09	55,4
30	60,31	3,2	18,95	16,3	3,49	44,4	35,56	12,5	47,37	56,5
Agosto 9	60,73	3,6	19,29	17,0	3,79	45,5	36,02	12,6	47,67	57,6
19	61,15	4,3	19,64	17,8	4,09	46,5	36,49	12,9	47,97	58,6
29	61,57	5,2	19,99	18,7	4,40	47,5	36,96	13,5	48,27	59,6
Sett. 8	61,98	6,2	20,33	19,7	4,70	48,4	37,42	14,4	48,57	60,4
18	62,38	7,5	20,66	20,8	4,99	49,2	37,87	15,5	48,86	61,1
28	62,76	8,9	20,98	21,9	5,27	49,8	38,31	16,8	49,14	61,7
Ottobre 8	63,11	10,5	21,28	23,0	5,53	50,3	38,72	18,4	49,40	62,1
18	63,44	12,2	21,55	24,1	5,78	50,7	39,11	20,1	49,64	62,4
28	63,73	14,0	21,80	25,2	6,00	51,0	39,46	21,9	49,87	62,5
Nov. 7	63,99	15,8	22,02	26,3	6,20	51,1	39,76	23,9	50,07	62,6
17	64,20	17,7	22,21	27,4	6,37	51,2	40,02	26,0	50,24	62,5
27	64,36	19,6	22,36	28,5	6,50	51,2	40,22	28,1	50,38	62,3
Dic. 7	64,47	21,5	22,46	29,5	6,60	51,2	40,37	30,1	50,48	62,1
17	64,52	23,3	22,52	30,4	6,67	51,1	40,45	32,3	50,55	61,9
27	64,52	24,9	22,54	31,3	6,69	51,0	40,46	34,3	50,57	61,7
37	64,45	26,3	22,51	32,1	6,67	50,9	40,40	36,0	50,55	61,4
Posizione media	$4^h.7^m.59^s,51$	$+48^\circ.10'.15'',5$	$4^h.14^m.18^s,27$	$+34^\circ.20'.24'',7$	$4^h.20^m.2^s,95$	$+17^\circ.42'.47'',8$	$4^h.24^m.34^s,89$	$+53^\circ.42'.26'',2$	$4^h.24^m.46^s,88$	$+15^\circ.25'.59'',3$

Giorno del mese	86 ρ Tauri gr. : 4,9		4 o^1 Orionis gr. : 4,8		98 *k* Tauri gr. : 6,1		130 Tauri gr. : 5,5		70 ξ Orionis gr. : 4,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$4^h.28^m$	14°.38′	$4^h.47^m$	14°.5′	$4^h.52^m$	24°.54′	$5^h.41^m$	17°.41′	$6^h.6^m$	14°.13′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	31,33	42,5	13,45	32,3	24,85	14,0	58,05	31,4	36,49	40,3
11	31,29	42,2	13,42	32,0	24,83	14,2	58,08	31,2	36,54	40,0
21	31,21	41,9	13,35	31,7	24,77	14,4	58,06	31,1	36,54	39,7
31	31,09	41,6	13,25	31,4	24,67	14,6	58,00	31,1	36,50	39,5
Febbr. 10	30,95	41,3	13,11	31,2	24,52	14,7	57,89	31,0	36,41	39,4
20	30,78	41,1	12,95	31,0	24,35	14,7	57,74	31,0	36,28	39,3
Marzo 2	30,60	40,9	12,77	30,8	24,16	14,6	57,57	31,0	36,12	39,3
12	30,42	40,7	12,58	30,6	23,96	14,4	57,39	31,1	35,94	39,3
22	30,25	40,5	12,40	30,5	23,76	14,2	57,20	31,1	35,75	39,4
Aprile 1	30,09	40,3	12,24	30,4	23,59	13,8	57,01	31,0	35,57	39,5
11			12,10	30,4	23,44	13,4	56,84	31,0	35,40	39,6
21							56,70	31,1	35,25	39,8
Maggio 1									35,12	40,0
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20	30,95	46,2								
30	31,23	47,3	13,19	37,2	24,57	14,1				
Agosto 9	31,52	48,4	13,48	38,2	24,87	14,7	57,73	35,2		
19	31,82	49,4	13,77	39,2	25,18	15,4	58,01	35,8	36,29	46,3
29	32,12	50,4	14,07	40,1	25,50	16,1	58,30	36,3	36,57	46,8
Sett. 8	32,42	51,2	14,37	40,8	25,82	16,8	58,60	36,7	36,85	47,2
18	32,71	51,9	14,66	41,4	26,13	17,4	58,90	37,0	37,14	47,4
28	32,99	52,4	14,95	41,8	26,44	18,0	59,20	37,1	37,44	47,4
Ottobre 8	33,25	52,8	15,22	42,1	26,74	18,5	59,50	37,2	37,74	47,3
18	33,50	53,0	15,47	42,2	27,02	19,0	59,79	37,1	38,03	47,0
28	33,72	53,1	15,71	42,2	27,28	19,4	60,07	36,9	38,32	46,7
Nov. 7	33,92	53,1	15,93	42,0	27,51	19,8	60,34	36,7	38,60	46,2
17	34,10	53,0	16,12	41,8	27,73	20,1	60,58	36,4	38,86	45,6
27	34,24	52,7	16,28	41,5	27,90	20,4	60,80	36,1	39,09	45,0
Dic. 7	34,35	52,4	16,41	41,1	28,05	20,7	60,99	35,8	39,29	44,4
17	34,42	52,2	16,50	40,7	28,15	20,9	61,13	35,5	39,46	43,9
27	34,44	51,9	16,54	40,4	28,20	21,2	61,23	35,2	39,59	43,4
37	34,43	51,6	16,54	40,1	28,21	21,5	61,29	35,1	39,67	43,0
Posizione media	$4^h.28^m.30^s,76$	$+14°.38'.50'',0$	$4^h.47^m.12^s,83$	$+14°.5'.40'',2$	$4^h.52^m.24^s,17$	$+24°.54'.20'',2$	$5^h.41^m.57^s,35$	$+17°.41'.39'',50$	$6^h.6^m.35^s,78$	$+14°.13'.49'',1$

Giorno del mese	74 *k* Orionis gr. : 5,4		2 Lyncis gr. : 4,3		6 Lyncis gr. : 6,0		58 7 Aurigae gr. : 5,0		45 Geminorum gr. : 5,5	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$6^h.11^m$	12°.17′	$6^h.11^m$	59°.2′	$6^h.22^m$	58°.13′	$6^h.44^m$	41°.53′	$7^h.1^m$	16°.4′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	10,64	47,2	21,46	39,7	38,93	49,9	7,99	24,9	59,30	43,8
11	10,69	46,7	21,52	40,6	39,02	52,1	8,11	26,1	59,41	43,3
21	10,70	46,3	21,50	42,5	39,02	54,2	8,16	27,4	59,47	43,0
31	10,65	46,0	21,39	44,4	38,94	56,2	8,14	28,7	59,47	42,9
Febbr. 10	10,57	45,8	21,20	46,2	38,77	58,0	8,05	30,0	59,42	42,9
20	10,45	45,6	20,94	47,8	38,53	59,6	7,92	31,1	59,34	42,9
Marzo 2	10,29	45,6	20,62	49,0	38,24	60,8	7,73	32,1	59,21	43,0
12	10,11	45,6	20,27	49,8	37,90	61,7	7,52	32,8	59,05	43,2
22	9,92	45,6	19,90	50,1	37,54	62,2	7,28	33,4	58,87	43,4
Aprile 1	9,74	45,7	19,53	50,0	37,18	62,2	7,03	33,7	58,69	43,6
11	9,57	45,9	19,18	49,5	36,83	61,8	6,80	33,7	58,51	43,9
21	9,42	46,1	18,87	48,6	36,52	61,1	6,58	33,4	58,34	44,1
Maggio 1	9,29	46,4	18,61	47,4	36,26	60,0	6,39	33,0	58,19	44,4
11							6,25	32,3	58,07	44,7
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19	10,41	53,3	20,37	29,0	37,81	41,5				
29	10,68	53,8	20,86	28,1	38,29	40,5	7,75	21,6	59,12	47,8
Sett. 8	10,96	54,1	21,37	27,5	38,78	39,7	8,10	20,9	59,38	47,8
18	11,25	54,3	21,91	27,1	39,29	39,2	8,47	20,4	59,65	47,7
28	11,54	54,3	22,45	27,0	39,82	38,9	8,84	19,9	59,95	47,4
Ottobre 8	11,84	54,2	22,99	27,2	40,36	38,9	9,23	19,6	60,25	47,0
18	12,13	53,9	23,53	27,7	40,89	39,2	9,62	19,4	60,55	46,4
28	12,42	53,4	24,05	28,4	41,41	39,8	10,01	19,4	60,86	45,7
Nov. 7	12,69	52,8	24,55	29,5	41,91	40,7	10,39	19,5	61,17	44,9
17	12,95	52,1	25,01	30,8	42,37	41,8	10,75	19,8	61,46	44,1
27	13,19	51,3	25,43	32,4	42,79	43,3	11,09	20,3	61,73	43,3
Dic. 7	13,39	50,5	25,78	34,3	43,16	45,0	11,39	21,0	61,99	42,5
17	13,56	49,8	26,06	36,3	43,46	46,9	11,65	21,9	62,22	41,8
27	13,69	49,2	26,27	38,4	43,68	48,9	11,85	22,9	62,40	41,1
37	13,77	48,6	26,39	40,7	43,82	51,1	12,00	24,1	62,54	40,6
Posizione media	$6^h.11^m.9^s,93$	$+12°.17'.55'',9$	$6^h.11^m.19^s,92$	$+59°.2'.44'',5$	$6^h.22^m.37^s,48$	$+58°.13'.56'',9$	$6^h.44^m.7^s,11$	$+41°.53'.33'',3$	$7^h.2^m.58^s,61$	$+16°.4'.52'',3$

Giorno del mese	64 Aurigae gr.: 5,7		6 Canis min. gr.: 4,8		69 υ Geminor. gr.: 4,3		71 o Geminor. gr.: 5,1		10 μ Cancri gr.: 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$7^h.11^m$	41°.2′	$7^h.24^m$	12°.11′	$7^h.30^m$	27°.6′	$7^h.33^m$	34°.47′	$8^h.2^m$	21°.51′
	s	″	s	″	s	″	s	″		″
Genn. 1	31,02	53,2	34,55	56,6	8,57	9,3	2,63	51,1	14,63	8,7
11	31,17	54,4	34,68	55,9	8,72	9,4	2,79	51,8	14,80	8,4
21	31,25	55,6	34,76	55,3	8,82	9,7	2,89	52,6	14,93	8,4
31	31,26	56,9	34,78	54,9	8,85	10,2	2,93	53,5	15,00	8,5
Febbr. 10	31,21	58,2	34,76	54,6	8,83	10,8	2,91	54,4	15,01	8,7
20	31,10	59,4	34,69	54,5	8,76	11,4	2,84	55,5	14,97	9,1
Marzo 2	30,94	60,5	34,57	54,5	8,64	12,1	2,71	56,5	14,88	9,6
12	30,74	61,5	34,43	54,6	8,49	12,7	2,55	57,4	14,76	10,1
22	30,52	62,3	34,26	54,8	8,31	13,3	2,36	58,1	14,61	10,7
Aprile 1	30,29	62,8	34,09	55,0	8,12	13,8	2,15	58,8	14,44	11,2
11	30,05	63,0	33,91	55,3	7,92	14,1	1,94	59,2	14,26	11,7
21	29,83	63,0	33,74	55,6	7,74	14,4	1,73	59,4	14,08	12,2
Maggio 1	29,63	62,8	33,59	56,0	7,58	14,5	1,55	59,4	13,91	12,6
11	29,44	62,3	33,46	56,4	7,43	14,6	1,39	59,3	13,77	12,8
21							1,27	59,0	13,65	13,1
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29	30,65	51,3	34,28	61,2	8,27	10,9				
Sett. 8	30,97	50,4	34,52	61,3	8,56	10,3	2,56	50,4	14,53	11,0
18	31,32	49,6	34,78	61,1	8,85	9,7	2,86	49,5	14,78	10,3
28	31,68	48,8	35,06	60,8	9,15	9,0	3,19	48,7	15,06	9,5
Ottobre 8	32,06	48,2	35,35	60,3	9,47	8,3	3,54	47,9	15,35	8,7
18	32,45	47,7	35,65	59,6	9,80	7,5	3,89	47,1	15,67	7,7
28	32,84	47,3	35,96	58,7	10,14	6,8	4,25	46,4	15,99	6,7
Nov. 7	33,23	47,1	36,27	57,8	10,48	6,1	4,62	45,8	16,32	5,6
17	33,60	47,1	36,57	56,7	10,81	5,4	4,98	45,4	16,65	4,6
27	33,96	47,3	36,86	55,6	11,13	4,9	5,32	45,1	16,97	3,6
Dic. 7	34,29	47,7	37,12	54,5	11,42	4,5	5,64	45,0	17,28	2,8
17	34,57	48,4	37,36	53,5	11,69	4,2	5,93	45,2	17,56	2,1
27	34,81	49,3	37,56	52,5	11,92	4,1	6,18	45,5	17,81	1,5
37	34,99	50,3	37,71	51,7	12,09	4,2	6,37	46,1	18,01	1,1
Posizione media	$7^h.11^m.30^s,20$ +41°.3′.2″,6		$7^h.24^m.33^s,89$ +12°.12′.4″,9		$7^h.30^m.7^s,92$ +27°.6′.18″,4		$7^h.33^m.1^s,94$ +34°48′.0″,8		$8^h.2^m.14^s,07$ +21°.51′.17″,6	

Giorno del mese	18 χ Canci gr.: 5,3		29 Canci gr.: 6,2		27 Bode Urs. Maj. gr.: 6,0		55 ρ^1 Canci gr.: 6,2		60 Canci gr.: 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$8^h.14^m$	27°.31′	$8^h.23^m$	14°.31′	$8^h.32^m$	53°.2′	$8^h.46^m$	28°.41′	$8^h.50^m$	11°.58′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	21,93	11,5	23,18	12,5	20,75	17,6	60,59	15,4	48,13	60,7
11	22,13	11,6	23,37	11,7	21,04	18,9	60,82	15,3	48,34	59,7
21	22,27	11,8	23,51	11,1	21,26	20,5	61,00	15,5	48,50	58,8
31	22,36	12,2	23,59	10,7	21,40	22,4	61,12	15,9	48,61	58,1
Febbr. 10	22,39	12,8	23,63	10,5	21,45	24,4	61,19	16,5	48,67	57,7
20	22,36	13,5	23,61	10,5	21,42	26,4	61,19	17,4	48,68	57,6
Marzo 2	22,28	14,3	23,54	10,6	21,32	28,6	61,14	18,3	48,64	57,6
12	22,16	16,1	23,44	10,8	21,15	30,5	61,05	19,2	48,56	57,7
22	22,01	15,9	23,31	11,2	20,94	32,1	60,92	20,2	48,45	58,0
Aprile 1	21,84	16,6	23,15	11,6	20,68	33,5	60,76	21,1	48,31	58,4
11	21,65	17,3	22,98	12,1	20,40	34,6	60,59	21,9	48,16	58,8
21	21,47	17,7	22,82	12,5	20,12	35,3	60,41	22,6	48,00	59,3
Maggio 1	21,29	18,1	22,66	13,0	19,83	35,6	60,23	23,2	47,84	59,8
11	21,13	18,3	22,51	13,4	19,57	35,6	60,06	23,6	47,70	60,3
21	21,00	18,4	22,39	13,9	19,34	35,2	59,92	23,8	47,57	60,9
31	20,90	18,3	22,30	14,3	19,15	34,4	59,80	23,9	47,46	61,4
Giugno 10					19,01	33,3	59,71	23,8	47,38	61,9
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18	22,05	11,9	23,26	15,1						
28	22,33	10,9	23,51	14,4	20,74	12,3	60,86	14,6	48,38	62,3
Ottobre 8	22,63	9,8	23,78	13,6	21,15	10,6	61,15	13,4	48,64	61,4
18	22,95	8,7	24,07	12,6	21,60	9,1	61,46	12,1	48,91	60,4
28	23,29	7,6	24,38	11,5	22,08	7,8	61,79	10,7	49,21	59,2
Nov. 7	23,64	6,5	24,70	10,2	22,56	6,8	62,13	9,3	49,52	57,8
17	23,98	5,5	25,02	8,9	23,05	6,2	62,49	8,1	49,84	56,3
27	24,32	4,6	25,34	7,6	23,53	5,9	62,84	6,9	50,17	54,8
Dic. 7	24,65	3,8	25,64	6,3	23,99	6,0	63,18	6,0	50,49	53,3
17	24,95	3,3	25,93	5,1	24,43	6,4	63,51	5,3	50,78	51,8
27	25,22	2,9	26,18	4,0	24,82	7,3	63,81	4,8	51,05	50,5
37	25,44	2,8	26,39	3,1	25,14	8,5	64,06	4,5	51,28	49,4
Posizione media	$8^h.14^m.21^s,41$	+27°.31′.21″,1	$8^h.23^m.22^s,67$	+14°.31′.20″,3	$8^h.32^m.20^s,08$	+53°.2′.29″,9	$8^h.47^m.0^s,19$	+28°.41′.25″,2	$8^h.50^m.47^s,69$	+11°.59′.7″,6

Giorno del mese	44(Bode)Urs.Maj. gr. : 5,6		69 ν Cancri gr. : 5,7		77 ξ Cancri gr. : 5,3		36 Lyncis gr. : 5,3		16 ψ Leonis gr. : 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$8^h.57^m$	54°.38′	$8^h.57^m$	24°.49′	$9^h.3^m$	22°.25′	$9^h.7^m$	43°.35′	$9^h.38^m$	14°.26′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	8,18	63,9	15,01	14,8	57,78	25,2	39,95	68,5	37,08	60,5
11	8,52	65,1	15,24	14,4	58,01	24,6	40,24	69,1	37,33	59,4
21	8,78	66,7	15,42	14,3	58,20	24,4	40,47	70,1	37,54	58,5
31	8,96	68,6	15,55	14,5	58,33	24,4	40,64	71,4	37,70	57,9
Febbr. 10	9,05	70,7	15,62	14,9	58,41	24,6	40,74	72,8	37,81	57,5
20	9,06	72,9	15,64	15,5	58,44	25,0	40,77	74,5	37,87	57,4
Marzo 2	8,99	75,1	15,61	16,2	58,41	25,6	40,73	76,2	37,88	57,5
12	8,86	77,2	15,53	17,0	58,34	26,3	40,64	77,9	37,84	57,8
22	8,66	79,1	15,41	17,8	58,23	27,0	40,50	79,5	37,77	58,3
Aprile 1	8,41	80,8	15,27	18,7	58,09	27,8	40,32	81,0	37,66	58,8
11	8,14	82,1	15,10	19,5	57,93	28,6	40,12	82,3	37,53	59,4
21	7,85	83,1	14,93	20,2	57,77	29,3	39,90	83,3	37,39	60,0
Maggio 1	7,56	83,7	14,77	20,8	57,61	29,9	39,68	84,0	37,25	60,7
11	7,28	83,8	14,61	21,3	57,46	30,4	39,47	84,4	37,11	61,4
21	7,02	83,6	14,47	21,7	57,32	30,8	39,27	84,5	36,97	62,0
31	6,79	83,0	14,35	21,9	57,20	31,1	39,10	84,3	36,85	62,5
Giugno 10	5,58	82,1	14,26	21,9	57,11	31,4	38,97	83,8	36,75	63,0
20									36,67	63,4
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18										
28	7,99	59,6	15,29	14,9	58,05	25,6	40,03	66,4		
Ottobre 8	8,40	57,6	15,56	13,6	58,31	24,3	40,35	64,5	37,53	60,0
18	8,84	55,7	15,85	12,2	58,60	22,9	40,70	62,7	37,79	58,6
28	9,31	54,1	16,17	10,8	58,91	21,4	41,09	61,0	38,07	57,2
Nov. 7	9,80	52,8	16,50	9,4	59,23	20,0	41,49	59,5	38,37	55,6
17	10,31	51,9	16,85	8,0	59,57	18,5	41,91	58,3	38,70	53,9
27	10,82	51,3	17,19	6,7	59,92	17,2	42,33	57,3	39,03	52,2
Dic. 7	11,31	51,1	17,53	5,5	60,25	15,9	42,74	56,6	39,36	50,5
17	11,78	51,4	17,86	4,5	60,57	14,8	43,14	56,3	39,68	48,9
27	12,21	52,1	18,15	3,8	60,87	13,9	43,51	56,4	39,98	47,4
37	12,58	53,2	18,41	3,3	61,14	13,2	43,84	56,8	40,26	46,2
Posizione media	$8^h.57^m.7^s,64$ +54°.39′.17″,0		$8^h.57^m.14^s,64$ +24°.49′.23″,9		$9^h.3^m.57^s,43$ +22°.25′.33″,8		$9^h.7^m.39^s,59$ +43°.36′.20″,6		$9^h.38^m.36^s,85$ +14°.27′.6″,9	

Giorno del mese	27 ν Leonis gr. : 5,7		37 Urs. Maj. gr. : 5,2		47 Urs. Maj. gr. : 5,1		73 *n* Leonis gr. : 5,6		237 (Bode) Urs. Maj. gr. : 6,0	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$9^h.53^m$	$12^\circ.53'$	$10^h.29^m$	$57^\circ.33'$	$10^h.54^m$	$40^\circ.55'$	$11^h.10^m$	$13^\circ.48'$	$11^h.11^m$	$49^\circ,58'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	10,19	30,3	6,66	46,5	12,06	45,6	56,67	69,2	23,78	68,2
11	10,45	29,0	7,14	47,1	12,42	45,1	56,98	67,6	24,21	67,8
21	10,67	28,0	7,55	48,1	12,75	45,2	57,26	66,3	24,60	68,0
31	10,84	27,3	7,88	49,7	13,03	45,7	57,50	65,3	24,94	68,8
Febbr. 10	10,96	26,8	8,14	51,5	13,26	46,6	57,70	64,6	25,22	70,2
20	11,03	26,5	8,31	53,7	13,43	47,9	57,85	64,3	25,43	71,9
Marzo 2	11,05	26,5	8,40	56,2	13,53	49,4	57,95	64,2	25,58	73,9
12	11,03	26,7	8,40	58,7	13,57	51,2	58,01	64,5	25,65	76,2
22	10,97	27,1	8,32	61,2	13,56	53,1	58,02	65,0	25,65	78,5
Aprile 1	10,88	27,6	8,18	63,6	13,50	55,1	58,00	65,6	25,60	81,0
11	10,76	28,2	7,98	65,8	13,40	57,0	57,94	66,3	25,49	83,3
21	10,63	28,8	7,74	67,7	13,26	58,7	57,86	67,1	25,34	85,4
Maggio 1	10,49	29,5	7,46	69,2	13,10	60,3	57,77	68,0	25,15	87,3
11	10,35	30,2	7,17	70,4	12,93	61,6	57,66	68,9	24,95	89,0
21	10,22	30,8	6,88	71,1	12,74	62,7	57,54	69,8	24,73	90,2
31	10,10	31,4	6,60	71,4	12,56	63,4	57,42	70,5	24,50	91,0
Giugno 10	9,99	31,9	6,33	71,2	12,39	63,8	57,30	71,2	24,28	91,5
20	9,90	32,4	6,08	70,6	12,24	63,8	57,19	71,8	24,07	91,6
30	9,84	32,8	5,87	69,6	12,09	63,5	57,09	72,3	23,88	91,2
Luglio 10					11,97	62,9	57,00	72,6	23,71	90,2
20										
30										
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8										
18	10,86	28,3	6,73	41,9						
28	11,13	26,8	7,14	39,2	12,80	40,6	57,57	64,7	24,31	63,1
Nov. 7	11,43	25,1	7,60	36,7	13,12	38,0	57,83	62,7	24,66	60,3
17	11,75	23,4	8,09	34,6	13,48	35,6	58,12	60,7	25,05	57,6
27	12,08	21,6	8,61	32,9	13,87	33,5	58,43	58,5	25,48	55,3
Dic. 7	12,41	19,8	9,15	31,6	14,27	31,6	58,76	56,4	25,93	53,3
17	12,73	18,1	9,69	30,7	14,68	30,1	59,10	54,4	26,39	51,8
27	13,04	16,5	10,22	30,4	15,08	28,9	59,43	52,5	26,86	50,7
37	13,32	15,2	10,71	30,7	15,47	28,2	59,75	50,8	27,31	50,2
Posizione media	$9^h.53^m.10^s,01$	$+12^\circ.53'.36'',0$	$10^h.29^m.6^s,83$	$+57^\circ.34'.1'',3$	$10^h.54^m.12^s,37$	$+40^\circ.55'.57'',1$	$11^h.10^m.56^s,89$	$+13^\circ.49'.13'',0$	$11^h.11^m.24^s,28$	$+49^\circ.59'.21'',6$

Giorno del mese	58 Urs. Maj. gr. : 5,9		95 o Leonis gr. : 5,8		1 Canum Ven. gr. : 6,2		6 Canum Ven. gr. : 5,3		14 Comae gr. : 5,2	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$11^h.25^m$	$43°.40'$	$11^h.50^m$	$16°.9'$	$12^h.10^m$	$53°.36'$	$12^h.21^m$	$39°.31'$	$12^h.21^m$	$27°.46'$
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	25,59	69,3	50,10	68,1	3,23	75,4	12,31	75,6	41,32	74,2
11	25,99	68,6	50,42	66,4	3,71	74,5	12,70	74,2	41,67	72,6
21	26,36	68,5	50,72	65,1	4,17	74,3	13,07	73,4	42,01	71,4
31	26,68	68,9	50,99	64,0	4,59	74,6	13,41	73,1	42,32	70,7
Febbr. 10	26,94	69,7	51,23	63,3	4,96	75,6	13,72	73,4	42,59	70,5
20	27,15	71,0	51,42	63,0	5,27	77,0	13,98	74,1	42,82	70,6
Marzo 2	27,30	72,6	51,56	63,0	5,51	78,9	14,18	75,2	43,01	71,2
12	27,39	74,5	51,66	63,3	5,68	81,1	14,33	76,8	43,15	72,1
22	27,42	76,6	51,72	63,8	5,78	83,6	14,43	78,6	43,24	73,3
Aprile 1	27,39	78,7	51,73	64,7	5,80	86,2	14,48	80,6	43,29	74,7
11	27,32	80,8	51,71	65,7	5,76	88,8	14,48	82,8	43,30	76,3
21	27,21	82,9	51,67	66,7	5,67	91,4	14,44	84,9	43,27	78,0
Maggio 1	27,06	84,8	51,60	67,8	5,53	93,8	14,36	87,0	43,21	79,7
11	26,90	86,4	51,51	68,9	5,35	95,9	14,25	89,0	43,13	81,3
21	26,72	87,7	51,41	69,9	5,14	97,7	14,12	90,7	43,03	82,8
31	26,53	88,7	51,30	70,9	4,91	99,1	13,97	92,1	42,91	84,1
Giugno 10	26,34	89,3	51,18	71,7	4,67	100,1	13,81	93,2	42,79	85,1
20	26,17	89,5	51,07	72,4	4,42	100,6	13,65	94,0	42,66	85,9
30	26,00	89,3	50,96	72,9	4,17	100,7	13,48	94,5	42,53	86,5
Luglio 10	25,84	88,9	50,85	73,3	3,93	100,3	13,31	94,6	42,40	86,8
20	25,71	88,0	50,75	73,5	3,71	99,4	13,15	94,2	42,28	86,8
30			50,67	73,6	3,51	98,2	13,01	93,4	42,15	86,5
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7	26,55	62,4								
17	26,89	59,7	51,51	59,5	4,14	66,7	13,50	67,7	42,66	66,3
27	27,27	57,3	51,81	57,3	4,54	63,8	13,82	64,8	42,95	63,6
Dic. 7	27,68	55,1	52,13	55,0	4,98	61,2	14,17	62,1	43,27	61,1
17	28,10	53,3	52,46	52,8	5,45	59,0	14,55	59,8	43,62	58,7
27	28,52	51,9	52,81	50,8	5,94	57,4	14,95	57,7	43,98	56,5
37	28,93	51,0	53,14	48,9	6,43	56,3	15,35	56,2	44,34	54,7
Posizione media	$11^h.25^m.26^s,14$	$-43°.41'.21'',0$	$11^h.50^m.50^s,56$	$+16.10'.11'',5$	$12^h.10^m.4^s,25$	$-53°.57'.28'',2$	$12^h.21^m.13^s,19$	$+39°.32'.24'',9$	$12^h.21^m.42^s,08$	$+27°.47'.20'',3$

Giorno del mese	15 Comae gr. : 4,5		74 Urs. Maj. gr. : 5,6		9 Canum Ven. gr. : 6,2		14 Canum Ven. gr. : 5,5		17 Canum Ven. gr. : 6,1	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$12^h.22^m$	$28^\circ.47'$	$12^h.25^m$	$58^\circ.54'$	$12^h.34^m$	$41^\circ.23'$	$13^h.1^m$	$36^\circ.17'$	$13^h.5^m$	$38^\circ.59'$
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	14,52	20,9	32,90	69,1	14,07	21,4	19,78	58,6	43,19	46,0
11	14,88	19,3	33,44	68,2	14,47	19,9	20,15	56,9	43,57	44,3
21	15,22	18,1	33,96	67,9	14,85	19,0	20,52	55,6	43,95	43,0
31	15,53	17,4	34,44	68,3	15,21	18,7	20,87	54,9	44,31	42,3
Febbr. 10	15,80	17,2	34,87	69,3	15,53	18,9	21,20	54,7	44,65	42,2
20	16,04	17,4	35,24	70,8	15,81	19,6	21,48	55,0	44,95	42,6
Marzo 2	16,23	18,0	35,53	72,8	16,03	20,8	21,72	55,8	45,20	43,5
12	16,36	19,0	35,74	75,2	16,20	22,4	21,91	57,0	45,40	44,8
22	16,46	20,3	35,87	77,8	16,32	24,3	22,05	58,6	45,55	46,5
Aprile 1	16,51	21,8	35,92	80,6	16,39	26,4	22,15	60,4	45,65	48,4
11	16,52	23,4	35,90	83,4	16,40	28,6	22,20	62,5	45,71	50,6
21	16,49	25,1	35,81	86,1	16,37	30,9	22,21	64,6	45,72	52,9
Maggio 1	16,43	26,8	35,66	88,7	16,30	33,1	22,18	66,8	45,69	55,2
11	16,35	28,5	35,46	90,9	16,20	35,2	22,11	68,8	45,62	57,4
21	16,25	30,0	35,23	92,9	16,07	37,0	22,02	70,8	45,53	59,4
31	16,13	31,3	34,96	94,5	15,92	38,6	21,91	72,5	45,41	61,1
Giugno 10	16,00	32,4	34,67	95,6	15,76	39,9	21,78	73,9	45,27	62,6
20	15,87	33,2	34,37	96,2	15,59	40,8	21,63	75,1	45,11	63,8
30	15,73	33,8	34,07	96,4	15,41	41,3	21,47	75,9	44,94	64,7
Luglio 10	15,60	34,0	33,78	96,0	15,24	41,4	21,31	76,3	44,76	65,1
20	15,47	33,8	33,50	95,2	15,07	41,1	21,15	76,4	44,59	65,2
30	15,35	33,7	33,24	94,0	14,91	40,5	20,99	76,1	44,43	64,8
Agosto 9			33,00	92,2	14,76	39,4	20,84	75,4	44,27	64,0
19							20,70	74,4	44,12	63,0
29										
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17	15,85	13,0								
27	16,14	10,3	33,95	57,9	15,52	11,0				
Dic. 7	16,46	7,7	34,42	55,2	15,87	8,2	21,56	46,4	44,91	33,9
17	16,81	5,3	34,93	53,0	16,25	5,7	21,90	43,7	45,27	31,2
27	17,17	3,2	35,47	51,3	16,65	3,6	22,27	41,3	45,64	28,8
37	17,54	1,4	35,01	50,0	17,06	1,9	22,65	39,3	46,02	26,8
Posizione media	$12^h.22^m.15^s,29$	$+28^\circ.47'.27'',3$	$12^h.25^m.34^s,18$	$+58^\circ.55'.22'',5$	$12^h.34^m.15^s,06$	$+41^\circ.23'.30'',8$	$13^h.1^m.20^s,87$	$+36^\circ.18'.5'',9$	$13^h.5^m.44^s,35$	$+38^\circ.59'.53'',9$

Giorno del mese	19 Canum Ven. gr. : 5,7		23 Canum Ven. gr. : 5,7		81 Ursae Maj. gr. : 5,4		9 (Hev.) Bootis gr. : 5,4		21 ι Bootis gr. : 4,8	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$13^h.11^m$	$41°.20'$	$13^h.16^m$	$40°.38'$	$13^h.30^m$	$55°.49'$	$14^h.4^m$	$44°.17'$	$14^h.12^m$	$51°.47'$
	s	′	s	′	s	′	s	′	s	′
Genn. 1	17,16	56,5	5,05	29,7	28,92	37,7	8,61	54,5	48,45	53,9
11	17,56	54,7	5,44	27,9	29,41	35,9	9,02	52,3	48,88	51,9
21	17,95	53,5	5,83	26,6	29,90	34,8	9,42	50,6	49,33	50,3
31	18,32	52,8	6,20	25,9	30,38	34,3	9,82	49,4	49,77	49,2
Febbr. 10	18,67	52,7	6,55	25,7	30,83	34,5	10,20	48,9	50,20	48,8
20	18,98	53,1	6,86	26,0	31,24	35,2	10,55	49,0	50,61	49,0
Marzo 2	19,24	54,1	7,12	26,9	31,60	36,5	10,87	49,6	50,98	49,8
12	19,45	55,5	7,34	28,3	31,89	38,4	11,15	50,8	51,30	51,2
22	19,61	57,2	7,51	30,0	32,12	40,7	11,38	52,5	51,56	53,0
Aprile 1	19,73	59,3	7,62	32,0	32,28	43,3	11,55	54,5	51,77	55,3
11	19,79	61,6	7,69	34,3	32,37	46,0	11,68	56,8	51,93	57,9
21	19,80	64,0	7,71	36,6	32,40	48,9	11,77	59,3	52,03	60,7
Maggio 1	19,77	66,3	7,69	39,0	32,36	51,7	11,80	62,0	52,06	63,5
11	19,71	68,6	7,63	41,3	32,27	54,4	11,79	64,6	52,04	66,3
21	19,61	70,7	7,54	43,4	32,13	56,9	11,74	67,1	51,97	69,0
31	19,48	72,6	7,43	45,3	31,95	59,1	11,65	69,4	51,86	71,5
Giugno 10	19,34	74,1	7,29	46,9	31,74	60,9	11,53	71,4	51,71	73,7
20	19,18	75,3	7,13	48,2	31,49	62,3	11,38	73,1	51,52	75,5
30	19,01	76,2	6,96	49,1	31,22	63,3	11,20	74,5	51,31	77,0
Luglio 10	18,83	76,7	6,78	49,6	30,94	63,7	11,01	75,4	51,07	78,0
20	18,64	76,8	6,59	49,7	30,65	63,7	10,80	75,9	50,81	78,5
30	18,45	70,4	6,41	49,4	30,37	63,2	10,58	76,0	50,54	78,6
Agosto 9	18,28	75,6	6,23	48,7	30,09	62,2	10,36	75,7	50,27	78,2
19	18,11	74,3	6,07	47,6	29,83	60,7	10,15	74,9	50,00	77,3
29										
Sett. 8							9,94	73,5	49,74	75,9
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7	18,83	44,5	6,73	17,9	30,15	26,3				
17	19,19	41,7	7,08	15,1	30,56	23,4	10,41	41,6	49,98	41,9
27	19,56	39,3	7,45	12,6	31,01	20,8	10,76	38,7	50,36	38,9
37	19,97	37,2	7,84	10,5	31,50	18,8	11,15	36,2	50,78	36,4
Posizione media	$13^h.11^m.18^s,39$ $+41°.21'.4'',7$		$13^h.16^m.6^s,30$ $+40°.38'.37'',6$		$13^h.30^m.30^s,64$ $+55°.49'.48'',3$		$14^h.4^m.10^s,23$ $+44°.18'.1'',4$		$14^h.12^m.50^s,31$ $+51°.48'.2'',2$	

Giorno del mese	24 g Bootis gr. : 5,7		204 (Bode) Bootis gr. : 5,7		56 (Bode) Draconis gr. : 6,1		28 σ Bootis gr. : 4,7		34 Bootis gr. : 4,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$14^h.25^m$	$50^\circ.15'$	$14^h.25^m$	$42^\circ.12'$	$14^h.29^m$	$60^\circ.37'$	$14^h.30^m$	$30^\circ.8'$	$14^h.39^m$	$26^\circ.55'$
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	19,86	47,5	52,82	67,5	7,33	73,8	33,80	69,3	16,06	36,5
11	20,25	45,1	53,18	65,0	7,83	71,5	34,13	66,9	16,38	34,0
21	20,66	43,3	53,56	63,1	8,35	69,7	34,48	64,9	16,71	31,9
31	21,10	42,0	53,95	61,7	8,89	68,6	34,83	63,3	17,04	30,3
Febbr. 10	21,52	41,4	54,33	60,9	9,42	68,2	35,16	62,2	17,37	29,1
20	21,92	41,4	54,69	60,7	9,92	68,4	35,47	61,7	17,69	28,4
Marzo 2	22,29	42,1	55,01	61,1	10,38	69,3	35,76	61,7	17,97	28,2
12	22,61	43,3	55,30	62,1	10,79	70,8	36,02	62,2	18,23	28,6
22	22,88	45,0	55,55	63,6	11,14	72,8	36,25	63,1	18,46	29,4
Aprile 1	23,10	47,2	55,75	65,5	11,41	75,2	36,44	64,5	18,65	30,6
11	23,27	49,7	55,90	67,6	11,62	77,9	36,58	66,2	18,81	32,1
21	27,38	52,4	56,01	70,0	11,75	80,9	36,69	68,2	18,92	33,9
Maggio 1	23,44	55,2	56,07	72,6	11,80	84,0	36,77	70,3	19,01	35,9
11	23,44	58,0	56,09	75,2	11,78	87,0	36,81	72,4	19,06	37,9
21	23,39	60,7	56,07	77,8	11,70	89,9	36,81	74,6	19,08	40,0
31	23,30	63,3	56,01	80,2	11,56	92,5	36,78	76,7	19,06	42,0
Giugno 10	23,17	65,6	55,91	82,3	11,36	94,9	36,72	78,6	19,01	43,9
20	23,01	67,5	55,79	84,2	11,11	96,9	36,64	80,4	18,94	45,6
30	22,81	69,1	55,63	85,7	10,82	98,5	36,53	81,9	18,84	47,1
Luglio 10	22,58	70,2	55,45	86,9	10,49	99,6	36,40	83,1	18,71	48,3
20	22,33	70,9	55,26	87,7	10,14	100,3	36,24	83,9	18,57	49,2
30	22,07	71,1	55,05	88,0	9,77	100,4	36,08	84,4	18,42	49,8
Agosto 9	21,80	70,9	54,83	87,9	9,40	100,0	35,90	84,5	18,25	50,0
19	21,54	70,2	54,61	87,4	9,02	99,1	35,72	84,3	18,07	49,9
29	21,28	69,0	54,40	86,4	8,66	97,7	35,55	83,7	17,90	49,5
Sett. 8			54,20	85,0	8,32	95,8	35,40	82,7	17,74	48,6
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17	21,33	35,6								
27	21,69	32,6	54,91	52,5	8,80	59,1	36,11	54,8	18,38	22,2
37	22,09	29,9	55,26	49,8	9,28	56,5	36,43	52,2	18,69	19,6
Posizione media	$14^h.25^m.21^s,71$ $+50^\circ.15'.54'',6$		$14^h.25^m.54^s,49$ $+42^\circ.13'.12'',9$		$14^h.29^m.9^s,68$ $+60^\circ.38'.22'',3$		$14^h.30^m.35^s,29$ $+30^\circ.9'.11'',7$		$14^h.39^m.17^s,54$ $+26^\circ.55'.37'',7$	

Giorno del mese	295 Bode Bootis gr.: 6,4		37 Ξ Bootis gr.: 4,8		44 *i* Bootis gr.: 4,9		45 *c* Bootis gr.: 5,2		9 τ′ Serpentis gr.: 5,5	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$14^h.45^m$	$38°.11'$	$14^h.47^m$	$19°.29'$	$15^h.0^m$	$48°.0'$	$15^h.3^m$	$25°.13'$	$15^h.21^m$	$15°.45'$
	s	"	s	"	s	"	s	"		"
Genn. 1	23,64	50,7	1,81	27,7	39,77	68,2	8,79	65,8	24,18	32,5
11	23,99	48,1	2,11	25,3	40,14	65,5	9,08	63,2	24,47	30,1
21	24,35	46,0	2,44	23,2	40,53	63,3	9,40	61,0	24,77	27,9
31	24,71	44,3	2,76	21,5	40,94	61,7	9,73	59,2	25,09	26,0
Febbr. 10	25,07	43,3	3,08	20,1	41,35	60,6	10,06	57,9	25,40	24,6
20	25,42	42,9	3,38	19,2	41,74	60,2	10,37	57,0	25,70	23,5
Marzo 2	25,74	43,0	3,66	18,8	42,11	60,5	10,67	56,6	25,99	22,8
12	26,03	43,7	3,92	18,8	42,46	61,3	10,94	56,8	26,26	22,6
22	26,28	44,9	4,14	19,3	42,76	62,7	11,18	57,4	26,50	22,9
Aprile 1	26,49	46,5	4,33	20,1	43,01	64,6	11,39	58,5	26,72	23,5
11	26,66	48,5	4,49	21,3	43,22	66,9	11,57	59,9	26,91	24,4
21	26,79	50,7	4,62	22,7	43,38	69,5	11,71	61,6	27,07	25,6
Maggio 1	26,88	53,2	4,71	24,4	43,49	72,3	11,82	63,5	27,19	27,1
11	26,92	55,8	4,77	26,2	43,54	75,1	11,90	65,5	27,29	28,7
21	26,93	58,3	4,81	27,9	43,54	77,9	11,94	67,6	27,36	30,4
31	26,90	60,7	4,81	29,6	43,50	80,7	11,95	69,6	27,40	32,1
Giugno 10	26,83	62,9	4,78	31,3	43,42	83,2	11,92	71,6	27,40	33,8
20	26,73	64,9	4,72	32,8	43,29	85,4	11,87	73,4	27,37	35,4
30	26,61	66,6	4,64	34,2	43,13	87,3	11,79	75,0	27,32	36,8
Luglio 10	26,45	67,9	4,53	35,4	42,93	88,9	11,68	76,3	27,23	38,0
20	26,27	68,9	4,41	36,3	42,71	90,0	11,55	77,4	27,12	39,0
30	26,08	69,5	4,27	36,9	42,46	90,6	11,40	78,1	26,99	39,8
Agosto 9	25,87	69,7	4,11	37,3	42,20	90,8	11,23	78,5	29,84	40,4
19	25,66	69,4	3,95	37,3	41,93	90,5	11,05	78,6	26,68	40,7
29	25,45	68,7	3,79	37,1	41,66	89,7	10,87	78,3	26,51	40,8
Sett. 8	25,25	67,6	3,64	36,5	41,40	88,5	10,70	77,7	26,34	40,5
18									26,19	39,9
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27	25,73	36,8	4,24	13,6	41,53	55,2	11,09	52,5	26,62	20,2
37	26,06	34,1	4,54	11,1	41,88	52,2	11,39	49,8	26,90	17,7
Posizione media	$14^h.45^m.25^s,33$	$+38°.11'.54'',4$	$14^h.47^m.3^s,26$	$+19°.29'.26'',7$	$15^h.0^m.41^s,76$	$+48°.1'.13'',2$	$15^h.3^m.10^s,35$	$+25°14'.5'',7$	$15^h.21^m.25^s,75$	$+15°.45'.29'',5$

Giorno del mese	4 θ Coronae bor. gr. : 4,2		54 φ Bootis gr. : 5,4		7 ζ Coronae bor. gr. : 4,6		8 γ Coronae bor. gr. : 3,9		12 (Hev.) Draconis gr. : 5,2	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$15^h.29^m$	$31°.40'$	$15^h.34^m$	$40°.39'$	$15^h.35^m$	$36°.56'$	$15^h.38^m$	$26°.35'$	$15^h.45^m$	$62°.53'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	6,59	33,4	25,15	30,9	48,43	25,2	46,01	35,7	10,98	19,3
11	6,89	30,6	25,47	28,0	48,73	22,3	46,30	33,0	11,40	16,2
21	7,21	28,2	25,81	25,5	49,06	19,8	46,61	30,6	11,88	13,7
31	7,54	26,3	26,17	23,5	49,41	17,8	46,93	28,6	12,40	11,7
Febbr. 10	7,88	24,8	26,54	22,1	49,76	16,3	47,25	27,1	12,95	10,4
20	8,21	23,9	26,90	21,2	50,11	15,4	47,58	26,0	13,50	9,7
Marzo 2	8,53	23,5	27,25	21,0	50,45	15,1	47,88	25,5	14,04	9,7
12	8,83	23,7	27,57	21,3	50,76	15,4	48,17	25,5	14,55	10,4
22	9,10	24,4	27,87	22,2	51,05	16,2	48,44	26,0	15,02	11,7
Aprile 1	9,34	25,6	28,14	23,7	51,31	17,6	48,68	27,0	15,43	13,6
11	9,55	27,2	28,37	25,6	51,53	19,3	48,89	28,4	15,78	15,9
21	9,72	29,2	28,55	27,9	51,71	21,4	49,07	30,1	16,06	18,5
Maggio 1	9,85	31,4	28,70	30,4	51,85	23,8	49,21	32,1	16,26	21,6
11	9,95	33,7	28,80	33,1	51,96	26,4	49,32	34,2	16,39	24,8
21	10,01	36,1	28,86	35,8	52,03	29,0	49,40	36,4	16,43	27,9
31	10,04	38,5	28,88	38,5	52,05	31,6	49,44	38,7	16,40	31,0
Giugno 10	10,03	40,8	28,86	41,1	52,03	34,1	49,44	40,9	16,29	34,0
20	9,98	42,9	28,79	43,5	51,98	36,4	49,41	42,9	16,12	36,7
30	9,90	44,8	28,69	45,6	51,89	38,4	49,35	44,7	15,88	39,1
Luglio 10	9,79	46,5	28,55	47,4	51,77	40,2	49,26	46,3	15,58	41,1
20	9,65	47,8	28,38	48,8	51,61	41,6	49,14	47,7	15,23	42,7
30	9,49	48,8	28,18	49,9	51,43	42,7	48,99	48,7	14,83	43,7
Agosto 9	9,30	49,3	27,96	50,5	51,23	43,3	48,82	49,4	14,40	44,3
19	9,10	49,5	27,73	50,7	51,01	43,6	48,63	49,7	13,96	44,4
29	8,90	49,4	27,49	50,4	50,79	43,3	48,44	49,6	13,50	43,9
Sett. 8	8,70	48,8	27,25	49,7	50,57	42,7	48,25	49,2	13,05	42,9
18	8,50	47,8	27,02	48,5	50,35	41,6	48,06	48,4	12,61	41,5
28									12,21	39,5
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27	8,72	21,7	27,06	19,7	50,43	14,0	48,24	24,6		
37	9,01	18,8	27,36	16,7	50,72	11,0	48,51	21,8		
Posizione media	$15^h.29^m.8^s,35$ $+31°.40'.33'',9$		$15^h.34^m.27^s,09$ $+40°.39'.32'',9$		$15^h.35^m.50^s,30$ $+36°.56'.26'',4$		$15^h.38^m.47^s,74$ $+26°.35'.34'',7$		$15^h.45^m.13^s,90$ $+62°.53'.23'',7$	

Giorno del mese	66 (Heis) Draconis gr. : 5,0		5 r Herculis gr. : 5,3		16 τ Coronae bor. gr. : 5,0		19 ξ Coronae bor. gr. : 5,0		23 Herculis gr. : 6,7	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$15^h.55^m$	55°.0′	$15^h.56^m$	18°.4′	$16^h.5^m$	36°.43′	$16^h.18^m$	31°.6′	$16^h.19^m$	32°.32′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	30,98	51,3	59,11	43,2	30,09	46,0				
11	31,32	48,6	59,38	40,7	30,37	43,0	24,50	33,6	18,32	64,9
21	31,72	45,9	59,67	38,4	30,68	40,4	24,79	30,9	18,61	62,2
31	32,14	43,8	59,97	36,4	31,01	38,1	25,10	28,8	18,92	60,0
Febbr. 10	32,59	42,2	60,28	34,8	31,33	36,5	25,42	27,0	19,25	58,2
20	33,04	41,3	60,59	33,6	31,69	35,4	25,75	25,7	19,58	56,9
Marzo 2	33,48	41,1	60,89	32,9	32,03	34,8	26,07	25,0	19,91	56,2
12	33,90	41,6	61,17	32,6	32,36	34,8	26,39	25,0	20,22	56,1
22	33,30	42,6	61,44	32,8	32,66	35,5	26,68	25,3	20,52	56,5
Aprile 1	34,65	44,3	61,68	33,4	32,94	36,6	26,96	26,1	20,80	57,4
11	34,95	46,4	61,90	34,5	33,19	38,3	27,20	27,6	21,05	58,9
21	35,20	49,0	62,09	35,8	33,40	40,3	27,42	29,4	21,27	60,7
Maggio 1	35,40	51,8	62,25	37,4	33,58	42,6	28,61	31,5	21,46	62,8
11	35,53	54,8	62,38	39,1	33,72	45,1	27,76	33,8	21,61	65,2
21	35,60	57,9	62,48	41,0	33,82	47,8	27,87	36,3	21,73	67,8
31	35,62	61,0	62,55	43,0	33,88	50,5	27,95	38,8	21,81	70,3
Giugno 10	35,57	63,9	62,58	44,9	53,89	53,1	27,99	41,3	21,84	72,9
20	35,47	66,6	62,58	46,7	33,86	55,6	27,99	43,7	21,84	75,3
30	35,31	69,1	62,54	48,3	33,80	57,9	27,95	45,9	21,80	77,6
Luglio 10	35,11	71,3	62,47	49,8	33,70	59,9	27,87	47,9	21,72	79,5
20	34,86	73,0	62,38	51,1	33,56	61,6	27,75	49,6	21,60	81,3
30	34,57	74,2	62,26	52,1	33,39	62,9	27,61	50,9	21,45	82,7
Agosto 9	34,25	75,0	62,11	52,9	33,19	63,9	27,44	51,9	21,27	83,6
19	33,91	75,3	61,94	53,4	32,98	64,4	27,24	52,6	21,07	84,3
29	33,55	75,2	61,76	53,6	32,75	64,5	27,03	52,9	20,86	84,6
Sett. 8	33,20	74,4	61,57	53,4	32,51	64,1	26,81	52,7	20,63	84,4
18	32,86	73,2	61,40	52,9	32,28	63,4	26,59	52,1	20,41	83,8
28	32,54	71,5	61,23	52,1	32,06	62,1	26,39	51,1	20,20	82,8
Ottobre 8							26,20	49,8	20,01	81,4
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27										
37										
Posizione media	$15^h.55^m.33^s,45$ +55°.0′.54″,7		$15^h.57^m.0^s,82$ +18°.4′.39″,9		$16^h.5^m.32^s,05$ +36°.43′.46″,0		$16^h.18^m.26^s,15$ +31°.6′.35″,0		$16^h.19^m.19^s,99$ +32°.33′.6″,5	

Giorno del mese	30 g Herculis gr. : 5,4		53 Herculis gr. : 5,7		60 Herculis gr. : 4,9		98 (Heis) Herculis gr. : 6,3		60 κ Herculis gr. : 5,0	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	$16^h.25^m$	$42°.5'$	$16^h.49^m$	$31°.51'$	$17^h.0^m$	$12°.52'$	$17^h.4^m$	$40°.38'$	$17^h.13^m$	$33°.11'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1										
11	31,43	15,3	22,42	24,7						
21	31,75	12,5	22,69	21,9	59,76	10,9	41,12	15,2	49,55	60,9
31	32,08	10,1	22,98	19,5	60,02	8,9	41,42	12,6	49,82	58,4
Febbr. 10	32,43	8,2	23,29	17,5	60,30	7,3	41,74	10,4	50,12	56,3
20	32,80	6,9	23,61	16,0	60,60	5,9	42,08	8,8	50,43	54,6
Marzo 2	33,16	6,2	23,93	15,1	60,89	5,0	42,43	7,8	50,75	53,5
12	33,50	6,2	24,25	14,8	61,18	4,5	42,78	7,3	51,08	53,0
22	33,84	6,7	24,56	15,0	61,47	4,4	43,12	7,5	51,39	53,1
Aprile 1	34,16	7,9	24,85	15,7	61,74	4,7	43,44	8,3	51,69	53,7
11	34,43	9,5	25,12	17,0	61,99	5,4	43,74	9,7	51,98	54,9
21	34,67	11,6	25,36	18,7	62,23	6,5	44,02	11,5	52,25	56,5
Maggio 1	34,87	14,0	25,58	20,7	62,45	7,8	44,26	13,8	52,49	58,5
11	35,04	16,7	25,76	23,1	62,64	9,4	44,47	16,3	52,70	60,8
21	35,16	19,5	25,91	25,6	62,80	11,1	44,64	19,1	52,87	63,4
31	35,24	22,4	26,02	28,2	62,93	12,9	44,76	22,0	53,00	66,1
Giugno 10	35,26	25,3	26,08	30,8	63,03	14,8	44,84	24,9	53,10	68,8
20	35,25	28,0	26,11	33,3	63,09	16,6	44,87	27,7	53,15	71,4
30	35,19	30,5	26,10	35,7	63,11	18,3	44,85	30,5	53,16	74,0
Luglio 10	35,08	32,8	26,05	37,9	63,10	19,9	44,79	33,0	53,12	76,4
20	34,93	34,7	25,95	39,8	63,05	21,3	44,68	35,2	53,04	78,5
30	34,75	36,3	25,82	41,5	62,96	22,6	44,52	37,1	52,92	80,4
Agosto 9	34,54	37,4	25,65	42,8	62,84	23,6	44,33	38,7	52,77	81,9
19	34,30	38,1	25,46	43,7	62,70	24,3	44,11	39,8	52,58	83,1
29	34,04	38,4	25,25	44,2	62,53	24,8	43,87	40,5	52,37	83,8
Sett. 8	33,77	38,2	25,03	44,3	62,35	25,0	43,61	40,7	52,14	84,1
18	33,51	37,5	24,80	44,0	62,16	25,0	43,34	40,5	51,90	84,1
28	33,25	36,4	24,58	43,3	61,97	24,6	43,07	39,8	51,67	83,7
Ottobre 8	32,99	34,8	24,37	42,1	61,80	24,0	42,82	38,7	51,45	82,7
18					61,65	23,0	42,60	37,1	51,24	81,2
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27										
37										
Posizione media	$16^h.25^m.33^s,29$ $+42°.5'.18'',3$		$16^h.49^m.24^s,17$ $+31°.51'.25'',1$		$17^h.1^m.1^s,15$ $+12°.52'.10'',1$		$17^h.4^m.42^s,78$ $+40°.38'.19'',3$		$17^h.13^m.51^s,13$ $+33°.12'.3'',6$	

Giorno del mese	69 *e* Herculis gr.: 4,8		75 ρ Herculis gr.: 4,4		77 *x* Herculis gr.: 5,7		76 λ Herculis gr.: 4,6		24 ν¹ Draconis gr.: 4,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	17h.14m	37°.23′	17h.20m	37°.13′	17h.24m	48°.20′	17h.26m	26°.10′	17h.30m	55°.14′
	s	′	s	′	s	′	s	′	s	′
Genn. 1										
11										
21	24,08	19,6	24,73	52,0	12,87	15,1	54,81	50,8	17,37	49,5
31	24,36	17,0	25,00	49,4	13,17	12,2	55,07	48,4	17,70	46,4
Febbr. 10	24,67	14,8	25,31	47,1	13,51	9,9	55,34	46,3	18,07	43,9
20	24,99	13,1	25,63	45,4	13,87	8,1	55,63	44,7	18,47	42,2
Marzo 2	25,32	12,0	25,96	44,3	14,25	6,8	55,94	43,6	18,90	40,9
12	25,66	11,5	26,29	43,7	14,63	6,2	56,25	43,0	19,34	40,2
22	25,99	11,6	26,62	43,7	15,01	6,3	56,55	42,9	19,77	40,3
Aprile 1	26,30	12,3	26,94	44,3	15,38	7,0	56,84	43,4	20,19	41,0
11	26,60	13,5	27,24	45,6	15,73	8,3	57,12	44,3	20,59	42,3
21	26,88	15,2	27,52	47,2	16,05	10,2	57,39	45,7	20,95	44,2
Maggio 1	27,12	17,3	27,77	49,3	16,33	12,4	57,63	47,5	21,28	46,5
11	27,33	19,7	27,99	51,7	16,57	15,1	57,84	49,6	21,55	49,2
21	27,51	22,4	28,17	54,4	16,77	18,0	58,02	51,9	21,77	52,2
31	27,64	25,3	28,31	57,2	16,92	21,1	58,17	54,3	21,93	55,4
Giugno 10	27,74	28,1	28,41	60,1	17,01	24,2	58,29	56,8	22,03	58,6
20	27,78	30,9	28,46	62,9	17,05	27,3	58,36	59,2	22,06	61,9
30	27,78	33,6	28,47	65,6	17,04	30,3	58,39	61,6	22,03	65,0
Luglio 10	27,74	36,1	28,43	68,1	16,97	33,1	58,38	63,9	21,94	67,9
20	27,65	38,3	28,34	70,4	16,84	35,6	58,33	65,9	21,78	70,6
30	27,51	40,3	28,22	72,4	16,67	37,8	58,24	67,7	21,57	72,9
Agosto 9	27,34	41,9	28,05	74,0	16,45	39,6	58,11	69,1	21,30	74,9
19	27,14	43,1	27,85	75,3	16,20	41,0	57,95	70,3	20,99	76,4
29	26,91	43,8	27,63	76,1	15,91	42,0	57,76	71,1	20,65	77,4
Sett. 8	26,67	44,2	27,38	76,5	15,60	42,5	57,56	71,5	20,28	77,9
18	26,42	44,1	27,13	76,5	15,28	42,4	57,34	71,6	19,89	78,0
28	26,16	43,6	26,88	76,0	14,96	41,9	57,12	71,2	19,51	77,5
Ottobre 8	25,92	42,5	26,63	75,1	14,65	40,8	56,92	70,5	19,14	76,5
18	25,70	41,1	26,40	73,7	14,37	39,1	56,73	69,4	18,79	75,0
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27										
37										
Posizione media	17h.14m.25s,72 +37°.23′.22″,9		17h.20m.26s,38 +37°.13′.55″,1		17h.24m.14s,76 +48°.20′.19″,2		17h.26m.56s,36 +26°.10′.52″,0		17h.30m.19s,51 +55°.14′.53″,8	

Giorno del mese	25 ν² Draconis gr.: 4,8		88 ζ Herculis gr.: 6,4		168 (Heis) Hercul. gr.: 6,1		92 ξ Herculis gr.: 3,9		5 (Bode) Lyrae gr.: 5,3	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1906	17h.30m	55°.13′	17h.47m	48°.24′	17h.48m	39°.59′	17h.54m	29°.15′	18h.12m	42°.7′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1										
11										
21	22,70	68,1								
31	23,03	64,9	34,17	63,8	59,70	63,5	5,33	24,2	41,71	32,6
Febbr. 10	23,40	62,5	34,49	61,3	59,98	61,0	5,59	21,8	41,98	30,0
20	23,80	60,7	34,84	59,3	60,28	59,0	5,87	20,0	42,28	27,9
Marzo 2	24,23	59,4	35,20	57,8	60,62	57,6	6,17	18,7	42,61	26,3
12	24,66	58,8	35,58	57,0	60,96	56,9	6,48	17,9	42,95	25,3
22	25,10	58,8	35,96	56,8	61,31	56,7	6,79	17,6	43,29	24,9
Aprile 1	25,52	59,6	36,34	57,3	61,64	57,1	6,09	18,0	43,64	25,2
11	25,92	60,9	36,70	58,4	61,96	58,1	6,39	18,9	43,98	26,0
21	26,28	62,7	37,04	60,1	62,26	59,6	6,67	20,2	44,31	27,4
Maggio 1	26,60	65,1	37,34	62,2	62,54	61,7	7,93	21,9	44,61	29,2
11	26,88	67,8	37,61	64,8	62,79	64,0	8,17	24,0	44,89	31,5
21	27,10	70,8	37,84	67,6	63,01	66,7	8,38	26,4	45,13	34,2
31	27,26	74,0	38,01	70,6	63,18	69,6	8,56	29,0	45,33	37,1
Giugno 10	27,36	77,2	38,14	73,8	63,31	72,6	8,70	31,6	45,48	40,0
20	27,39	80,4	38,21	77,0	63,39	75,5	8,80	34,3	45,59	43,2
30	27,36	83,5	38,24	80,1	63,43	78,4	8,85	36,9	45,64	46,2
Luglio 10	27,26	86,5	38,19	83,0	63,41	81,2	8,86	39,3	45,66	49,1
20	27,11	89,1	38,09	85,7	63,35	83,8	8,83	41,6	45,61	51,9
30	26,89	91,4	37,94	88,1	63,23	86,0	8,75	43,6	45,51	54,4
Agosto 9	26,63	93,4	37,73	90,2	63,08	88,0	8,63	45,4	45,37	56,6
19	26,32	94,9	37,50	91,8	62,88	89,6	8,48	46,8	45,18	58,4
29	25,98	95,9	37,22	93,0	62,66	90,7	8,29	47,9	44,95	59,8
Sett. 8	25,61	96,5	36,92	93,8	62,41	91,4	8,09	48,5	44,70	60,8
18	25,22	96,5	36,60	94,1	62,14	91,7	7,86	48,9	44,63	61,4
28	24,84	96,0	36,27	93,9	61,87	91,5	7,63	48,7	44,15	61,4
Ottobre 8	24,47	95,0	35,96	93,1	61,60	90,9	7,41	48,2	43,87	61,1
18	24,11	93,5	35,66	91,9	61,35	89,7	7,20	47,2	43,60	60,2
28			35,39	90,2	61,13	88,1	7,02	45,8	43,35	58,8
Nov 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27										
37										
Posizione media	17h.30m.24s,84 +55°.14′.12″,4		17h.47m.35s,85 +48°.25′.9″,9		17h.49m.1s,21 +40°.0′.8″,6		17h.54m.6s,73 +29°.15′.27″,6		18h.12m.43s,33 +42°.7′.57″,1	

Relazione intorno alla Memoria del Dr. Luigi Cognetti De Martiis, intitolata: *Gli Oligocheti della regione neotropicale.*

Il Museo Zoologico di Torino possiede una ricchissima collezione di Oligocheti della regione neotropicale dovuta alle attive ricerche fatte dai dottori G. Festa e A. Borelli durante i loro viaggi in quella regione e agli invii ripetuti dei dott. Biolley, Alfaro ed altri. Il Prof. Daniele Rosa aveva già anni or sono studiato una parte di questo materiale in una memoria che ebbe l'onore di essere stampata nei volumi della nostra Accademia.

Il Dott. Luigi Cognetti ha studiato ora l'intero materiale, e tenendo conto dei lavori pubblicati da altri autori, presenta nella sua memoria un quadro completo delle conoscenze presenti intorno agli Oligocheti di una delle più ricche ed interessanti regioni faunistiche della terra.

Il lavoro del dott. Cognetti affidato al nostro esame comprende la prima parte delle ricerche fatte e tratta gli Oligocheti appartenenti alle famiglie: *Aeolosomatidae, Naididae, Phreodrilidae, Tubificidae, Euchytraeidae, Megascolecidae, Lumbricidae* e ancora quelli appartenenti alla famiglia *Glossoscolecidae*, ad eccezione della sottofamiglia *Glossoscolecinae*. Questa verrà studiata nella seconda parte del lavoro.

Le descrizioni sono diligenti e ben condotte. Numerosi sono i punti anatomici discussi e le nuove contribuzioni portate alla conoscenza della struttura e della corologia dell'intero gruppo degli Oligocheti. Buone ed utili figure chiariscono i dati di maggior interesse.

La vostra Commissione riconosce che il lavoro del Dr. Luigi Cognetti de Martiis è degno di prendere posto nei volumi delle Memorie Accademiche e ne propone la stampa.

T. Salvadori,
L. Camerano, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Luglio 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. PAOLO BOSELLI

VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Manno, Carle, Cipolla, Brusa, Savio, Ruffini, e Renier Segretario. — Scusano l'assenza il Presidente D'Ovidio ed il Socio Allievo.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente 18 giugno 1905.

Il Presidente D'Ovidio, essendosi dovuto assentare per ragioni d'ufficio, manda per lettera ai Colleghi i suoi saluti ed augurî di ottime ferie. Il Vice-Presidente Boselli si rende interprete della Classe ricambiandogli saluti ed augurî.

È letta una lettera del Socio Allievo, con la quale egli ringrazia per le condoglianze inviategli nell'ultima tornata.

Il Presidente fa omaggio alla Classe da parte degli autori:

1° del 2° volume dell'*Année linguistique* dal Socio corrispondente Aristide Marre, Paris, Klincksieck, 1904;

2° del 1° volume dell'opera di L. Grandeau, *L'agriculture et les institutions agricoles du monde au commencement du XXe siècle,* Paris, Imprimerie Nationale, 1905.

Il Direttore della Classe Ferrero presenta un opuscolo del Prof. G. Bargilli, *Manoscritti della Biblioteca della R. Accademia Militare*, Torino, 1905.

Il Socio Cipolla, incaricato col Socio Renier di riferire intorno alla memoria del Dr. Pietro Gribaudi, *La geografia di S. Isidoro di Siviglia, contributo alla storia della geografia nel medioevo*, legge la relazione, che è approvata e compare negli *Atti*. La Classe, presa cognizione della monografia del Dr. Gribaudi, ne delibera, con votazione segreta unanime, l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio Brusa esprime il suo divisamento di leggere negli inizi del novello anno accademico alcune sue note intorno alla riforma del codice di procedura penale italiano, desideroso che all'importante soggetto sia volta l'attenzione dei corpi scientifici. — Il Presidente ringrazia il Socio Brusa in nome della Classe e lo assicura che le sue dotte comunicazioni saranno ascoltate con interesse e profitto.

Con gli augurî del Presidente alla Classe e della Classe al Presidente, l'adunanza è tolta.

Relazione sulla memoria del Prof. Pietro Gribaudi, intitolata: *La Geografia di S. Isidoro di Siviglia. Contributo alla storia della Geografia nel medioevo.*

Il Prof. Pietro Gribaudi nel suo lavoro intorno alla *Geografia di S. Isidoro di Siviglia* prende in considerazione le varie opere del celebre vescovo spagnuolo, e in particolare maniera studia i XX libri delle *Etimologie*, che costituiscono una vera enciclopedia scientifica, e rappresentano, condensato, tutto il sapere, a dir così, dei suoi tempi. Egli trova che se le opere di S. Isidoro vennero studiate sotto altri diversi aspetti, meno si esaminarono sotto il riguardo geografico. Eppure, se non si ha una cognizione precisa delle Etimologie Isidoriane anche sotto il punto di vista geografico, non si può intendere adeguatamente lo sviluppo delle cognizioni scientifiche e il grado di coltura dell'Occidente cristiano nei primi secoli del medioevo.

Il Gribaudi studia Isidoro col duplice scopo di esporre in forma sistematica le sue dottrine e le sue cognizioni in fatto di geografica fisica e di geografia politica, e di mettere in luce quali siano le fonti alle quali egli ricorse, sia mediatamente, sia immediatamente.

L'autore ha studiato il suo argomento con diligenza, e dimostra di avere pratica della letteratura moderna che lo riguarda. Egli non pretende di avere fatto un lavoro completo. E non approfitta sempre di quella luce che ad illustrare il suo Autore avrebbe forse potuto ricavare dal raffronto con altri scrittori dell'alto medioevo.

Ad ogni modo il lavoro del Gribaudi riuscirà gradito ai coltori della storia della geografia, e costituirà un buon supplemento al saggio assai conosciuto che in quest'ordine d'indagini scrisse, non pochi anni or sono, il compianto prof. G. Marinelli.

Per tali considerazioni i sottoscritti sono d'avviso che la dissertazione del Prof. Gribaudi possa esser letta alla Classe.

Rodolfo Renier,
Carlo Cipolla, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

INDICE

DEL VOLUME XL

Elenco degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 20 Novembre 1904 . . . . . *Pag.* III
Pubblicazioni ricevute dalla R. Accademia delle Scienze di Torino durante l'Anno accademico 1904-1905 . . . . . „ XXV

Concorso indetto dall'Associazione costituzionale di Milano ad un premio di L. 500 . . . . . *Pag.* 777
Elezione di Soci della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali „ 451
Elezione di Soci della Classe di scienze morali, storiche e filologiche „ 533
Invito del Comitato permanente del Congresso internazionale di Botanica che si terrà a Vienna. 1, 549
Invito dell'Unione Zoologica italiana al convegno che si terrà nell'isola d'Elba . . . . . „ 549
Istituzione Giovanni Morelli in Bergamo.
Nomina della Commissione per l'esame dei lavori presentati pel concorso al premio dell'anno 1905 . . . . . „ 633
Legato Berruti . . . . . „ 632
Premio Bressa:
Programma del XV premio Bressa (1903-1906) . . . . „ 197
Nomina della 2ª Giunta per il XIV premio Bressa . . . „ 633
Premio Gautieri:
Programma del premio per la Letteratura . . . . . „ 102
Proposta di divisione del premio . . . . . „ 267
Relazione della Commissione per il premio Gautieri di Storia (triennio 1901-1903) . . . . . „ 268
Conferimento del premio per la Storia (triennio 1901-1903) „ 285
Elezione della Commissione per il conferimento del premio di Letteratura (triennio 1902-1904) . . . . . „ 315
Premio Pollini:
Programma . . . . . „ 198
Regolamento interno per il conferimento del premio Pollini „ 199
Sunti degli Atti verbali delle Classi Unite 267, 285, 632
Sunti degli Atti verbali delle Adunanze della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 1, 103, 124, 201, 286, 339, 431, 448, 491, 549, 615, 661, 829, 917, 1011.
Sunti degli Atti verbali delle Adunanze della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche . . . . . „ 79, 123, 196, 272, 315, 380, 444, 490, 533, 604, 634, 777, 900, 975, 1131.

Adriani (Gio. Battista) — V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Ferrero (Ermanno).
Aimonetti (Cesare) — Determinazioni di gravità relativa nel Piemonte eseguite nell'estate dell'anno 1904 coll'apparato pendolare di Sterneck . . . . . *Pag.* 918
Airaghi (Carlo) — Echinodermi miocenici dei dintorni di S. Maria Tiberina (Umbria) . . . . . „ 43
Allievo (Giuseppe) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un manoscritto del Dr. Augusto Bellotti, intitolato: *Empedocle* . . . . . „ 196
— Ritirasi dalla Commissione designata a giudicare la memoria del Prof. Augusto Bellotti su *Empedocle* . . . . . „ 445
— La nuova scuola pedagogica ed i suoi pronunciati . . „ 779
Almansi (Emilio) — Sull'equilibrio dei sistemi disgregati . . „ 939
Amaldi (Ugo) — V. Segre (Corrado) e Morera (Giacinto).
Arrhenius (Svante Augusto) — Eletto Socio corrispondente . „ 452
Balbi (Vittorio), Nicolis (Ugo) e Viriglio (Luigi) — Posizioni apparenti di stelle del Catalogo di Newcomb per il 1906 . „ 1106
Baudi di Vesme (Alessandro) — V. D'Ovidio (Enrico).
Bazzi (Francesco) — Brevi appunti in contributo alla storia dell'assedio di Verrua (1625) . . . . . „ 905
Bellotti (Augusto) — V. Allievo (Giuseppe).
Biàdego (Giuseppe) — Una falsa iscrizione intorno all'anfiteatro di Verona . . . . . „ 86
Bianchi (Luigi) — Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili . . . . . „ 714
Bobba (Romualdo) — Intorno il caso e la fortuna in Democrito „ 381
Böhtlingk (Otto v.) — V. D'Ovidio (Enrico).
Boggio (Tommaso) — Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore . . . . . „ 219
Camerano (Lorenzo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo scritto, intitolato: *Antonio Vallisneri e i moderni concetti intorno ai viventi* . . . . „ 287
— Delegato a rappresentare l'Accademia al convegno dell'Unione Zoologica italiana all'isola d'Elba . . . . . „ 549
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Dr. Luigi Cognetti de Martiis, intitolato: *Gli Oligocheti della regione neotropicale* . . . . . „ 917
— e Salvadori (Tommaso) — Relazione intorno alla memoria del Dr. Luigi Cognetti de Martiis, intitolata: *Gli Oligocheti della regione neotropicale* . . . . . „ 1139
Campetti (Adolfo) — Sulla dispersione dell'elettricità nei vapori di jodio . . . . . „ 55
— e Nozari (Mario) — Sulla variazione del grado di dissociazione elettrolitica colla temperatura . . . . . „ 177
Carbonelli (Giovanni) — Suppellettile di una busta da oculista scoperta a Sibari 427

Castellano (Filiberto) — Il birapporto di quattro punti nello spazio con applicazioni alla Geometria del Tetraedro . . *Pag.* 579
Cessi (Roberto) — Prigionieri illustri durante la guerra fra Scaligeri e Carraresi (1386) . . . . . „ 976
Chini (Mineo) — Sopra una particolare equazione differenziale del 1° ordine . . . . . „ 4
Cipolla (Carlo) — Presenta due facciate del manoscritto del *Messale Rosselli*, riprodotte dall'Ing. Molfese . . . . . „ 79
— Le case degli Scaligeri a Venezia . . . . . „ 273
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche una monografia del Dr. Pietro Gribaudi, intitolata: *La Geografia di S. Isidoro di Siviglia, contributo alla Storia della Geografia nel medioevo* . . . . . „ 901
— e Graf (Arturo) — Relazione intorno alla memoria del prof. Wendelin Foerster, intitolata: *Sull'autenticità dei codici d'Arborea* „ 446
— e Renier (Rodolfo) — Relazione intorno alla memoria del Dr. Pietro Gribaudi, intitolata: *La Geografia di S. Isidoro di Siviglia, contributo alla Storia della Geografia nel medioevo* . . . „ 1133
— V. De Sanctis (Gaetano) e Cipolla (Carlo).
— V. Ruffini (Francesco) e Cipolla (Carlo).
— V. De Sanctis (Gaetano), Cipolla (Carlo) e Savio (Fedele).
Cognetti de Martiis (Luigi) — V. Camerano (Lorenzo) e Salvadori (Tommaso).
Colini (Angelo) — Gli è conferito il premio Gautieri per la Storia (triennio 1901-1903) . . . . . „ 285
— Ringrazia pel conferitogli premio Gautieri 315, 339
Coolidge (J. L.) — Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe. IIe Note . „ 202
Cornu (Alfredo) — V. Volterra (Vito).
Corradi (Giuseppe) — Note sulla guerra tra Tolemeo Evergete e Seleuco Callinico . . . . . „ 805
Dastre (A.) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 452
De Sanctis (Gaetano) — Teodoro Mommsen - Commemorazione „ 81
— Relazione pel conferimento del premio Gautieri di storia (triennio 1901-1903) . . . . . „ 268
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Prof. Augusto Mancini, intitolato: *Sulla interpretazione e sulla fortuna dell'Egloga IV di Virgilio* . „ 635
— e Cipolla (Carlo) — Relazione sulla Memoria del Prof. Augusto Mancini, intitolata: *Sulla interpretazione e sulla fortuna dell'Egloga IV di Virgilio* . . . . . „ 915
— e Pezzi (Domenico) — Relazione sulla memoria presentata dal Dr. Angelo Taccone, intitolata: *Sophoclis tragoediarum locos melicos..... descripsit, de antistrophica responsione etc. disseruit A. T. (Aiax, Electra, Oedipus rex)* . . . . . „ 282
Donati (Mario) — Contributo allo studio delle formazioni limitanti il canale inguinale nell'uomo . . . . . „ 341

D'Ovidio (Enrico) — Comunica i telegrammi inviati ai Sovrani ed alla Regina Madre in occasione della nascita del Principe Ereditario e le risposte ricevute . . . . . *Pag.* 1, 79
— Comunica una lettera del Ministero dell'Istruzione Pubblica dell'Impero Germanico . . . . . „ 1, 79
— Partecipa l'invito del Comitato permanente del Congresso Botanico che si terrà in Vienna . . . . . „ 1
— Partecipa la morte del Socio corrispondente Emilio Villari e quella del Socio corrispondente Roberto Armando Philippi „ 1
— Comunica che i signori Alessandro Baudi di Vesme e Carlo Frati accettano di far parte della Commissione per la riproduzione fototipica del *Messale Rosselli* . . . . . „ 79
— Partecipa i decessi dei Soci stranieri Otto v. Böhtlingk e Enrico Wallon e del Socio corrispondente Luigi Palma di Cesnola „ 80
— Comunica la lettera di ringraziamento del Socio Icilio Guareschi per le onoranze resegli nell'occasione del 25° anno d'insegnamento 123, 124
— Comunica i ringraziamenti del Presidente dell' " Académie des inscriptions et belles-lettres „ dell'Istituto di Francia per le condoglianze inviate per la morte del Socio E. Wallon . 123, 124
— A nome del Socio Mosso presenta il volume 1° dei lavori del *Laboratoire scientifique international du Mont Rosa* e accenna all'importanza dei lavori contenuti . . . . . „ 339
— Annunzia un lavoro ms. pervenuto alla Presidenza, del sig. Niccolò Pizzarello, sul quale richiedesi il giudizio della Classe „ 340
— Ringrazia i Colleghi della Classe per i rallegramenti fattigli in occasione della sua nomina a Senatore del Regno . . „ 450
— Invia a nome della Classe rallegramenti per la nomina a Senatori del Regno ai Soci Volterra, Fergola e Righi . . „ 451
— Comunica le lettere di ringraziamento dei Soci Senatori Volterra, Fergola e Righi . . . . . „ 491
— Comunica i ringraziamenti per la loro nomina a Soci corrispondenti dei Proff. Goldschmidt, Wiesmann e Ostwald . . „ 491
— Presenta un numero del giornale *L'Ora* di Palermo, nel quale si rende conto delle onoranze tributate al Socio corrispondente Gemmellaro . . . . . „ 491
— Comunica le lettere di ringraziamento per la loro nomina a Soci corrispondenti dei sigg. Dastre, Hug, Levy, Engelmann, Arrhenius, Ray Lankester, Plitter, Suess . . . . . „ 549
— Annunzia la morte del Socio corrispondente Pietro Tacchini „ 549
— Comunica l'invito dell'Unione Zoologica italiana al convegno nell'isola d'Elba . . . . . „ 549
— Comunica l'invito al Congresso internazionale di Botanica che si terrà in Vienna . . . . . „ 549
— Comunica la lettera del Prof. S. Newcomb che ringrazia per la sua nomina a Socio corrispondente . . . . . „ 615

D'Ovidio (Enrico) — Partecipa che con R. Decr. 22 agosto 1904 l'Accademia è autorizzata ad entrare in possesso del lascito Berruti *Pag.* 632
— Partecipa la morte del Socio corrispondente Prof. Augusto Piccini „ 661
— Partecipa la morte del Socio corrispondente G. B. Adriani . „ 900
— Invia al Socio Allievo le condoglianze della Classe per la grave sventura che l'ha colpito . . . . . „ 975
— Dà il benvenuto a nome della Classe ai Soci Proff. C. Somigliana e R. Fusari . . . . . „ 1011
Engelmann (Teodoro Guglielmo) — Eletto Socio corrispondente „ 452
Ferrero (Efisio) e Nozari (Mario) — Sullo spettro di assorbimento delle soluzioni di allume di cromo . . . . . „ 453
Ferrero (Ermanno) — Presenta a nome della Classe congratulazioni al Presidente E. D'Ovidio per la sua nomina a Senatore „ 490
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Prof. Arturo Segre, intitolato: *La questione sabauda e gli avvenimenti politici e militari che prepararono la tregua di Vaucelles* . . . . . „ 634
— Gio. Batt. Adriani. Parole commemorative . . . . . „ 902
— e Manno (Antonio) — Relazione sulla memoria del Prof. Arturo Segre: *La questione sabauda e gli avvenimenti politici e militari che prepararono la tregua di Vaucelles* . . . . . „ 837
Festa (Enrico) — Osservazioni intorno agli Orsi dell'Ecuador . „ 186
Foà (Pio) — Contributo alla conoscenza dell'infiltrazione adiposa „ 65
Foerster (Wendelin) — V. Cipolla (Carlo) e Graf (Arturo).
Frati (Carlo) — V. D'Ovidio (Enrico).
Fubini (Guido) — Alcuni nuovi problemi, che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali . . . . „ 616
Fusari (Romeo) — Eletto Socio nazionale residente . . . . „ 451
— Ringrazia per la sua nomina a Socio . . . . . „ 1011
— Contributo allo studio delle terminazioni nervose nei muscoli striati dell'*Ammocoetes branchialis* . . . . . „ 1078
Gatti (Enrico) — Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona cilindrica retta . . . . . „ 732
Giambelli (Giovanni Zeno) — La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie . . . . . „ 1041
Giudice (Francesco) — Metodo di Newton perfezionato e nuovo metodo pel calcolo assintotico delle radici d'equazioni . „ 105
Gola (Giuseppe) — Sulla respirazione intramolecolare nelle piante palustri . . . . . „ 880
— V. Mattirolo (Oreste) e Camerano (Lorenzo).
Goldschmidt (Viktor) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 452
Graf (Arturo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un manoscritto del Socio corrispondente Prof. Wendelin Foerster, intitolato: *Sulla questione dell'autenticità dei codici d'Arborea* . . . . . „ 80
— V. Cipolla (Carlo) e Graf (Arturo).

Greco (Michele) — Sul calcolo della sezione e delle armature di una trave in cemento armato sottoposta a flessione retta semplice *Pag.* 507
Gribaudi (Pietro) — Vedi Cipolla (Carlo) e Renier (Rodolfo).
Guareschi (Icilio) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo lavoro, intitolato: *Sintesi di composti piridinici degli eteri chetonici coll'etere cianacetico in presenza dell'ammoniaca e delle amine* . . . . . „ 492
— Osservazioni sul " De arte illuminandi „ e sul Manoscritto Bolognese (Segreti per colori) . . . . . „ 663
— V. D'Ovidio (Enrico).
Guidi (Camillo) — Una proprietà degli archi elastici . . „ 967
Haug (Emilio) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 452
Hoff (Giacomo Enrico von 't) — Eletto Socio straniero . . „ 451
Issoglio (Giovanni) — Ossipiridine isomere dai β dichetoni . „ 493
— Di alcune nuove basi piridiniche . . . . . „ 1063
Jadanza (Nicodemo) — Esposizione finanziaria per il passato esercizio 1904, e bilancio preventivo per l'anno in corso . „ 632
— Nuovo metodo per determinare il rapporto diastimometrico in un cannocchiale distanziometro . . . . . „ 691
Kerbaker (Michele) — Eletto Socio nazionale non residente . „ 533
Lankester (Edwin Ray) — Eletto Socio corrispondente . . „ 452
Laura (Ernesto) — Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli, in un fluido incompressibile indefinito . . . . . „ 296
Levi (Attilio) — Appunti di lessicografia romanza . . . . „ 995
Levi (Beppo) — Punti doppî uniplanari delle superficie algebriche „ 139
Levi (Eugenio Elia) — Sulla struttura dei gruppi finiti e continui „ 551
Levy (Michele) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 452
Lincio (Gabriele) — Sul berillo di Vall'Antoliva e di Cosasca . „ 870
Lorenzoni (Giuseppe) — Eletto Socio nazionale non residente . „ 451
Mago (Umberto) — Osservazioni sul riassunto dato da Fozio dei Περσικά di Ctesia . . . . . „ 327
Mancini (Augusto) — V. De Sanctis (Gaetano) e Cipolla (Carlo).
Manno (Antonio) — V. Ferrero (Ermanno) e Manno (Antonio).
Martel (Edoardo) — V. Mattirolo (Oreste) e Parona (Carlo Fabrizio).
Mattirolo (Oreste) — Delegato a rappresentare l'Accademia al Congresso internazionale di botanica a Vienna 1, 549
— Presenta il volume: *Scritti botanici pubblicati nella ricorrenza centenaria della morte di Carlo Allioni* ed invita i Colleghi a visitare il busto in bronzo eretto in onore dell'insigne botanico „ 2
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Dr. Giovanni Negri, intitolato: *La vegetazione della Collina di Torino* . . . . . „ 125
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un manoscritto del Dr. Giuseppe Gola, intitolato: *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile* „ 340

Mattirolo (Oreste) — Rende conto del Congresso botanico internazionale di Vienna nel quale rappresentò l'Accademia . *Pag.* 1012
— e Camerano (Lorenzo) — Relazione intorno alla memoria presentata dal Dr. Giuseppe Gola, dal titolo: *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile* . . „ 487
— e Parona (Carlo Fabrizio) — Relazione intorno alla Memoria presentata dal Dr. Giovanni Negri, intitolata: *La vegetazione della Collina di Torino* . . . . . „ 312
— e Parona (Carlo Fabrizio) — Relazione intorno alla Memoria presentata dal Prof. E. Martel, intitolata: *Contribuzione all'Anatomia del fiore delle Ombrellifere* . . . . . „ 602
Momigliano (Attilio) — Perchè Don Rodrigo muore sul suo giaciglio? „ 636
Mocci (Antonio) — Documenti inediti sul canonista Paucapalea „ 316
Mommsen (Teodoro) — V. De Sanctis (Gaetano).
Morera (Giacinto) — Presenta una sua memoria da inserirsi nei volumi delle *Memorie* accademiche, intitolata: *Sull'attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni ellissoidali di seconda specie* „ 104
Mosso (Angelo) — Il male di montagna ed il vomito . . . „ 432
— V. D'Ovidio (Enrico).
Naccari (Andrea) — A nome dei Colleghi della Classe porge al Presidente Enrico D'Ovidio i rallegramenti per la nomina a Senatore del Regno . . . . . „ 450
— Comunica la relazione della 1ª Giunta per il XIV premio Bressa „ 633
— Emilio Villari. Commemorazione . . . . . „ 1014
Negri (Giovanni) — V. Mattirolo (Oreste) e Parona (Carlo Fabrizio).
Nernst (Walter) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 452
Newcomb (Simone) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 451
Nicolis (Ugo) — V. Balbi (Vittorio), Nicolis (Ugo) e Viriglio (Luigi).
Novarese (Vittorio) — La grafite nelle Alpi piemontesi . . „ 241
Nozari (Mario) — V. Campetti (Adolfo) e Nozari (Mario).
— V. Ferrero (Efisio) e Nozari (Mario).
Ostwald (Guglielmo) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 452
Palma di Cesnola (Luigi) — V. D'Ovidio (Enrico).
Panetti (Modesto) — Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche e sue applicazioni al calcolo di alcuni organi meccanici e dei serbatoi cilindrici . . . . . „ 349
Parona (Carlo Fabrizio) — Presenta a nome del Socio Oreste Mattirolo per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Prof. Edoardo Martel, intitolato: *Contribuzione all'Anatomia del fiore delle Ombrellifere* . . . . . „ 492
— V. Mattirolo (Oreste) e Parona (Carlo Fabrizio).
Patetta (Federico) — Una lettera concernente trattative per la pace tra i Guelfi ed i Ghibellini di Firenze . . . . . „ 605
Peano (Giuseppe) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Prof. Mario Pieri, intitolato: *Nuovi principî di Geometria proiettiva complessa* . „ 201
— V. Segre (Corrado) e Peano (Giuseppe).

Perazzo (Umberto) — Ricerche sulla variazione dell' " Hydrophilus piceus „ Linn. . . . . *Pag.* 885, 1089
Pezzi (Domenico) — V. De Sanctis (Gaetano) e Pezzi (Domenico).
Philippi (Roberto Armando) — V. D'Ovidio (Enrico).
Piccini (Augusto) — V. D'Ovidio (Enrico).
Piccinini (Galeazzo) — Azione del bromo sopra alcuni derivati non saturi . . . . . „ 463
Piolti (Giuseppe) — Sull'aplite di Cesana Torinese . . . . „ 114
Pivano (Silvio) — V. Ruffini (Francesco) e Cipolla (Carlo).
Pizzarello (Niccolò) — Su alcune esperienze di trasmissione senza fili di segnali a distanza . . . . . „ 531
— V. D'Ovidio (Enrico).
Ponzio (Giacomo) — Su alcuni nuovi acidi della serie oleica. Nota II: Acido 2,3-ipogeico; Nota III: Derivati dell'acido 2,3-oleico 263, 970
Prever (Pietro Lodovico) — Sulla fauna nummulitica della scaglia dell'Appennino centrale . . . . . „ 566
Renier (Rodolfo) — Presenta per l' inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche una dissertazione di metrica greca inviata all'Ufficio di Segreteria dal Dr. Angelo Taccone . „ 196
— Segnala il volume, dal Socio corrispondente G. Boffito mandato in dono all'Accademia: *La Quaestio de aqua et terra*, di Dante Alighieri . . . . . „ 634
— V. Cipolla (Carlo) e Renier (Rodolfo).
Rimondini (Filippo) — Sul calcolo approssimato degli integrali doppî „ 168
Ritter (Guglielmo) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 451
Roccati (Alessandro) — Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valli di S. Giacomo) . . . . . „ 747
Romano (Giacinto) — Gli è conferito il premio Gautieri per la storia (triennio 1901-1903) . . . . . „ 285
— Ringrazia pel conferitogli premio Gautieri 315, 339
Ruffini (Francesco) — Presenta per l' inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un manoscritto del Dr. Silvio Pivano, intitolato: *Lineamenti storici e giuridici della cavalleria medioevale* . . . . . „ 444
— e Cipolla (Carlo) — Relazione intorno alla memoria presentata dal Dr. Silvio Pivano: *Lineamenti storici e giuridici della cavalleria medioevale* . . . . . „ 659
Sacco (Federico) — Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino settentrionale e centrale . . . . . „ 126
Salvadori (Tommaso) — Delegato dalla Classe a rappresentare l'Accademia al convegno dell'Unione Zoologica italiana all'isola d' Elba . . . . . „ 549
— V. Camerano (Lorenzo) e Salvadori (Tommaso).
Sanvisenti (Bernardo) — Un giudizio nuovo su Cristóval de Castillejo ne' suoi rapporti coll'italianismo spagnuolo . . . . „ 94
Savio (Fedele) — V. De Sanctis (Gaetano), Cipolla (Carlo) e Savio (Fedele).

Segre (Arturo) — V. Ferrero (Ermanno) e Manno (Antonio).
Segre (Corrado) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del sig. Ugo Amaldi, intitolato: *I gruppi conformi reali nello spazio* . . . . . *Pag.* 830
— e Morera (Giacinto) — Relazione sulla memoria del Dr. Ugo Amaldi, intitolata: *I gruppi conformi reali nello spazio* . „ 974
— e Peano (Giuseppe) — Relazione sulla memoria del Prof. Mario Pieri: *Nuovi principî di Geometria projettiva complessa* . „ 378
Severi (Francesco) — Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard, della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . „ 288
— Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . „ 766
Severini (Carlo) — Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati . . . . . „ 853
— Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie di secondo ordine con valori prestabiliti in due punti dati . „ 1035
Soave (Marco) — Sulle sostanze proteiche del muscolo . . „ 831
Somigliana (Carlo) — Eletto Socio nazionale residente . . „ 451
— Ringrazia per la sua nomina a Socio . . . . . „ 1011
Spezia (Giorgio) — Contribuzioni di Geologia chimica. La pressione è chimicamente inattiva nella solubilità e ricostituzione del quarzo . . . . . „ 254
— Il dinamometamorfismo e la minerogenesi . . . . . „ 698
Suess (Francesco Edoardo) — Eletto Socio corrispondente . . „ 452
Tacchini (Pietro) — V. D'Ovidio (Enrico).
Taccone (Angelo) — Le fonti dell'episodio di Paride ed Enone in Quinto Smirneo . . . . . „ 534
— V. Renier (Rodolfo).
— V. De Sanctis (Gaetano) e Pezzi (Domenico).
Valmaggi (Luigi) — Tacitiana . . . . . „ 409
Villari (Emilio) — V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Naccari (Andrea).
Viriglio (Luigi) — V. Balbi (Vittorio), Nicolis (Ugo) e Viriglio (Luigi).
Vitali (Giuseppe) — Sulle funzioni integrali . . . . . „ 1021
Volterra (Vito) — A nome della signora Cornu, presenta in dono all'Accademia cinque volumi di lavori del Socio corrispondente Alfredo Cornu, e accenna all'importanza scientifica dei medesimi „ 448
Wallon (Enrico) — V. D'Ovidio (Enrico).
Weisman (Augusto) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 452
Zanotti Bianco (Ottavio) — I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia. Nota 2ª: Saigey e le variazioni della gravità . . . . . „ 18

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

ACADEMY
OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 1ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1904-905

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1904 - 20 Novembre	1904 - 27 Novembre
» - 4 Dicembre	» - 11 Dicembre
» - 18 »	1905 - 1º Gennaio
1905 - 8 Gennaio	» - 15 »
» - 22 »	» - 29 »
» - 5 Febbraio	» - 12 Febbraio
» - 19 »	» - 26 »
» - 5 Marzo	» - 12 Marzo
» - 19 »	» - 26 »
» - 2 Aprile	» - 9 Aprile
» - 16 »	» - 30 »
» - 7 Maggio	» - 14 Maggio
» - 21 »	» - 28 »
» - 11 Giugno	» - 18 Giugno
» - 25 »	» - 2 Luglio

Tip. Vincenzo Bona - Torino.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 20 Novembre 1904 . . . . . *Pag.* 1

Chini (Mineo) — Sopra una particolare equazione differenziale del 1° ordine . . . . . „ 4

Zanotti Bianco (Ottavio) — I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia. Nota 2ª: Saigey e le variazioni della gravità . . . . . „ 18

Airaghi (Carlo) — Echinodermi miocenici dei dintorni di S. Maria Tiberina (Umbria) . . . . . „ 43

Campetti (Adolfo) — Sulla dispersione dell'elettricità nei vapori di jodio . . . . . „ 55

Foà (Pio) — Contributo alla conoscenza dell'infiltrazione adiposa „ 65

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 27 Novembre 1904 . . . . . *Pag.* 79

De Sanctis (Gaetano) — Teodoro Mommsen - Commemorazione „ 81

Biàdego (Giuseppe) — Una falsa iscrizione intorno all'anfiteatro di Verona . . . . . „ 86

Sanvisenti (Bernardo) — Un giudizio nuovo su Cristóval de Castillejo ne' suoi rapporti coll'italianismo spagnuolo . . . . „ 94

Premii di Fondazione Gautieri . . . . . „ 102

Tip. Vincenzo Bona — Torino

OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 2ª E 3ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 4 Dicembre 1904 . . . . . *Pag.* 103

Giudice (Francesco) — Metodo di Newton perfezionato e Nuovo metodo pel calcolo assintotico delle radici d'equazioni . „ 105
Piolti (Giuseppe) — Sull'aplite di Cesana Torinese . . . . „ 114

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA dell'11 Dicembre 1904 . . . . . *Pag.* 123

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 18 Dicembre 1904 . . . . . *Pag.* 124

Sacco (Federico) — Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino settentrionale e centrale . . . . . „ 126
Levi (Beppo) — Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche „ 139
Rimondini (Filippo) — Sul calcolo approssimato degli integrali doppi „ 168
Campetti (A.) e Nozari (M.) — Sulla variazione del grado di dissociazione elettrolitica colla temperatura . . . . . „ 177
Festa (Enrico) — Osservazioni intorno agli Orsi dell'Ecuador . „ 186

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 1° Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 196

Programma per il XV premio Bressa . . . . . „ 197
Premio di Fondazione Pollini . . . . . „ 198
Regolamento interno per il conferimento del premio Pollini . „ 199

Tip. Vincenzo Bona — Torino

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XL, Disp. 4ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'8 Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 201

Coolidge (J. L.) — Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe. IIe Note . . „ 202

Boggio (Tommaso) — Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore . . . . . „ 219

Novarese (Vittorio) — La grafite nelle Alpi piemontesi . . . „ 241

Spezia (Giorgio) — Contribuzioni di Geologia chimica. La pressione è chimicamente inattiva nella solubilità e ricostituzione del quarzo . . . . . „ 254

Ponzio (Giacomo) — Su alcuni nuovi acidi della serie oleica. Nota II: Acido 2,3-ipogeico . . . . . „ 263

Classi Unite.

ADUNANZA del 15 Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 267

De Sanctis (Gaetano) — Relazione pel conferimento del premio Gautieri di storia (triennio 1901-1903) . . . . . „ 268

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 15 Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 272

Cipolla (Carlo) — Le case degli Scaligeri a Venezia . . . . „ 273

De Sanctis (Gaetano) — Relazione sulla memoria presentata dal Dr. Angelo Taccone, intitolata: *Sophoclis tragoediarum locos melicos..... descripsit, de antistrophica responsione etc. disseruit A. T. (Aiax, Electra, Oedipus rex)* . . . . . „ 282

Tip. Vincenzo Bona - Torino

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XL, Disp. 5ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classi Unite.

ADUNANZA del 22 Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 285

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 22 Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 286

Severi (Francesco) — Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard, della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . „ 288

Laura (Ernesto) — Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli, in un fluido incompressibile indefinito . . . . . „ 296

Mattirolo (Oreste) — Relazione intorno alla Memoria presentata dal Dr. Giovanni Negri, intitolata: *La vegetazione della Collina di Torino* . . . . . „ 312

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 29 Gennaio 1905 . . . . . *Pag.* 315

Mocci (Antonio) — Documenti inediti sul canonista Paucapalea . „ 316

Mago (Umberto) — Osservazioni sul riassunto dato da Fozio dei Περσικά di Ctesia . . . . . „ 327

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 6ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 5 Febbraio 1905 . . . . . *Pag.* 339

Donati (Mario) — Contributo allo studio delle formazioni limitanti il canale inguinale nell'uomo . . . . . „ 341

Panetti (Modesto) — Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche e sue applicazioni al calcolo di alcuni organi meccanici e dei serbatoi cilindrici . . . . . „ 349

Segre (Corrado) — Relazione sulla memoria del Prof. Mario Pieri: *Nuovi principî di Geometria projettiva complessa* . . . „ 378

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 12 Febbraio 1905 . . . . . *Pag.* 380

Bobba (Romualdo) — Intorno il caso e la fortuna in Democrito „ 381

Valmaggi (Luigi) — Tacitiana . . . . . „ 409

Carbonelli (Giovanni) — Suppellettile di una busta da oculista scoperta a Sibari . . . . . „ 427

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL. DISP. 7ª E 8ª. 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 19 Febbraio 1905 . . . . . *Pag.* 431
Mosso (Angelo) — Il male di montagna ed il vomito . . „ 432

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 26 Febbraio 1905 . . . . . *Pag.* 444
Cipolla (Carlo) — Relazione intorno alla memoria del prof. Wendelin Foerster, intitolata: *Sull'autenticità dei codici d'Arborea* . „ 446

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 5 Marzo 1905 . . . . . *Pag.* 448
Ferrero (E.) e Nozari (M.) — Sullo spettro di assorbimento delle soluzioni di allume di cromo . . . . . „ 453
Piccinini (Galeazzo) — Azione del bromo sopra alcuni derivati non saturi . . . . . „ 463
Mattirolo (Oreste) — Relazione intorno alla memoria presentata dal Dott. Giuseppe Gola, dal titolo: *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile* . . . . „ 487

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 12 Marzo 1905 . . . . . *Pag.* 490

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XL. Disp. 9ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 19 Marzo 1905 . . . . . *Pag.* 491

Issoglio (Giovanni) — Ossipiridine isomere dai β dichetoni . „ 493

Greco (Michele) — Sul calcolo della sezione e delle armature di una trave in cemento armato sottoposta a flessione retta semplice „ 507

Pizzarello (Niccolò) — Su alcune esperienze di trasmissione senza fili di segnali a distanza . . . . . „ 531

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 26 Marzo 1905 . . . . . *Pag.* 533

Taccone (Angelo) — Le fonti dell'episodio di Paride ed Enone in Quinto Smirneo . . . . . „ 534

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 10ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 2 Aprile 1905 . . . . . *Pag.* 549

Levi (Eugenio Elia) — Sulla struttura dei gruppi finiti e continui „ 551

Prever (Pietro Lodovico) — Sulla fauna nummulitica della scaglia dell'Appennino centrale . . . . . „ 566

Castellano (F.) — Il birapporto di quattro punti nello spazio con applicazioni alla Geometria del Tetraedro . . . . „ 579

Mattirolo (Oreste) — Relazione intorno alla Memoria presentata dal Prof. E. Martel, intitolata: *Contribuzione all'Anatomia del fiore delle Ombrellifere* . . . . . „ 602

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 9 Aprile 1905 . . . . . *Pag.* 604

Patetta (Federico) — Una lettera concernente trattative per la pace tra i Guelfi ed i Ghibellini di Firenze . . . . . „ 605

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 11ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 16 Aprile 1905 . . . . . *Pag.* 615

FUBINI (Guido) – Alcuni nuovi problemi, che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali . . . . „ 616

Classi Unite.

ADUNANZA del 30 Aprile 1905 . . . . . *Pag.* 632

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 30 Aprile 1905 . . . . . *Pag.* 634

MOMIGLIANO (Attilio) — Perchè Don Rodrigo muore sul suo giaciglio? „ 636

RUFFINI (Francesco) — Relazione intorno alla Memoria presentata dal Dr. Silvio PIVANO: *Lineamenti storici e giuridici della cavalleria medioevale* . . . . . „ 659

Tip. Vincenzo Bona — Torino.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 12ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 7 Maggio 1905 . . . . . *Pag.* 661

Guareschi (Icilio) — Osservazioni sul " De arte illuminandi „ e sul Manoscritto Bolognese (Segreti per colori) . . . . „ 663

Jadanza (Nicodemo) — Nuovo metodo per determinare il rapporto diastimometrico in un cannocchiale distanziometro . . . „ 691

Spezia (Giorgio) — Il dinamometamorfismo e la minerogenesi . „ 698

Bianchi (Luigi) — Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili . . . . . „ 714

Gatti (Enrico) — Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona cilindrica retta . . . . . „ 732

Roccati (Alessandro) — Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valli di S. Giacomo) . . . . . „ 747

Severi (Francesco) — Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica . „ 766

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 14 Maggio 1905 . . . . . *Pag.* 777

Allievo (Giuseppe) — La nuova scuola pedagogica ed i suoi pronunciati . . . . . „ 779

Corradi (Giuseppe) — Note sulla guerra tra Tolemeo Evergete e Seleuco Callinico . . . . . „ 805

Ferrero (Ermanno) — Relazione sulla memoria del Prof. Arturo Segre: *La questione sabauda e gli avvenimenti politici e militari che prepararono la tregua di Vaucelles* . . . . . „ 827

Tip. Vincenzo Bona — Torino

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 13ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 21 Maggio 1905 . . . . . *Pag.* 829

Soave (Marco) — Sulle sostanze proteiche del muscolo . . „ 831

Severini (Carlo) — Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo, con valori prestabiliti in punti dati . . . . . „ 853

Lincio (Gabriele) — Sul berillo di Vall'Antoliva e di Cosasca . „ 870

Gola (Giuseppe) — Sulla respirazione intramolecolare nelle piante palustri . . . . . „ 880

Perazzo (Umberto) — Ricerche sulla variazione dell' " Hydrophilus piceus „ Linn. Parte prima . . . . . „ 885

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 28 Maggio 1905 . . . . . *Pag.* 900

Ferrero (Ermanno) — Gio. Batt. Adriani. Parole commemorative „ 902

Bazzi (Francesco) — Brevi appunti in contributo alla storia dell'assedio di Verrua (1625) . . . . . „ 905

De Sanctis (Gaetano) — Relazione sulla Memoria del Prof. Augusto Mancini, intitolata: *Sulla interpretazione e sulla fortuna dell'Egloga IV di Virgilio* . . . . . „ 915

Tip. Vincenzo Bona - Torino

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL, DISP. 14ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'11 Giugno 1905 . . . . . *Pag.* 917

Aimonetti (Cesare) — Determinazioni di gravità relativa nel Piemonte eseguite nell'estate dell'anno 1904 coll'apparato pendolare di Sterneck 918

Almansi (Emilio) — Sull'equilibrio dei sistemi disgregati . . . „ 939

Guidi (Camillo) — Una proprietà degli archi elastici . . . . „ 967

Ponzio (Giacomo) — Su alcuni nuovi acidi della serie oleica. Nota III: Derivati dell'acido 2,3-oleico . . . . . „ 970

Segre (Corrado) — Relazione sulla Memoria del Prof. Ugo Amaldi, intitolata: *I gruppi conformi reali dello spazio* . . . . „ 974

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 18 Giugno 1905 . . . . . *Pag.* 975

Cessi (Roberto) — Prigionieri illustri durante la guerra fra Scaligeri e Carraresi (1386) 976

Levi (Attilio) — Appunti di lessicografia romanza . . . . „ 995

Tip. Vincenzo Bona — Torino

N. Y. ACADEMY
OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XL. DISP. 15ª, 1904-905.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1905

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 25 Giugno 1905 . . . . . *Pag.* 1011

NACCARI (Andrea) — Emilio Villari. Commemorazione . . . „ 1014

VITALI (Giuseppe) — Sulle funzioni integrali . . . . . „ 1021

SEVERINI (Carlo) — Sopra gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine con valori prestabiliti in due punti dati . . . . . „ 1035

GIAMBELLI (Giovanni Zeno) — La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie . . . . . „ 1041

ISSOGLIO (Giovanni) — Di alcune nuove basi piridiniche . . . „ 1063

FUSARI (Romeo) — Contributo allo studio delle terminazioni nervose nei muscoli striati di *Ammocoetes branchialis* . . . . „ 1078

PERAZZO (Umberto) — Ricerche sulla variazione dell'*Hydrophilus piceus* Linn. Parte II . . . . . „ 1089

BALBI, NICOLIS e VIRIGLIO — Posizioni apparenti di stelle del catalogo di Newcomb per il 1906 . . . . . „ 1106

CAMERANO (Lorenzo) — Relazione intorno alla Memoria del Dr. Luigi COGNETTI DE MARTIIS, intitolata: *Gli Oligocheti della regione neotropicale* . . . . . „ 1130

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 2 Luglio 1905 . . . . . *Pag.* 1131

CIPOLLA (Carlo) — Relazione sulla Memoria del Prof. Pietro GRIBAUDI, intitolata: *La Geografia di S. Isidoro di Siviglia. Contributo alla storia della Geografia nel medioevo* . . . . „ 1133

INDICE . . . . . „ 1134

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ino vol. 40

orino vol. 40

34-131784

5 1934

AMNH LIBRARY
100125236